Loesungen der Aktivierungselemente zu 1.5

1.55 Es gilt die Äquivalenzkette

$f:(M,\mathcal{T}_M)\to(N,\mathcal{T}_N)$ stetig

Def. Stetigkeit

$\Leftrightarrow \forall U\in\mathcal{T}_N: f^{-1}[U]\in\mathcal{T}_M$

$\Leftrightarrow \forall A$ abg. in N: $M\setminus f^{-1}[A]=f^{-1}[N\setminus A]\in\mathcal{T}_M$

Def. Abgeschlossenheit

$\Leftrightarrow \forall A$ abg. in N: $f^{-1}[A]$ abg. in M.

1.63 1. Zu zeigen ist: $\forall y\in M\setminus\{x\}\ \exists\varepsilon>0: U_\varepsilon(y)\subseteq M\setminus\{x\}$.

Gegeben $y\in M\setminus\{x\}$, nehmen wir $\varepsilon:=d(x,y)>0$.

Dann folgt $x\notin U_\varepsilon(y)$ wegen $d(x,y)=\varepsilon$, also $U_\varepsilon(y)\subseteq M\setminus\{x\}$. □

2. $\ker L$ ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}\subseteq W$, also abgeschlossen, da $L:V\to W$ stetig ist. □

3. S^2 ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\}$ unter der Normabbildung $\|\cdot\|_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, die stetig ist. □

1.65 1. Z.z.: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)\in M$:

$d(x,y)<\delta\Rightarrow d_i(x_i,y_i)<\varepsilon$. ($i\in\{1,\dots,n\}$ fixiert)

Beweis: Gegeben $\varepsilon>0$, nehmen wir $\delta:=\varepsilon$.

Seien $x,y\in M$ mit $d(x,y)<\delta$ gegeben. Dann folgt:

$d_i(x_i,y_i)\le\max\limits_{j=1,\dots,n} d_j(x_j,y_j)=d(x,y)<\delta=\varepsilon$. □

2. Gegeben i und $(x_1,\dots,x_n)\in M$, ist zu zeigen:

$\forall y,y'\in M_i: d(g_i(y),g_i(y'))=d_i(y,y')$.

Das folgt wegen

$$d(g_i(y),g_i(y'))=\max\{\overbrace{d_i(y,y')}^{\ge 0},\overbrace{\max_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} d_j(x_j,x_j)}^{=0}\}$$

$$=d_i(y,y').$$

1.69 Gegeben p, q, n, x wie angegeben, nehmen wir $i \in \{1,..,n\}$ mit $|x_i| = \|x\|_\infty$ und erhalten:

$$\|x\|_\infty^q = |x_i|^q \leq \sum_{j=1}^n |x_j|^q = \|x\|_q^q \text{, also } \|x\|_\infty \leq \|x\|_q.$$

Um $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ zu zeigen, unterscheiden wir 2 Fälle:

<u>1. Fall:</u> $x=0$. Dann ist $\|x\|_q = 0 = \|x\|_p$.

<u>2. Fall:</u> $x \neq 0$, also $\|x\|_p \neq 0$. Wir setzen $y := \frac{1}{\|x\|_p} x$,

also $\|y\|_p = 1$ und damit $1 = \|y\|_p^p = \sum_{j=1}^n \underbrace{|y_j|^p}_{\geq 0}$.

Insbesondere folgt $|y_j|^p \leq 1$ für alle j,

und daher $|y_j|^q = (|y_j|^p)^{\frac{q}{p}} \underset{\frac{q}{p}>1}{\leq} |y_j|^p$, (*)

also $\frac{\|x\|_q^q}{\|x\|_p^q} = \frac{1}{\|x\|_p^q} \sum_{j=1}^n |x_j|^q = \sum_{j=1}^n |y_j|^q \underset{\text{vgl. (*)}}{\leq} \sum_{j=1}^n |y_j|^p = 1$.

Das bedeutet $\|x\|_p \geq \|x\|_q$, wie zu zeigen war.

Schließlich gilt mit den Einheitsvektoren $e_j = (\delta_{jk})_{k=1,...,n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_p = \left\|\sum_{j=1}^n x_j e_j\right\|_p \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|_\infty} \underbrace{\|e_j\|_p}_{=1} \leq n\|x\|_\infty. \quad \square$$

1.72 Zu zeigen ist für $x \in \mathbb{K}^m$:

$$\|\underbrace{L_A(x)}_{=Ax}\|_2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 . \quad (*)$$

Es bezeichne a_i die i-te Zeile in A, also

$L_A(x) = Ax = (a_i x)_{i=1,...,n}$.

Mit Cauchy-Schwarz folgt:

$|a_i x| \leq \|a_i\|_2 \|x\|_2 \qquad (i=1,..,n)$,

$$\text{also } \|L_A(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |a_i x|^2 \leq \sum_{i=1}^n \|a_i\|_2^2 \|x\|_2^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2\right) \|x\|_2^2 .$$

Die Behauptung (*) folgt durch Wurzelziehen hieraus. $\square$

Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hier ist $\left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$, aber

$\|L_A\|_{\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2} = \|id\|_{\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2} = 1$, weil $\|id(x)\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{K}^2$. □

1.77 $\delta_j : \ell^p(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist linear.

Nach Lemma 1.67 4. ist daher nur zu zeigen:

$\exists c > 0 \ \forall f \in \ell^p(I, \mathbb{K}) : \|\delta_j(f)\| \leq C \|f\|_p$.

Das folgt so:

Wir setzen $C := 1$. Sei $f \in \ell^p(I, \mathbb{K})$. Dann folgt:

$|\delta_j(f)| = |f(j)| \leq \|f\|_p = C\|f\|_p$. □

1.78 1. ⇒ 2. Sei $f : \ell^p(I) \to \mathbb{K}$ stetig, $y = (f(e_j))_{j \in I}$

Dann gilt für alle $x = (x_j)_{j \in I} \in \ell^p(I)$:

$\sum_{j \in I} |x(j)\, y(j)| < \infty$ und $\sum_{j \in I} x(j)\, y(j) = f(x)$.

<u>Beweis</u>: Es sei $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von endlichen Mengen $I_n \subseteq I$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$.

Wir nehmen $\alpha_j \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha_j| = 1$ und $\alpha_j\, y(j) = |y(j)|$ für alle $j \in I$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{j \in I_n} |x(j)\, y(j)| = \sum_{j \in I_n} |x(j)|\, \alpha_j\, y(j) = \sum_{j \in I_n} |x(j)|\, \alpha_j\, f(e_j)$$

$$\underset{I_n \text{ endlich}}{=} f\left(\sum_{j \in I_n} |x(j)|\, \alpha_j\, e_j \right) \underset{f \text{ stetig}}{\leq} \|f\|_{\ell^p \to \mathbb{K}} \left\| \sum_{j \in I_n} |x(j)|\, \alpha_j\, e_j \right\|_p$$

$$\underset{|\alpha_j| = 1}{=} \|f\|_{\ell^p \to \mathbb{K}} \left(\sum_{j \in I_n} |x(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{\ell^p \to \mathbb{K}} \|x\|_p ,$$

folglich $\sum_{j\in I} |x(j)y(j)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz v. d. monotonen Konvergenz}}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in I_n} |x(j)y(j)| \le \underbrace{\|f\|_{\ell^p\to\mathbb{K}}}_{<\infty} \|x\|_p$

Es folgt:

$$\sum_{j\in I} x(j)y(j) \overset{\substack{\text{Satz v. d. dominierten Konv.}\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in I_n} x(j)y(j) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{wie oben}}}{=} \lim_{n\to\infty} \overbrace{f\Big(\sum_{j\in I_n} x(j)e_j\Big)}^{=:T_n}$$

Nun gilt $\|x - \sum_{j\in I_n} x(j)e_j\|_p = \Big(\sum_{j\in I\setminus I_n} |x(j)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[\uparrow]{n\to\infty} 0$

Satz v. d. dominierten Konvergenz mit Majorante $\sum_{j\in I} |x(j)|^p < \infty$

Mit der Stetigkeit von f folgt hieraus:

$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, d.h. $f(x) = \sum_{j\in I} x(j)y(j)$.

Mit der Dualitätsrelation zwischen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ (q konjugiert zu p) schließen wir:

$$\|y\|_q = \sup\Big\{\Big|\sum_{j\in I} x(j)y(j)\Big| \;\Big|\; x\in\ell^p(I,\mathbb{K}),\ \|x\|_p\le 1\Big\}$$

$$= \sup\{|f(x)| \mid x\in\ell^p(I,\mathbb{K}),\ \|x\|_p\le 1\} = \|f\|_{\ell^p\to\mathbb{K}} < \infty,$$

also $y\in\ell^q(I,\mathbb{K})$.

2.⇒1. Gelte $y\in\ell^q(I,\mathbb{K})$ und $\forall x\in\ell^p(I,\mathbb{K})$: $f(x) = \sum_{j\in I} x(j)y(j)$

Mit der Hölder-Ungleichung folgt für solche x:

$|f(x)| \le \|x\|_p \|y\|_q$. Weil f linear ist, folgt hieraus die Stetigkeit von f und $\|f\|_{\ell^p\to\mathbb{K}} \le \|y\|_q$. □

1.79 1. Kontraposition. Angenommen, wir haben ein $x\in M$ mit $f(x)\neq g(x)$.

Dann finden wir disjunkte Umgebungen U von $f(x)$ und V von $g(x)$, d.h. $U\cap V=\emptyset$, da $(N,\mathcal{T}_N)$ Hausdorffsch ist.

Weil f und g stetig sind, sind $f^{-1}[U]$ und $g^{-1}[V]$ Umgebungen von x bzgl. $\mathcal{T}_M$, also ist auch $W := f^{-1}[U]\cap g^{-1}[V]$ eine Umgebung von x.

Weil A dicht in M ist, finden wir ein $y \in A \cap W$.
Dann folgt $f(y) \in U$, $g(y) \in V$, also $f(y) \neq g(y)$ wegen $U \cap V \neq \emptyset$,
im Widerspruch zur Voraussetzung $f|_A = g|_A$. $\square$

2. $f-g$ ist stetig: Hierzu ist zu zeigen: Für alle $x \in M$ ist $B := \{ y \in M \mid |f(y)-g(y)-f(x)+g(x)| < \varepsilon \}$ eine Umgebung von x.
Weil f, g stetig in x sind, sind $f^{-1}[U_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))] =: U$ und $g^{-1}[U_{\frac{\varepsilon}{2}}(g(x))] =: V$ Umgebungen von x. Also ist auch $W := U \cap V$ eine Umgebung von x. Für alle $y \in W$ gilt
$$|f(y)-g(y)-f(x)+g(x)| \leq |f(y)-f(x)| + |g(y)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
also $W \subseteq B$. Also ist auch B eine Umgebung von x.
Damit ist gezeigt, dass $f-g$ stetig ist. Also ist
$N := \{ x \in M \mid f(x) > g(x) \} = (f-g)^{-1}[\mathbb{R}^+]$ offen, da $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ offen ist.
Wegen $\forall x \in A: f(x) \leq g(x)$ ist $N \cap A = \emptyset$, also $N = \emptyset$, da A dicht in M ist.
Das bedeutet $f \leq g$. $\square$