1.20 Es sei $f \in \mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$. Wir nehmen $j \in \{1,\dots,n\}$ mit $|f_j| = \max\{|f_k| \mid k = 1,\dots,n\}$.

Dann folgt: $\|f\|_\infty^p = |f_j|^p \le \sum_{k=1}^n |f_k|^p = \|f\|_p^p$, also auch

$$\|f\|_\infty = (\|f\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} \le (\|f\|_p^p)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

Umgekehrt:

$$\|f\|_p^p = \sum_{k=1}^n \underbrace{|f_k|^p}_{\le |f_j|^p = \|f\|_\infty^p} \le n \|f\|_\infty^p \text{, also}$$

$$\|f\|_p = (\|f\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \le (n \|f\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} = \underbrace{n^{\frac{1}{p}}}_{= \exp\left(\frac{1}{p}\log n\right) \xrightarrow[p\to\infty]{} e^0 = 1} \|f\|_\infty \xrightarrow{p\to\infty} \|f\|_\infty$$

Zusammen folgt $\|f\|_p \xrightarrow{p\to\infty} \|f\|_\infty$. $\square$

1.34 d_1 und d_2 sind Metriken: Seien $x, y, z \in M$

- <u>Nichtnegativität:</u>

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{a+d(x,y)} \ge 0 \text{, da } d(x,y) \ge 0 \text{ und } a + d(x,y) \ge a > 0.$$

$$d_2(x,y) \ge 0 \text{, da } d(x,y) \ge 0 \text{ und } a \ge 0.$$

- <u>Symmetrie:</u> $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{a+d(x,y)} \overset{\uparrow}{=} \dfrac{d(y,x)}{a+d(y,x)} = d_1(y,x)$

Symmetrie von d

$$d_2(x,y) = \min\{d(x,y), a\} \overset{d}{=} \min\{d(y,x), a\} = d_2(x,y)$$

- <u>Dreiecksungl.:</u>

$$d_1(x,z) = \frac{d(x,z)}{\underbrace{a + d(x,z)}_{>0}} \overset{\uparrow}{\le} \frac{d(x,y) + d(y,z)}{a + d(x,y) + d(y,z)}$$

$0 \le u \mapsto \dfrac{u}{a+u}$ mon. steigend in u,
$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

$$\le \frac{d(x,y)}{a + d(x,y) + \underbrace{d(y,z)}_{\ge 0}} \quad \frac{d(y,z)}{a + \underbrace{d(x,y)}_{\ge 0} + d(y,z)}$$

$$\leq \frac{d(x,y)}{a+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{a+d(y,z)} = d_1(x,y)+d_1(y,z)$$

$$d_2(x,z) = \min\{\underbrace{d(x,z)}_{\leq d(x,y)+d(y,z)},a\} \leq \min\{d(x,y)+d(y,z),a\}$$

$$\leq \min\{d(x,y),a\} + \min\{d(y,z),a\} = d_2(x,y)+d_2(y,z)$$

$\forall a,b,c \geq 0:\ \min\{b+c,a\} \leq \min\{b,a\} + \min\{c,a\}$

(denn: 1. Fall: Linke Seite $= a \Rightarrow b+c \geq a$

1.1. Fall: $\min\{b,a\} = a \Rightarrow$ rechte Seite $= a + \min\{c,a\} \geq a = l.S.$

1.2. Fall: $\min\{c,a\} = c \Rightarrow$ rechte Seite $= \min\{b,a\} + a \geq a = l.S.$

1.3. Fall: $\min\{b,a\} = b$ und $\min\{c,a\} = c \Rightarrow r.S. = b+c \geq a = l.S.$

2. Fall: $l.S. = b+c \Rightarrow b+c \leq a \Rightarrow b \leq a,\ c \leq a \Rightarrow r.S. = b+c = l.S.$)

- Selbstabstand 0: $d_1(x,x) = \frac{d(x,x)}{a+d(x,x)} = \frac{0}{a+0} = 0$

$d_2(x,x) = \min\{0,a\} = 0$

- Aus $d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{a+d(x,y)} = 0$ folgt $d(x,y) = 0$, also $x = y$.

Aus $d_2(x,y) = \min\{d(x,y),\underbrace{a}_{>0}\} = 0$ folgt $d(x,y) = 0$, also $x = y$.

Wir zeigen $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$, indem wir zeigen:

$$\mathcal{T}_d \underset{(A)}{\subseteq} \mathcal{T}_{d_1} \underset{(B)}{\subseteq} \mathcal{T}_{d_2} \underset{(C)}{\subseteq} \mathcal{T}_d$$

(A): Sei $U \in \mathcal{T}_d$, $x \in M$. Zu zeigen: $\exists \delta > 0: U_\delta^{d_1}(x) \subseteq U$.

Wegen $U \in \mathcal{T}_d$ finden wir $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon^d(x) \subseteq U$.

Wir setzen $\delta = \frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}$. Dann folgt für alle $y \in U_\delta^{d_1}(x)$:

$$\delta > d_1(x,y) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{a+\varepsilon} > \frac{d(x,y)}{a+d(x,y)} \Rightarrow \varepsilon > d(x,y) \Rightarrow y \in U_\varepsilon^d(x) \subseteq U.$$

$0 \leq u \mapsto \frac{u}{a+u}$ streng mon. steigend

(B): Sei $U \in \mathcal{T}_{d_1}$, $x \in M$. Zu zeigen: $\exists \delta > 0: U_\delta^{d_2}(x) \subseteq U$.

Wegen $U \in \mathcal{T}_{d_1}$ finden wir $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon^{d_1}(x) \subseteq U$.

Wir nehmen $\delta > 0$ so klein, dass $\frac{\delta}{\delta + a} < \varepsilon$ und $\delta < a$ gilt.
Dann folgt für alle $y \in U_\delta^{d_2}(x)$:
$\delta > d_2(x,y) = \min\{a, d(x,y)\} \Rightarrow d(x,y) < \delta$ wegen $\delta < a$.
$$\Rightarrow d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{a + d(x,y)} < \frac{\delta}{\delta + a} < \varepsilon \Rightarrow y \in U_\varepsilon^{d_1}(x) \subseteq U.$$

(c). Sei $U \in \mathcal{T}_{d_2}$, $x \in M$. Zu zeigen $\exists \delta > 0 : U_\delta^d(x) \subseteq U$.
Wegen $U \in \mathcal{T}_{d_2}$ finden wir $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon^{d_2}(x) \subseteq U$.
Wir nehmen $\delta := \min\{\varepsilon, a\} > 0$. Dann folgt für alle $y \in U_\delta^d(x)$:
$$\delta > d_2(x,y) = \min\{a, d(x,y)\} \underset{\delta \le a}{\Rightarrow} \delta > d(x,y) \underset{\delta \le \varepsilon}{\Rightarrow} \varepsilon > d(x,y) \Rightarrow y \in U_\varepsilon^d(x) \subseteq U.$$
$\square$

1.39 Sei $x \in M$. Dann gilt die Äquivalenzkette:
$x \in \partial N$
$\Leftrightarrow x \in \overline{N}$ und $x \in \overline{M \setminus N}$
$\Leftrightarrow x \in \overline{N}$ und $\forall A \supseteq M \setminus N$ abgeschlossen: $x \in A$
$\underset{\text{Komplementbildung rechts}}{\Leftrightarrow} x \in \overline{N}$ und $\forall U \subseteq N$ offen: $x \notin U$
$\underset{\text{Def. von } \mathring{N}}{\Leftrightarrow} x \in \overline{N}$ und $x \notin N^\circ$
$\Leftrightarrow x \in \overline{N} \setminus \mathring{N}$ Damit ist $\partial N = \overline{N} \setminus \mathring{N}$ gezeigt.

Weiter gilt die Äquivalenzkette:
$x \in M \setminus N^\circ$
$\Leftrightarrow \nexists U \subseteq N$ offen: $x \in U$
$\Leftrightarrow \forall U \subseteq N$ offen: $x \notin U$
$\underset{\text{Komplementbildung}}{\Leftrightarrow} \forall A \supseteq M \setminus N$ abgeschlossen: $x \in A$
$\Leftrightarrow x \in \overline{M \setminus N}$ Es folgt $M \setminus N^\circ = \overline{M \setminus N}$.
$\square$

1.40. Gegeben $x \in M$ und $N \subseteq M$, gilt die Äquivalenzkette

x ist Berührpunkt von N

$\Leftrightarrow x \in \overline{N}$

$\Leftrightarrow \forall A \supseteq N$ abgeschlossen: $x \in A$

$\Leftrightarrow \forall U \subseteq M \setminus N$ offen: $x \notin U$

Komplementbildung

$\Leftrightarrow \forall U$ offen: $(x \in U \Rightarrow U \nsubseteq M \setminus N)$

$\Leftrightarrow \forall U$ offen: $x \in U \Rightarrow U \cap N \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall U$ Umgebung von x: $U \cap N \neq \emptyset$

"$\Rightarrow$": Jede Umgebung U von x enthält eine offene Menge $U' \ni x$.

"$\Leftarrow$": Jede offene Menge $U \ni x$ ist eine Umgebung von x.

Weiter gilt die Äquivalenzkette

N ist dicht in M

$\Leftrightarrow \overline{N} = M$

$\Leftrightarrow \forall A \supseteq N$ abgeschlossen: $A = M$

$\Leftrightarrow \forall U \subseteq M \setminus N$ offen: $U = \emptyset$

Komplementbildung

$\Leftrightarrow \forall U \neq \emptyset$ offen: $U \nsubseteq M \setminus N$

Kontraposition

$\Leftrightarrow \forall U \neq \emptyset$ offen: $U \cap N \neq \emptyset$

1.41 1. Sei N abgeschlossen. Dann folgt

$$\overline{N} = \bigcap_{A \supseteq N \text{ abgeschlossen}} A = N$$

weil $A = N$ eine mögliche Wahl ist.

Gelte umgekehrt $\overline{N} = N$. Dann ist

$$N = \overline{N} = \bigcap_{A \supseteq N \text{ abg.}} A$$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

Es folgt $\overline{\overline{N}} \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{N} \text{ abgeschlossen als Durchschnitt abg. Mengen}}}{=} \overline{N}$.

2. Sei N offen. Dann ist

$$N^\circ = \bigcup_{U \subseteq N \text{ offen}} U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil } U = N \text{ eine mögliche Wahl ist}}}{=} N$$

Gelte umgekehrt $N^\circ = N$. Dann ist

$$N = N^\circ = \bigcup_{U \subseteq N \text{ offen}} U \quad \text{als Vereinigung offener Mengen offen.}$$

Es folgt

$$N^{\circ\circ} \underset{\substack{\uparrow \\ N^\circ \text{ offen als Vereinigung offener Mengen}}}{=} N^\circ \quad \square$$

1.42 $B_r^d(x)$ ist abgeschlossen:

Für $y \in M \setminus B_r^d(x)$, also $d(y,x) > r$, gilt nämlich für $\varepsilon := d(y,x) - r > 0$:

$U_\varepsilon^d(y) \subseteq M \setminus B_r^d(x)$, denn für $z \in U_\varepsilon^d(y)$ folgt:

$$d(z,x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungl.}}}{\geq} \underbrace{d(y,x)}_{= \varepsilon + r} - \underbrace{d(y,z)}_{< \varepsilon} > r.$$

Das bedeutet $y \notin \overline{B_r^d(x)}$. Es folgt $\overline{B_r^d(x)} = B_r^d(x)$; also ist $B_r^d(x)$ abgeschlossen.

Wegen $B_r^d(x) \supseteq U_r^d(x)$ folgt $B_r^d(x) \supseteq \bigcap_{A \supseteq U_r^d(x) \text{ abg.}} A = \overline{U_r^d(x)}$.

<u>Gegenbeispiel:</u> $M = \{0, 1\}$ mit Standardmetrik $d(x,y) = |x-y|$.

Dann gilt $B_1^d(0) = M \neq \{0\} = U_1^d(0) = \overline{U_1^d(0)}$.

1.43 1. $k+p^m\mathbb{Z} = \{x\in\mathbb{Z} \mid d_p(x,k) \le p^{-m}\} =$

$= \{x\in\mathbb{Z} \mid d_p(x,k) < p^{-m+1}\} = U^{d_p}_{p^{-m+1}}(k)$

ist offen.

Nun ist die Menge der Nebenklassen

$$\mathbb{Z}/_{p^m\mathbb{Z}} = \{l+p^m\mathbb{Z} \mid l\in\mathbb{Z}\} =$$
$$= \{l+p^m\mathbb{Z} \mid l=0,1,\dots,p^m-1\}$$

eine endliche Menge von paarweise disjunkten offenen Mengen, die $\mathbb{Z}$ überdecken.

Es folgt:

$\mathbb{Z}\setminus(k+p^m\mathbb{Z})$

ist die endliche Vereinigung der von $k+p^m\mathbb{Z}$ verschiedenen Nebenklassen $l+p^m\mathbb{Z}$, also offen. Das bedeutet: $k+p^m\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen. $\square$

2. Gegeben a wie angegeben und eine nichtleere offene Menge $U\subseteq\mathbb{Z}$, müssen wir $U\cap a\mathbb{Z}\neq\emptyset$ zeigen.

Wir nehmen $k\in U$ und $\varepsilon>0$ mit $U^{d_p}_{\varepsilon}(x)\subseteq U$. Wir nehmen $m\in\mathbb{N}$ so groß, dass $p^{-m+1}<\varepsilon$; das ist wegen $p^{-m+1}\xrightarrow{m\to\infty}0$ möglich.

Dann folgt $k+p^m\mathbb{Z} = U^{d_p}_{p^{-m+1}}(k) \subseteq U^{d_p}_{\varepsilon}(k) \subseteq U$

Es genügt also, $(k+p^m\mathbb{Z})\cap a\mathbb{Z}\neq\emptyset$ zu zeigen.

Hierzu nehmen wir $x,y\in\mathbb{Z}$ mit $xp^m+ya=1$; wegen ggT(p^m,a) ist das möglich. Dann folgt

$k+p^m\mathbb{Z} \ni k-kxp^m = k(1-xp^m) = kya \in \mathbb{Z}a$,

also $kya \in (k+p^m\mathbb{Z})\cap a\mathbb{Z}\neq\emptyset$. $\square$

1.46 Es sei $U \subseteq [0,1]$ sowohl offen als auch abgeschlossen in $[0,1]$.

Wir setzen $x := \sup \underbrace{\{y \in [0,1] \mid [0,y] \subseteq U \vee [0,y] \subseteq [0,1] \setminus U\}}_{=:M}$.

Wegen $0 \in M \subseteq [0,1]$ folgt $x \in [0,1]$. Wir dürfen o.B.d.A. $x \in U$ annehmen; sonst vertauschen wir die Rollen von U und $[0,1] \setminus U$.

Zu zeigen ist nun $U = [0,1]$.

Weil U offen in $[0,1]$ ist, finden wir $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \cap [0,1] \subseteq U$. Nach Definition von x finden wir ein $y \in M \cap]x-\varepsilon, x]$. Wegen $y \in U_\varepsilon(x) \cap [0,1] \subseteq U$ folgt $y \in U$, also $[0,y] \nsubseteq [0,1] \setminus U$ und daher $[0,y] \subseteq U$ nach Def. von M. Insbesondere folgt $[0,x] \subseteq U$ wegen $[0,x] = [0,y] \cup [y,x]$ und $[y,x] \subseteq U_\varepsilon(x) \cap [0,1] \subseteq U$.

Wir zeigen nun $x = 1$ indirekt.

Andernfalls nehmen wir $z \in]x,1] \cap U_\varepsilon(x)$ und erhalten $[y,z] \subseteq U_\varepsilon(x) \cap [0,1] \subseteq U$, also auch $[0,z] = [0,y] \cup [y,z] \subseteq U$. Das bedeutet $z \in M$, ein Widerspruch zu $z > x = \sup M$. Damit ist $x = 1$ indirekt gezeigt. Wir wissen nun $[0,1] = [0,x] \subseteq U$, also $U = [0,1]$, wie zu zeigen war. $\square$