Loesung zu dem Aktivierungselement in 1.2

zu Fussnote 4:

Gegeben $f, g$, ist zu zeigen: $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{K}) \Rightarrow \bar{f}g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{K})$.

Wegen $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{C}) \Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ genügt es, dafür zu zeigen: $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R}) \Rightarrow fg \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.

Wir dürfen sogar $f \geq 0$, $g \geq 0$ annehmen, denn mit den Abkürzungen $f_+ := \max\{f, 0\}$, $f_- := \max\{-f, 0\}$, analog für $g$, (punktweise gemeint) gilt $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R}) \Leftrightarrow f_+, f_- \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ und $fg = f_+g_+ - f_-g_+ - f_+g_- + f_-g_-$, was Riemann-integrierbar ist, wenn alle 4 Summanden Riemann-integrierbar sind.

Gegeben $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ mit $f, g \geq 0$ und $\varepsilon > 0$, nehmen wir $M, N \in \mathbb{R}^+$ mit $f \leq M$ und $g \leq N$.

Wir nehmen $f_1, f_2$ bzw. $g_1, g_2$ Treppenfunktionen mit

$0 \leq f_1 \leq f \leq f_2 \leq M$, $\quad 0 \leq g_1 \leq g \leq g_2 \leq N$ und

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2N}, \quad \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Dann sind $f_1g_1$ und $f_2g_2$ Treppenfunktionen mit

$0 \leq f_1g_1 \leq fg \leq f_2g_2 \leq MN$ und

$$f_2g_2 - f_1g_1 = \underbrace{f_2}_{\leq M}(g_2 - g_1) + (f_2 - f_1)\underbrace{g_1}_{\leq N}, \text{ also}$$

$$\int_a^b [f_2(x)g_2(x) - f_1(x)g_1(x)]\, dx \leq \int_a^b M\,(g_2(x) - g_1(x))\, dx + \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,N\, dx$$

$$\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2N} \cdot N = \varepsilon.$$

Damit ist $fg \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ gezeigt $\square$