1.7. Seien $x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$.

- Nichtnegativität: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\geq 0} \geq 0$, $\quad \|x\|_\infty = \max\{\underbrace{|x_i|}_{\geq 0} : i=1,\dots,n\} \geq 0$

- Homogenität: Für $\lambda\in\mathbb{K}$ gilt:

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|\lambda x_i|}_{=|\lambda||x_i|} = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda|\,\|x\|_1,$$

$$\|\lambda x\|_\infty = \max\{\underbrace{|\lambda x_i|}_{} : i=1,\dots,n\} \underset{|\lambda|\geq 0}{=} |\lambda| \max\{|x_i| : i=1,\dots,n\} = |\lambda|\,\|x\|_\infty.$$

- Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i+y_i|}_{\leq |x_i|+|y_i|} \leq \sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)$

$$= \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Dreiecksungl. in $\mathbb{K}$

Wir nehmen $j\in\{1,\dots,n\}$ mit $|x_j+y_j| = \max\{|x_i+y_i| : i=1,\dots,n\}$

Dann folgt:

$$\|x+y\|_\infty = |x_j+y_j| \underset{\text{Dreiecksungl. in }\mathbb{K}}{\leq} \underbrace{|x_j|}_{\leq\|x\|_\infty} + \underbrace{|y_j|}_{\leq\|y\|_\infty} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

nach Def. von $\|\cdot\|_\infty$

- Norm 0: Gilt $\|x\|_1 = 0$, also $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0$, so müssen alle Summanden gleich 0 sein, da sie ≥ 0 sind. Es folgt $x=0$.

Gilt $\|x\|_\infty = 0$, so folgt für alle $i=1,\dots,n$: $0\leq |x_i| \leq \|x\|_\infty = 0$, also $|x_i|=0$ und damit $x_i=0$, d.h. $x=0$. $\square$

1.9. Wir zeigen erst: $[a,b]\ni x \mapsto \|f(x)\|$ ist stetig.

Zu zeigen ist also:

$$\forall x\in[a,b]\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y\in[a,b]:\ (|x-y|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|<\varepsilon). \quad (*)$$

Es bezeichne $e_i = (0,\dots,\underset{\text{Stelle } i}{1},\dots,0)\in\mathbb{K}^n$ den i-ten kanonischen Einheitsvektor in $\mathbb{K}^n$, $(i\in\{1,\dots,n\})$.

Beweis zu $(*)$: Seien $x\in[a,b]$ und $\varepsilon>0$ gegeben.

Wegen der Stetigkeit aller f_i können wir zu jedem $i\in\{1,\dots,n\}$ ein $\delta_i>0$ wählen, so dass für alle $y\in U_{\delta_i}(x)\cap[a,b]$ gilt:

$$|f_i(y)-f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{n\|e_i\|}$$

(Man beachte $\|e_i\|>0$ wegen $e_i\neq 0$)

Wir setzen $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} > 0$. Nun sei $y \in [a,b]$ mit $|y - x| < \delta$ gegeben. Insbesondere gilt $|y-x| < \delta_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dann folgt: $|f_i(y) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{n \|e_i\|}$ (1) für alle $i \in \{1, \dots, n\}$,

also wegen $f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n (f_i(y) - f_i(x)) e_i$:

$$\|f(y) - f(x)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungl.}}}{\le} \sum_{i=1}^n \|(f_i(y) - f_i(x)) e_i\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Homogenität}}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{|f_i(y) - f_i(x)| \, \|e_i\|}_{< \frac{\varepsilon}{n} \text{ wg. } (1)}$$

$$< \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

Insbesondere ist $\int_a^b \|f(x)\| dx$ wohldefiniert.

Für alle $i = 1, \dots, n$ wissen wir

$$R_{n,i} := \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f_i\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b f_i(x)\, dx$$ (Konvergenz von Riemannsumme gegen Integral)

also

$$\left\| \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) - \int_a^b f(x) dx \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \left(R_{n,i} - \int_a^b f_i(x) dx\right) e_i \right\|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungl.,} \\ \text{Homogenität}}}{\le} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left| R_{n,i} - \int_a^b f_i(x) dx \right|}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0} \|e_i\| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Andererseits für $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) \right\| \overset{\substack{\text{Dreiecksungl., Homogenität} \\ \downarrow}}{\le} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\ge 0} \sum_{j=1}^n \left\| f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) \right\|$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b \|f(x)\| dx$$ (Konvergenz von Riemannsumme gegen Integral)

Es folgt zusammen für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungl.}}}{\le} \left\| \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) \right\| + \left\| \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) - \int_a^b f(x) dx \right\|$$

$$\le \underbrace{\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \left\| f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) \right\|}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b \|f(x)\| dx} + \underbrace{\left\| \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) - \int_a^b f(x) dx \right\|}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0} \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b \|f(x)\| dx$$

also $\left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\| \le \int_a^b \|f(x)\|\,dx$. $\square$

1.12 **Nichtnegativität:** Seien $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n) \in M$.

Dann folgt:

$$d(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} \underbrace{d_i(x_i,y_i)}_{\ge 0} \ge 0$$

Symmetrie: Mit x,y wie oben folgt:

$$d(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} \underbrace{d_i(x_i,y_i)}_{=d_i(y_i,x_i) \text{ wg. Symmetrie von } d_i} = \max_{i=1,\dots,n} d_i(y_i,x_i) = d(y,x).$$

Dreiecksungl.: Sei nun zusätzlich $z=(z_1,\dots,z_n)\in M$ gegeben.

Wir nehmen $j \in \{1,\dots,n\}$ mit $d_j(x_j,z_j) = \max_{i=1,\dots,n} d_i(x_i,z_i) = d(x,z)$.

Dann folgt:

$$d(x,z) = d_j(x_j,z_j) \overset{\text{Dreiecksungl. für } d_j}{\le} \underbrace{d_j(x_j,y_j)}_{\le d(x,y)} + \underbrace{d_j(y_j,z_j)}_{\le d(y,z)} \le d(x,y)+d(y,z).$$

wg. Def. von d

Selbstabstand 0: Mit x wie oben gilt:

$$d(x,x) = \max_{i=1,\dots,n} \underbrace{d_i(x_i,x_i)}_{=0, \text{ da } d_i \text{ Halbmetrik}} = 0$$

Nun seien zusätzlich alle d_i Metriken. Dann gilt für alle $x,y\in M$ mit $d(x,y)=0$:

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}: \quad 0 \overset{d_i \text{ nichtnegativ}}{\le} d_i(x_i,y_i) \overset{\text{Def. v. } d}{\le} d(x,y) \overset{\text{nach Annahme}}{=} 0, \quad \text{also } d_i(x_i,y_i)=0.$$

Es folgt $x_i=y_i$ für alle i, also $x=y$. $\square$