

Die wichtigsten Begriffe und Sätze auf einen Blick

Von Logik und Mengen über Vektorräume und Matrizen bis zu Determinanten und Eigenwerten – kompakt zum Nachschlagen und Wiederholen. Alle Aussagen ohne Beweis; die genauen Formulierungen stehen im Skript der Vorlesung. Hier ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, und $\mathbb{K}$ steht für einen Körper, meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1 Aussagenlogik und Quantoren

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \Rightarrow \psi$	$\phi \Leftrightarrow \psi$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Bindung und Tautologien Bindungsstärke von stark nach schwach: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Eine *Tautologie* ist bei jeder Belegung wahr; ψ folgt durch einen logischen Schluss aus $\phi_1, \dots, \phi_n$, wenn $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \Rightarrow \psi$ eine Tautologie ist.

Die wichtigsten Tautologien

- Modus ponens: $\phi \wedge (\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$ · Kontraposition: $(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\phi)$
- Widerspruchsbeweis: $(\neg\phi \Rightarrow \chi \wedge \neg\chi) \Rightarrow \phi$ · doppelte Verneinung: $\neg\neg\phi \Leftrightarrow \phi$
- De Morgan: $\neg(\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$ und $\neg(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$
- Implikation ausgeschrieben: $(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)$

Quantoren verneinen $\neg\forall x \in M : \phi(x) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg\phi(x)$ und $\neg\exists x \in M : \phi(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg\phi(x)$.

Bei mehreren Quantoren wird jeder umgedreht und die innere Aussage verneint: $\neg\forall x \exists y : \phi(x, y) \Leftrightarrow \exists x \forall y : \neg\phi(x, y)$. Die Reihenfolge verschiedener Quantoren darf nicht vertauscht werden.

2 Mengen, Relationen, Abbildungen

Mengenoperationen $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$, $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$, $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$, $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$, $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$. Für endliche Mengen: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ und $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

- Mengengleichheit zeigt man in zwei Richtungen: $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.
- De Morgan für Mengen: $\Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$, $\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$.

Vollständige Induktion Ist $\phi(1)$ wahr und gilt $\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\phi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Klassiker: $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$.

Äquivalenzrelation Eine Relation $\sim$ auf X heißt Äquivalenzrelation, wenn sie *reflexiv* ($x \sim x$), *symmetrisch* ($x \sim y \Rightarrow y \sim x$) und *transitiv* ($x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$) ist. Die Äquivalenzklassen $[x] = \{y : y \sim x\}$ zerlegen X in paarweise disjunkte Teilmengen.

Eigenschaften von Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ *injektiv*: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ · *surjektiv*: $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ · *bijektiv*: beides. f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Umkehrabbildung f^{-1} gibt mit $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$. Bild: $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$, Urbild: $f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$ – das Urbild existiert immer, auch ohne Umkehrabbildung.

3 Gruppen, Ringe, Körper

Gruppe, Ring, Körper Eine *Gruppe* $(G, *)$ hat eine assoziative Verknüpfung, ein neutrales Element e und zu jedem g ein Inverses g^{-1} ; *abelsch*, wenn zusätzlich $g * h = h * g$. Ein *Ring* $(R, +, \cdot)$ ist bzgl. $+$ eine abelsche Gruppe, $\cdot$ ist assoziativ, und es gelten die Distributivgesetze. Ein *Körper* ist ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$, in dem jedes Element $\neq 0$ ein multiplikatives Inverses hat.

- In jeder Gruppe sind e und Inverse eindeutig, und $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.
- Komplexe Zahlen: $i^2 = -1$, $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

4 Vektorräume, Basis, Dimension

Untervektorraum-Kriterium $U \subseteq V$ ist genau dann ein Untervektorraum, wenn $0 \in U$ und U abgeschlossen ist unter Addition und Skalarmultiplikation: $u, w \in U$, $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow u + w \in U$, $\lambda u \in U$.

Linear unabhängig, Erzeugendensystem, Basis $v_1, \dots, v_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Sie *erzeugen* V , wenn $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$. Eine *Basis* ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem; jeder Vektor hat dann eindeutige Koordinaten.

Dimension Alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums haben gleich viele Elemente, $\dim V$. In einem n -dimensionalen Raum sind n linear unabhängige Vektoren automatisch eine Basis, ebenso n erzeugende Vektoren. Jede linear unabhängige Familie lässt sich zu einer Basis ergänzen. Für Untervektorräume gilt $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

5 Lineare Abbildungen und Matrizen

Lineare Abbildung, Kern, Bild $f: V \rightarrow W$ heißt linear, wenn $f(u + v) = f(u) + f(v)$ und $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. Dann ist $f(0) = 0$, Kern $f = \{v : f(v) = 0\}$ und Bild $f = f(V)$ sind Untervektorräume, und f ist injektiv $\iff$ Kern $f = \{0\}$.

Dimensionsformel Für lineares $f: V \rightarrow W$ mit $\dim V < \infty$ gilt $\dim V = \dim \text{Kern } f + \dim \text{Bild } f$.
Folgerung: Für $\dim V = \dim W < \infty$ sind injektiv, surjektiv und bijektiv gleichwertig.

Matrixdarstellung Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder einer Basis festgelegt. Die Spalten der darstellenden Matrix sind die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren. Hintereinanderausführung entspricht dem Matrixprodukt; ein Basiswechsel ändert die Matrix zu $S^{-1}AS$ (bei gleicher Basis im Start- und Zielraum).

Rechenregeln für Matrizen

- AB ist nur definiert, wenn Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B ; im Allgemeinen ist $AB \neq BA$.
- $(AB)C = A(BC)$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- 2×2 -Inverse: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ für $ad-bc \neq 0$.
- Zeilenrang = Spaltenrang = $\dim \text{Bild } A =: \text{Rang } A$.

6 Lineare Gleichungssysteme

Lösbarkeit und Lösungsmenge $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{Rang } A = \text{Rang}(A|b)$. Ist x_p eine Lösung, so ist die Lösungsmenge $x_p + \text{Kern } A$. Der Kern hat die Dimension $n - \text{Rang } A$ (Anzahl der freien Variablen).

- Gauß-Algorithmus: Mit elementaren Zeilenumformungen (Zeilen tauschen, mit $\lambda \neq 0$ multiplizieren, Vielfaches einer Zeile addieren) auf Zeilenstufenform bringen. Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.
- Inverse berechnen: $(A|E) \rightsquigarrow (E|A^{-1})$ mit Zeilenumformungen. Klappt das nicht, ist A nicht invertierbar.

Invertierbarkeit – alles dasselbe Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind gleichwertig: A invertierbar $\iff \text{Rang } A = n$
 $\iff \text{Kern } A = \{0\}$ $\iff Ax = b$ ist für jedes b eindeutig lösbar $\iff$ die Spalten bilden eine Basis
 $\iff \det A \neq 0$.

7 Determinanten

- 2×2 : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. 3×3 : Regel von Sarrus (nur für 3×3 !).
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $\det A^T = \det A$, $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
- Dreiecksmatrix: Determinante = Produkt der Diagonaleinträge.
- Zeilenumformungen: Tauschen ändert das Vorzeichen, eine Zeile mit λ multiplizieren multipliziert $\det$ mit λ , Vielfaches einer Zeile addieren ändert nichts.
- Laplace-Entwicklung nach der i -ten Zeile: $\det A = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ (am besten nach einer Zeile mit vielen Nullen).
- Geometrisch: $|\det(v_1, \dots, v_n)|$ ist das Volumen des aufgespannten Parallelotops.

8 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwert, Eigenraum $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von A , wenn es $v \neq 0$ gibt mit $Av = \lambda v$. Der Eigenraum ist $\text{Kern}(A - \lambda E)$. Die Eigenwerte sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

Diagonalisierbarkeit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\mathbb{K}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren hat; dann ist $S^{-1}AS$ diagonal, wobei die Spalten von S die Eigenvektoren sind. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig; n verschiedene Eigenwerte reichen also. Allgemein: diagonalisierbar $\iff \chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert ist geometrische = algebraische Vielfachheit.

- Spur und Determinante: Spur $A = \sum \lambda_i$, $\det A = \prod \lambda_i$ (mit Vielfachheit, über $\mathbb{C}$).
- Reelle symmetrische Matrizen haben nur reelle Eigenwerte und sind orthogonal diagonalisierbar.

9 Skalarprodukt und Orthogonalität

- Standardskalarprodukt: $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$, Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.
- Orthonormalsystem: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Koordinaten bzgl. einer Orthonormalbasis: $v = \sum_i \langle v, e_i \rangle e_i$.
- Gram-Schmidt: $w_k = v_k - \sum_{i < k} \langle v_k, e_i \rangle e_i$, $e_k = w_k / \|w_k\|$.
- Orthogonale Matrizen: $Q^T Q = E$, also $Q^{-1} = Q^T$; sie erhalten Längen und Winkel, und $\det Q = \pm 1$.

10 Typische Stolperfallen

- $\phi \Rightarrow \psi$ ist nicht dasselbe wie $\psi \Rightarrow \phi$. Und eine Implikation mit falscher Prämisse ist wahr.
- Element oder Teilmenge? $1 \in \{1, 2\}$, aber $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$ und $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$.
- Ein Untervektorraum muss die 0 enthalten – $\{(x, y) : x + y = 1\}$ ist keiner.
- Lineare Unabhängigkeit über die Gleichung $\sum \lambda_i v_i = 0$ prüfen, nicht durch „sieht man“.
- Matrizenprodukt ist nicht kommutativ, und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ – Reihenfolge umdrehen.
- Die Regel von Sarrus gilt nur für 3×3 -Matrizen.
- Eigenvektoren sind nie der Nullvektor; der Eigenwert 0 ist dagegen erlaubt (dann ist A nicht invertierbar).