
Blatt 1 erklärt

Lineare Algebra für Informatiker

Aussagenlogik · Quantoren · Mengen

Ein Skript zum Selbststudium

Tutorium Donnerstag 14–16 Uhr · Wintersemester 2026/27

Mirkan

Worum es in diesem Skript geht

Dieses Skript habe ich für euch geschrieben, damit ihr Blatt 1 in Ruhe nacharbeiten könnt. Es ist ein freiwilliges Zusatzangebot von mir und keine offizielle Musterlösung der Vorlesung. Verbindlich sind immer das Skript und die Ankündigungen von Dr. Gerkmann. Ihr dürft es gern an Kommilitoninnen und Kommilitonen weitergeben.

So ist es aufgebaut: Zuerst kommt ein Werkzeugkasten mit allem, was ihr für das Blatt braucht. Danach jede Aufgabe mit genauer Aufgabenstellung, einer Idee, wie man anfängt, der ausführlichen Lösung und Beispielen und Gegenbeispielen. Am Ende stehen ein paar Aufgaben zum Selbsttest mit Lösungen.

Mein Tipp: Versucht jede Aufgabe erst selbst, bevor ihr die Lösung lest. Wenn ihr hängt, lest nur den Abschnitt „Wie fange ich an?“ und probiert es dann nochmal.

Inhaltsverzeichnis

1	Werkzeugkasten	3
1.1	Aussagen und Junktoren	3
1.2	Die Implikation verstehen	3
1.3	Quantoren	4
1.4	Mengen	5
1.5	Wie man eine Mengengleichung beweist	6
2	Aufgabe 1: Aussagen und Quantoren	7
3	Aufgabe 2: Mengengleichungen	11
3.1	(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	11
3.2	(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	14
3.3	(c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$	16
4	Aufgabe 3: Der Kriminalfall	18
4.1	Übersetzen: von Sprache zu Formeln	18
4.2	(a) Die Formeln	19
4.3	(b) Die Wahrheitstafel	19
4.4	Ein zweiter Weg: Schlussfolgern ohne Tabelle	20
5	Selbsttest	22
6	Lösungen zum Selbsttest	23

Werkzeugkasten

Aussagen und Junktoren

Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist, und zwar genau eins von beiden. „ $3 > 2$ “ ist eine Aussage (wahr), „7 ist gerade“ auch (falsch). „ $x > 2$ “ ist dagegen keine Aussage, solange man nicht weiß, was x ist. So etwas nennt man eine *Aussageform*: Erst wenn man für x etwas einsetzt, entsteht eine Aussage.

Aus Aussagen p und q baut man mit Junktoren neue Aussagen. Die Wahrheitswerte sind durch diese Tabelle festgelegt:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Zeichen	gelesen	Bedeutung
$\neg p$	nicht p	dreht den Wahrheitswert um
$p \wedge q$	p und q	nur wahr, wenn beide wahr sind
$p \vee q$	p oder q	wahr, wenn mindestens eins wahr ist
$p \Rightarrow q$	aus p folgt q	nur falsch, wenn p wahr und q falsch ist
$p \Leftrightarrow q$	p genau dann, wenn q	wahr, wenn beide denselben Wert haben

Achtung: das mathematische Oder

$p \vee q$ ist auch dann wahr, wenn p und q beide wahr sind. Im Alltag meint „oder“ oft „entweder oder“, in der Mathematik nie. Das ausschließende Oder müsste man extra hinschreiben, etwa als $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

Die Implikation verstehen

Die Implikation ist der Junktor, über den am Anfang fast alle stolpern. Am einfachsten versteht man sie als Versprechen.

Die Implikation als Versprechen

Ich sage zu euch: „Wenn ihr Blatt 1 abgibt, dann bekommt ihr Feedback.“

ihr gebt ab (p)	ihr bekommt Feedback (q)	habe ich mein Versprechen gehalten?	
ja	ja	ja	(w)
ja	nein	nein, gebrochen	(f)
nein	ja	ja, ich war nur nett	(w)
nein	nein	ja, ich habe nichts versprochen	(w)

Gebrochen ist das Versprechen nur in Zeile 2. Genau so ist $p \Rightarrow q$ definiert.

Zwei Folgerungen daraus, die ihr immer im Kopf haben solltet:

- Ist die Voraussetzung p falsch, dann ist $p \Rightarrow q$ automatisch wahr, egal was q ist. Zum Beispiel ist „ $1 > 2 \Rightarrow$ Der Mond ist aus Käse“ eine wahre Aussage.
- $p \Rightarrow q$ und $q \Rightarrow p$ sind *verschiedene* Aussagen. „Wenn es regnet, ist die Straße nass“ ist wahr. „Wenn die Straße nass ist, regnet es“ ist falsch, die Straße könnte auch nass sein, weil jemand den Gartenschlauch benutzt hat.

Merke: Kontraposition

$p \Rightarrow q$ ist gleichwertig zu $\neg q \Rightarrow \neg p$.

„Wenn es regnet, ist die Straße nass“ sagt dasselbe wie „Wenn die Straße trocken ist, regnet es nicht.“ Das braucht ihr in Aufgabe 3.

Für Informatiker

In Programmiersprachen gibt es meist keinen eigenen Operator für $\Rightarrow$, aber man kann ihn nachbauen:

$\neg p$	!p
$p \wedge q$	p && q
$p \vee q$	p q
$p \Rightarrow q$	!p q
$p \Leftrightarrow q$	p == q

Eine Wahrheitstafel ist dann nichts anderes als ein vollständiger Test über alle möglichen Eingaben. Bei zwei Variablen sind das $2^2 = 4$ Fälle, bei drei Variablen $2^3 = 8$.

Quantoren

Mit Quantoren macht man aus einer Aussageform $P(n)$ wieder eine Aussage.

	gelesen	wie man es beweist
$\exists n \in \mathbb{N} : P(n)$	Es gibt (mindestens) ein n , für das $P(n)$ gilt.	Ein einziges passendes Beispiel angeben und nachrechnen.
$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$	Für alle n gilt $P(n)$.	Ein beliebiges n nehmen und allgemein argumentieren. Beispiele reichen nicht.

Beim Widerlegen ist es genau umgekehrt: Eine Allaussage widerlegt man mit einem einzigen Gegenbeispiel. Eine Existenzaussage widerlegt man, indem man zeigt, dass *kein* n passt.

Merke: Verneinung von Quantoren

$$\neg(\forall n : P(n)) \iff \exists n : \neg P(n) \qquad \neg(\exists n : P(n)) \iff \forall n : \neg P(n)$$

„Nicht alle Studierenden sind müde“ heißt „Es gibt mindestens eine Person, die nicht müde ist.“

Es heißt *nicht* „Alle sind nicht müde.“

Für Informatiker

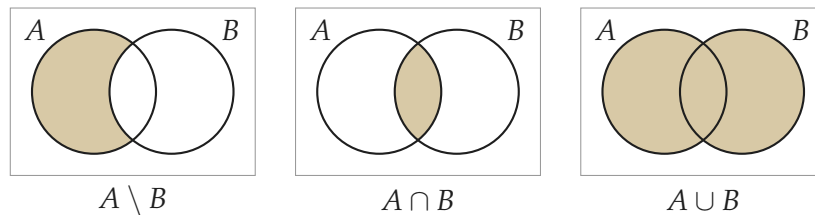
$\exists$ verhält sich wie eine Suche, die beim ersten Treffer abbricht, $\forall$ wie eine Schleife, die bei jedem Element prüfen muss. In Python entspricht das ungefähr `any(...)` und `all(...)`. Der Unterschied zur Mathematik: $\mathbb{N}$ ist unendlich, deshalb kann man ein $\forall$ nicht durch Ausprobieren beweisen, sondern braucht ein Argument.

Mengen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten, ihren *Elementen*. Ob ein Element mehrfach aufgeschrieben wird oder in welcher Reihenfolge, spielt keine Rolle: $\{1, 2, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

$x \in A$	x ist ein Element von A
$A \subseteq B$	jedes Element von A liegt auch in B , also $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$
$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, der Schnitt
$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, die Vereinigung
$A \setminus B$	$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$, die Differenz
$A \times B$	$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, alle geordneten Paare
$\mathcal{P}(A)$	$\{U \mid U \subseteq A\}$, die Menge aller Teilmengen von A

Die Verbindung zur Logik ist direkt sichtbar: $\cap$ gehört zu $\wedge$, $\cup$ zu $\vee$, und $\setminus$ zu „und nicht“. Deshalb kann man Mengengleichungen oft mit Logik beweisen.

**Achtung: $\in$ ist nicht $\subseteq$**

$\in$ verbindet ein Element mit einer Menge, $\subseteq$ verbindet zwei Mengen. Für $A = \{1, 2\}$ gilt:

$$1 \in A, \quad \{1\} \subseteq A, \quad \{1\} \notin A, \quad \{1\} \in \mathcal{P}(A), \quad \emptyset \subseteq A, \quad \emptyset \in \mathcal{P}(A).$$

Bei der Potenzmenge sind die Elemente selbst Mengen. Deshalb ist dort $\in$ das richtige Zeichen: $U \in \mathcal{P}(A)$ bedeutet $U \subseteq A$.

Wie man eine Mengengleichung beweist

Zwei Mengen M und N sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben. Das zeigt man fast immer in zwei Richtungen:

Die Beweisschablone

„ $\subseteq$ “: Sei $x \in M$ beliebig. [Definitionen auspacken, schließen] Also $x \in N$.

„ $\supseteq$ “: Sei $x \in N$ beliebig. [Definitionen auspacken, schließen] Also $x \in M$.

Aus $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ folgt $M = N$. □

„Sei x beliebig“ heißt: Über x darf man nichts annehmen außer dem, was in der Voraussetzung steht. Dann gilt das Argument für jedes Element gleichzeitig.

Manchmal geht es kürzer mit einer Kette von Äquivalenzen $x \in M \iff \dots \iff x \in N$. Dann muss aber jeder einzelne Schritt in *beide* Richtungen stimmen.

Achtung: Bilder sind keine Beweise

Venn-Diagramme sind sehr gut, um eine Gleichung zu verstehen oder zu vermuten. Als Beweis zählen sie nicht, weil sie nur eine bestimmte Lage der Mengen zeigen. Nutzt sie als Kompass, und schreibt den Beweis dann mit Elementen auf.

Aufgabe 1: Aussagen und Quantoren

Aufgabe 1

Für natürliche Zahlen x betrachten wir die drei Aussageformen

$$A(x) : „x \text{ ist eine Primzahl}“, \quad B(x) : „x \text{ ist gerade}“, \quad C(x) : „x > 2“.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

- (a) $B(2) \wedge C(3)$
- (b) $A(2) \Rightarrow C(1)$
- (c) $\exists n \in \mathbb{N} : (\neg A(n) \wedge \neg B(n) \wedge C(n))$
- (d) $\forall n \in \mathbb{N} : (B(n) \vee \neg B(n))$

Dabei gilt die Konvention der Vorlesung $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, also $0 \notin \mathbb{N}$.

Wie fange ich an?

Setzt zuerst die konkreten Zahlen ein und bestimmt die Wahrheitswerte der einzelnen Bausteine. Dann wendet ihr die Wahrheitstafel aus dem Werkzeugkasten an. Bei (c) und (d) fragt euch zuerst: Brauche ich ein Beispiel oder ein allgemeines Argument?

Zur Erinnerung: Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Insbesondere ist 1 *keine* Primzahl, und 2 ist die einzige gerade Primzahl.

(a) $B(2) \wedge C(3)$

$B(2)$: „2 ist gerade“. Das stimmt, also w.

$C(3)$: „3 > 2“. Das stimmt auch, also w.

Eine Und-Verknüpfung zweier wahrer Aussagen ist wahr. **Die Aussage ist wahr.**

Zum Vergleich: $B(3) \wedge C(3)$ wäre falsch, denn 3 ist nicht gerade. Für ein „und“ reicht ein einziger falscher Teil, damit das Ganze falsch wird.

(b) $A(2) \Rightarrow C(1)$

$A(2)$: „2 ist eine Primzahl“. Das stimmt, also w.

$C(1)$: „1 > 2“. Das ist falsch, also f.

Wir sind damit genau in der Zeile $w \Rightarrow f$ der Wahrheitstafel, und das ist die einzige Zeile, in der eine Implikation falsch ist. **Die Aussage ist falsch.**

In der Sprache des Versprechens: „Wenn 2 eine Primzahl ist, dann ist 1 > 2.“ Die Bedingung ist erfüllt, das Versprochene tritt aber nicht ein. Das Versprechen ist gebrochen.

Drei Varianten zum Vergleich

Aussage	links	rechts	gesamt	warum
$A(2) \Rightarrow C(1)$	w	f	f	die eine verbotene Zeile
$C(1) \Rightarrow A(2)$	f	w	w	Voraussetzung falsch
$C(1) \Rightarrow A(4)$	f	f	w	Voraussetzung falsch, Rest egal
$A(3) \Rightarrow C(3)$	w	w	w	beide wahr

Die zweite Zeile zeigt nebenbei, dass man bei einer Implikation die Seiten nicht vertauschen darf: Links und rechts getauscht, und aus f wird w.

(c) $\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n) \wedge \neg B(n) \wedge C(n)$

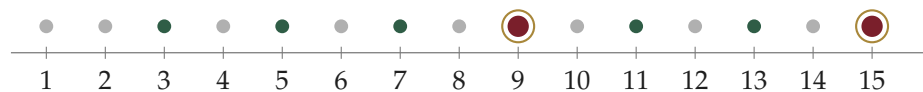
Zuerst übersetzen wir die Bedingung in normale Sprache. Gesucht ist eine natürliche Zahl n , die

- keine Primzahl ist ($\neg A(n)$),
- nicht gerade ist, also ungerade ($\neg B(n)$),
- größer als 2 ist ($C(n)$).

Es ist eine Existenzaussage. Wir müssen also nur *ein* passendes n finden. Am einfachsten probiert man der Reihe nach:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\neg A(n)$: keine Primzahl	✓			✓		✓		✓	✓	✓		✓		✓	✓
$\neg B(n)$: ungerade	✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓
$C(n)$: $n > 2$			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

• gerade oder 1 • ungerade Primzahl • ungerade, keine Primzahl, > 2



Wir wählen $n = 9$. Dann gilt:

- $\neg A(9)$ ist wahr, denn $9 = 3 \cdot 3$ ist eine Zerlegung mit zwei Faktoren größer als 1, also ist 9 keine Primzahl.
- $\neg B(9)$ ist wahr, denn $9 = 2 \cdot 4 + 1$ ist ungerade.
- $C(9)$ ist wahr, denn $9 > 2$.

Damit ist $\neg A(9) \wedge \neg B(9) \wedge C(9)$ wahr, und es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit der geforderten Eigenschaft. **Die Aussage ist wahr.**

Jede andere ungerade zusammengesetzte Zahl wäre genauso richtig: 15, 21, 25, 27, ... Man muss nicht die kleinste nehmen.

Typische Fehler bei (c)

- $n = 1$ als Antwort. 1 ist keine Primzahl und ungerade, aber $C(1)$ ist falsch.
- $n = 4$ oder $n = 6$. Das sind zwar keine Primzahlen, aber sie sind gerade.
- 9 für eine Primzahl halten. Ein kurzer Teilbarkeitstest hilft: $9 : 3 = 3$.
- Mehr beweisen als nötig. Für $\exists$ reicht ein Beispiel. Man muss nicht alle solchen Zahlen finden.

Für Informatiker

In Python könnte man die Suche so schreiben:

```
next(n for n in range(1, 100) if not prim(n) and n % 2 == 1 and n > 2)
```

Das Ergebnis wäre 9. Die Suche bricht beim ersten Treffer ab, genau wie der Beweis.

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : B(n) \vee \neg B(n)$

Hier ist es umgekehrt: Es ist eine Allaussage. Drei Beispiele ($n = 1, 2, 3$ funktionieren) beweisen gar nichts, weil es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Wir brauchen ein Argument, das für jede Zahl gleichzeitig funktioniert.

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: m ist gerade. Dann ist $B(m)$ wahr. Eine Oder-Aussage mit mindestens einem wahren Teil ist wahr, also ist $B(m) \vee \neg B(m)$ wahr.

Fall 2: m ist ungerade. Dann ist $B(m)$ falsch, also ist $\neg B(m)$ wahr. Wieder ist ein Teil der Oder-Aussage wahr, also ist $B(m) \vee \neg B(m)$ wahr.

Andere Fälle gibt es nicht. In beiden Fällen ist die Aussage wahr. Da m beliebig gewählt war, gilt sie für alle $n \in \mathbb{N}$. **Die Aussage ist wahr.**

Was hier eigentlich steht, ist: „Jede natürliche Zahl ist gerade oder nicht gerade.“ Das klingt banal, und das ist es auch. Es ist ein Spezialfall einer logischen Grundregel, dem *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*: Für jede Aussage p ist $p \vee \neg p$ wahr. Die Wahrheitstafel zeigt das sofort:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
w	f	w
f	w	w

Deshalb würde der Beweis genauso funktionieren, wenn B durch A oder C ersetzt wäre. Eine Aussage, die unabhängig von den Werten ihrer Bausteine immer wahr ist, nennt man *Tautologie*.

Beispiele und Gegenbeispiele rund um (d)

Aussage	Wert	Begründung
$\forall n : B(n) \vee \neg B(n)$	w	Tautologie, siehe oben
$\forall n : B(n)$	f	Gegenbeispiel $n = 1$: 1 ist nicht gerade
$\exists n : B(n)$	w	Beispiel $n = 2$
$\exists n : B(n) \wedge \neg B(n)$	f	$B(n) \wedge \neg B(n)$ ist für kein n wahr (Widerspruch)
$\forall n : A(n) \Rightarrow \neg B(n)$	f	Gegenbeispiel $n = 2$: Primzahl, aber gerade
$\forall n : (A(n) \wedge C(n)) \Rightarrow \neg B(n)$	w	Eine Primzahl > 2 ist ungerade, denn eine gerade Zahl > 2 hat den Teiler 2

Typische Fehler bei (d)

- Den „Beweis“ mit Beispielen führen: „Für $n = 1$ stimmt es, für $n = 2$ auch, also immer.“ Das ist kein Beweis.
- $\vee$ als „entweder oder“ lesen. Hier macht das zufällig keinen Unterschied, weil $B(n)$ und $\neg B(n)$ nie gleichzeitig wahr sind. In anderen Aufgaben schon.

Aufgabe 2: Mengengleichungen

Aufgabe 2

Seien A, B, C beliebige Mengen. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen.

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst mit einer Wahrheitstafel, dass für beliebige Aussagen φ und ψ die Äquivalenz $\neg(\varphi \vee \psi) \iff \neg\varphi \wedge \neg\psi$ gilt.

(c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Wie fange ich an?

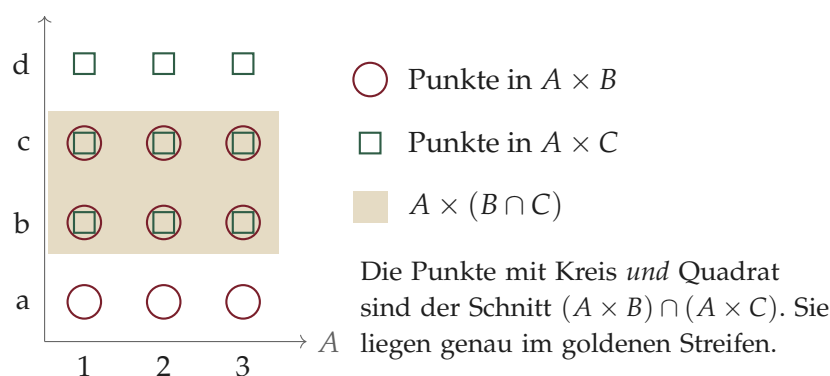
Schreibt die Schablone aus dem Werkzeugkasten hin: „Sei $x \in$ linke Seite beliebig.“ Dann packt ihr Schritt für Schritt die Definitionen aus, bis ihr bei der rechten Seite angekommen seid. Danach dasselbe in die andere Richtung. Wenn ihr die Gleichung nicht glaubt, rechnet sie zuerst an kleinen Beispielmengen nach.

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Erst verstehen: ein Bild

Das kartesische Produkt $A \times B$ kann man sich als Gitter vorstellen. Die Elemente von A stehen auf der waagrechten Achse, die von B auf der senkrechten, und jedes Paar (a, b) ist ein Gitterpunkt. Nehmen wir

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b, c\}, \quad C = \{b, c, d\}, \quad B \cap C = \{b, c\}.$$



Beide Seiten liefern hier dieselben sechs Paare:

$$\{(1, b), (2, b), (3, b), (1, c), (2, c), (3, c)\}.$$

Das Bild zeigt die Idee. Jetzt kommt der Beweis, der für beliebige Mengen gilt.

Was man für den Beweis braucht

- $x \in A \times B$ bedeutet: Es gibt $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = (a, b)$.
- Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten übereinstimmen:
 $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ und } b = b'$.

Beweis

Sei $M = A \times (B \cap C)$ und $N = (A \times B) \cap (A \times C)$.

„ $M \subseteq N$ “: Sei $x \in M$ beliebig. Nach Definition des kartesischen Produkts gibt es $a \in A$ und $b \in B \cap C$ mit $x = (a, b)$. Aus $b \in B \cap C$ folgt $b \in B$ und $b \in C$.

- Aus $a \in A$ und $b \in B$ folgt $x = (a, b) \in A \times B$.
- Aus $a \in A$ und $b \in C$ folgt $x = (a, b) \in A \times C$.

Also liegt x in beiden Mengen und damit im Schnitt: $x \in N$.

„ $N \subseteq M$ “: Sei $x \in N$ beliebig. Dann gilt $x \in A \times B$ und $x \in A \times C$.

- Wegen $x \in A \times B$ gibt es $a \in A, b \in B$ mit $x = (a, b)$.
- Wegen $x \in A \times C$ gibt es $a_1 \in A, c \in C$ mit $x = (a_1, c)$.

Es gilt also $(a, b) = x = (a_1, c)$. Zwei Paare sind nur gleich, wenn sie komponentenweise gleich sind, also $a = a_1$ und $b = c$. Damit ist $b \in B$ und $b = c \in C$, also $b \in B \cap C$. Zusammen mit $a \in A$ folgt $x = (a, b) \in A \times (B \cap C) = M$.

Aus beiden Inklusionen folgt $M = N$. □

Der Schritt, den fast alle überspringen

In der Richtung $N \subseteq M$ wissen wir am Anfang nur: x lässt sich als Paar mit zweiter Komponente in B schreiben, *und* als Paar mit zweiter Komponente in C . Dass es dieselbe zweite Komponente ist, steht nirgends. Das muss man über die Gleichheit von Paaren begründen. Wer gleich „ $x = (a, b)$ mit $b \in B$ und $b \in C$ “ schreibt, hat genau diesen Schritt weggelassen.

Gegenbeispiel: Wo man mit $\times$ vorsichtig sein muss

Für $\times$ und $\cap$ klappt das Ausmultiplizieren. Bei $\times$ und $\cup$ in beiden Faktoren gleichzeitig aber nicht:

$$(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D) \quad \text{im Allgemeinen.}$$

Nehmt $A = \{1\}$, $B = \{a\}$, $C = \{2\}$, $D = \{b\}$. Links stehen nur die zwei Paare $(1, a)$ und $(2, b)$. Rechts steht $\{1, 2\} \times \{a, b\}$ mit vier Paaren, darunter $(1, b)$, das links fehlt. Im Gitterbild: Zwei einzelne Punkte sind etwas anderes als ein ganzes Quadrat aus vier Punkten.

Für Informatiker

Elemente von $A \times B$ sind Tupel, wie (a, b) in Python. Zwei Tupel sind gleich, wenn sie an jeder Position gleich sind: $(1, 'b') == (1, 'b')$ ist `True`, $(1, 'b') == (1, 'c')$ ist `False`. Genau diese Eigenschaft benutzt der Beweis. Und $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, wie bei zwei verschachtelten Schleifen.

(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Schritt 1: Die De-Morgan-Regel per Wahrheitstafel

Wir zeigen: Für alle Aussagen φ, ψ gilt $\neg(\varphi \vee \psi) \iff \neg\varphi \wedge \neg\psi$. Dazu gehen wir alle vier möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten durch.

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \iff \neg\varphi \wedge \neg\psi$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

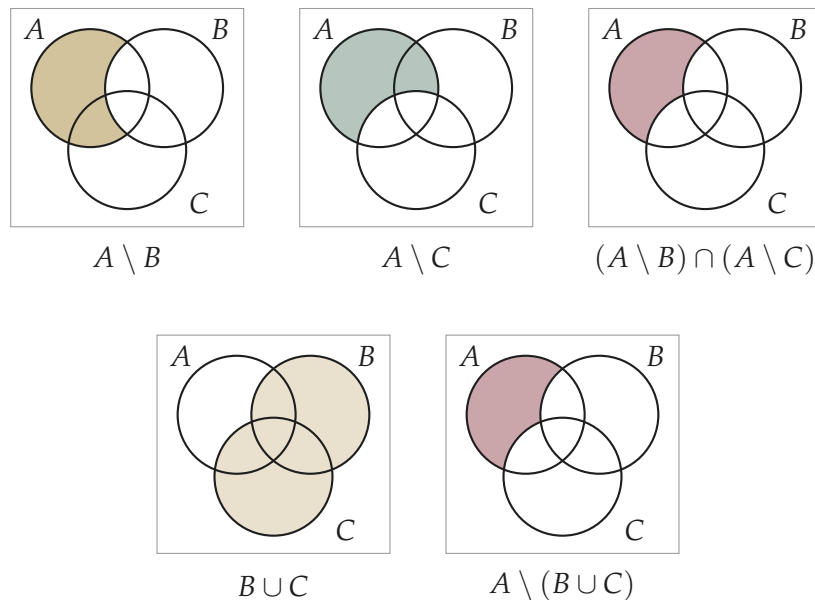
Die beiden goldenen Spalten stimmen in jeder Zeile überein. Deshalb steht in der letzten Spalte überall w, und die Äquivalenz gilt immer. In Worten:

De-Morgan-Regeln

$$\neg(\varphi \vee \psi) \iff \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \iff \neg\varphi \vee \neg\psi$$

„Es stimmt nicht, dass es regnet oder schneit“ heißt „Es regnet nicht *und* es schneit nicht.“
Beim Verneinen wird aus „oder“ ein „und“ und umgekehrt.

Schritt 2: Erst verstehen mit Venn-Diagrammen



Obere Reihe: Aus A wird einmal B weggenommen, einmal C , und der Schnitt der beiden Reste ist das, was weder in B noch in C liegt. Untere Reihe: Aus A wird $B \cup C$ auf einmal weggenommen. In beiden Fällen bleibt dieselbe bordeauxrote Fläche übrig, nämlich der Teil von A , der weder B noch C berührt.

Schritt 3: Der Beweis

Hier geht es elegant mit einer Kette von Äquivalenzen, weil jeder Schritt nur eine Definition oder eine logische Regel ist. Für jedes Objekt x gilt:

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus (B \cup C) &\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) && \text{Def. von } \setminus \\
 &\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) && \text{Def. von } \cup \\
 &\iff x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C) && \text{De Morgan} \\
 &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) && p \iff p \wedge p \\
 &\iff x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C && \text{Def. von } \setminus \\
 &\iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) && \text{Def. von } \cap
 \end{aligned}$$

Da diese Äquivalenz für jedes x gilt, haben beide Mengen dieselben Elemente. $\square$

Im vierten Schritt wird „ $x \in A$ “ einfach doppelt hingeschrieben. Das darf man, weil p und $p \wedge p$ immer denselben Wahrheitswert haben. Man macht das, um zwei Klammern zu bekommen, die jeweils genau eine Differenz beschreiben.

Mit konkreten Mengen nachrechnen

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}.$

Links: $B \cup C = \{1, 2, 3\}$, also $A \setminus (B \cup C) = \{4, 5\}.$

Rechts: $A \setminus B = \{3, 4, 5\}$ und $A \setminus C = \{1, 4, 5\}$, also $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{4, 5\}.$ Passt.

Gegenbeispiel: Schnitt und Vereinigung nicht verwechseln

Die ähnlich aussehende Gleichung $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ist *falsch*.

Nimmt $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1\}, C = \{2\}:$

$$A \setminus (B \cup C) = \{3\}, \quad (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{2, 3\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}.$$

Richtig ist dagegen die zweite De-Morgan-Regel für Mengen: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$ Der Beweis geht genau wie oben, nur mit $\neg(\varphi \wedge \psi) \iff \neg\varphi \vee \neg\psi.$

(c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Hier sind die Elemente der Mengen, über die wir reden, selbst Mengen. Das ist am Anfang ungewohnt. Deshalb zuerst ein Beispiel.

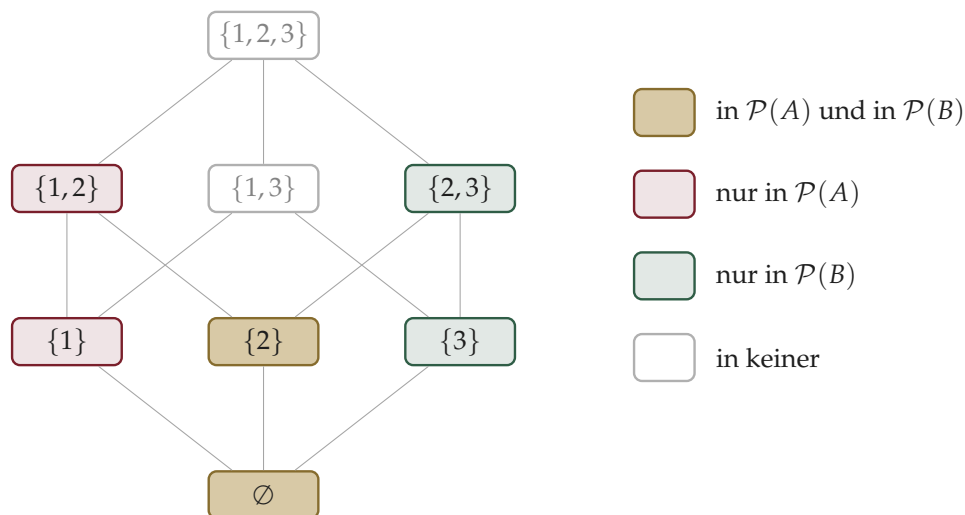
Erst verstehen: ein Beispiel mit Hasse-Diagramm

Sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3\}$, also $A \cap B = \{2\}$. Dann ist

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \quad \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}, \quad \mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset, \{2\}\}.$$

Der Schnitt $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ enthält genau die Mengen, die in beiden Listen vorkommen, also $\emptyset$ und $\{2\}$. Das ist dasselbe wie $\mathcal{P}(A \cap B)$.

Im folgenden Bild stehen alle Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$. Eine Linie bedeutet: Die untere Menge ist in der oberen enthalten, und es fehlt genau ein Element.



Die goldenen Kästchen sind $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, und das sind genau die Teilmengen von $\{2\} = A \cap B$.

Der Kern in einem Satz

Merke

Eine Menge U ist genau dann Teilmenge von $A \cap B$, wenn sie Teilmenge von A und Teilmenge von B ist.

Wenn man das verstanden hat, ist der Rest nur noch Übersetzen:

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff U \subseteq A \cap B \\ &\iff U \subseteq A \wedge U \subseteq B \\ &\iff U \in \mathcal{P}(A) \wedge U \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff U \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

Der mittlere Schritt ist aber nicht nur eine Definition. Den muss man begründen, und das macht der folgende Beweis.

Beweis

Sei $M = \mathcal{P}(A \cap B)$ und $N = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

„ $M \subseteq N$ “: Sei $U \in M$ beliebig, also $U \subseteq A \cap B$. Es gilt $A \cap B \subseteq A$, denn jedes Element von $A \cap B$ liegt insbesondere in A . Aus $U \subseteq A \cap B$ und $A \cap B \subseteq A$ folgt $U \subseteq A$, also $U \in \mathcal{P}(A)$. Genauso folgt aus $A \cap B \subseteq B$, dass $U \subseteq B$ und damit $U \in \mathcal{P}(B)$. Also $U \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = N$.

„ $N \subseteq M$ “: Sei $U \in N$ beliebig. Dann ist $U \in \mathcal{P}(A)$ und $U \in \mathcal{P}(B)$, also $U \subseteq A$ und $U \subseteq B$. Wir zeigen $U \subseteq A \cap B$. Dazu sei $x \in U$ beliebig. Wegen $U \subseteq A$ ist $x \in A$, und wegen $U \subseteq B$ ist $x \in B$. Also $x \in A \cap B$. Da $x \in U$ beliebig war, gilt $U \subseteq A \cap B$, das heißt $U \in \mathcal{P}(A \cap B) = M$.

Aus beiden Inklusionen folgt $M = N$. □

Beachtet, dass in der zweiten Richtung ein Beweis im Beweis steckt: Um $U \subseteq A \cap B$ zu zeigen, nimmt man wieder ein beliebiges Element $x \in U$. Teilmengenbeziehungen zeigt man immer über Elemente.

Gegenbeispiel: Mit $\cup$ klappt es nicht

$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ ist im Allgemeinen *falsch*. Nehmt $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$. Dann ist $\{1, 2\} \subseteq A \cup B$, also $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Aber $\{1, 2\}$ ist weder Teilmenge von A noch von B , liegt also nicht in $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Im Hasse-Diagramm oben, also mit $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3\}$, sieht man das auch: $\{1, 3\}$ und $\{1, 2, 3\}$ sind Teilmengen von $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, stehen aber grau da. Eine Menge, die Elemente aus beiden Mengen mischt, fällt durch das Raster. Es gilt nur die Inklusion $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Typische Fehler bei (c)

- $U \in A$ schreiben statt $U \subseteq A$. Fragt euch jedes Mal: Ist das ein Element oder eine Menge von Elementen?
- $\emptyset$ vergessen. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge, also liegt $\emptyset$ in jeder Potenzmenge.
- In der Richtung $N \subseteq M$ einfach „also $U \subseteq A \cap B$ “ schreiben, ohne das Elementargument.

Für Informatiker

Hat A genau n Elemente, dann hat $\mathcal{P}(A)$ genau 2^n Elemente. Jede Teilmenge entspricht einem Bitstring der Länge n : Das i -te Bit sagt, ob das i -te Element dabei ist. Für $A = \{1, 2, 3\}$ steht 101 für $\{1, 3\}$ und 000 für $\emptyset$. Der Schnitt zweier Teilmengen ist dann das bitweise $\&$, die Vereinigung das bitweise $|$.

Aufgabe 3: Der Kriminalfall

Aufgabe 3

In einem Kriminalfall gibt es drei Tatverdächtige X, Y und Z. Die Ermittlungen haben Folgendes ergeben:

- (i) Wenn X und Y nicht beide zugleich an der Tat beteiligt waren, dann ist auch Z außer Verdacht.
 - (ii) Wenn Y schuldig oder Z unschuldig ist, dann kann X nicht einer der Täter sein.
 - (iii) Weitere Personen sind sicher nicht beteiligt. Die Tat wurde also von mindestens einem der drei Verdächtigen begangen.
- (a) Wählen Sie drei Aussagen A , B , C so, dass sich (i), (ii) und (iii) als logische Verknüpfungen von A , B , C schreiben lassen, und geben Sie diese Verknüpfungen an.
- (b) Bestimmen Sie mit einer Wahrheitstafel, wer die Tat begangen hat.

Wie fange ich an?

Legt fest: A steht für „X ist schuldig“, B für „Y ist schuldig“, C für „Z ist schuldig“. Dann übersetzt ihr jeden Satz Stück für Stück: Was ist das „Wenn“, was ist das „Dann“? Bei drei Aussagen hat die Wahrheitstafel $2^3 = 8$ Zeilen.

Übersetzen: von Sprache zu Formeln

Bevor wir die Aufgabe lösen, eine kleine Übersetzungshilfe. Diese Formulierungen kommen in Aufgaben immer wieder vor.

Sprache	Formel	Bemerkung
p und q	$p \wedge q$	
p oder q	$p \vee q$	auch beide erlaubt
wenn p , dann q	$p \Rightarrow q$	
p nur dann, wenn q	$p \Rightarrow q$	nicht $q \Rightarrow p$
p genau dann, wenn q	$p \Leftrightarrow q$	
weder p noch q	$\neg p \wedge \neg q$	keiner von beiden
nicht beide zugleich	$\neg(p \wedge q)$	höchstens einer
mindestens einer	$p \vee q$	
genau einer	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	

„Nicht beide“ ist nicht „keiner“

$\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ sind verschiedene Aussagen. Testet es mit dem Fall „X schuldig, Y unschuldig“:

- Waren X und Y „nicht beide zugleich“ beteiligt? Ja, nur einer war es. Also ist $\neg(A \wedge B)$ hier wahr.
- Waren „beide unschuldig“? Nein. Also ist $\neg A \wedge \neg B$ hier falsch.

Nach De Morgan gilt $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$: „Mindestens einer von beiden war es nicht.“

(a) Die Formeln

Wir setzen

A : „X ist schuldig“, B : „Y ist schuldig“, C : „Z ist schuldig“.

	Wenn ...	dann ...	Formel
(i)	X und Y waren nicht beide beteiligt: $\neg(A \wedge B)$	Z ist unschuldig: $\neg C$	$\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg C$
(ii)	Y ist schuldig oder Z ist unschuldig: $B \vee \neg C$	X ist unschuldig: $\neg A$	$(B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A$
(iii)	mindestens einer der drei war es		$A \vee B \vee C$

(b) Die Wahrheitstafel

Wir schreiben alle acht Belegungen systematisch auf, wie beim Binärzählen (w als 1, f als 0, von 111 bis 000). Dann rechnen wir erst die Hilfsspalten aus und danach die drei Aussagen.

Nr.	A	B	C	$\neg(A \wedge B)$	$B \vee \neg C$	$\neg A$	(i)	(ii)	(iii)
1	w	w	w	f	w	f	w	f	w
2	w	w	f	f	w	f	w	f	w
3	w	f	w	w	f	f	f	w	w
4	w	f	f	w	w	f	w	f	w
5	f	w	w	w	w	w	f	w	w
6	f	w	f	w	w	w	w	w	w
7	f	f	w	w	f	w	f	w	w
8	f	f	f	w	w	w	w	w	f

Rot markiert ist jeweils die Aussage, an der eine Zeile scheitert. Nur Zeile 6 übersteht alle drei

Bedingungen.

Eine Zeile ausführlich: Zeile 1

A, B, C sind alle wahr.

- (i): $A \wedge B$ ist w, also $\neg(A \wedge B)$ f. Die Voraussetzung der Implikation ist falsch, also ist (i) w.
- (ii): B ist w, also $B \vee \neg C$ w. Die Folgerung $\neg A$ ist f. Das ist die Zeile $w \Rightarrow f$, also ist (ii) f.
- (iii): mindestens einer ist schuldig, also w.

Zeile 1 scheitert an (ii). „Alle drei waren es“ ist also ausgeschlossen.

In Zeile 6 sind (i), (ii) und (iii) gleichzeitig wahr, und das ist die einzige solche Zeile. Dort ist A falsch, B wahr und C falsch.

Y ist der Täter. X und Z sind unschuldig.

Probe mit den Originalsätzen:

- (i) X und Y waren nicht beide beteiligt (nur Y). Dann muss Z unschuldig sein. Stimmt.
- (ii) Y ist schuldig, also muss X unschuldig sein. Stimmt.
- (iii) Mindestens einer war es, nämlich Y. Stimmt.

Ein zweiter Weg: Schlussfolgern ohne Tabelle

Die Tabelle ist sicher, aber man kann den Fall auch wie ein Detektiv lösen. Dazu braucht man die Kontraposition aus dem Werkzeugkasten.

1. (i) umdrehen (Kontraposition): Aus $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg C$ wird $C \Rightarrow A \wedge B$. „Wenn Z schuldig ist, dann sind X und Y beide schuldig.“

2. Angenommen, Z ist schuldig. Nach Schritt 1 sind dann X und Y schuldig. Weil Y schuldig ist, ist die Voraussetzung von (ii) erfüllt, also wäre X unschuldig. Widerspruch, X kann nicht schuldig und unschuldig sein. **Also ist Z unschuldig.**

3. Z ist unschuldig, also ist $\neg C$ wahr und damit auch $B \vee \neg C$. Nach (ii) ist dann **X unschuldig.**

4. X und Z sind unschuldig. Nach (iii) war es mindestens einer, also **war es Y.**

Schritt 2 ist ein *Widerspruchsbeweis*: Man nimmt das Gegenteil an und zeigt, dass daraus Unsinn folgt. Diese Beweistechnik werdet ihr im Semester noch oft sehen.

Typische Fehler bei Aufgabe 3

- (i) als $\neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg C$ übersetzen. Dann kommt am Ende keine eindeutige Lösung heraus.
- (ii) falsch herum aufschreiben, also $\neg A \Rightarrow (B \vee \neg C)$. Was hinter „wenn“ steht, kommt links vom Pfeil.
- Bei den Implikationen die Zeilen mit falscher Voraussetzung als f werten.
- (iii) als „genau einer“ lesen. Dass es genau einer ist, kommt erst als Ergebnis heraus, es steht nicht in der Aufgabe.
- Zeilen vergessen. Mit dem Binärzahl-Schema 111, 110, ..., 000 passiert das nicht.

Für Informatiker

Die Wahrheitstafel ist ein Brute-Force über alle Belegungen:

```
for A in (True, False):
    for B in (True, False):
        for C in (True, False):
            i    = (not (not (A and B))) or (not C)
            ii   = (not (B or not C)) or (not A)
            iii  = A or B or C
            if i and ii and iii: print(A, B, C)
```

Ausgabe: False True False. Für drei Variablen ist das schnell. Bei n Variablen sind es 2^n Zeilen, deshalb ist das Schlussfolgern aus dem zweiten Weg bei größeren Problemen oft die bessere Methode.

Selbsttest

Hier ein paar Aufgaben im Stil von Blatt 1, mit denen ihr prüfen könnt, ob ihr alles verstanden habt. Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite. Es gelten dieselben $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ wie in Aufgabe 1.

Selbsttest 1: Wahr oder falsch?

Begründet jeweils kurz.

- (a) $C(2) \Rightarrow A(4)$
- (b) $\exists n \in \mathbb{N} : A(n) \wedge B(n)$
- (c) $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow \neg B(n)$
- (d) $\neg(\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n) \wedge \neg B(n) \wedge C(n))$. Formt die Aussage zuerst so um, dass kein $\neg$ mehr vor dem Quantor steht.

Selbsttest 2: Noch eine Mengengleichung

Beweist für beliebige Mengen A , B , C :

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Selbsttest 3: Wahrheitstafel

Zeigt mit einer Wahrheitstafel, dass $p \Rightarrow q$ und $\neg q \Rightarrow \neg p$ gleichwertig sind, $p \Rightarrow q$ und $q \Rightarrow p$ aber nicht.

Selbsttest 4: Übersetzen

Übersetzt mit A , B , C wie in Aufgabe 3:

- (a) Genau einer von X und Y ist schuldig.
- (b) Z ist nur dann schuldig, wenn auch X schuldig ist.
- (c) Weder X noch Z war beteiligt.

Selbsttest 5: Potenzmengen

Sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3\}$. Bestimmt $\mathcal{P}(A \cup B)$ und $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Wie viele Elemente haben die beiden Mengen? Welche Elemente liegen nur in einer von beiden?

Lösungen zum Selbsttest

Selbsttest 1

- (a) **Wahr.** $C(2)$, also $2 > 2$, ist falsch. Bei falscher Voraussetzung ist eine Implikation immer wahr. Dass $A(4)$ ebenfalls falsch ist, spielt keine Rolle.
- (b) **Wahr.** $n = 2$ ist eine Primzahl und gerade.
- (c) **Falsch.** Gegenbeispiel $n = 2$: $A(2)$ ist wahr, $\neg B(2)$ ist falsch, also ist die Implikation für $n = 2$ falsch. Ein einziges Gegenbeispiel genügt, um eine Allaussage zu widerlegen.
- (d) **Falsch.** Mit den Regeln zur Verneinung von Quantoren und De Morgan:

$$\neg(\exists n : \neg A(n) \wedge \neg B(n) \wedge C(n)) \iff \forall n : A(n) \vee B(n) \vee \neg C(n).$$

In Worten: „Jede natürliche Zahl ist prim, gerade oder höchstens 2.“ Das ist falsch, Gegenbeispiel $n = 9$. Das passt zu Aufgabe 1(c): Dort war die nicht verneinte Aussage wahr.

Selbsttest 2

„ $\subseteq$ “: Sei $x \in A \times (B \cup C)$. Dann $x = (a, b)$ mit $a \in A$ und $b \in B \cup C$. Ist $b \in B$, dann $x \in A \times B$. Ist $b \in C$, dann $x \in A \times C$. In jedem Fall $x \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

„ $\supseteq$ “: Sei $x \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Ist $x \in A \times B$, dann $x = (a, b)$ mit $a \in A, b \in B \subseteq B \cup C$. Ist $x \in A \times C$, dann $x = (a, c)$ mit $a \in A, c \in C \subseteq B \cup C$. In jedem Fall $x \in A \times (B \cup C)$. $\square$

Anders als bei 2(a) braucht man hier keine Gleichheit von Paaren, dafür aber eine Fallunterscheidung, weil ein „oder“ auftaucht.

Selbsttest 3

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$q \Rightarrow p$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	w	w	w	w

Die goldenen Spalten stimmen überein, die Kontraposition ist also gleichwertig. Die letzte Spalte weicht in Zeilen 2 und 3 ab, die Umkehrung ist also etwas anderes.

Selbsttest 4

- (a) $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$, gleichwertig auch $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
- (b) $C \Rightarrow A$. „Nur dann, wenn“ zeigt auf die Folgerung.
- (c) $\neg A \wedge \neg C$, gleichwertig $\neg(A \vee C)$

Selbsttest 5

$A \cup B = \{1, 2, 3\}$, also hat $\mathcal{P}(A \cup B)$ genau $2^3 = 8$ Elemente:

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$ hat 6 Elemente, weil $\emptyset$ und $\{2\}$ in beiden Potenzmengen vorkommen und nur einmal zählen.

Nur in $\mathcal{P}(A \cup B)$ liegen $\{1, 3\}$ und $\{1, 2, 3\}$. Das sind genau die grauen Kästchen im Hasse-Diagramm aus Aufgabe 2(c): Mengen, die die 1 aus A mit der 3 aus B mischen.

Die drei Sätze, die ihr aus Blatt 1 mitnehmen solltet

1. Eine Implikation ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches folgt.
2. Für $\exists$ reicht ein Beispiel, für $\forall$ braucht man ein Argument für ein beliebiges Element, und um ein $\forall$ zu widerlegen, reicht ein Gegenbeispiel.
3. Mengengleichheit zeigt man in zwei Richtungen, jeweils mit „Sei x beliebig“.

Wenn etwas unklar bleibt, fragt mich gern im Tutorium.