LEHRBUCH

Jan Glaubitz
Daniel Rademacher
Thomas Sonar

Lernbuch Analysis 1

Das Wichtigste ausführlich für Bachelor und Lehramt

Springer Spektrum

Lernbuch Analysis 1

Jan Glaubitz · Daniel Rademacher · Thomas Sonar

Lernbuch Analysis 1

Das Wichtigste ausführlich für Bachelor und Lehramt

Springer Spektrum

Jan Glaubitz
Institut Computational Mathematics
Technische Universität Braunschweig
Braunschweig, Deutschland

Daniel Rademacher
Institut für Mathematische Stochastik
Technische Universität Braunschweig
Braunschweig, Deutschland

Thomas Sonar
Institut Computational Mathematics
Technische Universität Braunschweig
Braunschweig, Deutschland

ISBN 978-3-658-26936-4 ISBN 978-3-658-26937-1 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung/Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch und Annika Denkert

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

„Bitte vergiß alles, was Du auf der Schule gelernt hast;
denn Du hast es nicht gelernt.“
Edmund Landau [Landau 1965, S. 7]

Noch ein einführendes Lehrbuch zur Analysis? Es gibt sehr viele sehr gute Lehrbücher auf diesem wichtigen Gebiet der Mathematik und die Frage nach dem Sinn eines weiteren will daher beantwortet sein. Was machen wir also anders als die anderen? Bei den mathematischen Inhalten können wir natürlich nicht mit atemberaubenden Neuigkeiten glänzen; das Curriculum einer Anfängervorlesung steht aus guten Gründen seit Langem innerhalb recht enger Grenzen fest. Aber bei der Form der Darbietung glauben wir etwas Neues geliefert zu haben.

Zum einen versprechen wir eine sanfte Lernkurve. Der drittgenannte Autor weiß aus jahrzehntelanger Lehrerfahrung mit Studentinnen und Studenten der Mathematik, Physik und auch der Ingenieurwissenschaften an verschiedenen Universitäten, dass die gymnasiale Ausbildung auf der Strecke zahlreicher „Reformen“ stecken geblieben ist. Da Beweistechniken, Logik, Abschätzungen, Grenzwerte und vieles andere nicht mehr Bestandteile der gymnasialen Schulmathematik sind, müssen sie an der Universität unter Minimierung von Reibungsverlusten nachgeliefert werden. Daher beginnen wir mit einer Einführung in die Logik und Mengenlehre soweit wir diese Grundlagen benötigen. Mit einer Einführung in die vollständige Induktion und die angeordneten Körper benötigen wir so ca. 60 Seiten, bevor die eigentlichen Gegenstände der Analysis, die Funktionen, das erste Mal die Bühne betreten.

Liebe Studentinnen und Studenten, wir müssen etwas zum „Ton“ dieses Buches sagen. Ihr werdet hier durchgehend geduzt! Das würde sich eine Dozentin oder ein Dozent natürlich nicht erlauben, aber wir glauben, dass die Beziehung zu einem Lernbuch enger werden kann, wenn der Ton ein wenig „flapsig“ daherkommt.

Des Weiteren findet die geneigte Leserschaft hier eine in gewisser Weise verknappte Darstellung, ohne auf Genauigkeit und Lesbarkeit der Beweise verzichten zu müssen. Bei den Beweisen haben wir nicht nach den elegantesten und ästhetisch ansprechendsten gesucht, sondern die einfachen und verständlichen bevorzugt. Hierbei und bei der Auswahl des Stoffes sind wir in Teilen dem wunderbaren Werk von Hairer und Wanner [Hairer/Wanner 2000] gefolgt, dessen Spuren man bei uns sicher finden kann. Wir liefern nicht jedes Resultat und steigen nie zu tief in eine Theorie ein. Die Anfänger müssen nach unserer Überzeugung erst einmal einen Überblick und Freude an der Analysis gewinnen, bevor man sie mit tiefer liegenden Theorien bekannt machen kann. Nichtsdestotrotz geben wir in einem abschließenden Kapitel einen Überblick über metrische und normierte Räume sowie einige einfache topologische Fragestellungen. Das gehört heute zum Rüstzeug jeder Mathematikerin und jedes Mathematikers und stellt auch schon Material bereit, dass für die mehrdimensionale Analysis benötigt wird.

Die beiden erstgenannten Autoren haben die Vorlesung, die in dieses Buch eingeflossen ist, am eigenen Leib in ihrem Studium an der TU Braunschweig erlebt. Nun haben sie schon selbst Analysis-Vorlesungen als wissenschaftliche Mitarbeiter betreut und wissen aus erster Hand, welche Bedeutung Beispiele und Aufgaben haben. Wir liefern an allen Stellen des Buches sehr viele Beispiele, um den Stoff zu illustrieren, aber auch um zum Selbstdenken zu animieren. Eine große Anzahl von Aufgaben mit vollständigen Lösungen soll euch dabei unterstützen, mit Papier und Bleistift selbst tätig zu werden. Man lernt Mathematik nicht durch Zuhören im Hörsaal, sondern nur, indem man sich selbst an Aufgaben versucht!

Des Weiteren nennenswert sind unsere historischen Bemerkungen. Wir haben ihnen nicht so viel Platz eingeräumt, wie ihnen eigentlich gebührt – dazu reicht eine vierstündige Vorlesung einfach nicht – haben aber an vielen Stellen einen kleinen Abriss der historischen Entwicklung angegeben.

Um die Übersichtlichkeit und Lesbarkeit zu erhöhen, erscheinen historische Bemerkungen in gelben, Definitionen in blauen, Sätze, Lemmata und Korollare in roten sowie Beispiele in grünen Kästen. Vor jedem Kapitel gibt es eine Einführung, die mit „Wozu?“ betitelt ist, und am Ende jeweils eine Zusammenfassung mit Fragen, die die Lernziele umreißen sollen.

Wir danken dem Verlag, insbesondere Frau Schmickler-Hirzebruch, für die Anregung zu diesem Buch und die gewohnt gute Betreuung bei seiner Entstehung, aber auch den Studierenden, die kapitelweise das Probelesen übernommen haben. Das waren Hinrich Mahler, Anastasiia Grigoricheva, Alina Ubben, Dorian Hillebrand, Marie-Christin Bormann, Simon Töpfer, Simon Christian Klein und Jakob Geisler. Dr. Marko Stautz hat ebenfalls verschiedene Versionen des Manuskripts gelesen und Marie-Christin Bormann hat uns mit vielen tollen Illustrationen versorgt.

Wir legen nun dieses Lehr- und Lernbuch in die Hände der Studentinnen und Studenten sowie der Kolleginnen und Kollegen, die Analysis-Vorlesungen gerne halten. Wir glauben, ein studierendenfreundliches Buch zu liefern und würden und freuen, wenn es gerade bei den Studienanfängerinnen und -anfängern auf freundliche Aufnahme trifft!

Braunschweig im März 2019

Jan Glaubitz, Daniel Rademacher, Thomas Sonar

Inhaltsverzeichnis

1 Elementar(st)e Logik und Mengenlehre

Wozu?

Au Backe: „Logik“? Das klingt schon sehr abschreckend, aber ohne Logik kommt man in der Mathematik nicht aus. Mathematik ist eben eine exakte Wissenschaft. **Logik** ist ein wichtiger Teil der Sprache der Analysis; der andere wichtige Teil ist die **Mengenlehre**. Wir lernen hier also nicht Logik aus Selbstzweck (was man natürlich auch könnte), sondern weil man nur mit ihrer Hilfe verschiedene **Beweistypen** verstehen kann, die in der Analysis vorkommen. Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- direkte Beweise,
- Beweise durch Kontraposition,
- indirekte Beweise,
- Mengenschreibweisen,
- Mengenoperationen

und ihr Verständnis. Aber keine Sorge: Wir liefern euch für jedes Lernziel auch gleich wichtige Beispiele mit!

Historische Bemerkung

Schon in der Antike wurde durch Aristoteles (384–322 v.Chr.) eine sogenannte Begriffslogik („Syllogistik“) entwickelt, in der Aussagen über Begriffe (bei Aristoteles „Kategorien“) formuliert und Schlüsse gezogen werden konnten. Für unsere Ansprüche in der modernen Mathematik reicht das noch nicht, denn wir benötigen einen formelhaften Kalkül. Einen wichtigen Schritt hierzu hat Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) geleistet, der erstmals an einer symbolischen Logik in Kalkülform arbeitete. Leider wurden seine Arbeiten erst weit nach seinem Tod im 19. und 20. Jahrhundert bekannt. Im 19. Jahrhundert wuchs dann das Interesse an Logik hauptsächlich in England. Der Ire George Boole (1815–1864) fasste Logik als einen mathematischen Kalkül auf, der auf den Wahrheitswerten 0 und 1 beruht. Sein 1854 veröffentlichtes Hauptwerk *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* [Boole 1958] stellt einen Meilenstein in der Geschichte der modernen Logik dar, ebenso wie das 1847 von Augustus De Morgan (1806–1871) veröffentlichte Buch *Formal Logic: or The Calculus of Inference*.

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_1

1.1 Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind solche, denen man einen **Wahrheitswert** zuordnen kann. Im Gegensatz zu George Boole wollen wir hier nicht die Wahrheitswerte 0 und 1 verwenden, sondern w für „wahr“ und f für „falsch“, was die Lesbarkeit erhöht.

Der Satz

A: Mathe ist doof.

ist *keine* mathematische Aussage, denn sie ist weder wahr noch falsch, sondern einfach die Äußerung einer Befindlichkeit. Die Aussage

A: Christoph Kolumbus entdeckte Amerika im Jahr 1492.

hat den Wahrheitswert w, ebenso wie die Aussage:

A: Die erste Landung auf dem Mond fand im Jahr 1969 statt.

Die Aussage

A: In Braunschweig hat es noch nie geregnet.

ist hingegen sicherlich falsch, hat also den Wahrheitswert f. Die Aussage

A: Auf Alpha Centauri gibt es kleine grüne Männchen.

ist tatsächlich eine mathematische Aussage, denn ihr Wahrheitswert ist entweder w oder f, wir wissen es bloß zu diesem Zeitpunkt noch nicht. Wir werden ab jetzt nur noch von „Aussagen“ sprechen und das Adjektiv „mathematische“ der Einfachheit halber fortlassen.

All we need

Im Folgenden wollen wir euch mit den wichtigsten Begriffen und Regeln der Logik vertraut machen. Dabei steht euch für jeden neuen Begriff immer gleich ein Beispiel bereit.

(1) Die Negation (Verneinung)

Definition 1.1.1: Die Negation

Ist A eine Aussage, dann bezeichnet

$$\neg A$$

die Verneinung der Aussage (sprich: „nicht A“). In Form einer **Wahrheitswertetafel** können wir die Negation wie folgt definieren:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Ist A also wahr, so ist $\neg A$ falsch und umgekehrt.

Beispiel 1.1.2

Die Negation der Aussage

A: In Braunschweig hat es noch nie geregnet.

wäre etwa:

$\neg A$: In Braunschweig hat es **nicht** noch nie geregnet.

Umgangssprachlich würden wir dies natürlich viel eher als

B: In Braunschweig hat es schon mal geregnet.

formulieren. Wir erkennen sofort, dass Aussage A die Verneinung von Aussage B ist, d. h. $A = \neg B$.

Im obigen Beispiel ergibt die Verneinung der Verneinung der Aussage A wieder die ursprüngliche Aussage A, und das ist kein Zufall! Es gilt das Prinzip der doppelten Negation.

Satz 1.1.3: Prinzip der doppelten Negation

Ist A eine Aussage, dann gilt

$$\neg\,(\neg A) = A.$$

Achtung, die Formulierung des obigen Satzes ist trügerisch, sogar gefährlich! Was Satz 1.1.3 meint, ist, dass die zweifache Verneinung einer Aussage wieder die Aussage selbst liefert. Aber sind etwa die Aussagen

B: In Braunschweig hat es schon mal geregnet.

und

$\neg(\neg B)$: In Braunschweig hat es nicht nicht schon mal geregnet.

wirklich *gleich*? Ein Germanist würde sicherlich – und das völlig zu Recht – sagen: *Nein*. Logisch wollen wir sie aber als gleichwertig behandeln. Um diesen Gedanken auf ein solides Fundament der Logik zu bauen, wird auf Seite 16 die Äquivalenz eingeführt. Was der obige Satz nämlich eigentlich meint, ist die Äquivalenz der beiden Aussagen.

(2) Die Disjunktion („oder“)

Definition 1.1.4: Die Disjunktion

Sind A und B zwei Aussagen, dann bezeichnet

$$A \vee B$$

die Disjunktion oder das logische „oder“, definiert durch:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Im Gegensatz zu unserem umgangssprachlichen „oder“, das eigentlich ein ausschließendes „entweder ... oder“ meint, ist die Disjunktion bereits dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist.

Beispiel 1.1.5

Ein gutes Beispiel für das umgangssprachliche „oder“ wäre:

> Sie können eine Eintrittskarte für den Zoo oder ein Essen zu zweit gewinnen,

denn wir verstehen hier sofort, dass es *entweder* die Eintrittskarte *oder* das Essen zu gewinnen gibt.

(3) Die Konjunktion („und“)

Definition 1.1.6: Die Konjunktion

Sind A und B zwei Aussagen, dann bezeichnet

$$A \wedge B$$

die Konjunktion oder das logische „und“ und ist definiert durch:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die Konjunktion zweier Aussagen A, B ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. Ist eine der Aussagen falsch, oder sogar beide, dann auch die Konjunktion.

Beispiel 1.1.7

Die Konjunktion der zwei Aussagen

A: Der FC Bayern München hat das erste Tor des Spiels erzielt.

und

B: Der FC Bayern München hat das Spiel gewonnen.

wäre etwa:

$A \wedge B$: Der FC Bayern München hat das erste Tor erzielt und das Spiel gewonnen.

(4) Die Implikation

Definition 1.1.8: Die Implikation

Sind A und B zwei Aussagen, dann bezeichnet

$$A \implies B$$

die Implikation, definiert durch:

A	B	$A \implies B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wir sagen „aus A folgt B“, oder „wenn A, dann B“, oder „A ist hinreichend für B“, oder „B ist notwendig für A“. Die letzte Sprechweise kommt vielen sicherlich seltsam vor, aber wir werden das gleich aufklären! Die Aussage A nennt man übrigens die **Prämisse**, die Aussage B die **Konklusion**.

Beispiel 1.1.9

Bleiben wir im obigen Beispiel und konkretisieren, dass der FC Bayern München im gemeinten Spiel gegen Borussia Dortmund angetreten ist. Dann wäre also etwa

A: Der FC Bayern München hat das Spiel gewonnen.

B: Borussia Dortmund hat das Spiel verloren.

und die Implikation lautet:

$A \implies B$: Wenn der FC Bayern München das Spiel gewonnen hat, dann hat Borussia Dortmund verloren.

Wenn ihr euch fragt, warum die Wahrheitswertetafel für die Implikation gerade so aussieht, wie sie aussieht, dann bedenkt folgendes: Wenn aus einer wahren Aussage eine wahre Aussage folgt, ist die Implikation sicher wahr. Aus einer wahren Aussage kann man keine falsche folgern, daher ist in diesem Fall die Implikation falsch. Interessanter mögen die beiden letzten Wahrheitswerte sein, aber ihr müsst bedenken: Aus einer falschen Prämisse kann man jederzeit sowohl etwas Wahres, als auch etwas Falsches folgern. Daher ist die Implikation in diesen beiden Fällen wahr.

Beispiel 1.1.10

Ein erstes einfaches Beispiel aus der Welt der mathematischen Gleichungen wäre etwa die sicher falsche Aussage

$$1 = -1.$$

Bilden wir auf jeder Seite die dritte Potenz, so erhalten wir wieder die ursprüngliche falsche Aussage $1 = -1$. Bilden wir aber auf jeder Seite die zweite Potenz, so erhalten wir die wahre Aussage $1 = 1$. Bereits aus einer sehr einfachen falschen Aussage lassen sich also sowohl falsche als auch wahre Aussagen folgern.
Ein anderes Beispiel, nun aus dem Alltag gegriffen, wäre das folgende: Du und deine beste Freundin oder Freund habt das gleiche Lieblingsbier. Nun machen wir die falsche Aussage, dass es sich bei euch beiden um die gleiche Person handelt, und folgern so: Deine beste Freundin oder Freund trinkt am liebsten Bier XY. Da ihr beide die gleiche Person seid, trinkst auch du am liebsten Bier XY. Wieder haben wir aus einer falschen Aussage – ihr wärt beide ein und die gleiche Person – eine richtige Aussage gefolgert.

Wenn man aus einer Behauptung (das ist die Prämisse) etwas folgern möchte, dann ist die Implikation beispielhaft für einen **direkten Beweis**, d. h., man startet mit der Prämisse A und folgert daraus B: $A \implies B$. Häufig schafft man es nicht in einem Schritt, dann hangelt man sich an Zwischenresultaten entlang, etwa so:

$$A \implies B_1 \implies B_2 \implies B_3 \implies \cdots \implies B_n \implies B$$

Das ist manchmal sehr umständlich oder man weiß nicht, wie man von B_k nach B_{k+1} kommen soll. Wichtig ist daher, die Implikation $A \implies B$ „irgendwie anders“ hinzubekommen. Dazu schauen wir uns jetzt die folgende Wahrheitswertetafel an.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \implies B$	$\neg B \implies \neg A$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Wie wir sehen, enthalten die beiden letzten Spalten exakt dieselben Einträge! Das bedeutet, dass wir $A \implies B$ ohne Weiteres durch $\neg B \implies \neg A$ ersetzen können.

Definition 1.1.11: Die Kontraposition

Die Aussage

$$\neg B \implies \neg A$$

nennt man auch **Kontraposition**.

Wir betrachten gleich mal ein Beispiel.

Beispiel 1.1.12

Ihr wisst ja eigentlich noch gar nicht, was die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind, aber wir wollen an euer Schulwissen appellieren, und mehr als lückenhafte Erinnerungen brauchen wir hier nicht. Die reellen Zahlen bestehen aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und den irrationalen Zahlen (π ist eine solche). Wir beweisen die Implikation:
Seien a, b reelle Zahlen, dann gilt:

$$a \leq b + \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon > 0 \quad \implies \quad a \leq b.$$

Wir müssen also aus der Prämisse A: $(a \leq b + \varepsilon)$ für alle positiven ε die Konklusion B: $a \leq b$ zeigen, d. h. $A \implies B$. Wir nutzen dazu die Kontraposition.
Die Verneinung von B ist

$$\neg B : b < a.$$

Wenn wir nun $\neg A$ zeigen wollen, müssen wir uns auch über die Verneinung von „für alle $\varepsilon > 0$“ Gedanken machen. Wenn etwas nicht „für alle ε“ gilt, dann gibt es (mindestens) *ein* ε, das die Ausnahme macht. Damit lautet

$$\neg A : \text{ es gibt ein } \varepsilon > 0, \text{ sodass } a > b + \varepsilon$$

gilt. Statt mit der direkten Implikation $A \implies B$, also

$$\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } a \leq b + \varepsilon \implies a \leq b,$$

wollen wir es also mit der Kontraposition $\neg B \implies \neg A$, d. h.

$$a > b \implies \text{es gibt ein } \varepsilon > 0, \text{ sodass } a > b + \varepsilon$$

versuchen. Wählen wir nun

$$\varepsilon = \frac{a-b}{2},$$

dann ist ε sicher positiv und es gilt

$$b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \overset{(b<a)}{<} \frac{a+a}{2} = a,$$

also $a > b + \varepsilon$, und das ist gerade $\neg A$. Wir haben also $\neg B \implies \neg A$ gezeigt und damit $A \implies B$.

Das kleine Quadrat am Ende soll ab jetzt immer das Ende eines Beweises bezeichnen. Früher schrieb man dafür gerne q. e. d. (quod erat demonstrandum = was zu beweisen war).

(5) Die Äquivalenz

Definition 1.1.13: Die Äquivalenz

Sind A und B zwei Aussagen, dann bezeichnet

$$A \iff B$$

die Äquivalenz, definiert durch:

$$(A \implies B) \wedge (B \implies A).$$

Aus den Wahrheitswertetafeln für die Konjunktion und die Implikation können wir leicht die Wahrheitswertetafel der Äquivalenz aufstellen:

A	B	$A \iff B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiel 1.1.14

In Beispiel 1.1.12 haben wir soeben gezeigt, dass die Implikation $A \implies B$, also

$$\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } a \leq b + \varepsilon \implies a \leq b$$

gilt. Offensichtlich gilt aber auch die Umkehrung $B \implies A$, also

$$a \leq b \implies \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } a \leq b + \varepsilon.$$

Da sowohl die Implikation "von links nach rechts" ($A \implies B$) als auch die "von rechts nach links" ($B \implies A$) gelten, sind die beiden Aussagen bereits äquivalent, $A \iff B$, also

$$\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } a \leq b + \varepsilon \iff a \leq b.$$

Und nun können wir auch die Kontraposition vernünftig aufschreiben.

Satz 1.1.15: Die Kontraposition

Sind A und B zwei Aussagen, dann gilt:

$$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A). \tag{1.1}$$

(6) Die Nicht-oder-Form

Auf der Suche nach einer weiteren äquivalenten Form zur Implikation schauen wir auf die folgende Wahrheitswertetafel:

A	B	$A \implies B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
w	w	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Wie wir sehen, ist $\neg A \vee B$ ebenfalls äquivalent zur Implikation $A \implies B$. Man nennt $\neg A \vee B$ die Nicht-oder-Form der Implikation. Damit haben wir gezeigt:

Satz 1.1.16

Sind A und B zwei Aussagen, dann gilt:

$$(A \implies B) \iff (\neg A \vee B) \tag{1.2}$$

(7) Die Regeln von De Morgan

Die nun folgenden Regeln geben wir ohne Beweis an. Es ist eine gute Übung, die Beweise in Form von Wahrheitswertetafeln selbst zu führen.

Satz 1.1.17

Es seien A und B zwei Aussagen. Dann gelten

$$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B) \tag{1.3}$$

und

$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B). \tag{1.4}$$

(8) Die Distributivgesetze

Satz 1.1.18

Es seien A, B und C drei Aussagen. Dann gelten

$$(A \vee (B \wedge C)) \iff ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \tag{1.5}$$

und

$$(A \wedge (B \vee C)) \iff ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)). \tag{1.6}$$

Oft benötigt man auch die Verneinung der Implikation, wie wir gleich sehen werden.

(9) Die Negation der Implikation

Satz 1.1.19

Sind A und B zwei Aussagen, dann gilt:

$$\neg(A \implies B) \overset{\text{nach (1.2)}}{\iff} \neg(\neg A \vee B) \overset{\text{nach (1.3)}}{\iff} (\neg\neg A) \wedge (\neg B) \iff A \wedge (\neg B)$$

Die letzte Äquivalenz folgt, weil die doppelte Verneinung von A wieder A ist. Diese Äquivalenz ist so wichtig, dass wir sie als Satz formulieren.

Satz 1.1.20

Für zwei Aussagen A und B gilt:

$$\neg(A \implies B) \iff A \wedge (\neg B) \tag{1.7}$$

Die Äquivalenz (1.7) können wir so lesen, dass wenn $A \implies B$ falsch ist, $A \wedge \neg B$ richtig ist. Das Ganze kann man auch andersherum lesen, und dann wird es zur Grundlage der **indirekten Beweise**: Ist $A \wedge \neg B$ falsch, dann muss $A \implies B$ richtig sein. Manchmal nennt man dies auch *Beweis durch Widerspruch* oder kurz *Widerspruchsbeweis*.

Eine berühmte Anwendung der Negation der Implikation findet sich in der Erkenntnis, dass sich die Zahl $\sqrt{2}$ nicht als Bruch schreiben lässt.

Satz 1.1.21

$$x = \sqrt{2} \implies x \text{ ist kein Bruch.}$$

Diese Aussage verifizieren wir nun mithilfe der Methode des indirekten Beweises.

Beweis. Wir zeigen, dass $A \wedge \neg B$ falsch ist, also muss $A \implies B$ richtig sein.

Wir starten mit $\neg B$, nehmen also an, x sei ein Bruch, d. h., x habe eine Darstellung

$$x = \frac{p}{q}, \quad p, q \text{ teilerfremde ganze Zahlen mit } q \neq 0.$$

Wenn unsere Prämisse stimmt, dann rechnen wir:

$$\begin{aligned}
& x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \\
\Longrightarrow\ & p^2 = 2q^2 \\
\Longrightarrow\ & p^2 \text{ ist gerade} \\
\overset{(*)}{\Longrightarrow}\ & p \text{ ist gerade (warum? Lücke!)} \\
\Longrightarrow\ & p = 2k \text{ mit irgendeiner ganzen Zahl } k \\
\Longrightarrow\ & 2q^2 = 4k^2 \\
\Longrightarrow\ & q^2 = 2k^2 \\
\Longrightarrow\ & q^2 \text{ ist gerade} \\
\overset{(*)}{\Longrightarrow}\ & q \text{ ist gerade (warum? Lücke!).}
\end{aligned}$$

Damit sind p und q beide gerade Zahlen und somit nicht teilerfremd! Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist $A \wedge \neg B$ falsch und der Satz muss richtig sein. □

Euch ist sicher aufgefallen, dass wir in unserem Beweis noch zwei Lücken zu füllen haben: Warum ist eine ganze Zahl p (bzw. q) gerade (bzw. ungerade), wenn ihr Quadrat gerade (bzw. ungerade) ist? Für den Moment nehmen wir das erst einmal so hin. Aber keine Sorge, nachdem wir Mengen und Quantoren eingeführt haben, kommen wir in Lemma 1.2.12 und Lemma 1.2.13 wieder darauf zurück.

(10) Definitionen und Quantoren

Definition 1.1.22: Das definierende Gleichheitszeichen

Wird nach Definition eine Größe x mit dem Wert 2 belegt, dann schreibt man nicht $x = 2$, sondern benutzt ein **definierendes Gleichheitszeichen**:

$$x := 2$$

Die Größe, die auf der Seite des Doppelpunktes steht, wird dabei definiert. So ist $x =: y$ die Definition der Größe y; sie wird auf x gesetzt.

Ebenso verfährt man mit einer Äquivalenz, z. B. bedeutet

$$A :\Longleftrightarrow B,$$

dass A durch Definition äquivalent zu B ist; man sagt auch vornehm *per definitionem*.

Definition 1.1.23: Der Allquantor

Wir haben schon Aussagen wie „für alle $\varepsilon > 0$ gilt A“ verwendet. Um eine Schreibweise für solche Allaussagen zu haben, gibt es den **Allquantor**

$$\forall \quad \text{„für alle“}.$$

Beispiel 1.1.24

Wir schreiben beispielsweise

$$\forall y : y^2 \neq -1$$

und drücken damit aus, dass für alle y das Quadrat von -1 verschieden ist.

Definition 1.1.25: Der Existenzquantor

Oft müssen wir auch festhalten, dass ein mathematisches Objekt existiert. Dazu dient der **Existenzquantor**

$$\exists \quad \text{„es existiert ein“ oder „es gibt ein“},$$

wie in

$$\exists x : \sin x = 1.$$

Wenn die Radiosprecherin berichtet, dass euch auf der A2 zwischen den Abfahrten Peine und Braunschweig–Nord in Richtung Braunschweig *ein* Fahrzeug entgegenkommt, müsst ihr als Mathematikerin oder Mathematiker wissen, dass sie eigentlich *genau ein* Fahrzeug meint. Wenn es *ein* Fahrzeug im mathematischen Sinn wäre, hieße das *mindestens eins*; es könnten auch 20 Falschfahrer sein!

Um „es gibt ein“ von „es gibt genau ein“ zu unterscheiden, verwenden wir die Notation

$$\exists_1 \quad \text{oder} \quad \exists!$$

für den Existenzquantor „es gibt genau ein“.

Beispiel 1.1.26

Ein Beispiel wäre

$$\exists x : x \leq 2$$

oder

$$\exists_1 x > 0 : x^2 = 2.$$

Wichtig ist noch das Verhalten der Quantoren, wenn wir Aussagen verneinen, wie die folgenden zwei Beispiele zeigen.

Beispiele 1.1.27

Es gilt:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x : x > 2) &\iff \exists x : x \leq 2 \\ \neg(\exists y : y^2 = -1) &\iff \forall y : y^2 \neq -1 \end{aligned}$$

Schreiben wir ganz allgemein

$$\forall x : E(x) \quad \text{bzw.} \quad \exists x : E(x)$$

für „alle x besitzen die Eigenschaft $E(x)$“ bzw. „es gibt ein x, dass die Eigenschaft $E(x)$ besitzt“, dann gilt für die Negationen

$$\begin{aligned} \neg\left(\forall x : E(x)\right) &\iff \exists x : \neg E(x), \\ \neg\left(\exists x : E(x)\right) &\iff \forall x : \neg E(x). \end{aligned}$$

1.2 Schreibweisen der Mengenlehre

Wir kommen nun zu den **Mengen**, genauer zu den elementaren Definitionen, die wir unbedingt brauchen. Wir wollen den Begriff “Mengen” selbst dabei *nicht* definieren, das würde weit über dieses Buch hinausgehen. Wir wollen euch aber zu erklären versuchen, was wir unter Mengen verstehen und wie ihr mit diesen arbeiten könnt.

Historische Bemerkung

Die Mengenlehre ist eine Schöpfung des Hallenser Mathematikers Georg Cantor (1845–1918), als nicht unmaßgeblicher Geburtshelfer fungierte der Braunschweiger Richard Dedekind (1831– 1916). Cantor hatte noch einen ganz naiven Mengenbegriff und erst Mathematiker wie Bertrand Russell (1872–1970), Ernst Zermelo (1871–1953) und Cesare Burali-Forti (1861–1931) fanden **Antinomien**, d. h. innere Widersprüche. Die berühmteste Antinomie ist wohl das **Russell’sche Paradoxon**: Ein Barbier ist jemand, der alle Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren, rasiert. Klingt harmlos, oder? Aber gehört der Barbier selbst zur Menge der Männer, die sich nicht selbst rasieren? Wenn er sich nicht selbst rasiert, dann gehört er zur Menge der Männer, die sich nicht selbst rasieren, also rasiert er sich, und das ist ein Widerspruch zur Annahme. Rasiert er sich aber selbst, dann gehört er zur Menge

der Männer, die er rasiert und die sich somit nicht selbst rasieren – wieder ein Widerspruch!
Solche Antinomien entstehen durch eine Art unkontrollierter Mengenbildung. Ernst Zermelo konnte dieses Problem im Jahr 1908 lösen, indem er ein System angab, in dem **axiomatisch** die Mengenbildung geregelt wurde. Im Laufe der Jahre nach 1908 wurde das Axiomensystem der Mengenlehre durch Abraham Fraenkel (1891–1965), John von Neumann (1903–1957) und auch Zermelo selbst erweitert und dient heute als **ZFC** (**Z**ermelo-**F**raenkel mit dem Auswahlaxiom (axiom of **C**hoice)) als *die* Grundlage der Mathematik. Wir brauchen uns aber zum Glück nicht um die Details zu kümmern; wir nutzen nur die Sprache der Mengenlehre. Alles, was man über Mengenlehre und ihre Geschichte nur wissen kann, hat Oliver Deiser in seinem nicht hoch genug zu lobenden Buch [Deiser 2010] verständlich aufgeschrieben.

(11) Mengen

Wir verwenden zwei verschiedene Möglichkeiten, Mengen zu definieren: zum Einen die **Definition durch Aufzählen der Elemente**

$$M := \{4, 5, 8, 11\},$$

zum anderen durch die **Angabe einer definierenden Eigenschaft** wie in

$$N := \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \right\}.$$

Im letzten Fall liest man: „N ist die Menge aller x aus $\mathbb{Q}$, für die gilt, dass x strikt zwischen $1/2$ und $3/2$ liegt“. In beiden Fällen werden die **Mengenklammern** $\{\}$ benutzt. Das Symbol $\in$ bedeutet „Element von“, also

$$8 \in M, \text{ aber } 10 \notin M.$$

Manchmal ist es platzsparend, wenn man auch $M \ni 8$ schreiben kann.

Will man zum Ausdruck bringen, dass eine Menge die **Teilmenge** einer anderen Menge ist, schreibt man $\subset$ oder, falls Teilmenge und Menge identisch sein dürfen, $\subseteq$, also

$$\{4, 5\} \subset M, \quad \{11, 4, 8, 5, 4\} \subseteq M, \quad \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \frac{1}{2} < x < 1 \right\} \subset N.$$

Auch hier schreiben wir manchmal $\supset$ wie z. B.

$$M \supset \{4, 5\}.$$

Man sagt, M ist die **Obermenge** von $\{4,5\}$.

Eine Teilmenge jeder Menge ist die **leere Menge** $\emptyset$, die man nicht explizit mit aufführt. Die Menge aller Teilmengen einer Menge heißt **Potenzmenge**. Sie wird mit $\mathcal{P}$ bezeichnet. Die Potenzmenge der leeren Menge ist die Menge, die aus der leeren Menge besteht, d. h.

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

und die Potenzmenge der Menge $L := \{4,5,11\}$ ist

$$\mathcal{P}(\{4,5,11\}) = \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{11\}, \{4,5\}, \{4,11\}, \{5,11\}, \{4,5,11\}\}.$$

(12) Die Mengendifferenz

Definition 1.2.1: Die Mengendifferenz

Sind A und B zwei Mengen, dann heißt

$$A \backslash B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

die **Mengendifferenz** von A und B. Man sagt auch „A ohne B“.

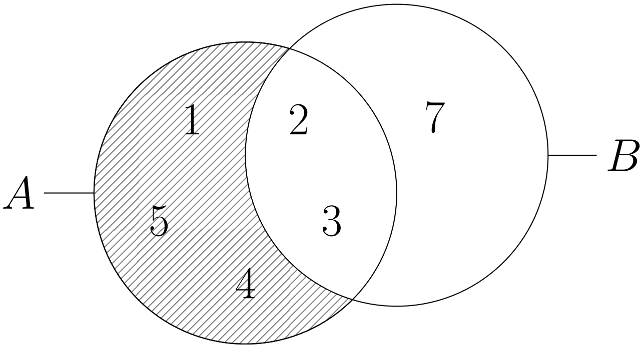

Abbildung 1.2.1. Die Mengendifferenz

Beispiele 1.2.2

(a) Denken wir etwa an die noch recht einfachen Mengen

$$A := \{1,2,3,4,5\} \quad \text{und} \quad B := \{2,3,7\},$$

so ist die Mengendifferenz A ohne B durch

$$A \setminus B = \{1, 4, 5\}$$

gegeben. Zur Veranschaulichung haben wir für euch Abbildung 1.2.1 vorbereitet.

(b) Mengen sind auch außerhalb der Mathematik allgegenwärtig, denken wir beispielsweise an Männer! Die Menge A könnte etwa die Menge aller Männer sein, während B die Teilmenge der verheirateten Männer ist. Was ist dann die Mengendifferenz $A \setminus B$? Genau, natürlich die Menge der unverheirateten Männer!

(13) Die Vereinigung von Mengen

Definition 1.2.3: Die Vereinigung von Mengen

Sind A und B zwei Mengen, dann heißt

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

die **Vereinigung** der Mengen A und B. Man sagt auch „A vereinigt mit B“.

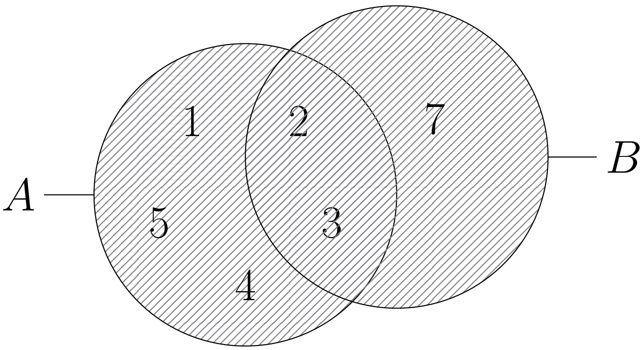

Abbildung 1.2.2. Die Vereinigung von Mengen

Beispiele 1.2.4

(a) Bleiben wir bei unserem vorherigen Beispiel mit den Mengen

$$A := \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{und} \quad B := \{2, 3, 7\},$$

so ist die Vereinigung der Mengen A und B durch

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

gegeben. Zur Veranschaulichung haben wir für euch Abbildung 1.2.2 vorbereitet.

(b) Bleiben wir auch dem zweiten Beispiel treu und stellen uns vor, wir wären auf der Suche nach dem Mann unserer Träume. Was wünschen wir uns von einem solchen Kandidaten? Möglicherweise ja Humor, Treue oder einfach jemanden, der nicht schnarcht. Seien also A, B und C entsprechend die Menge aller Männer, die Humor haben (A), die treu sind (B), beziehungsweise die nicht schnarchen (C). Wir starten unsere Suche bescheiden. Es würde uns genügen, jemanden zu finden, der zumindest eines dieser Kriterien erfüllt. Unser Beuteschema ist also die Vereinigung der drei Mengen: $A \cup B \cup C$.

(14) Der Durchschnitt von Mengen

Definition 1.2.5: Der Durchschnitt von Mengen

Sind A und B zwei Mengen, dann heißt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

der **Durchschnitt** der Mengen A und B. Man sagt auch „A geschnitten mit B“.

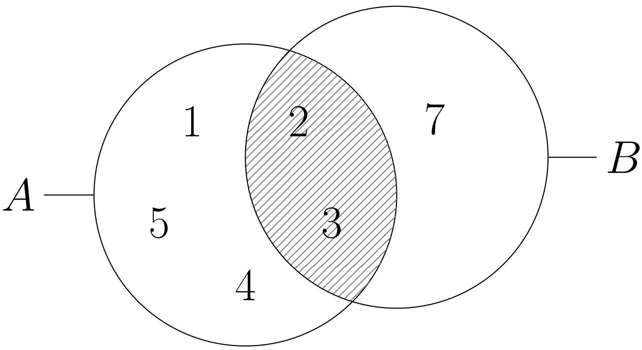

Abbildung 1.2.3. Der Durchschnitt von Mengen

Beispiele 1.2.6

(a) Im Kontext der vorherigen Beispiele mit den Mengen

$$A := \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{und} \quad B := \{2, 3, 7\}$$

ist der Durchschnitt der beiden Mengen nun durch

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

gegeben. Zur Veranschaulichung haben wir für euch Abbildung 1.2.3 vorbereitet.

(b) Wir befinden uns weiter auf Männerjagd (siehe Beispiel 1.2.4), nun aber schon etwas selbstbewusster: Wer bei uns eine Chance haben will, sollte doch wohl gefälligst alle unsere Wunschkriterien erfüllen, und nicht nur eines. Tatsächlich befindet sich unser Traummann also viel eher im Schnitt $A \cap B \cap C$ der vorherigen Mengen A, B und C.

(15) Das Komplement einer Menge

Definition 1.2.7: Das Komplement einer Menge

Ist A eine Menge, dann heißt

$$\mathcal{C}A = A^{\mathcal{C}} := \{x \mid x \notin A\}$$

das **Komplement** der Menge A.

Beispiel 1.2.8

In der Praxis ist die Suche nach dem richtigen Partner natürlich nicht immer so einfach wie in den bisherigen Beispielen beschrieben. Häufig sind wir uns leider gar nicht so genau darüber im Klaren, was wir wollen. was wir aber ganz genau wissen: Was wir nicht wollen. Kein Langweiler soll er sein, ein arroganter Schönling aber auch nicht, und erst recht wollen wir keinen chronischen Fremdgänger! Wonach wir suchen, ist doch eigentlich nur jemand, der zumindest all dies nicht ist, jemanden aus dem Komplement der Menge der Personen, die (mindestens) eine dieser leidigen Eigenschaften haben.

Hoffentlich fragt ihr euch jetzt, bezüglich welcher anderen Menge denn das Komplement gebildet wird. Gilt $A \subset B$, dann ist das (sogenannte relative)

Komplement von A natürlich schon gegeben durch $B \backslash A$. Es gibt aber auch Fälle, in denen A eine Menge aus einer auch andere Mengen umfassenden **Grundmenge** oder einem **Universum** U ist. Dann wird das Komplement immer bezüglich dieser Grundmenge gebildet. Das ist wichtig, weil ansonsten das Komplement von „nichts“ (leere Menge) „alles“ wäre, und sehr schnell hätte man Paradoxien erzeugt, über die wir schon berichtet haben. Wer mehr über solche Paradoxien und Weiteres zur Mengenlehre wissen möchte, findet wieder alles in [Deiser 2010].

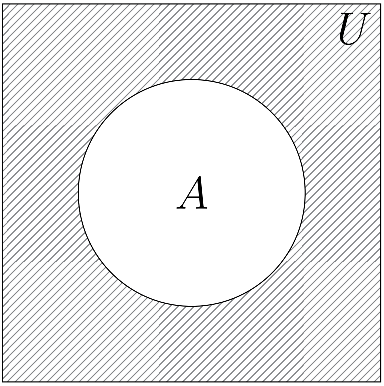

Abbildung 1.2.4. Das Komplement einer Menge

Beispiele 1.2.9

(a) Im letzten Beispiel schmiedeten wir die Strategie, einfach die Mengen aller Männern herzunehmen, die uns definitiv nicht passen (Langweiler, arroganter Schönlinge, chronische Fremdgänger) und das gesamte Komplement als potenzielles Heiratsmaterial in Betracht zu ziehen. Und stellt euch vor, unter Anwendung dieser Suchkriterien haben wir ihn gefunden, *Mr. Right*! Er ist all das, was wir uns gewünscht haben, weder ein Langweiler noch ein arrogante Schönling oder chronischer Fremdgänger ... er ist ein Faultier! Nein, nicht diese Sorte von Mann, sondern ein richtiges Faultier. Durchschnittlich 50 cm lang und etwa 5 kg schwer. Wie konnte das passieren? Ganz einfach, wir haben uns bisher zu keiner Zeit darauf festgelegt, bezüglich welcher Grundmenge wir das Komplement bilden. Das Faultier könnte etwa der Grundmenge aller Lebewesen oder zumindest aller Säugetiere entstammen. Wovon wir natürlich stillschweigend ausgegangen sind: der Menge aller Männer als Grundmenge.

(b) Ähnlich vorsichtig solltet ihr auch sein, wenn wir beispielsweise ohne Weiteres das Komplement der natürlichen Zahlen $\mathcal{C}\mathbb{N}$ bilden. Bezüglich derer selbst wäre etwa $\mathcal{C}\mathbb{N} = \emptyset$. Bezüglich der ganzen Zahlen aber schon die Menge aller negativen ganzen Zahlen, d. h. $\mathcal{C}\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \dots\}$.

(16) Das kartesische Produkt

Definition 1.2.10: Das kartesische Produkt

Sind A und B zwei Mengen, dann heißt

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

das **kartesische Produkt** der Mengen A und B.

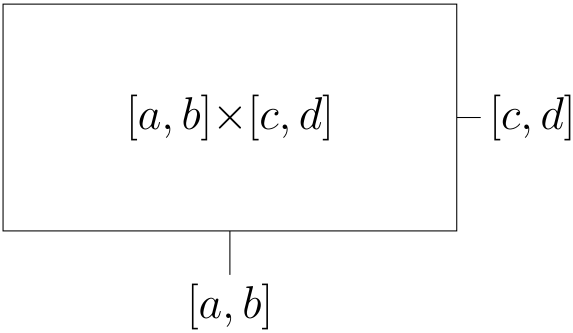

Abbildung 1.2.5. Das kartesische Produkt

Beispiel 1.2.11

Das kartesische Produkt eignet sich beispielsweise perfekt dazu, Quadrate und Rechtecke in höheren Raumdimensionen zu beschreiben. So entspricht das oben skizzierte Rechteck in Abbildung 1.2.5 etwa dem kartesischen Produkt

$$[a, b] \times [c, d].$$

Nun können wir die beiden Lücken im Beweis von Satz 1.1.21 schließen und dabei die Notation einüben. Wir haben schon mit den **natürlichen Zahlen**

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

gearbeitet. Die Menge der **ganzen Zahlen** ist

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

und die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

Die Menge der reellen Zahlen kennen wir noch nicht; trotzdem haben wir sie schon mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet. Nun aber zu den Lücken in Beweis von Satz 1.1.21.

Lemma 1.2.12

$$\forall p \in \mathbb{Z} : p^2 \text{ gerade} \implies p \text{ gerade}$$

Beweis. Wir zeigen $\neg B \implies \neg A$ (Beweis durch Kontraposition):

$$\begin{aligned} & \neg B : p \text{ ungerade} \\ \implies & \exists\, m \in \mathbb{Z} : p = 2m + 1 \\ \implies & p^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2\underbrace{(2m^2 + 2m)}_{=:\ell \in \mathbb{Z}} + 1 = 2\ell + 1 \\ \implies & p^2 \text{ ungerade,} \end{aligned}$$

und das ist $\neg A$. □

Lemma 1.2.13

$$\forall p \in \mathbb{Z} : p \text{ gerade} \implies p^2 \text{ gerade}$$

Beweis. Wir zeigen $A \implies \cdots \implies B$ (direkter Beweis):

$$\begin{aligned} & p \text{ gerade} \\ \implies & \exists\, m \in \mathbb{Z} : p = 2m \\ \implies & p^2 = 4m^2 = 2\underbrace{(2m^2)}_{=:\ell \in \mathbb{Z}} = 2\ell \\ \implies & p^2 \text{ gerade} \end{aligned}$$

□

Zusammenfassung

Aus diesem ersten Kapitel solltet ihr die grundlegenden Begriffe und Regeln sowohl aus Logik als auch Mengenlehre mitnehmen. Besonders wichtig sind dabei die drei Beweistypen des **direkten** Beweises, des Beweises durch **Kontraposition** und des **indirekten** Beweises. Alle drei werden später immer wieder auftauchen und es lohnt sich, diese einmal wirklich verinnerlicht zu haben. Keine Sorge, zum Einüben haben wir euch ein paar schöne Aufgaben zusammengestellt! Ein wichtiges Beispiel fandet ihr auch schon im Kapitel selbst. Den indirekten Beweis haben wir etwa dazu genutzt, um im Beweis von Satz 1.1.21 zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ nicht als Bruch geschrieben werden kann, d. h. keine rationale Zahl ist.
Die rationalen Zahlen waren gemeinsam mit den natürlichen und ganzen Zahlen auch schon wichtige erste Beispiele für Mengen. Später werdet ihr noch die reellen und komplexen Zahlen kennenlernen. Mithilfe der wenigen elementaren Mengenoperationen aus diesem Kapitel könnt ihr euch aber schon jetzt viele weitere Mengen zusammenbauen. Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Welche Beweistypen gibt es?*
- *Was sagt das Prinzip der Kontraposition aus?*
- *Welches Beispiel für einen indirekten Beweis fällt euch ein?*
- *Wie kann man sich Differenzen, Vereinigungen, Durchschnitte und Kompositionen von Menge veranschaulichen?*
  Hier solltet ihr eine Skizze anfertigen können.

Zum Einüben der Begriffe dieses Kapitels solltet ihr euch mal einige der folgenden Aufgaben zur Brust nehmen.

1.3 Aufgaben

A.1.1 Man formuliere die folgenden Aussage mithilfe der Aussagenlogik:

Wenn es regnet oder schneit und es nicht regnet, dann schneit es.

Dazu definiere man zunächst einmal Aussagen A und B wie etwa

$$A: \text{ Es regnet.}$$

und mache anschließend Gebrauch von den Operationen der Logik.

A.1.2 Man überlege sich ein weiteres Beispiel dazu, dass man aus einer falschen Aussage sowohl etwas Wahres als auch etwas Falsches folgern kann.

A.1.3 Seien A, B Aussagen. Man beweise mithilfe von Wahrheitswerttafeln die folgenden Äquivalenzen:

$$(a)\ \neg(\neg A) \iff A$$
$$(b)\ (\neg B \implies \neg A) \iff (\neg A \vee B)$$

A.1.4 Seien A, B Aussagen. Man beweise mithilfe von Wahrheitswerttafeln die Regeln von De Morgan:

$$(a)\ \neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B),$$
$$(b)\ \neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B).$$

A.1.5 Seien A, B, C Aussagen. Man beweise mithilfe von Wahrheitswerttafeln die Distributivgesetze:

$$(a)\ (A \vee (B \wedge C)) \iff ((A \vee B) \wedge (A \vee C)),$$
$$(b)\ (A \wedge (B \vee C)) \iff ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)).$$

A.1.6 Man formuliere folgende Aussagen mithilfe von Quantoren:

(a) Es gibt eine rationale Zahl q, so dass $q^2 = -q$ gilt.

(b) Es gibt genau eine natürliche Zahl n, so dass $-n$ auch wieder eine natürliche Zahl ist.

(c) Für jede ganze Zahl z gilt $\sin(z) \neq 0$.

Zusatz: Wie lauten die in (a) und (b) beschriebenen Zahlen?

A.1.7 Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{2, 7, 8\}$, $C = \{1, 8, 10\}$ sowie $D = \{2, 7\}$ und $E = \{2, 7, 8\}$.

(a) Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?

$$A \subseteq B,\ D \subseteq A,\ D \subseteq B,\ B \subseteq A,\ E \subseteq B,\ E \subset B,\ D \subset B.$$

(b) Man bilde folgende Mengendifferenzen:

$$A \setminus B,\ A \setminus C,\ B \setminus A,\ B \setminus C,\ C \setminus A,\ C \setminus B.$$

(c) Man bilde folgende Vereinigungen von Mengen:

$$A \cup B,\ A \cup C,\ B \cup C,\ (A \cup B) \cup C,\ A \cup (B \cup C)\,.$$

(d) Man bilde folgende Durchschnitte von Mengen:

$$A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C,\ (A \cap B) \cap C,\ A \cap (B \cap C)\,.$$

(e) Man bilde folgende Vereinigungen und Durchschnitte von Mengen:

$$(A \cap B) \cup C,\ (A \cup C) \cap (B \cup C)\,,\ (A \cup B) \cap C,\ (A \cap C) \cup (B \cap C)\,.$$

A.1.8 Man beweise (motiviert durch die letzte Aufgabe), dass folgende Aussagen gelten:

$$\begin{aligned}
(a)&\quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\,,\\
(b)&\quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\,,\\
(c)&\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,,\\
(d)&\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,.
\end{aligned}$$

Da die Reihenfolge, in welcher Mengen vereinigt und geschnitten werden egal ist (siehe (c) und (d)), schreiben wir auch einfach $A \cap B \cap C$ beziehungsweise $A \cup B \cup C$.

A.1.9 Für $p \in \mathbb{Z}$ beweise man:

$$p^3 \text{ gerade} \iff p \text{ gerade}$$

A.1.10 Unter Zuhilfenahme der vorherigen Aufgabe beweise man, dass sich $\sqrt[3]{2}$ nicht als Bruch schreiben lässt, d. h. $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

2 Vollständige Induktion

Wozu?

Viele Aussagen in der Mathematik – und insbesondere in der Analysis – sind „von n abhängig“, wobei $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wie sollte man solche Aussagen beweisen? Es gibt schließlich unendlich viele natürliche Zahlen und wir können unmöglich für jedes $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ einen Beweis durchführen! Darum lernen wir hier eine neue Beweistechnik kennen, die **vollständige Induktion**. Wenn es so etwas gibt, dann liegt die Frage nach der unvollständigen Induktion nahe. Gibt es so etwas? Na klar! Wir wenden die unvollständige Induktion, ohne es zu wissen, sogar täglich an: Seit eurer Geburt seid ihr daran gewöhnt, dass nach einer Nacht immer wieder die Sonne aufgeht. Ihr habt das so oft erlebt, dass für euch ganz klar ist, dass auch nach der morgigen Nacht wieder ein Tag kommt. Das ist unvollständige Induktion, denn wir können nicht wirklich sicher sein, dass auch in Zukunft jedes Mal auf die Nacht ein Tag folgt. Da es aber an den letzten 8000 Tagen so war, nehmen wir ohne Weiteres an, dass es auch in Zukunft so sein wird.
Mit der vollständigen Induktion können wir beweisen, dass eine von n abhängige Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen gilt. Diese Beweistechnik hat sehr viel zu tun mit japanischen Domino-Olympiaden. Wir nehmen an, dass es unendlich viele Dominosteine gibt, die wir durchnummerieren können. Weiterhin nehmen wir an, dass alle Dominosteine mathematisch exakt gleich sind und auch ihr Abstand voneinander mathematisch exakt derselbe ist. Wie können wir beweisen, dass alle Dominosteine umkippen, wenn wir den ersten anstoßen? Wir brauchen nur zwei Schritte: (1) Wir müssen zeigen, dass der erste Stein wirklich fällt. Das nennt man den **Induktionsanfang**. (2) Da alle Steine exakt gleich sind und auch ihr Abstand immer exakt derselbe ist, reicht es, wenn wir für *irgendein* n, also irgendeine Stelle, zeigen können, dass der $n+1$-te Stein fällt, wenn der n-te kippt. Das nennt man den **Induktionsschluss**. Dazu dürfen wir natürlich benutzen, dass die ersten n Steine auch schon gekippt sind; das ist die **Induktionsannahme**.
Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- (natürlich!) das Prinzip der vollständigen Induktion,
- das Summensymbol, das Produktsymbol, das Fakultätszeichen und die Binomialkoeffizienten,
- der binomische Lehrsatz,
- der Satz von der geometrischen Reihe

und ihr Verständnis.
Wir wissen, dass ihr mit dieser Beweismethode zu Beginn Verständnisschwierigkeiten haben könntet. Die hatten wir auch! Wir werden daher

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_2

mit vielen Beispielen versuchen, euch die Schwierigkeiten aus dem Weg zu räumen.

2.1 Das Prinzip

Wir setzen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ als bekannt voraus. Noch Leopold Kronecker (1823–1891) sagte: *„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk"* [Weber 1893]. Mit den Mitteln der Mengenlehre kann man aber den lieben Gott heraushalten und auch die natürlichen und ganzen Zahlen sauber beschreiben oder ein Axiomensystem wie das von Giuseppe Peano (1858– 1932) postulieren, doch das ist nicht Aufgabe der Analysis. Wir schreiben $\mathbb{N}_{>0}$ für die natürlichen Zahlen ohne die Null.

Wir springen gleich mitten rein: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und für jedes $n \geq n_0$ sei $A(n)$ eine Aussage. Um die Richtigkeit dieser Aussagen zu beweisen, macht ihr Folgendes:

Satz 2.1.1: Das Prinzip der vollständigen Induktion

1. **Induktionsanfang**, man zeige:

$$A(n_0) \text{ ist wahr.}$$

2. **Induktionsschluss**, man zeige:

   Wenn $A(n)$ für <u>irgendein</u> n wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann gilt die Aussage bereits für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$. Die Annahme, dass $A(n)$ für irgendein n richtig sei, heißt **Induktionsannahme** (**IA**).

Als erstes Beispiel soll eine Anekdote dienen, die dem jungen Carl Friedrich Gauß (1777–1855) zugeschrieben wird.

Beispiel 2.1.2

Er und seine Mitschüler sollten die Zahlen von 1 bis 100 summieren, und Gauß fand eine sehr eindrucksvolle Lösung:

$$
\begin{aligned}
&1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100\\
&\quad= \quad 1 \quad + 2 \quad + 3 + \ldots \quad +49 \quad + 50\\
&\quad\quad + 100 \quad + 99 \quad + 98 + \ldots \quad +52 \quad + 51\\
&\quad= (1{+}100) + (2{+}99) + (3{+}98) + \ldots + (49+52) + (50{+}51)\\
&\quad= 50 \cdot 101\\
&\quad= 5050
\end{aligned}
$$

Die Beobachtung des kleinen Gauß war also, dass die erste und letzte Zahl in der Summe 101 ergeben, die zweite und vorletzte ebenfalls 101, und so weiter. Von diesen Paaren gibt es 50 Stück, fertig!

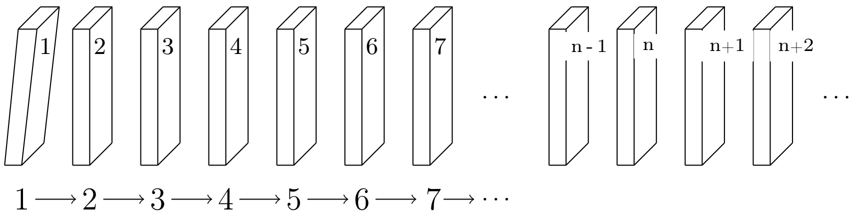

Abbildung 2.1.1. Vollständige Induktion, an Dominosteinen erklärt

Das ist *keine* vollständige Induktion, aber die bringen wir jetzt ins Spiel.

Lemma 2.1.3: Die Gauß'sche Summenformel

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>0}: \quad 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis. Hier ist $n_0 = 1$. Der Induktionsanfang ist

$$A(n_0): \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

und das ist offenbar richtig. Nun kommt der Induktionsschluss. Wir machen die Induktionsannahme (IA), dass für irgendein n die Aussage

$$A(n): \quad 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

richtig ist. **Achtung:** Ihr dürft auf keinen Fall annehmen, dass wir die Aussage des Lemmas voraussetzen! Dann wäre der „Beweis“ natürlich komplett sinnlos! Im Gegensatz zur Aussage des Lemmas nehmen wir *nicht* an, dass schon alles *für alle* n gilt!

Wir müssen nun zeigen, dass aus der Gültigkeit der Aussage für irgendein n auch die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt. Das machen wir durch simples Rechnen:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{(IA)}}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

und das ist $A(n+1)$. □

Es ist mühsam, Summen immer mit den Pünktchen schreiben zu müssen. Daher führen wir an dieser Stelle eine wichtige Notation ein.

Definition 2.1.4: Das Summensymbol

Für $n, m \in \mathbb{N}$ definieren wir durch

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \quad \text{für } m \leq k \leq n,$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \quad \text{für } n < m, \text{ „leere Summe“},$$

das **Summensymbol**.

Auch wenn das Summensymbol beim Erstkontakt etwas abschreckend wirken kann, gibt es keinen Grund zur Scheu. Wir wollen euch anhand einiger Beispiele zeigen, wie simpel das Summensymbol eigentlich ist.

Beispiele 2.1.5

(a) Die Summe über die ersten $n+1$ natürlichen Zahlen kann mithilfe des Summenzeichens etwa als

$$0+1+2+\cdots+n=\sum_{k=0}^{n} k$$

geschrieben werden. Für $n=3$ ist also ganz konkret

$$\sum_{k=0}^{3} k = 0+1+2+3 = 6.$$

(b) Analog können wir auch die Summe über die Quadrate der ersten $n+1$ natürlichen Zahlen notieren:

$$0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=0}^{n} k^2$$

Für $n = 3$ ist also ganz konkret

$$\sum_{k=0}^{3} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14.$$

(c) Das Schöne am Summensymbol ist, dass das Vorgehen beim Bilden der entsprechenden Summe auch in noch so allgemeinen Fällen immer das gleiche bleibt, etwa, wenn über bestimmte Zahlen $f(k)$ (Funktionswerte) abhängig von k summiert wird:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

Für $n = 4$ und $f(k) = \frac{1}{k(k+1)}$ ist beispielsweise

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} f(k) &= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \\ &= \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Damit können wir die Aussage des Lemmas 2.1.3 eleganter schreiben als:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Eine wichtige Funktion, die wir in der Analysis ständig benötigen, ist die Fakultät.

Definition 2.1.6: Die Fakultät

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$n! := \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n & ; n > 0 \end{cases}$$

die **Fakultät** von n.

Die Fakultät ist eine sehr schnell wachsende Funktion von n, denn

$$0! = 1! = 1, \qquad 2! = 2 \cdot 1 = 2,$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,$$

sehen noch harmlos aus, aber bereits für $n = 17$ ist

$$17! = 355687428096000.$$

Wie schon bei der Summe ist es unangenehm, bei der Fakultät auf die Pünktchennotation zurückgreifen zu müssen. Auch hier gibt es ein elegantes Symbol.

Definition 2.1.7: Das Produktsymbol

Für $n, m \in \mathbb{N}$ definieren wir durch

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n & ; n \geq m \\ 1 & ; n < m \text{ „leeres Produkt“} \end{cases}$$

das **Produktsymbol**.

Das Produktsymbol funktioniert im Wesentlichen wie das Summensymbol. Denkt euch statt dem „+“ nun einfach ein „·“!

Beispiel 2.1.8

1. So ist das Produkt der ersten n **positiven** natürlichen Zahlen beispielsweise
$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!,$$
also nichts anderes als die Fakultät von n.
2. Achtung, das Produkt der ersten $n+1$ natürlichen Zahlen wäre
$$\prod_{k=0}^{n} k = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = 0,$$
da jetzt mit 0 multipliziert wird, die nun dabei ist!
3. Entsprechend zum Summensymbol kann nun auch das Produkt der Quadrate der ersten n positiven natürlichen Zahlen formuliert werden, und zwar als
$$\prod_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot n^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n)^2 = (n!)^2 .$$

Beispiel 2.1.9

Betrachten wir die dreielementige Menge $\{1, 2, 3\}$, zu der wir sechs verschiedene Anordnungen finden:

$$\begin{array}{ccc} (1,2,3) & (2,1,3) & (3,1,2) \\ (1,3,2) & (2,3,1) & (3,2,1) \end{array}$$

Für $n = 3$ finden wir also sechs Anordnungen und $6 = 3!$. Gilt dieser Zusammenhang immer? Ja!

Wir können nun einen brauchbaren Satz formulieren, der über die möglichen Anordnungen von n Elementen Auskunft gibt.

Satz 2.1.10

Sei $n \geq 1$. Die Anzahl aller möglichen Anordnungen der Elemente einer n-elementigen Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist $n!$.

Beweis. Wir beweisen den Satz mit vollständiger Induktion. Für den Induktionsanfang wählen wir $n_0 = 1$. Für eine einelementige Menge $\{a_1\}$ gibt es natürlich nur genau eine Anordnung, nämlich $\{a_1\}$, und tatsächlich ist $1! = 1$. Nun zum Induktionsschluss, wobei wir die Induktionsannahme machen dürfen, dass die Aussage für irgendein n gilt. Hier hilft kein einfaches Losrechnen mehr, sondern wir brauchen eine kluge Überlegung:

Die Anordnungen von $\{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ zerfallen in $(n + 1)$ Klassen C_k, $k = 1, 2, \ldots, n + 1$, wie folgt: C_k hat a_k an der ersten Stelle und die n restlichen a_j's in beliebiger Anordnung, also:

$$\begin{aligned} C_1 &= (a_1, \ldots) \\ C_2 &= (a_2, \ldots) \\ &\vdots \\ C_n &= (a_n, \ldots) \\ C_{n+1} &= (a_{n+1}, \ldots) \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Induktionsannahme, nach der es für irgendein n genau $n!$ verschiedene Anordnungen gibt. Alle Pünktchen in den Mengen C_k stehen ja für n Elemente, und diese Elemente können jeweils in $n!$ verschiedenen Anordnungen auftreten. Das heißt, wir können jedes C_k in $n!$ unterschiedlichen Anordnungen angeben. Da es $(n+1)$ verschiedene C_k gibt, ist die Anzahl aller Anordnungen insgesamt also

$$n! \cdot (n + 1) = (n + 1)!,$$

was zu beweisen war. □

An dieser Stelle lohnt es sich, auf die sogenannten Binomialkoffizienten zu sprechen zu kommen. Ihr werdet sehen, dass diese viele recht komplizierte Ausdrücke sehr elegant aussehen lassen können.

Definition 2.1.11: Die Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, heißen die Zahlen

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \tag{2.1}$$

(lies: „n über k“) die **Binomialkoeffizienten**. Für $k > n$ soll

$$\binom{n}{k} := 0$$

gelten. Zur Vollständigkeit erlauben wir noch $k \in \mathbb{Z}$ und definieren

$$\binom{n}{k} := 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k < 0. \tag{2.2}$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man k Objekte aus einer n-elementigen Menge anordnen kann, wenn die Reihenfolge nicht beachtet wird. Der Binomialkoeffizient ist also die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Aus der Definition folgen übrigens sofort die Werte

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = n.$$

Für uns ist zudem interessant, dass die Binomialkoeffizienten symmetrisch sind, was in folgendem Lemma zum Ausdruck kommt.

Lemma 2.1.12

Für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \tag{2.3}$$

Beweis. Wegen (2.1) ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Erweitern wir jetzt mit $(n-k)!$, dann folgt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot [(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 2 \cdot 1]}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}.\end{aligned}$$

□

Neben dieser Symmetrie ist eine weitere Eigenschaft der Binomialkoeffizienten für uns wichtig, nämlich eine Summenformel.

Lemma 2.1.13

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{2.4}$$

Beweis. Der Fall ist klar für $k \geq n$ und $k \leq 0$. Sei daher $0 < k < n$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &\overset{(2.3)}{=} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k) \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

□

In der Analysis (und nicht nur dort!) benötigt man den berühmten **binomischen Lehrsatz**, von dem wir an dieser Stelle gleich eine erste Version präsentieren. Zuerst aber wollen wir euch an die Schule erinnern, namentlich an die **binomischen Formeln**.

Beispiel 2.1.14

Ihr wisst z. B. sicher noch, dass

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

gilt. Ist aber $(x+y)^3$ gesucht, müsst ihr vermutlich schon zu rechnen anfangen, und da sollte

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

herauskommen. Blicken wir auf die Potenzen, dann fangen sie mit x^3y^0 an, dann kommt x^2y (die Potenz von x geht einen 'runter, dafür geht die Potenz von y einen 'rauf), dann kommt xy^2 (die Potenz von x geht noch einen 'runter, dafür geht die Potenz von y einen 'rauf), und schließlich $x^0 \cdot y^3$. Da steckt offenbar ein Bildungsgesetz hinter! Aber es steckt auch ein Bildungsgesetz hinter den Koeffizienten $1, 3, 3, 1$ vor den Produkten,

$$(x+y)^3 = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2y + \mathbf{3}xy^2 + \mathbf{1}y^3,$$

denn das sind gerade die Binomialkoeffizienten.

Satz 2.1.15: Binomischer Lehrsatz

Sind $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{2.5}$$

Beweis. Wir beweisen den binomischen Lehrsatz mit vollständiger Induktion. Für den Induktionsanfang setzen wir $n_0 = 0$ und rechnen $(x+y)^0 = 1$, sowie

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1.$$

Damit ist der Anfang gemacht. Nun zum Induktionsschluss. Wir nutzen einen (sehr kleinen) Trick, in dem wir die Zerlegung

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot x + (x+y)^n \cdot y \tag{2.6}$$

verwenden. Für $(x+y)^n$ dürfen wir nun die Induktionsannahme benutzen. Damit gilt

$$(x+y)^n \cdot x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k \overset{\binom{n}{n+1}=0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k,$$

wobei wir einfach nur einen Term addiert haben, dessen Wert null ist. Für den zweiten Term rechnen wir

$$(x+y)^n \cdot y = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \overset{\text{Indexverschiebung}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k.$$

Dazu können wir nun problemlos den Term $\binom{n}{-1} x^{n+1} y^0$ addieren, der wegen (2.2) gleich null ist. Dann haben wir

$$(x+y)^n \cdot y = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k.$$

Jetzt brauchen wir nur noch alles wieder in (2.6) zusammenzusetzen:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \underbrace{\left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\}}_{=\binom{n+1}{k} \text{ nach } (2.4)} x^{n+1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k,
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. □

Es gibt eine sehr anschauliche Form der Darstellung für die Binomialkoeffizienten, die man **Pascal'sches Dreieck** nennt. Allerdings war Blaise Pascal (1623–1662) beileibe nicht der Erste, der auf diesen Zusammenhang gestoßen ist. Wir kennen dieses Dreieck auch aus der frühen chinesischen Mathematik und es ist sicher auch anderswo schon aufgetaucht. Wir notieren die Binomialkoeffizienten im Pascal'schen Dreieck bis $n = 5$:

$$\begin{array}{r|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Die Formel (2.4) sagt nun nichts anderes, als dass jeder Binomialkoeffizient im Pascal'schen Dreieck die Summe der beiden links und rechts in der Zeile über ihm stehenden Binomialkoeffizienten ist.

Wir beenden unseren Ausflug in die Welt der vollständigen Induktion nun mit einem interessanten Resultat, das wir später wieder aufnehmen werden.

Satz 2.1.16: Satz von der geometrischen Summe

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{2.7}$$

Beweis. Natürlich denken wir bei dem Beweis sofort an vollständige Induktion, aber wir wollen hier einen viel elementareren Beweis angeben, den man auch schon in der Schule behandeln kann. Wir definieren die Summe

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

Jetzt multiplizieren wir die Summe mit x und erhalten

$$xS_n = x + x^2 + x^3 + \ldots x^n + x^{n+1}.$$

Nun bilden wir die Differenz

$$S_n - xS_n = (1 - x)S_n = 1 - x^{n+1},$$

und das ergibt für $x \neq 1$

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

□

Einen alternativen Beweis mithilfe vollständiger Induktion überlassen wir euch als Übungsaufgabe. Aus Satz 2.1.16 folgt noch eine hübsche Darstellungsformel, auf die wir nicht verzichten wollen.

Korollar 2.1.17

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x^n - 1 = (x - 1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

Beweis. Aus (2.7) folgt für $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Multiplizieren wir jetzt mit $(x - 1)$, dann folgt

$$(x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^n - 1.$$

Das Korollar gilt allerdings auch für $x = 1$, wovon ihr euch leicht durch Einsetzen von $x = 1$ überzeugen könnt. □

Zusammenfassung

Was solltet ihr aus diesem Kapitel mitnehmen?
Aus diesem Kapitel solltet ihr unbedingt das **Prinzip der vollständigen Induktion** mitnehmen! Ihr habt im vorherigen Kapitel bereits die drei wesentlichen Beweistechniken *direkter Beweis*, *Beweis durch die Kontraposition* und *Widerspruchsbeweis* kennengelernt. Die vollständige Induktion ist die vierte wesentliche Beweistechnik, speziell für Aussagen über die natürlichen Zahlen, und bildet mit den anderen drei Techniken die Grundlage für alles Spätere. Einige besonders wichtige Formeln, die typischerweise durch vollständige Induktion bewiesen werden, habt ihr auch gleich kennengelernt: etwa die **Gauß'sche Summenformel**

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

den **binomischen Lehrsatz**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und den **Satz von der geometrischen Summe**

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere die letzten beiden Beispiele werden euch noch häufig begegnen. Es lohnt sich also für euch, diese gut im Hinterkopf zu behalten.
Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Wie lautet das Prinzip der vollständigen Induktion?*
- *Was für Aussagen lassen sich damit beweisen?*
- *Wie lautet die Summe der ersten 100 Zahlen? Wie lautet die Summe der ersten n natürlichen Zahlen?*
- *Was bedeutet $\binom{n}{k}$?*
- *Wo taucht der Binomialkoeffizient zum Beispiel auf?*
- *Wie lautet der binomische Lehrsatz?*
- *Wie lautet der Satz von der geometrischen Summe?*
- *Was passiert mit der geometrischen Summe, wenn das n immer größer wird?*

Zum Einüben der Begriffe dieses Kapitels solltet ihr euch mal an einigen der folgenden Aufgaben versuchen.

2.2 Aufgaben

A.2.1 Man beweise, dass für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

A.2.2 Man beweise, dass für die Summe der ersten n Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

A.2.3 Man beweise, dass für die Summe der ersten n Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

A.2.4 Für die allgemeine Potenzsumme

$$S_n^p := 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

zeige man, dass die von Pascal stammende Identität

$$(p+1)S_n^p + \binom{p+1}{2}S_n^{p-1} + \binom{p+1}{3}S_n^{p-2} + \cdots + S_n^0 = (n+1)^{p+1} - 1$$

für alle $n, p \in \mathbb{N}$ gilt.

A.2.5 Man bestimme einen Ausdruck für die Potenzsumme S_n^4.

A.2.6 Man beweise, dass für die Summe der n-ten Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

A.2.7 Man beweise, dass für die alternierende Summe der n-ten Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

A.2.8 Man beweise die folgenden Aussage:

$$k \leq l \implies \binom{l+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{l} \binom{m}{k} \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

A.2.9 Man beweise die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

mithilfe vollständiger Induktion.

A.2.10 Man berechne folgende Summen:

$$(a) \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{3^k} \qquad (b) \sum_{k=0}^{4} \frac{2^k}{3^k} \qquad (c) \sum_{k=2}^{5} 2^k \qquad (d) \sum_{k=1}^{4} (-3)^k.$$

3 Körper

Wozu?

Körper?! Warum denn das jetzt? Machen wir nun Analysis oder doch eher Algebra? Keine Angst, wir bleiben natürlich bei der Analysis und dieses Kapitel wird ganz kurz. Es dient nur dazu, an die „offensichtlichen" Rechenregeln zu erinnern und ein paar wichtige Dinge zu notieren (wie die Dreiecksungleichung), die man in der Analysis unbedingt benötigt. Denn tatsächlich gibt es so etwas wie *ist kleiner als* oder *ist größer als* und damit Ungleichungen erst in angeordneten Körpern.
Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- der Begriff des Körpers,
- die Eigenschaft sogar ein archimedisch angeordneter Körper zu sein,
- der Betrag,
- die wichtigsten Regeln für Ungleichungen

und ihr Verständnis.
Entscheidend für euch: Wir werden diese Begriffe gleich auch immer auf die euch vertrauten Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ anwenden.

3.1 Was ist ein Körper?

Wir betrachten eine Menge $\mathbb{K}$ (denkt einfach an die Menge der Brüche), auf der zwei Verknüpfungen definiert sind, die wir „Addition" und „Multiplikation" nennen wollen:

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto x + y, \\ \cdot : \quad & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y. \end{aligned}$$

Definition 3.1.1: Körper

Wir nennen $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ einen **Körper**, wenn die folgenden Axiome I, II und III erfüllt sind.

I. **Axiome der Addition**
(A.1) Assoziativgesetz

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K} : \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

(A.2) Kommutativgesetz

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_3

$$\forall x, y \in \mathbb{K}: \quad x + y = y + x$$

(A.3) Existenz des neutralen Elements

$$\exists 0 \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbb{K}: \quad x + 0 = x$$

(A.4) Existenz des inversen Elements

$$\forall x \in \mathbb{K}\ \exists(-x) \in \mathbb{K}: \quad x + (-x) = 0$$

II. **Axiome der Multiplikation**
(M.1) Assoziativgesetz

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K}: \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

(M.2) Kommutativgesetz

$$\forall x, y \in \mathbb{K}: \quad x \cdot y = y \cdot x$$

(M.3) Existenz des neutralen Elements

$$\exists 1 \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbb{K}: \quad x \cdot 1 = x$$

(M.4) Existenz des inversen Elements

$$\forall x \in \mathbb{K} \text{ mit } x \neq 0\ \exists x^{-1} \in \mathbb{K}: \quad x \cdot x^{-1} = 1$$

III. **Distributivität**
(D) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}: \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Macht euch bitte klar, dass ein Körper streng genommen ein Tripel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $\mathbb{K}$, versehen mit einem Additionsoperator $+$ und einem Multiplikationsoperator $\cdot$ ist. Dennoch spart man sich häufig etwa Schreibarbeit und spricht etwas lax von einem Körper $\mathbb{K}$. Wir betrachten als Beispiel die drei Zahlenmengen, die wir schon kennen.

Beispiel 3.1.2

- $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist kein Körper, denn es mangelt an additiven inversen Elementen, vgl. (A.4).
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, denn (M.4) ist offenbar verletzt.
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ hingegen ist ein Körper.
- Wie wir später sehen werden: Auch die reellen sowie die komplexen Zahlen, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ beziehungsweise $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, sind Körper.

Ein Körper ist für uns in der Analysis so interessant, weil wir in ihm alle unsere Grundrechenarten durchführen können, ohne den Körper zu verlassen. Um zu demonstrieren, dass es auch denkbar einfache Körper geben kann, möchten wir euch noch den Restklassenkörper $\mathbb{F}_2$ vorstellen.

Beispiel 3.1.3

Schon die Menge $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ wird mit der wie folgt definierten Addition und Multiplikation zu einem Körper:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Der Körper $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ wird häufig **Restklassenkörper modulo** 2 genannt.

3.2 Angeordnete Körper

Definition 3.2.1: Angeordnete Körper

Ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt **angeordnet**, wenn in $\mathbb{K}$ Elemente als positiv $(x > 0)$ ausgezeichnet sind, so dass die **Axiome der Anordnung** erfüllt sind:

(O.1) Trichotomie: Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Beziehungen

$$x > 0, \quad x = 0, \quad -x > 0.$$

(O.2) Abgeschlossenheit bzgl. $+$:

$$(x > 0 \wedge y > 0) \implies x + y > 0$$

(O.3) Abgeschlossenheit bzgl. $\cdot$:

$$(x > 0 \wedge y > 0) \implies x \cdot y > 0$$

Jetzt kann man leicht auch $x > y$, $x < y$, $x \leq y$ und $x \geq y$ definieren:

Definition 3.2.2: Relationen in angeordneten Körpern

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper, dann definieren wir:

$$\begin{aligned} x > y &:\Longleftrightarrow x - y > 0 \\ x < y &:\Longleftrightarrow -(x-y) > 0 \\ x \leq y &:\Longleftrightarrow x < y \vee x = y \\ x \geq y &:\Longleftrightarrow x > y \vee x = y \end{aligned}$$

Wir wollen gleich einmal schauen, wie sich die uns bekannten Zahlenmengen in diesem Kontext einordnen lassen.

Beispiel 3.2.3

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein angeordneter Körper.
- $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ist kein angeordneter Körper, da sowohl $1 > 0$ als auch $-1 = 1 > 0$ und damit die Trichotomie verletzt sind.
  Achtung: -1 meint hier nicht die ganze Zahl $-1 \in \mathbb{Z}$ (die es in $\mathbb{F}_2$ nicht gibt), sondern das inverse Element von 1 in $\mathbb{F}_2$! Dieses ist durch 1 gegeben, da $1 \cdot 1 = 1$.
- Was wir erst später sehen werden: Auch die reellen Zahlen versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bilden einen angeordneten Körper. Die komplexen Zahlen versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bilden hingegen keinen angeordneten Körper.

Einfache Folgerungen

Sei ab jetzt $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}$ genau eine der drei Beziehungen

$$x > y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Daher kann man definieren:

Definition 3.2.4: Maximum und Minimum

Das **Maximum** und das **Minimum** von zwei Elementen ist

$$\max\{x, y\} := \begin{cases} x \, ; \, x \geq y \\ y \, ; \, x < y \end{cases} \quad \text{sowie} \quad \min\{x, y\} := \begin{cases} x \, ; \, x \leq y \\ y \, ; \, x > y \end{cases}.$$

Weiterhin gilt

Lemma 3.2.5

1. Die **Translationsinvarianz**:
$$\forall a \in \mathbb{K}: \quad x > y \implies a + x > a + y. \tag{3.1}$$
2. Die **Spiegelungseigenschaft**:
$$x > y \implies -x < -y. \tag{3.2}$$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{K}$.

1. Die Translationsinvarianz folgt daraus, dass
$$x - y = x - y + 0 = x - y + (a - a) = (x + a) - (y + a)$$
und damit
$$x > y \implies x - y > 0 \implies (x + a) - (y + a) > 0 \implies x + a > y + a$$
gilt.
2. Für die Spiegelungseigenschaft bemerken wir zunächst einmal, dass wegen (O.1) und (O.2)
$$x > 0 \implies -x < 0$$
gilt. Damit folgt:
$$\begin{aligned} x > y &\implies x - y > 0 &&\implies -(x - y) < 0 \\ &\implies (-x) - (-y) < 0 &&\implies -x < -y. \end{aligned}$$

□

Wir listen hier ein paar weitere Folgerungen der Vollständigkeit halber auf.

Lemma 3.2.6

Alle Größen seien aus $\mathbb{K}$. Dann gelten:

(a) $((x < y) \wedge (a < b)) \implies x + a < y + b$

(b) $((x < y) \wedge (a > 0)) \implies ax < ay$

(c) $((0 \leq x < y) \wedge (0 \leq a < b)) \implies ax < by$

(d) $((x < y) \wedge (a < 0)) \implies ax > ay$

(e) $x \neq 0 \implies x^2 > 0$

(f) $x > 0 \implies x^{-1} > 0$

(g) $0 < x < y \implies x^{-1} > y^{-1}$

Den Beweis überlassen wir euch als Übungsaufgabe.

3.3 Der Betrag

Sei im Folgenden $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper.

Definition 3.3.1: Der Betrag

Für jedes $x \in \mathbb{K}$ sei der **Betrag** definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x \,;\, x \geq 0 \\ -x \,;\, x < 0 \end{cases}. \tag{3.3}$$

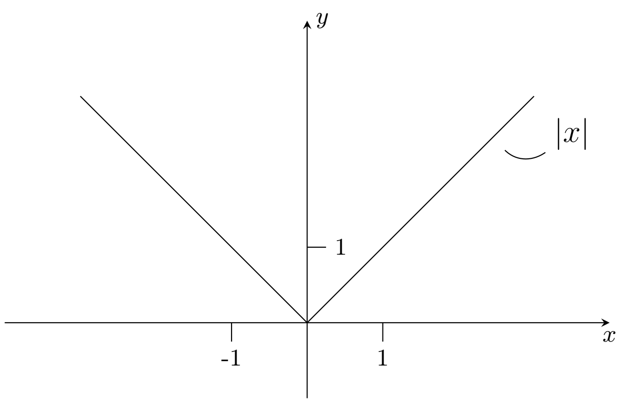

Abbildung 3.3.1. Die Betragsfunktion

Für die Analysis ist die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ von kaum zu überschätzender Bedeutung! Die wichtigsten Eigenschaften des Betrages fassen wir gleich im folgenden Satz zusammen.

Satz 3.3.2: Rechenregeln für den Betrag

Seien $x, y \in \mathbb{K}$. Dann gelten für den Betrag die folgenden Beziehungen:

(a) $|x| = \max\{x, -x\}$ (3.4)

(b) $|x| \geq 0 \wedge |x| = 0 \iff x = 0$ (3.5)

(c) $|xy| = |x||y|$ (3.6)

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**Dreiecksungleichung**) (3.7)

Beweis. Wir gehen der Reihe nach vor.

(a) folgt sofort aus der Definition von $\max\{x, y\}$.

(b) folgt sofort aus der Definition (3.3).

(c) ist trivial für den Fall $x, y \geq 0$. Seien $x := \pm x_0$ und $y := \pm y_0$ mit $x_0, y_0 \geq 0$. Dann folgt

$$|xy| = |\pm x_0 y_0| = |x_0 y_0| = |x_0||y_0| = |x||y|.$$

(d) Wegen $x \leq |x|, y \leq |y|$ folgt

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Wegen $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$ folgt ebenso

$$-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Fassen wir beide Ungleichungen zusammen, dann ergibt sich

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

□

Wir haben durch (M.4) in Definition 3.1.1 das inverse Element von x als x^{-1} eingeführt. Da die uns interessierenden angeordeneten Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind, schreiben wir natürlich

$$x^{-1} =: \frac{1}{x} \quad \text{sowie} \quad yx^{-1} =: \frac{y}{x},$$

was euch sicher bekannt vorkommt. Damit formulieren wir nun auch

Lemma 3.3.3

Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ mit $y \neq 0$ gilt:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Beweis. Es gilt

$$x = \frac{x}{y} y \overset{(3.6)}{\implies} |x| = \left|\frac{x}{y}\right| |y| \implies \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

□

Ungleichungen und der Umgang mit ihnen bilden einen Kern der analytischen Techniken. Daher ist es gut, neben der Dreiecksungleichung auch weitere Ungleichungen im Repertoire zu haben.

Lemma 3.3.4

Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gelten

$$|x - y| \geq |x| - |y| \quad \text{und} \quad |x + y| \geq |x| - |y|.$$

Beweis. Wir verwenden die Dreiecksungleichung. Es gilt

$$x = (x - y) + y \implies |x| \leq |x - y| + |y|,$$

und das ist schon die erste Ungleichung im Lemma. Setzen wir $-y$ anstelle von y, folgt auch die zweite. □

3.4 Archimedische Körper

Die Eigenschaft eines angeordneten Körpers, „archimedisch" zu sein, ist eine der wesentlichen Voraussetzungen für die Analysis.

Definition 3.4.1: Archimedizität

Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt **archimedisch**, wenn es für alle $x, y \in \mathbb{K}$ mit $x, y > 0$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$nx > y$$

gilt.

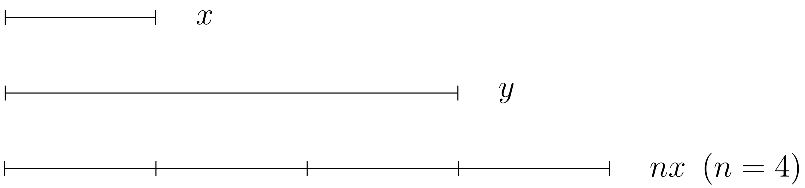

Abbildung 3.4.1. Illustration der Archimedizität

Satz 3.4.2

Der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist archimedisch.

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{Q}$. Der Fall $x \geq y$ ist klar. Sei also $0 < x < y$. Dann gibt es natürliche Zahlen $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$x = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{und} \quad y = \frac{q_1}{q_2}.$$

Sei $r := p_2 q_2$ der Hauptnenner und $p := p_1 q_2$ und $q := p_2 q_1$. Damit folgt

$$x = \frac{p}{r} \quad \text{und} \quad y = \frac{q}{r}.$$

Nach Voraussetzung gilt $p \geq 1$, also folgt $pq \geq q$. Weiterhin ist $r \geq 1$ und damit ist $qr \geq q$ beziehungsweise $q \geq \frac{q}{r}$. Setzen wir nun $n := rq$, dann folgt

$$nx = rq\frac{p}{r} = pq \geq q \geq \frac{q}{r} = y.$$

□

Die Bedeutung der Archimedizität diskutieren wir in folgendem Lemma.

Lemma 3.4.3

Ist $\mathbb{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper, dann gelten

(a) $\forall x \in \mathbb{K} \;\; \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}: \quad n_1 > x$ und $-n_2 < x$.
(b) $\forall x \in \mathbb{K} \;\; \exists_1 n \in \mathbb{Z}: \quad n \leq x < n+1$. Dieses n wird mit

$$\lfloor x \rfloor$$

bezeichnet und heißt “**floor**” oder **untere Gauß-Klammer**. Die untere Gauß-Klammer ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.
(c) $\forall x \in \mathbb{K} \;\; \exists_1 m \in \mathbb{Z}: \quad m-1 < x \leq m$. Dieses m wird mit

$$\lceil x \rceil$$

bezeichnet und heißt "**ceiling**" oder **obere Gauß-Klammer**. Die obere Gauß-Klammer ist die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist.

Beweis. Die Folgerungen (a), (b), (c) sind alle klar. □

Satz 3.4.4

Ist $\mathbb{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper, dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}_{>0} : \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Beweis. Wir schreiben nach Definition 3.4.1

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

□

Macht euch bitte klar, dass Satz 3.4.4 die Existenz „unendlich kleiner" Zahlen in archimedisch angeordneten Körpern ausschließt! Besonders für spätere Konvergenzuntersuchungen bei Folgen wird dieser Umstand entscheidend sein. Zum Schluss unseres Ausflug in die Welt der Körper wollen wir noch eine wichtige Ungleichung ansprechen:

Lemma 3.4.5: Bernoulli'sche Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $x \geq -1$ gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Versucht euch mal selbst an dem Beweis. Als Hinweis beachtet bitte, dass wieder eine von n abhängige Aussage zu beweisen ist.

Zusammenfassung

Aus diesem Kapitel solltet ihr ein Verständnis darüber mitnehmen, was ein **Körper** ist. Ihr solltet stets parat haben, dass die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ einen Köper bilden, während etwa $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ keine Körper bilden! Falls ihr auch jetzt noch skeptisch fragt, was das mit den Körpern eigentlich sollte: Um es einfach zu machen, brauchen wir Körper deswegen, weil erst dort alle euch vertrauten Rechenoperationen funk-

tionieren, also $+, -, \cdot, \div$. Wenn man mag, kann man sich auf ähnlich heuristische Art und Weise auch **angeordnete** und **archimedisch angeordnete Körper** erklären.
In angeordneten Körpern wird das Vergleichen zwischen zwei Zahlen erst möglich und damit Dinge wie der Betrag und Ungleichungen. Besonders wichtige Regeln waren hier die Multiplikativität und die Dreiecksungleichung

$$|xy| = |x||y| \quad \text{sowie} \quad |x+y| \leq |x| + |y|,$$

die ihr noch oft brauchen werdet.
In der noch einmal erleseneren Klasse der archimedisch angeordneten Körpern kommt dann noch hinzu, dass wir jede noch so kleine Zahl mit einem Bruch „unterbieten" können. Oder anders: In archimedisch angeordneten Körpern gibt es keine „unendlich kleinen" Zahlen, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N}_{>0} : \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Wie wichtig diese Eigenschaft eigentlich ist, werdet ihr noch früh genug bei den Folgen merken! Bis dahin raten wir ganz besonders, euch die wesentlichen Regeln für den Betrag und die eben genannte Eigenschaft einzuprägen.
Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Was sind Körper und wozu braucht man sie?*
- *Welche Beispiele und Gegenbeispiele gibt es?* Hier solltet ihr insbesondere $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{F}_2$ und $\mathbb{Q}$ einordnen können.
- *Was sind angeordnete Körper und wozu braucht man sie? Welche Beispiele und Gegenbeispiele gibt es?* Auch hier solltet ihr insbesondere $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{F}_2$ und $\mathbb{Q}$ einordnen können.
- *Was sind archimedisch angeordnete Körper und wozu braucht man sie? Welche Beispiele gibt es?*
- *Wie lautet die Dreiecksungleichung?*

Zum Einüben der Begriffe dieses Kapitels solltet ihr euch mal an einigen der folgenden Aufgaben versuchen.

3.5 Aufgaben

A.3.1 Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 4$. Man zeige oder widerlege, dass

$$k! \geq 2^k$$

gilt.

A.3.2 Sei $\mathbb{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper und $x \in \mathbb{K}$ mit $x \geq -1$. Man beweise die Bernoulli'sche Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A.3.3 Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Die Verallgemeinerung der Bernoulli'schen Ungleichung lautet

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Man zeige oder widerlege, dass diese

(a) für $x_k > 0$ und $n \geq 1$ gilt.

(b) für $x_k > 0$ und $n \geq 2$ gilt.

A.3.4 Man beweise die folgende Ungleichung:

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$$

A.3.5 Man beweise die folgenden Aussagen, wobei alle Größen aus einem Körper $\mathbb{K}$ seien:

(a) $((x < y) \wedge (a < b)) \implies x + a < y + b$

(b) $((x < y) \wedge (a > 0)) \implies ax < ay$

(c) $((0 \leq x < y) \wedge (0 \leq a < b)) \implies ax < by$

(d) $((x < y) \wedge (a < 0))) \implies ax > ay$

(e) $\forall x \neq 0 :\ x^2 > 0$

(f) $x > 0 \implies x^{-1} > 0$

(g) $0 < x < y \implies x^{-1} > y^{-1}$

A.3.6 Man untersuche, ob die folgenden zehn Aussagen jeweils für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ wahr sind. Man gebe jeweils eine knappe Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(a) $-a \leq a$ (b) $\frac{1}{a} \leq a$ (c) $a \leq 2a$ (d) $a \leq a^2$

(e) $a \leq |a|$ (f) $-a \leq |a|$ (g) $-|a| \leq a$ (h) $|-a| \leq a$

(i) $a < b \implies a^2 < b^2$ (j) $a^2 < b^2 \implies a < b$

A.3.7

(a) Man zeige, $x + x^{-1} \geq 2$ für alle $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt.

(b) Für welche $x \in \mathbb{Q}_+$ gilt $x + x^{-1} = 2$?

A.3.8 Man zeige oder widerlege, dass

$$K := \left\{ r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}$$

ein Körper ist. Dabei seien Addition und Multiplikation in K wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} + : K \times K \to K, &\quad (r + s\sqrt{2}) + (r' + s'\sqrt{2}) := (r + r') + (s + s')\sqrt{2}, \\ \cdot : K \times K \to K, &\quad (r + s\sqrt{2}) \cdot (r' + s'\sqrt{2}) := (rr' + 2ss') + (rs' + r's)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

A.3.9 Man zeige oder widerlege, dass

$$K := \left\{ r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}$$

ein Körper ist. Dabei seien Addition und Multiplikation in K wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} + : K \times K \to K, &\quad (r + s\sqrt{2}) + (r' + s'\sqrt{2}) := (r + r') + (s + s')\sqrt{2}, \\ * : K \times K \to K, &\quad (r + s\sqrt{2}) * (r' + s'\sqrt{2}) := (rr' + ss') + (rs' + r's)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

A.3.10 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Man beweise die folgenden Aussagen:

$$\begin{array}{ll} (a) & \exists_1 k \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbb{K}:\ x + k = x \\ (b) & \forall x, y, a \in \mathbb{K}:\ x + a = y + a \implies x = y \\ (c) & \forall x \in \mathbb{K}\ \exists_1 y \in \mathbb{K}:\ x + y = 0 \\ (d) & -0 = 0 \\ (e) & \forall x \in \mathbb{K}:\ -(-x) = x \\ (f) & \forall x, y \in \mathbb{K}: -(x + y) = -x - y \end{array}$$

A.3.11 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Man beweise die folgenden Aussagen:

$$\begin{array}{ll} (a) & \exists_1 k \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbb{K}:\ x \cdot k = x \\ (b) & \forall x, y, a \in \mathbb{K} \text{ mit } a \neq 0:\ x \cdot a = y \cdot a \implies x = y \\ (c) & \forall x \in \mathbb{K} \text{ mit } x \neq 0\ \exists_1 y \in \mathbb{K}:\ x \cdot y = 1 \\ (d) & 1^{-1} = 1, \\ (e) & \forall x \in \mathbb{K}:\ x \neq 0 \implies \left(x^{-1}\right)^{-1} = x \\ (f) & \forall x, y \in \mathbb{K}:\ x, y \neq 0 \implies (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \end{array}$$

A.3.12 Man zeige, dass der Körper K aus A.3.8 bezüglich der Anordnung

$$r + s\sqrt{2} \gg 0 \ :\Longleftrightarrow\ r - s\sqrt{2} > 0$$

ein archimedisch angeordneter Körper ist. Dabei ist $>$ die gewöhnliche Anordnung auf $\mathbb{R}$.

4 Funktionen

Wozu?

Funktionen (von lat. *functio* = Verrichtung) bilden ein wesentliches Konzept in der modernen abstrakten Mathematik und werden je nach Kontext auch Abbildungen genannt. So spricht man beispielsweise in der (Linearen) Algebra oder analytischen Geometrie traditionell von Abbildungen, in der Analysis hingegen von Funktionen. Beide Begriffe sind aber synonym und meinen eindeutige Zuordnungen (Relationen bzw. Beziehungen) zwischen zwei Mengen X und Y. Obwohl man es in der (eindimensionalen reellen) Analysis hauptsächlich mit Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, sogenannten Folgen, oder mit Funktionen $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ zu tun hat, wollen wir uns in diesem Kapitel zunächst mit allgemeinen Funktionen zwischen beliebigen Mengen X und Y beschäftigen, deren spezifische Eigenschaften für sich genommen auch schon interessant sind, insbesondere weil keine weitere Struktur von den Mengen X und Y verlangt wird.
Zwar lässt der allgemeine (mengentheoretische) Blick auf Funktionen keine feinere Analyse, wie beispielsweise das Änderungsverhalten des Funktionswertes bei (kleinen) Änderungen des Arguments, zu, doch wir werden sehen, dass es zumindest der geeignete Rahmen ist, um die (eindeutige) Lösbarkeit von Gleichungen zu diskutieren.
Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- Definitions- und Wertemenge einer Funktion,
- Urbild einer Funktion,
- Komposition von Funktionen,
- Injektive, surjektive und bijektive Funktionen,
- Umkehrfunktion

und ihr Verständnis.

4.1 Worüber reden wir?

Im folgenden seien X und Y irgendwelche Mengen. Wenn euch das Wörtchen „irgendwelche“ Sorgen macht, dann dürft ihr gerne an $X, Y \subseteq \mathbb{K}$ für einen archimedisch angeordeneten Körper denken oder an $X, Y \subseteq \mathbb{Q}$ oder an $X, Y \subseteq \mathbb{R}$!

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_4

Definition 4.1.1: Funktionen

Ordnet eine Vorschrift f jedem $x \in D(f) \subseteq X$ eindeutig ein Element $y = f(x) \in Y$ zu, dann heißt f **Funktion** oder **Abbildung**. Als Schreibweisen verwenden wir $f\colon X \to Y$ oder $X \ni x \overset{f}{\mapsto} f(x) \in Y$ oder

$$f\colon X \to Y, \quad x \mapsto f(x).$$

Die Menge $D(f)$ heißt **Definitionsbereich** oder **Definitionsmenge** oder **das Urbild** von f, die Menge

$$W(f) := \{y \in Y \mid y = f(x), x \in D(f)\} \subseteq Y$$

ist der **Wertebereich** oder die **Wertemenge** oder **das Bild** von f.

Entscheidend an der Definition einer Funktion ist das Wort „eindeutig“: Jedem $x \in D(f)$ soll **eindeutig** ein Element $y = f(x) \in W(f)$ zugeordnet werden. Die Funktion f in der Abbildung 4.1.1, die einem $x \in D(f)$ zwei verschiedene $f(x)$ zuordnet (nämlich y und z), ist *keine* Funktion! Dass zwei verschiedene x dasselbe Bild haben, ist jedoch durchaus zulässig. Man denke an die Funktion $f(x) = x^2$, die beispielsweise $f(2) = f(-2) = 4$ erfüllt.

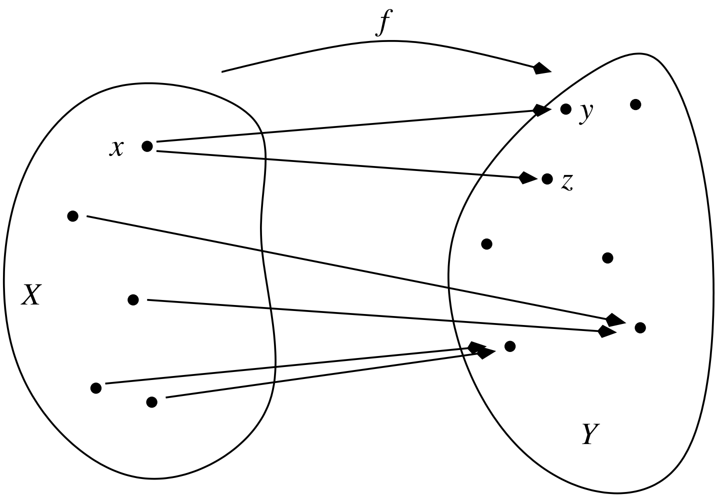

Abbildung 4.1.1. Eine Vorschrift f, die *keine* Funktion ist

Beispiel 4.1.2

(a) Der **Betrag** einer reellen Zahl kann auch als Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ aufgefasst werden. In diesem Fall ist $D(f) = \mathbb{R}$ und $W(f) = [0, \infty)$.

(b) Eine Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x)$ heißt auch **Polynom** n-ten Grades, falls

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Für den Definitionsbereich gilt immer $D(p) = \mathbb{R}$, wohingegen der Wertebereich auch kleiner sein kann. Beispielsweise ist $W(p) = [a_0, \infty)$, wenn p ein Polynom zweiten Grades der Form $p(x) = a_0 + x^2$ ist.

(c) Die trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto \sin(x), \\ \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto \cos(x), \\ \tan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto \tan(x) \end{aligned}$$

sind Funktionen im obigen Sinne mit Definitions- und Wertebereichen:

$$\begin{aligned} D(\sin) &= D(\cos) = \mathbb{R} \\ D(\tan) &= \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ W(\sin) &= W(\cos) = [-1, 1] \\ W(\tan) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aufgrund der 2π- bzw. π-Periodizität der trigonometrischen Funktionen kann auch $D(\sin) = D(\cos) = [0, 2\pi)$ sowie $D(\tan) = [0, \pi)$ gewählt werden.

(d) Die Rechenoperationen **Addition**, **Multiplikation** und **Division** können jeweils als Funktionen

$$\begin{aligned} \mathrm{add}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x + y, \\ \mathrm{mul}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x \cdot y, \\ \mathrm{div}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

aufgefasst werden. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} D(\mathrm{add}) &= D(\mathrm{mul}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ W(\mathrm{add}) &= W(\mathrm{mul}) = W(\mathrm{div}) = \mathbb{R}, \end{aligned}$$

aber man beachte $D(\mathrm{div}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da die Operation nicht definiert ist, falls der Nenner null ist.

(e) Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto f(n) =: x_n$$

heißt auch **reelle Folge**. Jeder natürlichen Zahl n wird eine reelle Zahl x_n zugeordnet, das sogenannte n-te Glied der Folge. Beispielsweise wird durch die Vorschrift $\mathbb{N} \ni n \overset{f}{\mapsto} 1/(n+1) \in \mathbb{R}$ die Folge $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ definiert. Eine ausführliche Darstellung des Themas folgt in Kapitel 5.

(f) Für eine beliebige Menge $A \subseteq X$ heißt die durch

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1\ ; x \in A \\ 0\ ; x \notin A \end{cases}$$

definierte Funktion $\mathbb{1}_A\colon X \to \mathbb{R}$ auch **charakteristische Funktion** oder **Indikatorfunktion** der Menge A. In diesem Fall ist $D(\mathbb{1}_A) = X$ und $W(\mathbb{1}_A) = \{0, 1\}$.

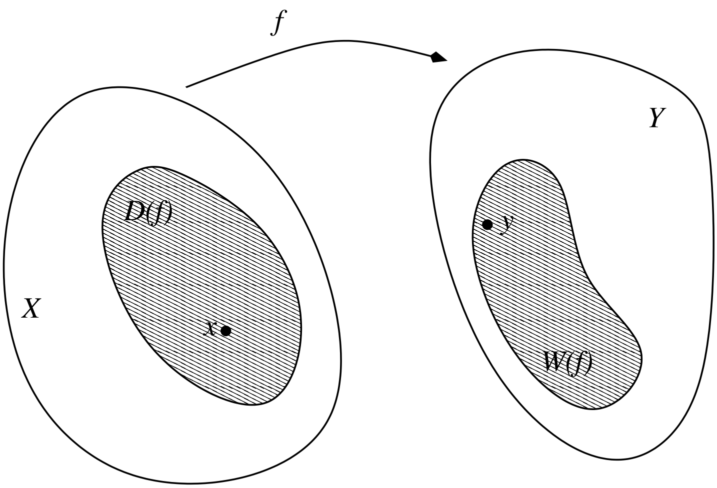

Abbildung 4.1.2. Eine Funktion und ihre Definitions- und Wertemenge

Wir haben Funktionen hier so großzügig definiert, dass ihr nicht immer haarklein Definitions- und Wertemenge auspuzzeln müsst. Im Fall der Funktion $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ dürft ihr also ruhigen Gewissens

$$\frac{1}{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

schreiben, obwohl der Definitionsbereich $D(1/\cdot) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ sicher nicht ganz $\mathbb{R}$ ist. Lasst euch dabei von der komischen Punktschreibweise nicht beirren. Wir unterscheiden zwischen einer **Funktion** f und einem **Funktionswert** $f(x)$. Macht euch bitte ganz klar, dass dies zwei grundlegend verschiedene Dinge sind! Wenn wir also die *Funktion* $f : x \mapsto 1/x$ meinen, schreiben wir auch $1/\cdot$ und verwenden den Punkt als „Platzhalter" für die x, die eingesetzt werden dürfen. Als Schreibweise steht $1/\cdot$ also für die Funktion, die ein x nimmt und ein $1/x$ zurückgibt.

Neben dem Wertebereich $W(f) \subseteq Y$ und dem Definitionsbereich $D(f) \subseteq X$ interessiert man sich auch für **Bilder** und **Urbilder** von Mengen $A \subseteq X$ bzw. $B \subseteq Y$ unter einer Funktion $f\colon X \to Y$.

Definition 4.1.3

Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Für eine Menge $A \subseteq X$ heißt

$$f(A) := \big\{f(x) \in Y \mid x \in A\big\} \subseteq Y$$

das **Bild von** A **unter** f. Für eine Menge $B \subseteq Y$ heißt

$$f^{-1}(B) := \big\{x \in X \mid f(x) \in B\big\} \subseteq X$$

das **Urbild von** B **unter** f.

Offenbar gilt für den Wertebereich $W(f) = f(X)$ und für den Definitionsbereich $D(f) = f^{-1}(Y)$. Beachtet auch, dass Urbilder leer sein können: Für eine Menge $A \subseteq Y$ mit $A \cap W(f) = \emptyset$ ist immer $f^{-1}(A) = \emptyset$. Denn liegt eine Menge nicht im Wertebereich der Funktion, so kann sie logischerweise auch kein Urbild unter dieser Funktion besitzen.

4.2 Die Komposition von Funktionen

Oft betrachtet man Funktionen, die aus mehreren anderen Funktionen zusammengesetzt („komponiert") sind. So ist die Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \overset{h}{\mapsto} h(x) = (\sin x)^2 =: \sin^2 x$$

zusammengesetzt aus den Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(y) = y^2$. Solche Kompositionen wollen wir jetzt sauber definieren.

Definition 4.2.1: Die Komposition von Funktionen

Es seien X, Y, Z Mengen und

$$f\colon X \to Y \quad \text{sowie} \quad g\colon Y \to Z$$

Funktionen mit $W(f) \subseteq D(g)$. Die Abbildung

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

(lies: „g nach f"), heißt **Komposition** von f und g, siehe Abbildung 4.2.1.

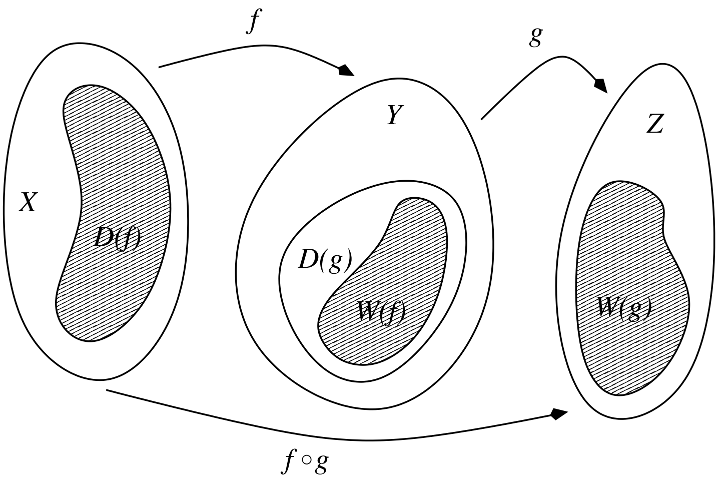

Abbildung 4.2.1. Die Komposition zweier Funktionen

Aus der Annahme $W(f) \subseteq D(g)$ folgt sofort $D(g \circ f) = D(f)$ und man muss sich keine weiteren Gedanken um den Definitionsbereich der Komposition machen. Es kann aber auch die Situation $W(f) \not\subseteq D(g)$ auftreten und in diesem Fall muss der Definitionsbereich der Komposition angepasst werden. Dazu bildet man den Schnitt $W(f) \cap D(g)$ und betrachtet dessen Urbild unter f, d. h., im Allgemeinen hat man

$$D(g \circ f) = f^{-1}(W(f) \cap D(g)).$$

Sind der Wertebereich von f und die Definitionsmenge von g disjunkt, d. h. $W(f) \cap D(g) = \emptyset$, so folgt

$$D(g \circ f) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

und in diesem Fall sagt man auch, dass die Komposition $g \circ f$ *nicht definiert* ist.

Beispiel 4.2.2

(a) Sei $f(x) = x$, dann ist die Komposition $f \circ f(x) = x^2$.
(b) Seien $f(x) = ax$ und $g(x) = x + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist die Komposition $g \circ f(x) = ax + b$.
(c) Seien $f(x) = 1 + x^2$ und $g(x) = 1/x$, dann ist die Komposition

$$g \circ f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

und weil der Wertebereich der Funktion f durch

$$W(f) = [1, \infty) \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} = D(g)$$

gegeben ist gilt $D(g \circ f) = D(f) = \mathbb{R}$. Anders ist die Situation für $f(x) = 1 + x^3$, also die Komposition

$$g \circ f(x) = \frac{1}{1+x^3}.$$

Denn $W(f) = \mathbb{R} \not\subset \mathbb{R}\backslash\{0\} = D(g)$, und es gilt

$$D(g \circ f) = f^{-1}(\mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\}) = f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}.$$

Natürlich sind die Definitionsbereiche der Kompositionen hier auch direkt erkennbar und man muss nicht zwingend die Urbilder heranziehen. In komplizierteren Fällen kann dieses Vorgehen jedoch durchaus hilfreich bei der Bestimmung des Definitionsbereichs sein.
(d) Seien $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = 1 - x^2$ und $h(x) = \sqrt{x}$, dann ist die Komposition

$$h \circ (g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \sqrt{\sin^2(x)} = |\sin(x)|$$

mit $D(h \circ g \circ f) = \mathbb{R}$ und $W(h \circ g \circ f) = [0, 1]$.

Beim Rechnen mit Kompositionen solltet ihr immer die folgenden Regeln im Hinterkopf behalten:

Satz 4.2.3

Seien W, X, Y, Z Mengen und

$$f\colon W \to X, \quad g\colon X \to Y, \quad h\colon Y \to Z$$

Funktionen, sodass die Kompositionen

$$g \circ f \colon W \to Y \quad \text{sowie} \quad h \circ (g \circ f) \colon W \to Z$$

jeweils definiert sind. Dann gilt **Assoziativität**:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Beweis. Für $x \in D(h \circ g \circ f) = f^{-1}(W(f) \cap g^{-1}(W(g) \cap D(h))) \neq \emptyset$ gilt

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g \circ f(x)) = h \circ (g \circ f)(x)$$

und daher sind beide Funktionen gleich. □

Bemerkung 4.2.4: Achtung!

Im Allgemeinen gilt $g \circ f \neq f \circ g$ *nicht*! Als algebraische Operation, die zwei Funktionen f, g die Funktion $f \circ g$ zuordnet, ist die Komposition also nicht kommutativ.

4.3 Wichtige Eigenschaften und Umkehrfunktionen

So wie wir bereits den Funktionsbegriff auf Abbildungen zwischen zwei Mengen verallgemeinert haben, wollen wir Gleiches nun auch mit dem dazugehörigen Graphen tun. Ursprünglich versteht man unter einem Graphen die Veranschaulichung einer Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem (zweidimensionalen) kartesischen Koordinatensystem, indem man für jedes $x \in D(f)$ den Funktionswert $f(x)$ abträgt. Diese intuitive Vorstellung lässt sich in naheliegender Weise auf Funktionen $f \colon X \to Y$ übertragen.

Definition 4.3.1: Der Graph einer Funktion

Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Die Menge

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, f(x)) \subset X \times Y \mid x \in X\}$$

heißt **Graph** der Funktion f.

Wir wollen nun das Verhalten von Funktionen im Hinblick auf Eindeutigkeit der Urbilder und den Wertebereich etwas genauer untersuchen.

Definition 4.3.2: Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.

(1) f heißt **injektiv**, wenn

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

(2) f heißt **surjektiv**, wenn

$$W(f) = Y.$$

(3) f heißt **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Eine injektive Funktion nennt man auch eine *eindeutige* Funktion. Bilden wir die Verneinung der Aussage, dann folgt:

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Zwei verschiedene Urbilder haben also immer zwei verschiedene Bilder. Die Surjektivität bedeutet einfach nur, dass wirklich *alle* $y \in Y$ auch als Bilder auftreten.

Wir können Injektivität und Surjektivität auch etwas anders auffassen. Betrachten wir nämlich die Gleichung

$$f(x) = y$$

und fragen nach ihrer Lösbarkeit, d. h. danach, ob überhaupt $x \in X$ existieren, so dass die Gleichung gilt, dann bedeutet Surjektivität von f, dass es für jede Wahl von $y \in Y$ *mindestens* ein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) = y$ erfüllt ist. Injektivität von f bedeutet hingegen, dass es *höchstens* ein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) = y$ erfüllt ist. Entsprechend bedeutet dann Bijektivität, dass es *genau* ein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) = y$.

Beispiel 4.3.3

Wir betrachten die einfache Funktion $f : x \mapsto x^2$.

(a) Betrachten wir f als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, dann ist f weder injektiv noch surjektiv! Nicht injektiv, weil $-1 \neq 1$, aber $f(-1) = f(1) = 1$, und nicht surjektiv, weil das Bild unter f nicht ganz $\mathbb{R}$ ist, sondern nur $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
(b) Betrachten wir f als Funktion von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}$, dann ist f injektiv, aber nicht surjektiv, weil $W(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(c) Erst wenn wir f als Abbildung von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ auffassen, ist f bijektiv.

Surjektive Funktionen lassen sich über die Bilder von Urbildern charakterisieren.

Lemma 4.3.4

Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist f genau dann surjektiv, wenn $B = f(f^{-1}(B))$ für alle $B \subseteq Y$ gilt.

Beweis. Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

$\Longrightarrow$: Sei f surjektiv und $B \subseteq Y$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} y \in B &\iff \exists x \in X\colon f(x) = y \in B && \text{(Surjektivität)} \\ &\iff x \in f^{-1}(B) && \text{(Definition des Urbilds)} \\ &\iff f(x) = y \in f(f^{-1}(B)) && \text{(Definition des Bildes)} \end{aligned}$$

Also ist $B = f(f^{-1}(B))$ für alle $B \subseteq Y$.

$\Longleftarrow$: Es gelte $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle $B \subseteq Y$. Wir zeigen die Surjektivität von f über einen Widerspruch: Angenommen f ist nicht surjektiv, dann existiert ein $y \in Y$, sodass $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Mit anderen Worten ist $y \notin W(f)$. Setzt man nun $B := \{y\} \subseteq Y$, dann folgt

$$f(f^{-1}(B)) = f(\emptyset) = \emptyset \neq B,$$

was offenbar im Widerspruch zur Annahme steht. Also muss die Funktion f surjektiv sein.

□

Injektive Funktionen lassen sich über den Schnitt oder die Urbilder von Bildern charakterisieren.

Lemma 4.3.5

Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist f genau dann injektiv, wenn

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subseteq X,$

(b) $f^{-1}(f(A)) = A \quad \forall A \subseteq X$

gelten.

Beweis. Siehe A.4.2. □

Wie vererben sich Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einzelner Funktionen auf deren Komposition?

Satz 4.3.6

Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Funktionen, sodass die Komposition $g \circ f\colon X \to Z$ definiert ist. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f auf $D(g \circ f)$ injektiv.
(c) Ist $g \circ f$ injektiv, so muss g nicht injektiv sein.

Beweis. Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Funktionen.

(a) Seien $x_1 \neq x_2 \in D(g \circ f)$, dann folgt

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) \neq g(y_2) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$$

aufgrund der Injektivität von f und g. Ist der Definitionsbereich einelementig, d. h. $D(g \circ f) = \{x\}$, dann ist die Behauptung klar.

(b) Angenommen f ist nicht injektiv, dann existieren $x_1 \neq x_2 \in D(g \circ f)$ mit $f(x_1) = y = f(x_2)$. Damit folgt

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(y) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2),$$

was offenbar in Widerspruch zur Injektivität von $g \circ f$ steht. Folglich muss f injektiv sein. Ist der Definitionsbereich einelementig, d. h. $D(g \circ f) = \{x\}$, dann ist die Behauptung klar.

(c) Wir geben ein einfaches Gegenbeispiel an: Sei $X = \{x\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ und $Z = \{z\}$. Definiert man $f\colon X \to Y$ durch $f(x) = y_1$ und $g\colon Y \to Z$ durch $g(y_1) = g(y_2) = z$, dann ist die Komposition $g \circ f$ zwar injektiv, aber g selbst ist es *per constructionem* nicht.

□

Satz 4.3.7

Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Funktionen, sodass die Komposition $g \circ f\colon X \to Z$ definiert ist. Dann gelten folgende Aussagen

(a) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.
(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so muss f nicht surjektiv sein.

Beweis. Siehe A.4.3. □

Satz 4.3.8

Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Funktionen, sodass die Komposition $g \circ f\colon X \to Z$ definiert ist. Dann gelten:

(a) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.
(b) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.
(c) Ist $g \circ f$ bijektiv, so müssen f oder g nicht bijektiv sein.

Beweis. Die Aussagen folgen direkt aus Satz 4.3.6 und Satz 4.3.7. □

Warum machen wir uns die Mühe, so genau hinzuschauen? Na, weil wir an der **Umkehrfunktion** von f interessiert sind. Das heißt, wir würden gerne wissen, unter welchen Umständen zu einer Funktion $f : X \to Y$ eine Funktion $f^{-1} : Y \to X$ existiert, so dass $f^{-1} \circ f$ die **Identitätsabbildung** ist, die durch

$$\mathrm{id}\colon X \to X, \quad x \mapsto x$$

definiert ist.

Bemerkung 4.3.9: Achtung!

Verwechselt auf keinen Fall die Umkehrfunktion f^{-1} mit $1/f$!

Zur Umkehrung einer Funktion f reicht schon die Injektivität, da dann jedem Element $y \in W(f)$ ein eindeutiges Urbildelement $x \in D(f)$ zugeordnet werden kann, sodass $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$. Ist die Funktion jedoch nicht injektiv, so gibt es mindestens ein $y \in W(f)$, für das $x_1 \neq x_2 \in D(f)$ existieren mit $f(x_1) = y = f(x_2)$. Folglich wäre $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2\}$ und damit die Vorschrift $f^{-1}\colon W(f) \to D(f)$ keine Funktion, da sie *nicht eindeutig* ist.

Definition 4.3.10: Die Umkehrabbildung

Ist die Abbildung $f : X \to Y$ injektiv, dann ist die **Umkehrabbildung** oder **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** als Funktion

$$f^{-1} : W(f) \to D(f)$$

durch $f^{-1}(y) = x$ mit $y = f(x)$ definiert.
Ist die Abbildung $f : X \to Y$ zudem bijektiv, dann gilt $D(f^{-1}) = Y$ und $W(f^{-1}) = X$.

Bemerkung 4.3.11: Achtung!

Auch die Notationen für das Urbild und die Umkehrfunktion sind jeweils f^{-1} und können daher schnell durcheinandergebracht werden. Dabei sind es ganz unterschiedliche Dinge: Das Urbild $f^{-1}(A) \subseteq X$ einer Menge $A \subseteq Y$ existiert immer, schließlich kann es ja auch die leere Menge sein, wie wir bereits gesehen haben. Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon Y \to X$ existiert jedoch nur im Fall einer injektiven Funktion. In der Regel geht aus dem Kontext hervor, was von beidem gemeint ist, und eine Verwechselung ist daher nahezu ausgeschlossen.

Beispiel 4.3.12

Wir haben schon gelernt, dass die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) := x^2$ als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv ist. Daher existiert auch keine Umkehrfunktion. Erst wenn wir die Funktion als Abbildung von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}$ auffassen, ist sie injektiv und als Funktion von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ sogar bijektiv. Dann existiert die Umkehrfunktion f^{-1}, die wir nach folgendem Schema berechnen können: In der Darstellung

$$y = x^2$$

tauschen wir x gegen y und erhalten so

$$x = y^2.$$

Die Auflösung nach y liefert als Umkehrfunktion

$$y = \sqrt{x},$$

wobei nur die positive Wurzel zur Umkehrfunktion gehört. Dem Variablentausch zur Bestimmung der Umkehrfunktion entspricht anschaulich die Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden $x = y$.

Häufig tritt der Fall auf, dass man f auf einer Menge betrachten muss, die kleiner als $D(f)$ ist. In einem solchen Fall arbeitet man mit der Einschränkung.

Definition 4.3.13: Die Restriktion einer Funktion

Ist $f : X \to Y$ eine Funktion und $A \subset D(f)$, dann nennt man

$$f|_A : A \xrightarrow{f} Y$$

die **Einschränkung** oder **Restriktion** von f auf A.

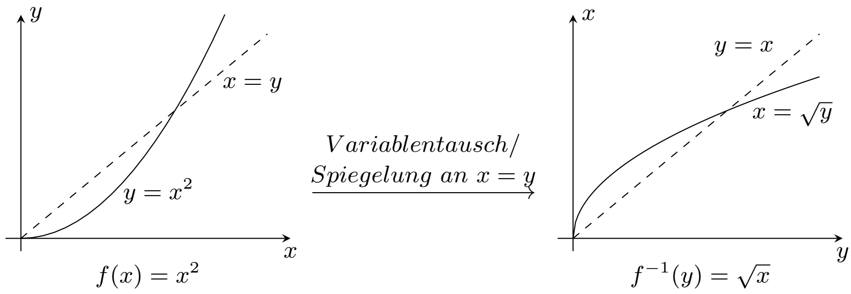

Abbildung 4.3.1. Funktion $f(x) = x^2$ und die (grafische) Konstruktion ihrer Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Durch Einschränkung einer Funktion auf eine Teilmenge $A \subset D(f)$ verkleinert sich auch der Wertebereich $W(f)$, falls $W(f)\backslash f(A) \neq \emptyset$, wenn also $f(A)$ eine echte Teilmenge von $W(f)$ ist. In den meisten Fällen hebt man diesen verkleinerten Wertebereich aber nicht explizit hervor, sondern notiert die Restriktion wie in Definition 4.3.13.

Beispiel 4.3.14

Die Restriktion der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

auf $\mathbb{N}_{>0}$ lautet

$$f|_{\mathbb{N}_{>0}} : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad n \mapsto \frac{1}{n},$$

entspricht also der reellen Folge $(1/n)_{n\geq 1}$. Der Wertebereich verkleinert sich in diesem Fall offenbar von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu

$$W(f|_{\mathbb{N}_{>0}}) = f(\mathbb{N}_{>0}) = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Zusammenfassung

Ihr solltet zunächst die allgemeine Definition einer Funktion $f\colon X \to Y$ verinnerlichen und euch mit dem **Urbild** bzw. der **Definitionsmenge** $D(f)$ und dem **Bild** bzw. der **Wertemenge** $W(f)$ vertraut machen. Diese Mengen sind beispielsweise bei der Betrachtung der **Kompositionen** $g \circ f\colon X \to Z$ zweier Funktionen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ zu beachten. Ist nämlich $W(f) \cap D(g) = \emptyset$, so existiert die Komposition erst gar nicht. Eine elementare Regeln bei der Bildung von Kompositionen solltet ihr euch auch immer merken, nämlich die **Assoziativität**:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Im Zentrum des Kapitels steht die Lösbarkeit von Gleichungen der Form $f(x) = y$, also ob für ein $y \in Y$ auch ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$. Diese Frage motiviert Funktionen nach folgenden Eigenschaften zu ordnen:

(a) **Injektivität**: $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$
(b) **Surjektivität**: $W(f) = Y$
(c) **Bijektivität**: f ist injektiv und surjektiv.

Bei einer injektiven Funktion haben also verschiedene Urbilder auch immer verschiedene Bilder. Bei surjektiven Funktionen besitzt jede Menge $B \subseteq Y$ ein Urbild $f^{-1}(B) \subseteq X$.
Nur für injektive (und damit speziell für bijektive) Funktionen kann eine **Umkehrfunktion** $f^{-1}: Y \to X$ durch

$$f^{-1}(y) = x \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x) = y$$

für $y \in W(f)$ definiert werden. Damit lässt sich auch die Frage nach der Lösbarkeit von $f(x) = y$ beantworten: Bei einer surjektiven Funktion existiert für jedes $y \in Y$ mindestens eine Lösungen $x \in X$, d. h. $f(x) = y$. Bei einer injektiven Funktion existiert für jedes $y \in Y$ höchstens eine Lösung $x \in X$ mit $f(x) = y$ und bei einer bijektiven Funktion existiert für jedes $y \in Y$ entsprechend genau eine Lösung $x \in X$ mit $f(x) = y$.
Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Was ist mit „eindeutig“ in der Definition einer Funktion gemeint?*
- *Wie lautet ein Beispiel für eine injektive Funktion $f: X \to Y$, die nicht bijektiv ist?*
- *Wie lautet ein Beispiel für eine surjektive Funktion $f: X \to Y$, die nicht bijektiv ist?*
- *Unter welchen Gegebenheiten kann die Komposition zweier Funktionen $f: X \to Y$ $g: Y \to Z$ definiert werden?*
- *Wie lautet die Definition des Graphen einer Funktion?*
- *Was ist der Unterschied zwischen der Umkehrfunktion und dem Urbild einer Funktion?*
- *Für welche Klasse von Funktionen kann eine Umkehrabbildung definiert werden?*

Zum Einüben der Begriffe dieses Kapitels solltet ihr euch mal einige der folgenden Aufgaben zur Brust nehmen.

4.4 Aufgaben

A.4.1 Seien X und Y jeweils endliche Mengen mit $|X| \leq |Y| < \infty$. Wie viele injektive Funktionen $f\colon X \to Y$ gibt es?

A.4.2 Man beweise Lemma 4.3.5.

A.4.3 Man beweise Satz 4.3.7.

A.4.4 Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$. Wie lauten die Urbildmengen?

(a) $f^{-1}(\{9, 49, 81\})$

(b) $f^{-1}(\{0\})$

(c) $f^{-1}(\{-16, -25\})$

A.4.5 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3|x|$. Wie lauten die Urbildmengen?

(a) $f^{-1}([0, 1])$

(b) $f^{-1}(]-\infty, 0])$

(c) $f^{-1}(]0, \infty])$

(d) $f^{-1}(\{9, -18, 30, -5, 0\})$

A.4.6 Man bestimme die Umkehrfunktion der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $x \mapsto x/(1-x)$

(b) $f\colon [0, \infty[\to [c, \infty[$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a > 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$

(c) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}, n \mapsto n+1$

(d) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto z + k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

(e) $f\colon \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$, $x \mapsto x \cdot x$

A.4.7 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *affin-linear*, falls sie von der Form $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist. Man zeige, dass die Komposition zweier affin-linearer Funktionen wieder affin-linear ist.

A.4.8 Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, dann heißt eine Funktion $f\colon X \to Y$ *streng monoton wachsend*, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt. Man zeige, dass eine streng monoton wachsende Funktion injektiv ist.

A.4.9 Seien $f(x) = (x+1)(x-2)$ und $g(x) = \sqrt{1+x}$. Man bestimme die Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ und gebe ihren jeweiligen Definitions- und Wertebereich an.

5 Folgen in archimedisch angeordneten Körpern

Wozu?

Der grundlegende Begriff der Analysis ist der Begriff des **Grenzwerts** oder **Limes**. Wie man dem Namen bereits entnimmt, handelt es sich dabei um den finalen, den endgültigen Wert, dem eine Folge von Zahlen zustrebt. Betrachtet man beispielsweise die Brüche

$$3 = \frac{3}{1}, \quad 3,1 = \frac{31}{10}, \quad 3,14 = \frac{314}{100}, \quad 3,142 = \frac{3142}{1000}, \quad \ldots,$$

so rücken diese immer näher an $\pi = 3,141592...$ heran und als Grenzwert würde man eben π erwarten. Der vierte Bruch ist auch schon ungefähr π, denn er weicht um weniger als $\frac{1}{1000}$ von der berühmten Kreis zahl ab. Nun ist π aber keine rationale Zahl, kann also durch einen Bruch niemals exakt getroffen werden, in nächster Nähe jedoch können wir offenbar immer einen finden.
Vielleicht fragt ihr euch jetzt zu Recht: Was ist der klare mathematische Sinn derartiger Aussagen? Was genau meinen die Wörter „ungefähr“ oder „in nächster Nähe“, die eigentlich nicht in das Lexikon des präzisen Mathematikers gehören? Eine der wichtigen Errungenschaften der Mathematik ist daher die Entwicklung eines exakten Begriffsapparats, der das gerade Beschriebene genau zu erfassen in der Lage ist und die Komplexität des Begriffs Grenzwert erst offenlegt. Dabei spielen Folgen eine entscheidende Rolle und sie werden somit zu einem wichtigen „Werkzeug“ in der Analysis.
Wir werden lernen, dass reelle Zahlen die Grenzwerte bestimmter Folgen von rationalen Zahlen sind. Also: Zahlen sind Grenzwerte. Aber auch Ableitungen sind Grenzwerte und auch Integrale. Es ist nicht übertrieben zu sagen, dass (die) Analysis die Lehre von den Grenzwerten ist.
Aber Zahlenfolgen und ihre Grenzwerte haben längst nicht nur innermathematische Bedeutung. In der Numerischen Mathematik sind Zahlenfolgen beispielsweise die Ergebnisse von Algorithmen und die Analyse solcher Folgen ist eines der Hauptgeschäfte der Numerik: Von einem sinnvollen Algorithmus erwartet man schließlich, dass er (asymptotisch) das richtige Ergebnis liefert, was der **Konvergenz** der korrespondierenden Zahlenfolge entspricht. Die Folge soll also einen Grenzwert haben.
Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- Konvergenz einer Folge.
- Cauchy-Folgen.
- Konstruktion der reellen Zahlen und Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_5

- Häufungspunkte,
- Satz von Bolzano-Weierstraß

und ihr Verständnis.

5.1 Die Begriffe "Folge" und "Konvergenz"

Wir starten wie gewohnt zunächst mit einer sauberen Definition der wichtigsten Begriffe. Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ immer ein archimedisch angeordneter Körper.

Definition 5.1.1: Folgen

Eine **Zahlenfolge** (oder einfach **Folge**) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}, \quad n \mapsto a_n.$$

Anstelle der **Indexmenge** $\mathbb{N}$ kann auch eine beliebige abzählbare Menge I gewählt werden, also z. B. $I = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\}$ für ein gegebenes $k \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall schreibt man dann$(a_n)_{n\in I}$ bzw. $(a_n)_{n\geq k}$. Wenn aus dem Kontext heraus klar ist, welche Indexmenge gerade verwendet wird, so schreiben wir manchmal auch etwas faul (a_n).

Beispiele 5.1.2

Unter all den möglichen Folgen geben wir nur ein paar prominente Beispiele.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := a \in \mathbb{K}$ für alle n ist die **konstante Folge**.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit $a_n := 1/n$ für $n \geq 1$ ist die **harmonische Folge**. Woher kommt der schöne Name? Betrachten wir

$$a_{n-1} = \frac{1}{n-1} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

und bilden das **harmonische Mittel**

$$\overline{a}_{\text{harm}} := \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}},$$

dann folgt

$$\overline{a}_{\text{harm}} = \frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}} = \frac{2\frac{1}{n+1}\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}} = \frac{2}{n-1+n+1} = \frac{1}{n},$$

also ist für $n \geq 2$ jedes Folgenglied a_n das harmonische Mittel der Nachbarglieder. Das harmonische Mittel war für die Pythagoräer und ihre Musiktheorie wichtig. Wenn man eine schwingende Saite auf die Hälfte verkürzt, klingt der Ton eine Oktave höher. Das harmonische Mittel von 1 und $1/2$ ist $2/3$ und die auf $2/3$ verkürzte Saite liefert einen um eine Quint höheren Ton als der Grundton. Werden alle drei Saiten gleichzeitig gezupft, ergibt sich ein harmonischer Dreiklang.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ ist eine **alternierende Folge**, da das Vorzeichen von Folgenglied zu Folgenglied wechselt.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 := 0, a_1 := 1$ und $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$ ist die **Fibonacci-Folge**.
Fibonacci („der Sohn des Bonacci“) beschrieb damit im Jahr 1202 (kein Druckfehler!) die Fortpflanzung von Kaninchen. Diese Folge ist eine der merkwürdigsten Folgen überhaupt, denn inzwischen wissen wir, dass Bäume nach dieser Folge Verästelungen bilden, dass die Kerne in den Blüten von Sonnenblumen in Spiralen nach dieser Folge angeordenet sind, und vieles mehr.

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := x^n$ für $x \in \mathbb{K}$.
Hier haben wir ein Beispiel für eine **Funktionenfolge**. Wir werden solche Funktionenfolgen später genauer untersuchen, wenn wir etwas mehr Mathematik zur Verfügung haben.

Wir kommen nun zu **dem** grundlegenden Begriff der Analysis, dem der **Konvergenz**. Dieser Begriff ist so wichtig, dass ein weiteres Eindringen in die Analysis ohne sein Verständnis schlichtweg unmöglich ist! Was ist die Grundidee?

Unter einem **Grenzwert** (oder vornehm: **Limes**) versteht man gemeinhin einen Wert, der keinesfalls überschritten werden kann. Die Römer haben Limites in Form von großen Wällen oder Mauern errichtet, um die Grenze des Römischen Reiches zu markieren. Eigentlich sollten die Limites verhindern, dass die „Barbaren“ (also unsere Vorfahren) ins Römische Reich eindringen und Schaden anrichten konnten. Solche Limites finden sich in Zentraleuropa (z. B. der Niedergermanische Limes) und auch auf den Britischen Inseln (Hadrian's wall). In der Mathematik darf man sich einem Limes auch von beiden Seiten nähern und sogar von einer zur anderen Seite hin- und herspringen, aber der Limes selbst ist eben das absolute Ende dieses Annäherungsprozesses und in der Regel wird der Limes auch nie erreicht!

Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert a, dann muss bei euch sofort die folgende Vorstellung erwachen: Für endlich viele n („am Anfang“) der Folge darf diese machen, was sie will, aber irgendwann, ab einem bestimmten n_0, das sehr groß sein kann, müssen die Folgenglieder a_n für $n \geq n_0$ dem Limes *beliebig nahekommen*. Was heißt **beliebig nahe**? Das heißt, dass man ein ganz winzig kleines $\varepsilon > 0$ (immer größer als null!) vorgeben kann und dann einen Index n_0 findet, so dass alle a_n für $n \geq n_0$ um weniger als ein ε vom Grenzwert a entfernt sind. Das gießen wir nun in eine Definition.

Definition 5.1.3: Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge in $\mathbb{K}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** gegen einen **Grenzwert** $a \in \mathbb{K}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

In diesem Fall schreibt man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

oder

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \quad \text{bzw.} \quad a_n \to a, \quad (n \to \infty).$$

Ist $a = 0$, dann heißt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Nullfolge**. Wenn kein Grenzwert existiert, dann heißt die Folge **divergent**.

Die Wahl von n_0 hängt in der Regel von ε ab, weshalb man oft auch $n_0(\varepsilon)$ schreibt. Wir starten mit ein paar einfachen Beispielen, damit ihr die Konvergenzbedingung (5.1) „in Aktion" sehen könnt!

Beispiel 5.1.4: Harmonische Folge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 1/n$ für $n \geq 1$. Je größer n wird, desto kleiner wird $1/n$ und die Vermutung liegt nahe, dass es sich bei (a_n) um eine Nullfolge handelt, also dass $a = 0$ gilt. Wir müssen also für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ den Index $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, ab dem $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt. Einsetzen liefert

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon,$$

wobei das Ausrufezeichen über dem $<$ ausdrücken soll, dass wir das noch nicht gezeigt haben, sondern erst zeigen müssen! Aber wir haben einen Verbündeten hier, nämlich die Eigenschaft von $\mathbb{K}$, archimedisch zu sein. In Satz 3.4.4 haben wir schon bewiesen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ immer ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, so dass $1/n < \varepsilon$ gilt! Wir finden also immer ein n_0, so dass $n_0 > 1/\varepsilon$ gilt, z. B. können wir

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

wählen, d. h. die kleinste natürliche Zahl, die größer oder gleich $1/\varepsilon$ ist. Natürlich können wir auch jede größere natürliche Zahl verwenden.

Damit haben wir tatsächlich gezeigt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \quad \forall n \geq n_0 : \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

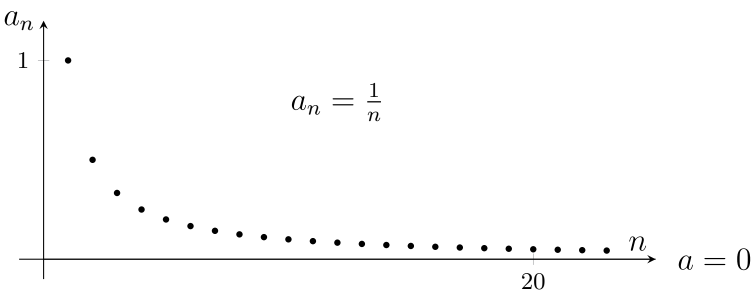

Abbildung 5.1.1. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ mit $a_n = 1/n$ und Grenzwert $a = 0$

„Funktioniert“ die Definition (5.1) auch noch, wenn man einen falschen Grenzwert a vermutet? Ja, die Definition wird sagen: Das geht nicht! Zur Veranschaulichung betrachten wir noch einmal die harmonische Folge und vermuten diesmal einen Grenzwert $a \neq 0$.

Beispiel 5.1.5

Das vorherige Beispiel fortführend nehmen wir uns noch einmal

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{1}{n}$$

vor. Wir wissen, dass (a_n) eine Nullfolge ist, aber nehmt mal an, ihr hättet versehentlich $a = 1$ als Grenzwert vermutet. Jetzt müssten wir zu jedem $\varepsilon > 0$ wieder ein n_0 finden, so dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt. Legen wir los:

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{1-n}{n} \right|$$

Konvergenz hat etwas mit großen n zu tun, aber der Bruch innerhalb des Betrags wird ab $n = 2$ immer negativ sein. Also gilt

$$\left| \frac{1-n}{n} \right| = \frac{n-1}{n}, \quad n \geq 2.$$

Wenn Konvergenz gegen 1 vorliegen soll, müssen wir also ein n_0 finden, so dass

$$\frac{n-1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Diese Ungleichung ist offenbar äquivalent zu

$$\frac{n}{n-1} \overset{!}{>} \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \geq n_0.$$

Können wir nun solch ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ finden? Nein, denn wenn wir n auf der linken Seite kürzen, folgt

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n}} \overset{!}{>} \frac{1}{\varepsilon},$$

und wie wir bereits gesehen haben, ist $(1/n)$ eine Nullfolge, die linke Seite strebt also gegen 1. Der größte Wert, den die linke Seite überhaupt nur annehmen kann, wird bei $n = 2$ erreicht und ist $\frac{1}{1-1/2} = 2$. Für alle $\varepsilon < 1/2$ kann es daher kein n_0 geben, so dass die linke Seite für $n \geq n_0$ größer ist als $1/\varepsilon$. Die Definition (5.1) „sagt" uns also, dass $a = 1$ keinesfalls der Grenzwert der Folge sein kann.

Um euch mit der Anwendung des Konvergenzkriteriums (5.1) noch ein bisschen vertrauter zu machen, betrachten wir weitere Beispiele.

Beispiel 5.1.6

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{n}{n+1}$. Die Folge beginnt also mit

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Können wir etwas „sehen"? Der Nenner wird immer größer, allerdings auch der Zähler. Kürzen wir das n, dann erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

und nun können wir wirklich etwas sehen, denn $1/n$ ist eine Nullfolge. Wir dürfen also mit dem Grenzwert $a = 1$ rechnen. Nun formal: Für gegebenes $\varepsilon > 0$ müssen wir wieder einen Index n_0 suchen, so dass

$$\forall n \geq n_0: \quad |a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \overset{!}{<} \varepsilon.$$

Daraus können wir das n_0 sofort ausrechnen. Es gilt

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

und damit können wir n_0 als

$$n_0 := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

wählen.

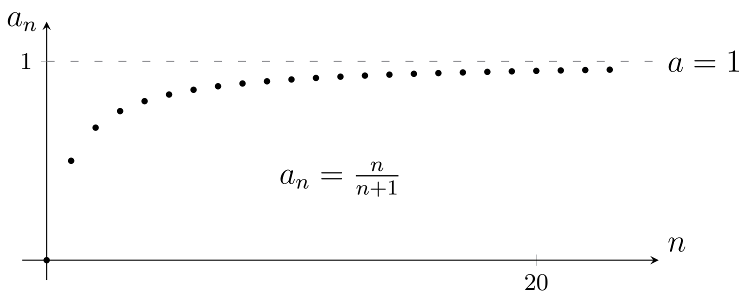

Abbildung 5.1.2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{n+1}$ und Grenzwert $a = 1$

Beispiel 5.1.7: Alternierende Folge

Die durch

$$a_n := (-1)^n$$

definierte **alternierende Folge** ist divergent, d. h., es existiert kein Grenzwert. Im Grunde „erschließt“ sich das schon aus

$$(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots),$$

denn offenbar kann die Folge sich zwischen 1 und -1 nicht entscheiden, sie *alterniert*. Aber wir müssen das sauber beweisen! Dazu nehmen wir an, dass (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{K}$ konvergiert, und führen dies zu einem Widerspruch: Da im Fall der Konvergenz die Bedingung (5.1) *für alle* $\varepsilon > 0$ gelten muss, muss sie auch sicher für $\varepsilon = 1$ gelten, d. h.

$$\text{zu } \varepsilon = 1 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a_n - a| < 1.$$

Wir schmuggeln nun eine Null ein in der Form

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n|$$

und benutzen die Dreiecksungleichung, um

$$
\begin{aligned}
2 = |a_{n+1} - a_n| &= |a_{n+1} - a + a - a_n| \\
&\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \underbrace{|a_{n+1} - a|}_{<1 \text{ nach Vorauss.}} + \underbrace{|a_n - a|}_{<1 \text{ nach Vorauss.}} \\
&< 1 + 1 = 2,
\end{aligned}
$$

zu erhalten. Dies ist unverkennbar ein Widerspruch ($2 < 2$). Also ist unsere Annahme falsch und die alternierende Reihe divergiert.

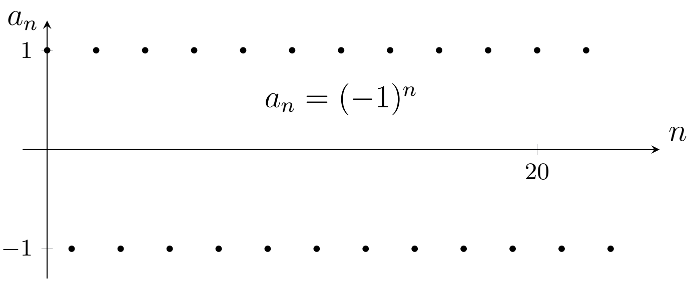

Abbildung 5.1.3. Die alternierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$

Das Beispiel der alternierenden Folge zeigt, dass Divergenz vorliegt, wenn die Folge scheinbar gegen „mehrere Grenzwerte" strebt, zwischen denen die einzelnen Folgenglieder hin und her springen, wie es auch bei

$$(a_n) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots) \quad \text{mit} \quad a_n := \sin(n\pi/2)$$

der Fall ist. Ähnlich verhält es sich mit Folgen, die sich sowohl gegen $+\infty$ als auch gegen $-\infty$ bewegen, wie beispielsweise

$$(a_n) = (0, 1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots) \quad \text{mit} \quad a_n := (-1)^{n+1} \cdot n.$$

Dieses Verhalten, zwischen verschiedenen Grenzwerten zu schwanken, nennt man auch **unbestimmte Divergenz**. Solche Folgen werden wir uns im Abschnitt über Teilfolgen und Häufungspunkte noch genauer anschauen. Eine nicht konvergente Folge, deren Folgenglieder a_n aber gegen $+\infty$ *oder* $-\infty$ streben, heißt dagegen **bestimmt divergent**. Das *bestimmt* drückt aus, dass zwar kein Grenzwert vorliegt, aber man immerhin noch weiß„, in welche Richtung die Folge läuft". Dazu ein fast triviales Beispiel.

Beispiel 5.1.8: Bestimmte Divergenz

Die durch

$$a_n := n$$

definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, denn ein Grenzwert existiert nicht. Die Folgenglieder wachsen nämlich immer weiter und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Beachtet bitte, dass „∞" nur als Symbol für die Unbeschränktheit steht, und insbesondere $\infty \notin \mathbb{K}$. Daher existiert kein Grenzwert ∞. Da die Folge eindeutig gegen ∞ strebt, ist sie bestimmt divergent.

Jede beliebige Zahl $c \in \mathbb{K}$ kann auch als Folge interpretiert werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.1.9: Konstante Folgen

Jede durch

$$a_n := c \in \mathbb{K}$$

definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen c, denn für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, dann stellt sich als Nächstes die Frage, ob dieser auch eindeutig ist, d. h. ob nur ein $a \in \mathbb{K}$ die Bedingung (5.1) erfüllt? Die Intuition legt nahe, dass der Grenzwert im Fall der Existenz eindeutig ist, aber als Mathematiker wollen wir das natürlich auch formal belegen:

Satz 5.1.10

Eine konvergente Folge hat höchstens einen Grenzwert.

Beweis. Es seien a und A zwei voneinander verschiedene Grenzwerte einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wähle

$$\varepsilon := \frac{|a - A|}{2} > 0,$$

dann gibt es wegen der Konvergenz $n_0, N_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

und

$$\forall n \geq N_0 : \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $n \geq \max\{n_0, N_0\}$:

$$2\varepsilon = |a - A| = |a - a_n + a_n - A| \leq |a_n - a| + |a_n - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

und damit haben wir einen Widerspruch ($2\varepsilon < 2\varepsilon$) erreicht. □

Ganz offenbar gibt es bei einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein fürchterliches Gedrängel in nächster Nähe des Grenzwerts a. Dieses Gedrängel kann man verwenden, um eine äquivalente Definition des Grenzwerts zu geben. Dazu müssen wir zunächst für die Formulierung „in nächster Nähe des Grenzwerts a“ eine entsprechende mathematische Begriffsbildung nachreichen.

Definition 5.1.11: Abgeschlossene und offene Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a < b$ heißt die Menge

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x \leq b\}$$

das **abgeschlossene Intervall** von a bis b. Die Menge

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{K} \mid a < x < b\}$$

heißt das **offene Intervall** von a bis b. Die Mengen

$$\begin{aligned}]a, b] &:= \{x \in \mathbb{K} \mid a < x \leq b\}, \\ [a, b[&:= \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x < b\} \end{aligned}$$

heißen **halboffene Intervalle**.
Ist $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$, dann nennt man das offene Intervall

$$U_\varepsilon(a) :=]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

eine **ε-Umgebung von** a.

Im mathematischen Sprachgebrauch hat sich der Begriff **fast alle** für „unendlich viele bis auf endlich viele“ eingebürgert. Wenn also eine Eigenschaft für fast alle Folgenglieder a_n gilt, dann gilt sie für unendlich viele der a_n mit Ausnahme von endlich vielen. Damit gelingt uns nun eine äquivalente Charakterisierung des Grenzwertes einer Folge.

Definition 5.1.12

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{K}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle a_n in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen.

Bemerkung 5.1.13

Innerhalb jeder ε-Umgebung des Grenzwertes liegen also unendlich viele Folgenglieder, außerhalb nur endlich viele.

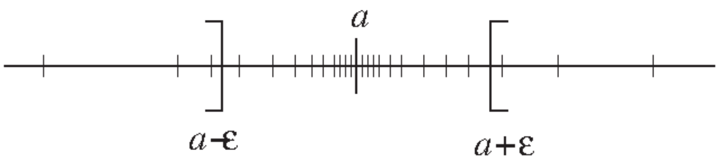

Abbildung 5.1.4. Außerhalb jeder ε-Umgebung des Grenzwerts liegen nur endlich viele Folgenglieder, innerhalb liegen fast alle.

Die Äquivalenz der beiden Charakterisierungen von Konvergenz sieht man sofort ein, denn für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq n_0: \quad |a_n-a|<\varepsilon \\ \Longleftrightarrow\ & \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq n_0: \quad a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon \\ \Longleftrightarrow\ & \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq n_0: \quad a_n\in U_\varepsilon(a) \end{aligned}$$

5.2 Beschränkte Folgen

Wir haben in der Folge mit den Gliedern $a_n = n$ schon eine Folge kennengelernt, die unbeschränkt ist. Wir wollen jetzt den Zusammenhängen zwischen Konvergenz und Beschränktheit auf den Zahn fühlen.

Definition 5.2.1: Beschränkte Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{K}$ heißt

(a) **nach oben beschränkt**, wenn

$$\exists M\in\mathbb{K} \quad \forall n\in\mathbb{N}: \quad a_n\leq M.$$

Die Zahl M heißt **obere Schranke** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) **nach unten beschränkt**, wenn

$$\exists M\in\mathbb{K} \quad \forall n\in\mathbb{N}: \quad M\leq a_n.$$

Die Zahl M heißt **untere Schranke** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) **beschränkt**, wenn

$$\exists M\in\mathbb{K} \quad \forall n\in\mathbb{N}: \quad |a_n|\leq M.$$

Dass Summe und Produkt beschränkter Folgen wieder beschränkt sind, scheint banal, und in der Tat ist der Beweis reine Formsache.

Lemma 5.2.2

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{K}$, dann sind auch die Folgen

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

beschränkt.

Beweis. Nach Voraussetzung gelten $|a_n| \le M_a$ und $|b_n| \le M_b$ mit $M_a, M_b \in \mathbb{K}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |a_n + b_n| &\le |a_n| + |b_n| \le M_a + M_b =: M_{a+b} \in \mathbb{K}, \\ |a_n b_n| &\le |a_n||b_n| \le M_a M_b =: M_{a\cdot b} \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

□

Jetzt können wir den fundamentalen Zusammenhang zwischen Konvergenz und Beschränktheit nachweisen.

Satz 5.2.3: Beschränktheit konvergenter Folgen

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\implies$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

Beweis. Sei a der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wähle $\varepsilon = 1$, dann gilt nach Definition der Konvergenz

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 : \quad |a_n - a| < 1.$$

Schätzen wir nun $|a_n|$ für $n \ge n_0$ ab:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

Wenn wir nun noch

$$M := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$$

definieren, dann haben wir

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| \le M.$$

□

Bemerkung 5.2.4: Achtung!

Die Umkehrung von Satz 5.2.3 gilt *nicht*, denn z. B. ist die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,\ldots)$$

sicherlich beschränkt ($M = 1$), aber nicht konvergent.

Zur späteren Referenz machen wir uns nun noch klar, was eigentlich eine **unbeschränkte Folge** ist.

Definition 5.2.5: Unbeschränkte Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist **unbeschränkt**, wenn

$$\forall M \in \mathbb{K} \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| > M.$$

Jetzt kümmern wir uns noch um ein paar Rechenregeln für konvergente Folgen.

5.3 Rechenregeln für konvergente Folgen

Konvergenznachweise mithilfe des Kriteriums (5.1) können mitunter aufwendig sein. Ein praktisches Hilfsmittel sind daher Rechenregeln, die es in vielen Fällen erlauben, den Grenzwert einer Folge unter Verwendung bekannter Grenzwerte „elementarer Folgen" schnell zu bestimmen.

Satz 5.3.1

Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien beide konvergent mit Grenzwerten a bzw. b. Dann gelten

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$, falls $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$.

Achtung: Beide Folgen müssen konvergent sein!

Beweis. Weil beide Folgen konvergent sind, existieren für alle $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen $n_{0,1}$ und $n_{0,2}$, so dass

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_{0,1}: &\quad |a_n - a| < \varepsilon, \\ \forall n \geq n_{0,2}: &\quad |b_n - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit gibt es aber für alle $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$, z. B. $n_0 := \max\{n_{0,1}, n_{0,2}\}$, so dass

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0: &\quad |a_n - a| < \varepsilon, \\ \forall n \geq n_0: &\quad |b_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

gelten.

(a) Mit dem wie oben gefundenen gemeinsamen n_0 schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a + b_n - b| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

(b) Wie unter (a) verwenden wir das gemeinsame n_0.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\ &\leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \\ &< |b_n|\varepsilon + |a|\varepsilon \\ &= (|b_n| + |a|)\varepsilon \end{aligned}$$

Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist sie nach Satz 5.2.3 auch beschränkt; die Schranke sei M. Damit folgt

$$|a_n b_n - ab| < (|b_n| + |a|)\varepsilon \leq (M + |a|)\varepsilon = k\varepsilon,$$

wobei $k \in \mathbb{K}$ eine Konstante ist.

(c) Wir zeigen (c) für den Fall $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $a = 1$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, also wähle man $\varepsilon := |b|/2$ in der Definition (5.1) der Konvergenz, d. h.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0: \quad |b_n - b| < \frac{|b|}{2},$$

und damit gilt für alle $n \geq n_0$, dass

$$|b_n| > |b|/2. \tag{5.2}$$

Wegen der Konvergenz der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0' \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0': \quad |b_n - b| < \varepsilon \frac{|b|^2}{2}, \tag{5.3}$$

denn der Faktor $|b|^2/2$ ist ja nur ein konstanter Faktor. Jetzt fügen wir alles zusammen, denn es gilt für alle $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \overset{(5.2)}{<} \frac{2|b_n - b|}{|b|^2} \overset{(5.3)}{<} \varepsilon,$$

und damit ist die Konvergenz von $1/b_n$ gegen $1/b$ gezeigt. Der allgemeine Fall der Konvergenz von a_n/b_n folgt jetzt mit (b), denn $a_n/b_n = a_n \cdot 1/b_n$. □

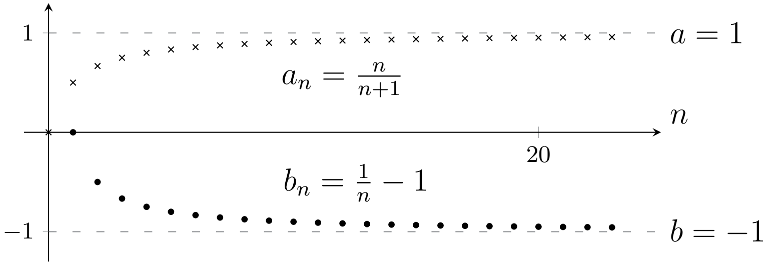

Abbildung 5.3.1. Die konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$

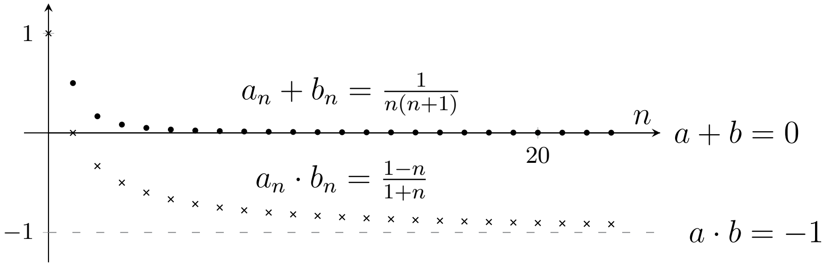

Abbildung 5.3.2. Die konvergenten Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$

Beispiele 5.3.2

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{(n-3)^3 - n^3 + 27}{4n^2 - 7}$. Elementares Umformen liefert

$$a_n = \frac{27n - 9n^2}{n^2(4 - \frac{7}{n^2})} = \frac{27}{n(4 - \frac{7}{n^2})} - \frac{9}{4 - \frac{7}{n^2}} =: b_n + c_n.$$

Wir haben bereits gesehen, dass die harmonische Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine Nullfolge ist und somit

$$b_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{27}{4 - 7 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$
$$c_n = -\frac{9}{4 - 7 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{9}{4},$$

also $a_n \to -9/4,\ n \to \infty$.

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit $a_n := \frac{n}{n+1}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit $b_n := \frac{1}{n} - 1$. Beide Folgen sind konvergent mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n = -1$. Daher gilt

$$a_n + b_n = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} a + b = 0,$$
$$a_n \cdot b_n = \frac{1-n}{1+n} \xrightarrow{n\to\infty} a \cdot b = -1.$$

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit $a_n := \sqrt[n]{x}$, wobei $x \geq 0$. Wegen $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ lässt sich 1 als Grenzwert vermuten. Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich aber *nicht*

$$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = x^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = x^0 = 1.$$

Erst später werden wir im Kontext stetiger Funktionen zeigen, dass obige Rechnung tatsächlich korrekt ist. Die Konvergenz gegen 1 kann man jedoch auch elementar zeigen: Sei zunächst $x \geq 1$ und man setze $b_n := \sqrt[n]{x} - 1$ für $n \geq 1$. Wegen $\sqrt[n]{x} \geq 1$ ist $b_n \geq 0$ für $n \geq 1$ und die Bernoulli'sche Ungleichung (Lemma 3.4.5) liefert

$$x = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n > nb_n \iff b_n = \sqrt[n]{x} - 1 < \frac{x}{n}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und man wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_0 > x/\varepsilon$, dann folgt

$$|\sqrt[n]{x} - 1| < \frac{x}{n} \leq \frac{x}{n_0} < \frac{\varepsilon}{x} x = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Also ist (5.1) erfüllt und somit $\sqrt[n]{x} \to 1$ für $n \to \infty$. Den Fall $0 < x < 1$ können wir nun mithilfe der Rechenregeln erledigen, denn $1/x > 1$ und daher

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/x}} \to \frac{1}{1} = 1, \quad n \to \infty.$$

Eine konvergente Folge ist beschränkt und damit auch der Grenzwert. Teilt der Grenzwert denn dieselbe Schranke wie die Folge?

Satz 5.3.3

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n \leq M$ für hinreichend große n, dann gilt auch
$$a \leq M.$$

Beweis. Angenommen, es sei $a > M$. Setze dann $\varepsilon := a - M > 0$. Wegen $a_n \to a$ für $n \to \infty$, folgt
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad a - a_n \leq |a_n - a| < \varepsilon = a - M,$$
woraus $a_n > M$ folgt, und das ist ein Widerspruch. □

Bemerkung 5.3.4: Achtung!

Selbst wenn $a_n < M$ gilt, folgt trotzdem nur $a \leq M$. Das sieht man am Beispiel
$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n := \frac{n}{n+1} < 1,$$
aber $a := \lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Manchmal weiß man, dass eine Folge von zwei konvergenten Folgen „eingeschachtelt“ wird, die *denselben* Grenzwert besitzen. Dann hat man auch schon gewonnen.

Satz 5.3.5: Einschließungssatz

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$ mit $a_n \leq b_n \leq c_n$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent und es gelte
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n =: s \in \mathbb{K}.$$
Dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} b_n = s.$$

Beweis. Der Beweis ist eine gute Übung für euch, siehe A.5.5! □

Wie die nachfolgenden Beispiele zeigen, ist der Einschließungssatz trotz (oder gerade wegen) seiner Einfachheit ein mächtiges Werkzeug zur Bestimmung von Grenzwerten.

Beispiele 5.3.6

(a) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit $b_n := \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$. Da $-1/n^2 \geq -1$, gilt nach der Bernoulli'schen Ungleichung (Lemma 3.4.5) einerseits

$$b_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} =: a_n.$$

Andererseits ist $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 =: c_n$ für alle $n \geq 1$. Die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ wird also durch $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ eingeschlossen, d. h. $a_n \leq b_n \leq c_n$. Wegen $a_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1,\ n \to \infty$, folgt aus dem Einschließungssatz

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

(b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit $b_n := \frac{n^n}{2^{n^2}}$. Wie bereits erwähnt, können wir bei Konvergenzbetrachtungen die ersten paar Glieder der Folge getrost außer Acht lassen. Beachtet man nun $2^n \geq n^2$ für $n \geq 4$, dann gilt die Abschätzung

$$b_n = \frac{n^n}{2^{n^2}} = \frac{n^n}{2^{n\cdot n}} = \left(\frac{n}{2^n}\right)^n \leq \left(\frac{n}{n^2}\right)^n = \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n} =: c_n.$$

Da weiterhin $0 \geq b_n$ für alle $n \geq 1$, liefert der Einschließungssatz $b_n \to 0,\ n \to \infty$.

5.4 Cauchy-Folgen und die Vollständigkeit von Körpern

Den großen Nachteil der grundlegenden Konvergenzdefinition (5.1) habt ihr vermutlich schon selbst bemerkt: Ihr müsst den Grenzwert schon kennen oder ahnen oder raten, um Konvergenz zu zeigen, und das ist im Allgemeinen nicht einfach! Jetzt kommt aber Hilfe. Wir machen uns zunutze, dass eine in $\mathbb{K}$ konvergente Folge die Eigenschaft hat, sich „ganz weit hinten" ($\forall n \geq n_0$) sehr eng zusammenzudrängeln, und wir versuchen über das Drängeln auch ohne Kenntnis des Grenzwerts zu einer Konvergenzaussage zu kommen.

Definition 5.4.1: Chauchy-Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt **Cauchy-Folge** oder **Fundamentalfolge**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_{>0} : \quad |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon. \qquad (5.4)$$

Diese Definition fasst ganz sauber, dass sich in unserer Vorstellung die Folgenglieder einer konvergenten Folge „ganz weit hinten“ beliebig nahekommen. Was haben nun die Cauchy-Folgen mit den konvergenten Folgen gemeinsam?

Satz 5.4.2: Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent } \implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge.}$$

Beweis. Weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon,$$

wobei a den Grenzwert bezeichnet. Für $\mathbb{N} \ni k \geq 1$ folgt dann

$$|a_n - a_{n+k}| = |a_n - a + a - a_{n+k}| \leq |a_n - a| + |a_{n+k} - a| < 2\varepsilon,$$

und damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. □

Es wäre traumhaft, wenn auch die Umkehrung von Satz 5.4.2 gelten würde, wenn also jede Cauchy-Folge in einem archimedisch angeordneten Körper $\mathbb{K}$ automatisch konvergent wäre. Für eine gegebene Folge wäre dann die Eigenschaft zu konvergieren *äquivalent* dazu, eine Cauchy-Folge zu sein. Diese besondere Beschaffenheit eines Körpers wollen wir in einer eigenständigen Definition festhalten.

Definition 5.4.3: Vollständige Körper

Ein archimedisch angeordneter Körper $\mathbb{K}$, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt **vollständig**.

Bisher haben wir euch immer geraten, bei einem archimedisch angeordneten Körper $\mathbb{K}$ an $\mathbb{Q}$ zu denken. Nun müssen wir feststellen, dass $\mathbb{Q}$ in Bezug auf die Vollständigkeit versagt.

Beispiel 5.4.4: $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit

$$a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

Eine solche Folgendefinition, bei der die a_n durch Vorgänger definiert werden, heißt **rekursive Definition**. Wir haben eine solche Definition bereits bei der Fibonacci-Folge kennengelernt.

Wir beginnen nun, die Folge zu untersuchen.

(1) Wir zeigen: Für alle $n \geq 1$ gilt $1 \leq a_n < 2$. Dazu bietet sich vollständige Induktion an. Die Behauptung ist sicher richtig für $n = 1$. Nun nehmen wir an, für irgendein $n > 1$ gelte $1 \leq a_n < 2$. Dann folgt

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = 1.$$

(2) Wir zeigen: Für alle $n \geq 2$ gilt $2 \leq a_n^2 \leq 2 + \frac{1}{2^n}$.

(a) Wegen $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, folgt

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 4\alpha\beta,$$

also $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$. Damit folgt für $n \geq 2$:

$$a_n^2 = \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)^2 \geq 2$$

(b) Die andere Ungleichung zeigen wir mit vollständiger Induktion. Für $n = 2$ gilt $a_2 = 3/2$, also

$$a_2^2 = \frac{9}{4} \leq 2 + \frac{1}{2^2},$$

und der Induktionsanfang ist gemacht. Für irgendein $n \geq 2$ gelte also $a_n^2 - 2 \leq \frac{1}{2^n}$. Dann folgt im Induktionsschluss

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 2 &= \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} - 1 \\ &= \frac{1}{2}(a_n^2 - 2) - \frac{1}{4a_n^2}(a_n^4 - 4). \end{aligned}$$

Wegen (a) ist $a_n^2 \geq 2$, also $a_n^4 \geq 4$, und so folgt

$$a_{n+1}^2 - 2 \leq \frac{1}{2}(a_n^2 - 2) \overset{\text{IA}}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

(3) Wegen $\frac{1}{2^n} \to 0, (n \to \infty)$, folgt

$$a_n^2 \to 2, (n \to \infty),$$

d. h. $a = \sqrt{2}$.

(4) Wir zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ist eine Cauchy-Folge. Wir wissen schon, dass $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine Cauchy-Folge ist, denn sie ist konvergent gegen 2, d. h.

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall m,n\geq n_0: \quad |a_m^2-a_n^2|<\varepsilon.$$

Nicht erschrecken! Diese Form ist völlig äquivalent zu (5.4).
Wegen (1) gilt $\forall m,n\in\mathbb{N}_{>0}: a_m+a_n\geq 2$. Daher gilt für alle $m,n\geq n_0$:

$$\begin{aligned}|a_m-a_n| &< 2|a_m-a_n|\\ &\leq (a_m+a_n)|a_m-a_n|\\ &= |(a_m+a_n)(a_m-a_n)|\\ &= |a_m^2-a_n^2|\\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

und damit ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine Cauchy-Folge.

(5) Wir wissen jetzt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die dem Wert $a=\sqrt{2}$ zustrebt, aber $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$! Also ist $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

Wir kommen jetzt an die zentrale Stelle, an der wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ konstruieren.

Historische Bemerkung

Das ist tatsächlich erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts gelungen; bis dahin mussten wir mit schwammigen Vorstellungen über den Aufbau der reellen Zahlen Vorlieb nehmen. Der Erste, der die reellen Zahlen sauber definierte, war der Braunschweiger Richard Dedekind (1831–1916) mithilfe sogenannter **Dedekind'scher Schnitte**, bei denen man $\mathbb{Q}$ in zwei disjunkte Mengen U und O zerlegt, so dass $U\cap O=\emptyset$ und $U\cup O=\mathbb{Q}$ gelten. Wenn die Menge U nun kein Maximum hat und die Menge O kein Minimum, dann definiert der Schnitt eine neue Zahl, die nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten ist. Dedekind veröffentlichte seine Idee in der Schrift *Stetigkeit und irrationale Zahlen* im Jahr 1872, aber wie er selbst dort schreibt, hatte er die zentrale Idee bereits im Herbst des Jahres 1858 entwickelt. Fast gleichzeitig mit Dedekind legte Georg Cantor (1845–1918) aus Halle eine Konstruktion der reellen Zahlen vor, die auf der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ mithilfe von **Cauchy-Folgen** beruht.

Man kann die reellen Zahlen auf verschiedene andere Arten konstruieren, zum Beispiel axiomatisch, indem man das sogenannte **Supremumsaxiom** – jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge in $\mathbb{K}$ besitzt ein Supremum (das besprechen wir später noch) – fordert, oder aber noch anders vorgeht. Für angehende Lehrerinnen und Lehrer ist zu diesem Thema das Buch [Knoche/Wippermann 1986] eine fast unerschöpfliche Quelle!

Wir habe uns hier für die konstruktive Methode von Cantor über die Cauchy-Folgen entschieden, und das, wie wir glauben, aus gutem Grund. Alle Körperaxiome, die wir bisher kennengelernt haben, sind algebraische Axiome. Die einzige wirklich analytische Eigenschaft der reellen Zahlen, die diese vor den rationalen Zahlen auszeichnet, ist die Vollständigkeit. Daher meinen wir, dass diese analytische Eigenschaft auch mit Mitteln der Analysis – eben den Cauchy-Folgen – zu beweisen ist.

5.5 Die analytische Konstruktion der reellen Zahlen

Wir verfolgen die Idee, Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ zusammenzufassen, die sich offenbar demselben Wert annähern. So packen wir die durch

$$a_n := \frac{1}{n}, \quad b_n := \frac{42}{n^2}, \quad \text{etc.}$$

definierten Folgen in eine „Klasse“, da sie offenbar gegen null konvergieren. Die reellen Zahlen werden wir dann als Menge dieser Klassen definieren. Doch der Reihe nach. Zunächst wollen wir uns überlegen, wie eine beliebige Menge M in Klassen oder disjunkte Teilmengen zerlegt werden kann, indem man die einzelnen Elemente von M miteinander in Verbindung bringt.

Definition 5.5.1: Äquivalenzrelationen

Sei M eine Menge. Eine Teilmenge R von $M \times M$ heißt **Relation** in M und man schreibt

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x, y) \in R.$$

Eine Relation heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie

(1) **reflexiv** ist, d. h. wenn $\forall x \in M : x \sim x$ gilt,
(2) **symmetrisch** ist, d. h. wenn $x \sim y \implies y \sim x$ gilt,
(3) **transitiv** ist, d. h. wenn $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \implies x \sim z$ gilt.

Für $a \in M$ heißt

$$M_a := \{x \in M \mid x \sim a\}$$

die von a erzeugte **Äquivalenzklasse**.
Eine **Klasseneinteilung** (oder disjunkte Zerlegung) der Menge M ist ein Mengensystem $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$, I irgendeine Indexmenge, für das

(i) $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset \quad$ für $\alpha \neq \beta$,

(ii) $M = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$

gilt.

Wir wollen ein kurzes Beispiel geben.

Beispiel 5.5.2

Jede rationale Zahl r kann als Quotient einer ganzen Zahl p und einer natürlichen Zahl $q \neq 0$ geschrieben werden, $r = p/q \in \mathbb{Q}$. Man kann $\mathbb{Q}$ – als Menge – daher auch als kartesisches Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$ auffassen, wobei jedoch die Problematik besteht, dass beispielsweise in $\mathbb{Q}$

$$\frac{111}{296} = \frac{51}{136} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8},$$

aber in $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$

$$(111, 296) \neq (51, 136) \neq (15, 40) \neq (3, 8).$$

Ein und dieselbe rationale Zahl korrespondiert also zu *verschiedenen* Tupeln aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$. Um die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$ dennoch mit $\mathbb{Q}$ identifizieren zu können, fasst man alle Tupel, die zu derselben rationalen Zahl korrespondieren, vermöge der Äquivalenzrelation (siehe A.5.15)

$$(p, q) \sim (t, s) \quad :\Longleftrightarrow \quad ps = tq$$

zusammen. Offenbar gilt dann

$$(111, 296) \sim (51, 136) \sim (15, 40) \sim (3, 8)$$

und die Äquivalenzklasse

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0})_{(3,8)} = \{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0} \mid (p, q) \sim (3, 8)\}$$

repräsentiert die rationale Zahl $3/8$. Die Menge aller so gebildeten Äquivalenzklassen entspricht daher der Menge der rationalen Zahlen, also

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}_{>0} \right\} = \bigcup_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ q \in \mathbb{N}_{>0}}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0})_{(p,q)}.$$

Den Zusammenhang zwischen Äquivalenzklassen und Klasseneinteilungen von Mengen liefert nun der folgende Satz.

Satz 5.5.3

Sei M eine Menge, dann gilt:

(a) Jede Klasseneinteilung von M erzeugt eine Äquivalenzrelation in M.
(b) Für eine Äquivalenzrelation bildet das Mengensystem der verschiedenen Äquivalenzklassen eine Klasseneinteilung von M.

Beweis. Sei M eine Menge.

(a) Sei $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Klasseneinteilung von M. Diese induziert eine Relation durch

$$R := \{(x, y) \mid \exists \alpha \in I \text{ mit } x, y \in M_\alpha\}.$$

Hier heißt also $x \sim y$, dass x und y zur selben Menge M_α gehören. Nun zeigt man durch (langweiliges) Nachrechnen der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Relation R, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

(b) In M sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben.

(i) Da jedes $x \in M$ zu einer Äquivalenzklasse M_x gehört, ist die Vereinigung aller Äquivalenzklassen sicher ganz M.

(ii) Seien $M_a := \{x \in M \mid x \sim a\}$ und $M_b := \{x \in M \mid x \sim b\}$ zwei Äquivalenzklassen mit $M_a \cap M_b \neq \emptyset$. Ist $c \in M_a \cap M_b$, dann gelten $c \sim a$ und $c \sim b$, also $a \sim b$, und damit ist $M_a = M_b = M_c$. Also sind zwei Äquivalenzklassen mit einem gemeinsamen Element identisch. Damit haben zwei verschiedene Äquivalenzklassen leeren Durchschnitt. Somit bildet das System der Äquivalenzklassen eine Klasseneinteilung von M.

□

Nach diesen technischen Vorbereitungen geht es nun richtig los! Wir wollen alle die Cauchy-Folgen in eine Klasse packen, von denen die Differenz je zweier Folgen eine Nullfolge ist. Genauer:

Definition 5.5.4: Äquivalenz von Cauchy-Folgen

Zwei Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$ heißen **äquivalent**, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

gilt.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge der rationalen Cauchy-Folgen definiert.

Lemma 5.5.5

Die in Definition 5.5.4 angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation;

$$\overline{(x_n)} := \{(y_n) \mid (y_n) \text{ ist rationale Cauchy-Folge und } (y_n) \sim (x_n)\}$$

ist die Äquivalenzklasse zur Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Wir klappern die drei Bedingungen für eine Äquivalenzrelation ab.

(1) Reflexivität: $(x_n) \sim (y_n)$, denn $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.

(2) Symmetrie: Wegen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n)$$

folgt aus $(x_n) \sim (y_n)$ auch $(y_n) \sim (x_n)$.

(3) Transitivität: Seien $(x_n) \sim (y_n)$ und $(y_n) \sim (z_n)$, dann folgt aus

$$x_n - z_n = (x_n - y_n) + (y_n - z_n)$$

auch

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - z_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) + \lim_{n\to\infty}(y_n - z_n) = 0.$$

Damit ist $(x_n) \sim (z_n)$. □

So, nun haben wir genug Vorarbeit geleistet, um als Hebammen den reellen Zahlen auf die Welt zu verhelfen!

Definition 5.5.6: Die reelle Zahlen

Reelle Zahlen sind Äquivalenzklassen rationaler Cauchy-Folgen,

$$\mathbb{R} := \{\overline{(a_n)} \mid (a_n) \text{ ist eine rationale Cauchy-Folge}\}.$$

Bitte macht euch ganz klar, was für „Tierchen“ die reellen Zahlen eigentlich sind. Wenn ihr in Zukunft z. B. π hinschreibt, dann ist das eigentlich eine (riesengroße) Äquivalenzklasse all jener rationalen Cauchy-Folgen, die sich dem Wert π beliebig nähern!

Nun sind sehr viele Dinge zu zeigen und wir wollen nicht alles im Detail durchkauen. Hier die wichtigsten Eckpunkte:

1. Wir interpretieren $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ wie folgt: Ist $r \in \mathbb{Q}$, dann ist das eigentlich die konstante Cauchy-Folge

$$(r) := (r, r, r, r, \ldots),$$

d. h., $r \in \mathbb{Q}$ ist die reelle Zahl $\overline{(r)}$.

2. Addition und Multiplikation von reellen Zahlen. Seien $a = \overline{(a_n)}$ und $b = \overline{(b_n)}$ reelle Zahlen, dann definieren wir
$$a + b := \overline{(a_n + b_n)}, \quad a \cdot b := \overline{(a_n \cdot b_n)}.$$
Zuerst einmal müssen wir zeigen, dass $(a_n + b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$ wieder rationale Cauchy-Folgen sind, aber das sieht man ganz leicht. Schlimmer ist, dass wir nun noch zeigen müssen, dass $\mathbb{R}$ mit der oben definierten Addition und Multiplikation ein Körper ist. Das ist hässliche körperliche Arbeit, die uns der große Edmund Landau (1877–1938) in seinem kleinen Buch [Landau 1965] abgenommen hat! Wenn ihr es also liebt, aus 14 Millionen und 605 abgebrannten Streichhölzern den Eiffelturm nachzubauen, oder wenn ihr gar keine Freunde habt, aber enorm viel Zeit und noch mehr Langeweile, oder wenn ihr euch gerne selbst mit dem Hammer auf den Daumen haut und Ausgießer und Henkel eurer Kaffeekanne auf derselben Seite sind, dann empfehlen wir euch, das Buch von Landau von vorne nach hinten durchzuarbeiten. Um gute Analytikerinnen und Analytiker zu werden, ist das jedoch nicht notwendig. Etwas kürzer findet man alle Beweise zur Körpereigenschaft von $\mathbb{R}$ auch im ersten der drei Bände von Endl und Luh [Endl/Luh 1989].
3. $\mathbb{R}$ besitzt die aus $\mathbb{Q}$ bekannte Ordnung. Sind $a = \overline{(a_n)}$ und $b = \overline{(b_n)}$ reelle Zahlen, dann definieren wir
$$\begin{aligned} a < b \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists \mathbb{Q} \ni \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}_{>0}\ \forall m \geq M: \quad a_m \leq b_m - \varepsilon \\ a \leq b \quad &:\Longleftrightarrow \quad a < b \text{ oder } a = b. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Lemma 5.5.7

Die Ordnung $\leq$ ist **total**, d. h., für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ gilt entweder $a < b$ oder $b < a$.

Beweis. Sind zwei reelle Zahlen $a = \overline{(a_n)}$ und $b = \overline{(b_n)}$ ungleich, dann gilt *nicht* $(a_n) \sim (b_n)$. Wir müssen also
$$\begin{aligned} & (a_n) \sim (b_n) \\ \Longleftrightarrow\ & \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0: \quad |a_n - b_n| < \varepsilon \end{aligned}$$
negieren, aber wozu haben wir uns denn zu Beginn mit Logik beschäftigt? Die Negation ist demnach
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0: \quad |a_n - b_n| \geq \varepsilon. \tag{5.6}$$

Wir setzen $\varepsilon' := \varepsilon/3$. Die Folgen (a_n) und (b_n) sind Cauchy-Folgen, d. h. einerseits $\exists n_{0,1} \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_{0,1} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{>0}: \quad |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon',$$

und andererseits $\exists n_{0,2} \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_{0,2} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{>0}: \quad |b_n - b_{n+k}| < \varepsilon'.$$

Setze $n_0 := \max\{n_{0,1}, n_{0,2}\}$, dann folgt aus (5.6) die Existenz eines $n \geq n_0$ mit $|a_n - b_n| \geq \varepsilon$. Daher gibt es jetzt zwei Möglichkeiten: Entweder ist

$$a_n - b_n \geq \varepsilon$$

oder

$$b_n - a_n \geq \varepsilon.$$

Der Fall $a < b$ ist in Abbildung 5.5.1 dargestellt. Für $k \geq 1$ bleiben a_{n+k} bzw. b_{n+k} jeweils im Abstand $\leq \varepsilon' = \varepsilon/3$ um a bzw. b, also ist (5.5) erfüllt mit $M = n$ und im ersten Fall folgt $a > b$, im zweiten $b > a$. □

4. Definition des Betrags. Ist $a = \overline{(a_n)}$, dann definieren wir

$$|a| := \overline{|a_n|}.$$

Alle Eigenschaften des Betrages, insbesondere die Dreiecksungleichung, bleiben genauso wie in $\mathbb{Q}$.

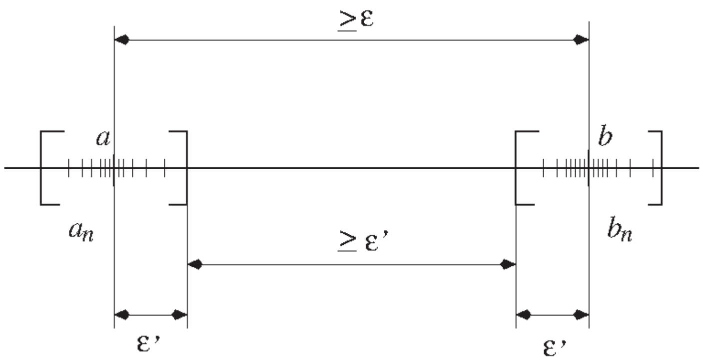

Abbildung 5.5.1. Der Fall $a < b$

Jetzt können wir endlich zeigen:

Satz 5.5.8: $\mathbb{R}$ ist vollständig

$\mathbb{R}$ ist vollständig, d. h., in $\mathbb{R}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.

Beweis. Sei (a_n) eine Cauchy-Folge reeller Zahlen, d. h., jedes a_n ist selbst Äquivalenzklasse rationaler Cauchy-Folgen, also

$$a_i = \overline{(a_{i,n})}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Achtung, jetzt wird es knifflig! Wir wollen das Konvergenzverhalten *reeller* Cauchy-Folgen untersuchen, aber jedes Folgenglied ist eine Äquivalenzklasse rationaler Cauchy-Folgen. Wir haben es also mit Folgen von Folgen zu tun, und das macht die Sache etwas unübersichtlich.

Die Idee ist, zu jedem Index i eine immer kleiner werdende Zahl, z. B. $\frac{1}{2i}$, zu wählen, und die Definition rationaler Cauchy-Folgen zu verwenden, um

$$\exists n_i \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_i \quad \forall k \in \mathbb{N}_{>0}: \quad |a_{i,n} - a_{i,n+k}| < \frac{1}{2i}$$

zu zeigen. Dann definieren wir $b_i := a_{i,n_i}$ und gehen zur rationalen Folge (b_i) über.

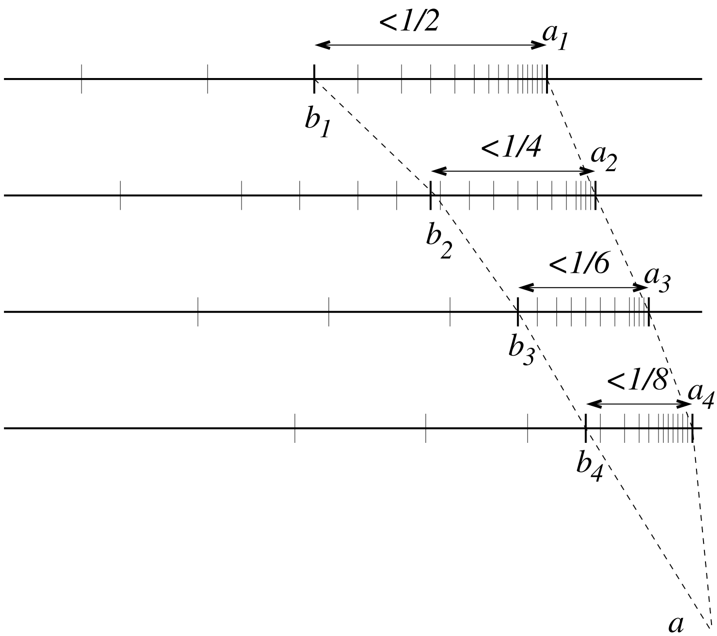

Abbildung 5.5.2. Die zwei Ebenen der Konvergenz

(a) Zeige: $|b_i - a_i| < 1/i$. Die reelle Zahl $|b_i - a_i|$ wird repräsentiert durch die rationale Cauchy-Folge $(|b_i - a_{i,m}|)_{m\in\mathbb{N}}$. Für $m \geq n_i$ gilt

$$|b_i - a_{i,m}| = |a_{i,n_i} - a_{i,m}| < \frac{1}{2i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{2i},$$

also folgt mit $\varepsilon = \frac{1}{2i}$ aus (5.5), dass

$$|b_i - a_i| < \frac{1}{i}$$

gilt.

(b) Zeige: (b_i) ist eine rationale Cauchy-Folge.

Die Größe $|b_i - b_{i+k}|$ behält denselben Wert, ganz egal ob wir sie als rationale oder als reelle Zahl auffassen. Also schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |b_i - b_{i+k}| &= |b_i - a_i + a_i - a_{i+k} + a_{i+k} - b_{i+k}| \\ &\leq |b_i - a_i| + |a_i - a_{i+k}| + |a_{i+k} - b_{i+k}| \\ &< \frac{1}{i} + \varepsilon + \frac{1}{i+k} \\ &< 2\varepsilon \end{aligned} \tag{5.7}$$

für hinreichend großes i und für $k \geq 1$. Die Äquivalenzklasse von (b_n), $a := \overline{(b_n)}$, ist unser Kandidat für den Grenzwert von (a_i). Es folgt aus (5.7), dass für hinreichend große i

$$|b_i - a| < 3\varepsilon$$

gilt, also folgt $b_i \to a$, $(n \to \infty)$.

(c) Zeige $a_i \to a$, $(n \to \infty)$. Aus (a), (b) und der Dreiecksungleichung folgt

$$|a_i - a| \leq |a_i - b_i||b_i - a| < \frac{1}{i} + 3\varepsilon < 4\varepsilon$$

für hinreichend große i. □

5.6 Monotone Folgen, Supremum und Infimum

In diesem Abschnitt lernen wir nun ein wichtiges Prinzip kennen:

- Monoton *wachsende* Folgen, die nach *oben* beschränkt sind, sind konvergent.
- Monoton *fallende* Folgen, die nach *unten* beschränkt sind, sind konvergent.

Definition 5.6.1: Das Superemum und Infimum einer Menge

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ heißt **Supremum** oder **kleinste obere Schranke** von A, wenn gilt:

(i) $\forall x \in A$ ist $x \leq \xi$ und
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : \quad x > \xi - \varepsilon$.

Wir schreiben:

$$\xi = \sup A$$

Eine Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ heißt **Infimum** oder **größte untere Schranke** von A, wenn gilt:

(i) $\forall x \in A$ ist $x \geq \xi$ und
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : \quad x < \xi + \varepsilon$.

Wir schreiben:

$$\xi = \inf A$$

Die Bedingung (i) beim Supremum (Infimum) bedeutet einfach, dass ξ eine obere (untere) Schranke von A sein muss. Bedingung (ii) sagt über das Supremum (Infimum), dass es die kleinste obere (größte untere) Schranke von A ist.

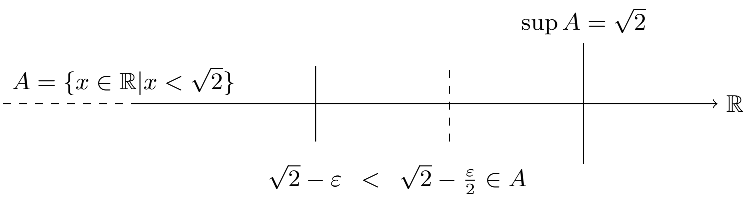

Abbildung 5.6.1. Das Supremum einer Menge als kleinste obere Schranke

Beispiel 5.6.2

Wir wollen Supremum und Infimum der Menge

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m},\; n, m \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

bestimmen. Wegen $\frac{1}{n} \leq 1$ für $n \geq 1$ gilt $x \leq 2$ für alle $x \in A$, sprich 2 ist eine obere Schranke von A. Für $n = m = 1$ ist $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 2 \in A$, also kann es keine kleinere obere Schranke geben und somit $\sup A = 2$. Ähnlich erkennt man 0 als eine untere Schranke von A, denn $\frac{1}{n} > 0$

für $n \geq 1$. Tatsächlich ist 0 auch schon die kleinste untere Schranke: Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher

$$A \ni x = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} < \varepsilon = 0 + \varepsilon,$$

also $\inf A = 0$.

Bemerkung 5.6.3: Achtung!

Es wird nicht gefordert, dass Supremum oder Infimum Elemente von A sein müssen. Im Fall eines abgeschlossenen Intervalls

$$A := [a, b] \subset \mathbb{R}$$

sind $a = \sup A$ und $b = \inf A$, und beide gehören zur Menge A. Im Fall des offenen Intervalls

$$A :=]a, b[\subset \mathbb{R}$$

sind ebenfalls $a = \sup A$ und $b = \inf A$, aber beide sind nicht aus der Menge A.

In $\mathbb{Q}$ hat *nicht* jede Menge ein Supremum. Betrachte dazu beispielsweise die Menge $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$, dann ist offenbar $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. In $\mathbb{R}$ ist das aber anders, denn aufgrund der Vollständigkeit, gilt der folgende Satz.

Satz 5.6.4

Jede nach oben (unten) beschränkte, nichtleere Menge besitzt ein Supremum (Infimum). Genauer: Für $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ gilt:

(a) Existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in A : x \leq M$, dann existiert $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\xi = \sup A$.
(b) Existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in A : x \geq M$, dann existiert $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\xi = \inf A$.

Beweis. Wir beweisen nur (a); (b) folgt ganz analog.

Weil $A \neq \emptyset$, folgt die Existenz von $\alpha_0 \in A$, so dass α_0 keine obere Schranke von A ist. Da A beschränkt ist, existieren sicher obere Schranken. Wähle eine und nenne sie β_0. Damit ist ein abgeschlossenes Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$ definiert. Berechne nun $\gamma_0 := (\alpha_0 + \beta_0)/2$. Entweder ist γ_0 obere Schranke von A, dann setze $\alpha_1 := \alpha_0$, $\beta_1 := \gamma_0$, oder aber nicht, dann setze $\alpha_1 := \gamma_0$, $\beta_1 := \beta_0$. Nun fahren wir mit dem neuen Intervall $[\alpha_1, \beta_1]$ in der eben beschriebenen Weise fort und erhalten wiederum ein Intervall $[\alpha_2, \beta_2]$ usw. Allgemein lässt sich unser Vorgehen mittels der Rekursion

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}, \quad [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] = \begin{cases} [\alpha_n, \gamma_n] & , \gamma_n \text{ ist obere Schranke von } A \\ [\gamma_n, \beta_n] & , \text{sonst} \end{cases}$$

beschreiben. Das ergibt eine Folge von Intervallen $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subset [\alpha_n, \beta_n]$$

und zugehörigen Intervalllängen

$$\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_n - \alpha_n = \frac{\alpha_n+\beta_n}{2} - \alpha_n \\ \beta_n - \gamma_n = \beta_n - \frac{\alpha_n+\beta_n}{2} \end{array} \right\} = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} = \ldots = \frac{1}{2^{n+1}}(\beta_0 - \alpha_0).$$

Nach Konstruktion liegen alle α_m, β_m für $m > n$ im Intervall $[\alpha_n, \beta_n]$ und wir können für $k \geq 1$ abschätzen:

$$|\alpha_n - \alpha_{n+k}| = \alpha_{n+k} - \alpha_n \leq \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}$$
$$|\beta_n - \beta_{n+k}| = \beta_n - \beta_{n+k} \leq \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}.$$

Damit sind $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen und nach Satz 5.5.8 konvergent. Wegen

$$\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

haben beide Folgen auch denselben Grenzwert ξ.

Wegen Satz 5.3.3 ist ξ eine obere Schranke von A, denn $x \leq \beta_n \implies x \leq \xi$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein α_n mit $\alpha_n > \xi - \varepsilon$. Weil α_n aber keine obere Schranke von A ist, kann auch $\xi - \varepsilon$ keine sein. □

Bemerkung 5.6.5

Die von uns im Beweis angewendete Methode der Konstruktion von ineinander geschachtelten Intervallen $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subset [\alpha_n, \beta_n]$, sodass $d_n := b_n - a_n$ eine Nullfolge bildet, nennt man naheliegenderweise **Intervallschachtelung**. Die Tatsache, dass es zu jeder Intervallschachtelung $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ in archimedisch angeordneten Körpern $\mathbb{K}$ genau ein $a \in \mathbb{K}$ mit

$$\forall n \in N : \quad a \in [\alpha_n, \beta_n]$$

gibt, heißt *Intervallschachtelungsprinzip* und ist äquivalent zur Charakterisierung der Vollständigkeit über die Cauchy-Folgen!

Ebenso kann man für einen archimedisch angeordneten Körper $\mathbb{K}$ axiomatisch *fordern*, dass jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge in $\mathbb{K}$ ein Supremum besitzen soll (**Supremumsaxiom**). Das macht den Körper $\mathbb{K}$ dann bereits zu einem vollständigen Körper und ist ebenfalls äquivalent zur Charakterisierung der Vollständigkeit über die Cauchy-Folgen!

Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt eines der wichtigsten Konvergenzkriterien für reelle Folgen.

Satz 5.6.6: Monotoniekriterium

Jede monoton wachsende (monoton fallende), nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert. Genauer:

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton wachsend, d. h. $a_n \leq a_{n+1}$, und nach oben beschränkt, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}.$$

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton fallend, d. h. $a_n \geq a_{n+1}$, und nach unten beschränkt, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}.$$

Beweis. Wir zeigen wieder nur (a), weil sich (b) ganz analog ergibt. Die Menge $A := \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ ist sicher nicht leer und beschränkt. Aus Satz 5.6.4 folgt dann die Existenz von $\xi := \sup A$. Für $\varepsilon > 0$ ist $\xi - \varepsilon$ keine obere Schranke von A, d. h., es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > \xi - \varepsilon$. Da A durch ξ beschränkt ist, folgt

$$\xi - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \ldots \leq \xi,$$

also gilt $\forall n \geq n_0 : \xi - \varepsilon < a_n \leq \xi$, und das heißt

$$\forall n \geq n_0 : \quad |a_n - \xi| < \varepsilon,$$

und damit konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ξ. □

Als Nebenprodukt gewinnen wir ein weiteres nützliches Konvergenzkriterium, das sog. *Vergleichskriterium*: Wird eine reelle Folge von einer zweiten Folge „dominiert“, so folgt aus der Konvergenz bzw. Divergenz der einen bereits die Konvergenz bzw. Divergenz der anderen.

Korollar 5.6.7: Vergleichskriterium

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen, sodass für hinreichend große n gilt: $a_n \leq b_n$, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst, dann gilt

$$\begin{aligned}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent} &\implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent}\\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist divergent} &\implies (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist divergent}\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent} &\implies (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\\ &\implies (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\\ &\overset{\text{Satz 5.6.6}}{\implies} \text{ ist konvergent}\end{aligned}$$

Die zweite Zeile ist lediglich die Negation der ersten. □

Die Kraft des Monotoniekriteriums verdeutlicht nun das folgende Beispiel.

Beispiel 5.6.8: Euler'sche Zahl

Der große Leonhard Euler (1707–1783) hat sich in seinem 1748 in Lausanne veröffentlichten Buch *Introductio in Analysin Infinitorum* – ein Nachdruck der deutschen Übersetzung des ersten Teils erschien als *Einleitung in die Analysis des Unendlichen* im Springer-Verlag 1983 – in §115 und §116 mit der durch

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

definierten Folge beschäftigt. Wir wollen der wilden Achterbahnfahrt folgen, mit der Euler zielsicher zum richtigen Ergebnis kam.
Er benutzte den binomischen Lehrsatz (Satz 2.1.15):

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\\ &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} \qquad (5.8)\\ &= 1 + 1 + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots + \frac{1}{n^n}\end{aligned}$$

Jetzt bitte festhalten: Euler argumentiert, dass für $n \to \infty$ alle Terme $(1-1/n), (1-2/n)$, etc. gegen den Wert 1 konvergieren. Damit erreicht er die Darstellung

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots.$$

Die Zahl

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

nennen wir heute die **Euler'sche Zahl**. Ebenso bekommt Euler die Darstellung

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

aber das darf uns nicht darüber hinwegtäuschen, dass Euler hier auf sehr dünnem Eis steht! Wenn n wächst, dann werden auch die Terme in der endlichen Summe (5.8) immer mehr, und für $n \to \infty$ wird aus der endlichen Summe eine unendliche! Mit gleichem Recht könnten wir vermöge

$$1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \dots \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

die Gleichung $1 = 0$ „beweisen“! So wie Euler dürfen wir heute nicht mehr vorgehen! Zuerst müssen wir festhalten, dass die Verwendung des binomischen Lehrsatzes eine gute Idee war:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!\cdot n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left\{ \prod_{m=0}^{k-1} \left(1-\frac{m}{n}\right) \right\}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

wobei man die letzte Gleichung einfach nachrechnen kann. Weiterhin wissen wir

$$0 \le 1-\frac{m}{n} \le 1-\frac{m}{n+1} \le 1 \quad \text{für } m = 0,1,2,\dots,n. \tag{5.10}$$

Nach diesen Vorarbeiten können wir jetzt wirklich starten:

(a) Wir zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, denn aus (5.9) und (5.10) folgt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{m=0}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{m=0}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{(n+1)!} \prod_{m=0}^{n} \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left\{ \prod_{m=0}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) - \prod_{m=0}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \right\} \\
&\overset{\text{(ii)}}{\geq} \frac{1}{(n+1)!} \prod_{m=0}^{n} \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) > 0
\end{aligned}$$

Für (i) haben wir nur den letzten Summanden der ersten Summe vorgezogen; (ii) folgt daraus, dass die weggelassene Differenz wegen (5.10) positiv ist. Damit ist aber $a_{n+1} > a_n$ gezeigt und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (streng) monoton wachsend.

(b) Wir zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn aus (5.9) und (5.10) folgt für alle $n \geq 2$:

$$2 = a_1 < a_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} =: I$$

Nun benötigen wir eine kleine Zwischenüberlegung. Es gilt

$$\begin{aligned}
2! &= 1 \cdot 2 = 2^{2-1}, \\
3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 > 2 \cdot 2 = 2^{3-1}, \\
4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{4-1}, \\
&\vdots \\
n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{(n-1)-\text{mal}} = 2^{n-1},
\end{aligned}$$

was wir mit vollständiger Induktion sauber nachweisen könnten. Damit haben wir

$$\forall n \geq 2: \quad n! \geq 2^{n-1}$$

gezeigt und weiter geht es mit unserem Term I:

$$\begin{aligned}
I &\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \\
&= 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\forall n \geq 2: \quad 2 < a_n < 3.$$

(c) Nach Satz 5.6.6 ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und für den Grenzwert gilt $2 \leq a \leq 3$. Dieser Grenzwert ist die **Euler'sche Zahl**

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775 72\ldots$$

5.7 Die Mächtigkeit der reellen Zahlen

Wie ihr alle noch aus der Schule wisst und wie wir bereits am Beispiel der Zahl $\sqrt{2}$ gezeigt haben, haben die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ „Löcher". Dennoch gilt, dass es zwischen je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq b$, wie eng sie auch zusammenliegen mögen, immer noch eine weitere rationale Zahl gibt, z. B. das arithmetische Mittel $(a+b)/2$. In der Menge $\mathbb{Q}$ gibt es zwar „Löcher", aber trotzdem liegen die rationalen Zahlen eigentümlich „dicht". Die „Löcher" sind die irrationalen Zahlen und die Frage liegt auf der Hand, „wie viele" solcher Löcher es gibt. Nun ist die Frage nach einer „Anzahl" bei einer unendlichen Menge etwas heikel und die Mengenlehre hat einen weitaus besseren Begriff parat: den der „Mächtigkeit" einer Menge.

Definition 5.7.1: Gleichmächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen X und Y heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Abbildung

$$A : X \to Y$$

mit $D(A) = X$ und $W(A) = Y$ gibt.

Stellt euch vor, ihr betretet einen großen Tanzsaal und fragt euch, ob mehr Damen oder Herren anwesend sind. Um das herauszufinden, könntet ihr alle Damen an einer Wand aufreihen, alle Herren an einer anderen, dann beide Reihen durchzählen und schließlich die Zahlen vergleichen. Davon abgesehen, dass dieses Vorgehen das wohlwollende Mitwirken aller Beteiligten verlangt (weder Damen noch Herren stellen sich *eo ipso* in Reihen auf), gibt es einen weit einfacheren Weg: Man lässt den Tanz beginnen, d. h., jede Dame wählt einen Partner zum Tanz (oder umgekehrt), und ganz von selbst zeigt sich, ob Damen oder Herren übrig bleiben. Dieses Prinzip der Paarung ist gerade der Kern obiger Definition. Fragt man, ob zwei Mengen X, Y gleichmächtig sind, so fragt man also, ob es eine Paarung gibt, die aufgeht. Die Stärke der Methode liegt in ihrer Universalität, denn sie ist auf beliebige Mengen anwendbar. Ein Abzählen der einzelnen Elemente würde bei sehr großen und spätestens unendlichen Mengen, wie beispielsweise den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, dagegen nicht mehr sinnvoll sein. Als ein erstes Beispiel wollen wir sehen, dass es genauso viele ungerade, wie natürliche Zahlen gibt.

Beispiel 5.7.2

Die Mengen $Y = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und $X = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ sind gleichmächtig. Wähle die Abbildung

$$\forall n \in Y: \quad A(n) = 2n + 1 \in X.$$

Ist bei endlichen Mengen die Wahl der Paarung noch unbedeutend, so zeigt das Beispiel, dass man bei unendlichen Mengen vorsichtiger sein muss: Hätte man etwas naiv $A(n) = n$ für $n \in X$ betrachtet, dann wäre zwar jedem Element der Menge X eindeutig ein Element der Menge $Y = \mathbb{N}$ zugeordnet, aber die geraden Zahlen in Y gingen leer aus, anders gesagt: Die Abbildung $A\colon X \to Y$ ist injektiv aber nicht bijektiv. Das Wesentliche an der Definition der Mächtigkeit ist, dass man nur *eine* Bijektion (Paarung) finden muss, die aufgeht.

Historische Bemerkung

Die Gleichmächtigkeit der Menge aller natürlicher Zahlen mit den ungeraden (und auch mit den geraden) natürlichen Zahlen ist schon Galileo Galilei (1564–1642) in seinem Werk *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze* aus dem Jahr 1635 aufgefallen und hat bei ihm (und seinen Lesern) für einige Verwunderung gesorgt!

Die natürlichen Zahlen bilden eine geeignete Referenz, Mengen hinsichtlich ihrer Mächtigkeit zu kategorisieren.

Definition 5.7.3: (Über)abzählbarkeit

Eine Menge heißt

1. **abzählbar** oder **abzählbar unendlich**, wenn sie gleichmächtig mit $\mathbb{N}$ ist,
2. **höchstens abzählbar**, wenn sie endlich oder abzählbar ist,
3. **überabzählbar**, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

Folgen sind Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Da jede abzählbare Menge gleichmächtig mit $\mathbb{N}$ ist, kann sie immer als Folge von paarweise verschiedenen Gliedern geschrieben werden. Die Forderung nach paarweiser Verschiedenheit ist hier wichtig, um eine *bijektive* Abbildung gewährleisten zu können. Ein erstes tiefer liegendes Resultat der Mengenlehre ist das folgende, welches vor dem Hintergrund der zu Anfang dieses Abschnitts geführten Diskussion sicherlich ein wenig überraschen dürfte.

Satz 5.7.4

Die Menge $\mathbb{Q}_{>0}$ der positiven rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. Wir schreiben alle positiven rationalen Zahlen wie folgt in ein Tableau: In der ersten Zeile notieren wir alle Brüche mit Nenner 1, in der zweiten Zeile alle mit Nenner 2 usw. Das ergibt folgendes Bild:

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \cdots \\[2ex]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots \\[2ex]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \cdots \\[2ex]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \cdots \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Nun laufen wir in einem Zickzackkurs durch das Tableau, wobei wir oben links mit 1/1 beginnen. Der Kurs ist im folgenden Tableau dargestellt, wobei wir beim Ablaufen des Kurses Nummern vergeben haben, die oberhalb der Boxen dargestellt sind.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\boxed{\frac{1}{1}}^{1} & \rightarrow & \boxed{\frac{2}{1}}^{2} & & \boxed{\frac{3}{1}}^{5} & \rightarrow & \boxed{\frac{4}{1}}^{6} & & \boxed{\frac{5}{1}}^{11} & \rightarrow & \boxed{\frac{6}{1}}^{12} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\boxed{\frac{1}{2}}^{3} & & \frac{2}{2} & & \boxed{\frac{3}{2}}^{7} & & \frac{4}{2} & & \boxed{\frac{5}{2}}^{13} & & \frac{6}{2} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\boxed{\frac{1}{3}}^{4} & & \boxed{\frac{2}{3}}^{8} & & \frac{3}{3} & & \boxed{\frac{4}{3}}^{14} & & \frac{5}{3} & & \frac{6}{3} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
\boxed{\frac{1}{4}}^{9} & & \frac{2}{4} & & \boxed{\frac{3}{4}}^{15} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \frac{6}{4} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & \\
\boxed{\frac{1}{5}}^{10} & & \boxed{\frac{2}{5}}^{16} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & & \frac{6}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Die Elemente 2/2, 2/4, 4/2, usw. werden *nicht* gezählt, da wir bereits die Elemente 1/1, 1/2, 2/1 usw. gezählt haben. Diese Abzählung liefert damit eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit paarweise verschiedenen Gliedern und damit ist die Menge $\mathbb{Q}$ abzählbar. □

Wir brauchen gar keine Hoffnung aufkommen zu lassen, dass wir mithilfe von abzählbaren Vereinigungen von abzählbaren Mengen zu einer „größeren“ Menge kommen, denn es gilt:

Satz 5.7.5

Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar.

Beweis. Die abzählbar vielen abzählbaren Mengen seien

$$X_i := \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \ldots\}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots.$$

Genau wie im Beweis der Abzählbarkeit der Menge $\mathbb{Q}$ schreiben wir die Elemente dieser Mengen in Form eines Tableaus. In der ersten Zeile notieren wir die Elemente von X_1, in der zweiten die Elemente von X_2 usw. Und genau wie im Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ gehen wir nun im Zickzack durch das Tableau und nummerieren die Elemente, wobei wir doppelt auftretende Elemente weglassen müssen. Das Prinzip ist im folgenden Tableau gezeigt.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
X_1\colon & \boxed{x_1^{(1)}}^{1} & \rightarrow & \boxed{x_2^{(1)}}^{2} & & \boxed{x_3^{(1)}}^{6} & \rightarrow & \boxed{x_4^{(1)}}^{7} & & \boxed{x_5^{(1)}}^{15} & \rightarrow & \boxed{x_6^{(1)}}^{16} & \ldots \\
& & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
X_2\colon & \boxed{x_1^{(2)}}^{3} & & \boxed{x_2^{(2)}}^{5} & & \boxed{x_3^{(2)}}^{8} & & \boxed{x_4^{(2)}}^{14} & & \boxed{x_5^{(2)}}^{17} & & x_6^{(2)} & \ldots \\
& \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
X_3\colon & \boxed{x_1^{(3)}}^{4} & & \boxed{x_2^{(3)}}^{9} & & \boxed{x_3^{(3)}}^{13} & & \boxed{x_4^{(3)}}^{18} & & x_5^{(3)} & & x_6^{(3)} & \ldots \\
& & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
X_4\colon & \boxed{x_1^{(4)}}^{10} & & \boxed{x_2^{(4)}}^{12} & & \boxed{x_3^{(4)}}^{19} & & x_4^{(4)} & & x_5^{(4)} & & x_6^{(4)} & \ldots \\
& \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & \\
X_5\colon & \boxed{x_1^{(5)}}^{11} & & \boxed{x_2^{(5)}}^{20} & & x_3^{(5)} & & x_4^{(5)} & & x_5^{(5)} & & x_6^{(5)} & \ldots \\
& & \swarrow & & & & & & & & & & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Damit ist der Beweis des Satzes erbracht. □

Als direkte Folgerung halten wir fest:

Korollar 5.7.6

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Es stellt sich nun die Frage, ob es überhaupt Mengen gibt, die nicht abzählbar, die mächtiger als die natürlichen Zahlen sind. Dass dies für die reellen Zahlen der Fall ist, macht die Theorie der Mengenlehre erst wirklich lebensfähig und begründet ihren nachhaltigen Erfolg in der Mathematik.

Satz 5.7.7

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis. Wir zeigen, dass bereits die Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0,1]$ überabzählbar ist. Wir machen uns zunutze, dass die Zahl 1 auch als $0.\overline{9}$ geschrieben werden kann.

Wer das jetzt nicht glauben mag, sehe sich bitte folgendes schlagende Argument an:

$$\begin{aligned} x &:= 0.99999999\ldots \\ 10x &= 9.999999999\ldots, \end{aligned}$$

und damit ist $10x - x = 9$, d. h. $x = 1$.

Jede Zahl in $[0,1]$ besitzt damit die Dezimaldarstellung

$$0.a_1a_2a_3\ldots$$

Wir machen die Annahme, dass $\mathbb{R}$ abzählbar sei. Dann können wir alle $x \in [0,1]$ nummerieren und in eine Liste schreiben:

$$\begin{aligned} x_1 &:= 0.000000\ldots \\ x_2 &:= 0.999999\ldots \\ x_3 &:= 0.346859\ldots \\ x_4 &:= 0.500000 \\ x_5 &:= 0.579213\ldots \\ x_6 &:= 0.821034\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nach unserer Annahme habe wir so *alle* Zahlen in $[0,1]$ erfasst. Nun konstruieren wir eine weitere Zahl

$$z := 0.b_1b_2b_3\ldots$$

wie folgt: Die erste Nachkommastelle von z ist die erste Nachkommastelle von x_1, zu der wir 1 addieren, also ist

$$b_1 = 1.$$

Die zweite Nachkommastelle von z ist die zweiten Nachkommastelle von x_2, zu der wir wieder 1 addieren. Dabei wollen wir $9 + 1 = 0$ verabreden, also

$$b_2 = 0.$$

So fahren wir durch die gesamte Liste hindurch fort und erhalten

$$z = 0.107125\ldots$$

Für unsere neue Zahl gilt sicher $z \in [0, 1]$, aber sie ist auf gar keinen Fall in der Liste, denn: $z \neq x_1$, da sich z und x_1 in der ersten Nachkommastelle unterscheiden. $z \neq x_2$, da sich z und x_2 in der zweite Nachkommastelle unterscheiden. Allgemein: $z \neq x_n$, da sich z und x_n in der n-ten Nachkommastelle unterscheiden. Damit ist z entgegen der Annahme nicht in der Liste; unsere Annahme, die Menge $[0, 1]$ sei abzählbar, ist falsch und somit ist $[0, 1]$ überabzählbar. □

5.8 Teilfolgen und Häufungspunkte

Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, aber betrachten wir nur ungerade n, dann ergibt sich die Folge $(-1)_{n\in\mathbb{N}}$, und diese Folge ist sicher konvergent mit Grenzwert -1. Ebenso erhalten wir eine konvergente Folge, wenn wir nur gerade n betrachten, nämlich die gegen 1 konvergente Folge $(1)_{n\in\mathbb{N}}$. Es ist also offenbar möglich, aus einigen divergenten Folgen konvergente Teilfolgen herauszuziehen.

Definition 5.8.1: Teilfolgen

Eine Folge $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Teilfolge** einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Abbildung

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto \sigma(n)$$

gibt, so dass für $n < m$ stets $\sigma(n) < \sigma(m)$ gilt. Damit ist $a'_n = a_{\sigma(n)}$.

Wir greifen das zuvor diskutierte Beispiel noch einmal auf.

Beispiel 5.8.2

Betrachten wir für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ die Abbildung $\sigma(n) = 2n$, dann erhalten wir die Teilfolge

$$(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots).$$

Für die Wahl von $\sigma(n) = 2n + 1$ ergibt sich die Teilfolge

$$(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, -1, -1, -1, -1, \ldots).$$

Beide Teilfolgen sind konvergent, die Ursprungsfolge hingegen nicht.

Bemerkung 5.8.3

Ist eine Teilfolge $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben, so muss die korrespondierende Abbildung $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $a'_n = a_{\sigma(n)}$ nicht eindeutig bestimmt sein. So führt in obigem Beispiel

$$\sigma(n) = \begin{cases} 0 & ; n = 0 \\ 2^n & ; \text{sonst} \end{cases}$$

ebenso auf die Teilfolge $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \ldots)$.

Definition 5.8.4: Häufungspunkte

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine gegen a konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt.

Beispiel 5.8.5

Die alternierende Folge aus Beispiel 5.8.2 besitzt zwei Häufungspunkte, nämlich $a^{(1)} := -1$ und $a^{(2)} := 1$.

Es gilt die folgende Äquivalenz:

Satz 5.8.6

Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n > n_0\colon \quad a_n \in U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \tag{5.11}$$

d. h. wenn *unendlich viele* Folgenglieder in einer beliebig kleinen ε-Umgebung von a liegen.

Beweis. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\Longrightarrow$: Sei $(a'_m)_{m\in\mathbb{N}} = (a_{\sigma(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Teilfolge, dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_0 \in \mathbb{N} \ \forall m \geq m_0 : \quad |a'_m - a| < \varepsilon \iff a_{\sigma(m)} \in U_\varepsilon(a). \tag{5.12}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $m_0 \in \mathbb{N}$ so, dass (5.12) gilt. Für $n_0 \in \mathbb{N}$ wähle $l > \max\{n_0, m_0\}$ und setze $n = \sigma(l) > n_0$, dann gilt

$$a_n = a_{\sigma(l)} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig waren, folgt (5.11).

$\Longleftarrow$: Es gelte (5.11). Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $a_{\sigma(n)} \in U_{1/n}(a)$. Wegen

$$m > n \quad \Longrightarrow \quad a_{\sigma(m)} \in \left(a - \frac{1}{m}, a + \frac{1}{m}\right) \subset \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \ni a_{\sigma(n)},$$

kann $(\sigma(n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend gewählt werden. Betrachtet man nun die Teilfolge $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt

$$a - \frac{1}{n} < a_{\sigma(n)} < a + \frac{1}{n}$$

und nach dem Einschließungssatz konvergiert $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a. □

Bemerkung 5.8.7: Achtung!

Jeder Grenzwert einer Folge ist ein Häufungspunkt, aber nicht jeder Häufungspunkt ist ein Grenzwert! In Beispiel 5.8.5 liegen in jeder ε-Umgebung von $a^{(1)}$ unendlich viele Folgenglieder, aber auch außerhalb müssen noch unendlich viele liegen, denn auch in jeder ε-Umgebung von $a^{(2)}$ liegen unendlich viele Folgenglieder. Besitzt eine Folge genau einen Häufungspunkt, dann ist dieser Häufungspunkt auch der Grenzwert der Folge.

Wir kommen nun zu einem wahren Kraftzentrum der Analysis in $\mathbb{R}$!

Satz 5.8.8: Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis. Wir benutzen die Technik der Intervallschachtelung. Man betrachte eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Menge

$$X := \{x \mid a_n > x \text{ für unendlich viele } n\}$$

und setze $\xi := \sup X$. Das Supremum existiert, weil $X \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt ist. Weil ξ ein Supremum ist, kann $a_n \geq \xi + \varepsilon$ nur für endlich viele a_n gelten, aber unendlich viele a_n erfüllen $a_n \geq \xi - \varepsilon$. Damit liegen unendlich viele a_n im Intervall $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$. Wähle ein Element der Folge in $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ und nenne es

$$a'_1 := a_{\sigma(1)}.$$

Nun wähle man ein Element der Folge aus $[\xi - \frac{1}{2}\varepsilon, \xi + \frac{1}{2}\varepsilon]$, dessen Index größer ist als $\sigma(1)$. Das ist immer möglich, denn auch in $[\xi - \frac{1}{2}\varepsilon, \xi + \frac{1}{2}\varepsilon]$ liegen unendlich viele Folgenglieder. Nenne dieses Folgenglied

$$a'_2 := a_{\sigma(2)}.$$

So fahren wir fort: Im n-ten Schritt wähle $a'_n := a_{\sigma(n)}$ aus dem Intervall $[\xi - \frac{1}{n}\varepsilon, \xi + \frac{1}{n}\varepsilon]$, so dass sein Index größer ist als $\sigma(n-1)$ usw. Die so ausgewählte Teilfolge $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ξ, denn

$$|a'_n - \xi| \leq \frac{1}{n}.$$

□

Der Beweis hat offenbar nicht irgendeinen Häufungspunkt gezeigt, sondern den größten!

Definition 5.8.9: Limes superior und Limes inferior

(a) Der größte Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **Limes superior**,

$$\xi = \limsup_{n\to\infty} a_n := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid a_n > y \text{ für unendlich viele } n\}.$$

(b) Der kleinste Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **Limes inferior**,

$$\xi = \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid a_n < y \text{ für unendlich viele } n\}.$$

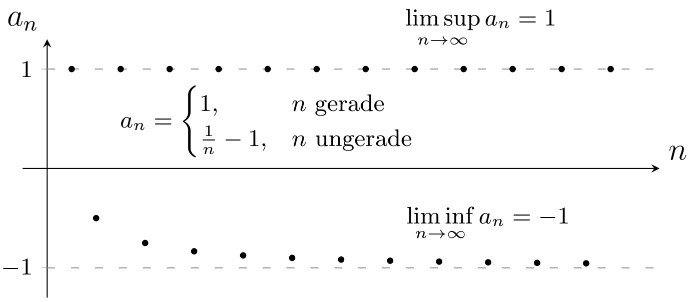

Abbildung 5.8.1. Limes superior und Limes inferior von $a_n = (-1)^n$

Beispiel 5.8.10

Sei $a_n := \sin(n\pi/2)$, also

$$(a_n) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots).$$

Die Häufungspunkte sind offenbar $a^{(1)} = -1$, $a^{(2)} = 0$ und $a^{(3)} = 1$ und somit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

Möchte man für eine gegebene Folge die Häufungspunkte und insbesondere Limes inferior sowie Limes superior bestimmen, so ist das Extrahieren von geeigneten Teilfolgen ein praktikabler Weg, wie die bisherigen Beispiele zeigen. Der folgende Satz liefert nun eine für theoretische Untersuchungen nützliche Charakterisierung von Limes inferior und Limes superior.

Satz 5.8.11

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt $a = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0: \quad & a_n < a + \varepsilon \text{ für } \textit{unendlich viele } n \text{ und} \\ & a_n < a - \varepsilon \text{ für höchstens } \textit{endlich viele } n. \end{aligned}$$

Analog gilt: $a = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0: \quad & a_n > a - \varepsilon \text{ für } \textit{unendlich viele } n \text{ und} \\ & a_n > a + \varepsilon \text{ für höchstens } \textit{endlich viele } n. \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung nur für den Limes inferior (der Beweis für den Limes superior läuft analog):

$\Longrightarrow$:

(i) Sei $a := \liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Insbesondere ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$, also gilt nach Satz 5.8.6

$$a_n \in U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$$

für unendlich viele n. Damit gilt $a_n < a + \varepsilon$ für unendlich viele n.

(ii) Angenommen $a_n < a-\varepsilon$ für unendlich viele n. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{\sigma(n)} < a-\varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(a_n)_n$ beschränkt ist, ist auch $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt somit nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt $\widetilde{a} \leq a-\varepsilon$. Dann ist $\widetilde{a}$ aber auch ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ mit $\widetilde{a} \leq a-\varepsilon < a$. Das ist ein Widerspruch zu $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$, also gilt $a_n < a-\varepsilon$ für endlich viele n.

$\Longleftarrow$: Für alle $\varepsilon > 0$ gelte

$$a_n < a+\varepsilon \text{ für } \textit{unendlich viele } n \text{ und } a_n < a-\varepsilon \text{ für } \textit{endlich viele } n.$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann folgt offenbar $a-\varepsilon \leq a_n < a+\varepsilon$ für unendlich viele n. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, kann der Fall $a-\varepsilon = a_n$ nur für (höchstens) endlich viele n eintreten. Also gilt $a_n \in U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ für unendlich viele n und a ist nach Satz 5.8.6 somit Häufungspunkt von $(a_n)_n$.

Behauptung: Es existiert kein Häufungspunkt $\xi < a$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Setze $\varepsilon = (a-\xi)/2 > 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung höchstens endlich viele n, sodass

$$a_n < a-\varepsilon = a - \frac{a}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi + \frac{a}{2} - \frac{\xi}{2} = \xi + \varepsilon,$$

also insbesondere $a_n \in]\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon[= U_\varepsilon(\xi)$ für nur endlich viele n. Damit ist ξ kein Häufungspunkt von $(a_n)_n$, also $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$. $\square$

Bemerkung 5.8.12

(a) Bitte macht euch ganz klar, was es heißt, wenn von *unendlich vielen* n und höchstens *endlich vielen* n die Rede ist. Die Aussage des Satzes 5.8.11 kann auch wie folgt formuliert werden:
Es gilt $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0\ \forall m\in\mathbb{N}\ \exists n>m: &\quad a_n<a+\varepsilon,\text{ und}\\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n>n_0: &\quad a_n>a-\varepsilon,\end{aligned}$$

und $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0\ \forall m\in\mathbb{N}\ \exists n>m: &\quad a_n>a-\varepsilon,\text{ und}\\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n>n_0: &\quad a_n<a+\varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Anstelle von

$$\limsup_{n\to\infty} \text{ bzw. } \liminf_{n\to\infty}$$

schreibt man auch häufig

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \text{ bzw. } \underline{\lim}_{n\to\infty}.$$

Der folgende Satz erklärt nun die Bezeichnung Limes inferior bzw. Limes superior.

Satz 5.8.13

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung wieder nur für den Limes inferior (der Beweis für den Limes superior läuft analog):

Setze $\eta_n := \inf_{k\geq n} a_k$, dann ist $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt (da $(a_n)_n$ nach Voraussetzung beschränkt ist). Also existiert nach dem Monotoniekriterium $\eta := \lim_{n\to\infty}\eta_n$. Wir zeigen nun $\eta = \liminf_{n\to\infty} a_n$:

Nach Satz 5.8.11 reicht es zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0: &\quad a_n<\eta+\varepsilon \text{ für unendlich viele } n \text{ und}\\ &\quad a_n<\eta-\varepsilon \text{ für höchstens endlich viele } n.\end{aligned}$$

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es wegen der Monotonie von $(\eta_n)_n$ ein $n_0\in\mathbb{N}$, sodass $\eta_{n_0} > \eta-\varepsilon$. Da $\eta_{n_0} = \inf_{k\geq n_0} a_k$, folgt $a_k > \eta-\varepsilon$ für alle $k\geq n_0$. Entsprechend gilt $a_k < \eta-\varepsilon$ nur für endlich viele k.
Bleibt noch $a_k < \eta+\varepsilon$ für unendlich viele k zu zeigen. Das bewerkstelligen wir per Widerspruch: Angenommen $a_k < \eta+\varepsilon$ für endlich viele k. Dann gäbe es ein k_0, sodass $a_k \geq \eta+\varepsilon$ für alle $k\geq k_0$ und somit

$$\eta_n = \inf_{k\geq n} a_k \geq \eta + \varepsilon \quad \forall n \geq k_0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu $\eta_n \to \eta$. Also gilt $a_k < \eta + \varepsilon$ für unendlich viele k und somit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

□

Wir halten noch eine nützliche Regel für das Produkt beschränkter Folgen fest.

Lemma 5.8.14

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen mit $a_n, b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis. Man setze

$$a = \limsup_{n\to\infty} a_n, \quad b = \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{und} \quad c = \limsup_{n\to\infty} a_n b_n$$

Sei $\delta > 0$, dann existiert nach Satz 5.8.11 ein $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$, sodass

$$a_n < a + \delta, \quad b_n < b + \delta \quad \forall n \geq n_0.$$

Also gilt

$$a_n b_n < (a+\delta)(b+\delta) = \delta^2 + (a+b)\delta + ab \quad \forall n \geq n_0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta > 0$, sodass

$$\delta^2 + (a+b)\delta = \varepsilon \iff \delta = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + \varepsilon} - \frac{a+b}{2},$$

dann folgt $a_n b_n < ab + \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, also $c \leq ab$. Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, also $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Per Definition gibt es eine Teilfolge $(b_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_{\sigma(n)} = b$ und daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} b_{\sigma(n)} = ab,$$

woraus $ab \leq c$ folgt. Da bereits $c \leq ab$ gezeigt wurde, ist somit $ab = c$. □

Wir beenden dieses Kapitel mit zwei nützlichen Sätzen zu Häufungspunkten und Teilfolgen.

Satz 5.8.15

Besitzt eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur einen einzigen Häufungspunkt a, so konvergiert bereits die ganze Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Beweis. Angenommen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen a, d. h.

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : \quad |a - a_n| \geq \varepsilon.$$

Damit gibt es eine Teilfolge $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die

$$|a - a'_n| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt. Da auch die Teilfolge $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 5.8.8) eine konvergente Teil-Teilfolge $(a''_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bezeichnen wir deren Grenzwert mit $b := \lim_{n\to\infty} a''_n$, so gilt für diesen

$$|a - b| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|a - a''_n|}_{\geq\varepsilon} \geq \varepsilon.$$

Damit ist b ein zweiter von a verschiedener Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, was aber den Voraussetzungen widerspricht! □

Satz 5.8.16: Teilfolgen bei Cauchy-Folgen

Besitzt eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so konvergiert bereits die gesamte Cauchy-Folge (auch in nicht vollständigen Körpern).

Zusammenfassung

Nach diesem Kapitel solltet ihr eine gewisse Vertrautheit im Umgang mit **Folgen** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem archimedisch angeordneten Körper $\mathbb{K}$ aufgebaut haben, besonders mit Blick auf das Verhalten für $n \to \infty$. So **konvergiert** eine Folge gegen einen **Grenzwert (Limes)** $a \in \mathbb{K}$, falls das **Konvergenzkriterium**

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Streben die Folgenglieder a_n hingegen für wachsendes n gegen $+\infty$ *oder* $-\infty$, so nennt man die Folge **(bestimmt) divergent**. Merkt euch, dass im Fall der Konvergenz der **Grenzwert eindeutig** ist. Weitere wichtige Eigenschaften einer Folge sind **Beschränktheit** ($|a_n| \leq M$) und **Monotonie** ($a_{n-1} \leq a_n$ oder $a_{n-1} \geq a_n$). Insbesondere sind konvergente Folgen stets beschränkt. Für Konvergenzuntersuchungen sind neben den **Rechenregeln für konvergente Folgen**

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} a + b$$
$$(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} a \cdot b$$
$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{b} \quad (\text{falls } b_n \neq 0 \text{ und } b \neq 0)$$

vor allem der **Einschließungssatz** und das **Monotoniekriterium** wichtige Hilfsmittel, denn sie setzen, im Gegensatz zum Konvergenzkriterium, keine Kenntnis des Grenzwerts voraus.
Von fundamentaler Bedeutung in der Analysis ist das **Cauchy'sche Konvergenzkriterium**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_{>0} : \quad |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon,$$

dass ebenfalls ohne Kenntnis des Grenzwerts auskommt. Folgen, die diesem genügen, nennt man **Cauchy-Folgen**, und es ist einfach zu sehen, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist. Archimedisch angeordnete Körper, in denen auch die Umkehrung und somit die Äquivalenz

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge}$$

gilt, nennt man **vollständig**. Wir haben gesehen, dass $\mathbb{Q}$ **nicht vollständig** ist, denn es gibt rationale Cauchy-Folgen, deren Grenzwert irrational ist, die in $\mathbb{Q}$ also *nicht* konvergieren. Um die „Lücken" in $\mathbb{Q}$ zu schließen, haben wir die Menge aller rationalen Cauchy-Folgen vermöge der **Äquivalenzrelation**

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad :\iff \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

in **(Äquivalenz-)Klassen** zusammengefasst und nachgewiesen, dass die so gewonnene Menge wieder einen archimedisch angeordneten Körper bildet, nämlich den Körper $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen**. Die herausragende Stellung des Cauchy'schen Konvergenzkriteriums ist nun der Tatsache geschuldet, dass $\mathbb{R}$ **vollständig** ist und somit eine **reelle Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchy-Folge ist**. Die Vollständigkeit zeichnet $\mathbb{R}$ somit vor $\mathbb{Q}$ aus. Ein weiterer wesentlicher Unterschied besteht hinsichtlich der **Mächtigkeit** der beiden Mengen: Während $\mathbb{Q}$ **abzählbar** ist, also „genauso viele" Elemente wie $\mathbb{N}$ besitzt, ist $\mathbb{R}$ überabzählbar, d. h., es gibt keine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{N}$.
Zurück zu Folgen: Wenn eine reelle Folge weder konvergiert, noch gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, so kann sie dennoch konvergente **Teilfolgen** enthalten, deren Grenzwerte dann **Häufungspunkte** der Folge genannt werden. Die Existenz eines Häufungspunktes ist also eine

schwächere Annahme als Konvergenz und in der Tat gilt der überaus wichtige **Satz von Bolzano-Weierstraß**: Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.
Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Wie ist die Konvergenz einer Folge gegen einen Grenzwert formal definiert?*
- *Welcher Zusammenhang besteht zwischen Konvergenz und Beschränktheit einer Folge?*
- *Ist jede rekursiv definierte Folge konvergent?*
- *Unter welcher Voraussetzung ist eine Cauchy-Folge automatisch konvergent?*
- *Besitzt jede Menge aus einem archimedisch angeordneten Körper ein Supremum?*
- *Was versteht man unter einer Intervallschachtelung?*
- *Die Euler'sche Zahl e ist der Grenzwert welcher Folge?*
- *Welche Eigenschaften muss eine Äquivalenzrelation erfüllen?*
- *Sowohl $\mathbb{N}$ als auch $\mathbb{R}$ besitzen unendlich viele Elemente, sind es auch „gleich viele"?*
- *Wie lautet die Definition eines Häufungspunktes und was versteht man unter Limes inferior bzw. Limes superior?*
- *Welche Folgen besitzen immer einen Häufungspunkt?*

Zum Einüben der Begriffe dieses Kapitels solltet ihr euch mal einige der folgenden Aufgaben zur Brust nehmen.

5.9 Aufgaben

A.5.1 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Man zeige:

(a) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0: \quad a_n > 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

A.5.2 Man untersuche nachstehende Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte:

(a) $a_n := \dfrac{6n^2 + 3n - 1}{9n^2 - 81}, \quad n \in \mathbb{N}$

(b) $a_n := \sqrt{n^2 + n} - n, \quad n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n := \dfrac{7^n + (-13)^n}{(-7)^n + 13^n}, \quad n \in \mathbb{N}$

(d) $a_n := \dfrac{(n-3)^3 - n^3 + 27}{4n^2 - 7n}, \quad n \geq 1$

(e) $a_n := \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}, \quad n \geq 1$

(f) $a_n := \dbinom{100n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$

(g) $a_n := \dfrac{n^3}{\binom{2n}{n}}, \quad n \geq 1$

(h) $a_n := \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right), \quad n \geq 2$

(i) $a_n := \sqrt{n^2+5n+7} - \sqrt{n^2-2n}, \quad n \in \mathbb{N}$

(j) $a_n := \dfrac{\pi n + 2\sin(n)}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

A.5.3 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_0 := \dfrac{2}{25}$ und

$$a_n := a_{n-1} + \frac{12}{5^{n+2}}, \quad n \geq 1.$$

Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Hinweis: Man bestimme ggf. zunächst mittels vollständiger Induktion eine geschlossene Darstellung für a_n.

A.5.4 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ für $n \geq 0$, d. h.

$$a_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$

Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und lässt sich der Grenzwert exakt bestimmen?
Hinweis: Monotoniekriterium (Satz 5.6.6)

A.5.5 Man beweise den Einschließungssatz (Satz 5.3.5).

A.5.6 Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Mischfolge mit $c_{2n-1} := a_n$ und $c_{2n} := b_n$. Man zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = s \in \mathbb{K}$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} c_n = s.$$

A.5.7 Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$. Man zeige, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

A.5.8 Man bestimme den Grenzwert der Folge

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+2k}, \quad n \geq 1.$$

Hinweis: Einschließungssatz (Satz 5.3.5) und A.2.2

A.5.9 Man zeige mithilfe des Konvergenzkriteriums in Definition 5.1.3, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

A.5.10 Man zeige (nacheinander):

(a) $(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4}x^2$, $x \geq 0$, $n \geq 2$

(b) $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$, $n \geq 2$

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Hinweis: Binomischer Lehrsatz (Satz 2.1.15) und Einschließungssatz (Satz 5.3.5)

A.5.11 Man zeige, dass für $x, y \geq 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} = \max\{x, y\}$$

A.5.12 Man betrachte die Folgen

$$a_n := \frac{n^n}{(2n)!} \quad \text{sowie} b_n := \frac{n^n}{n!}.$$

Welche der Folgen konvergiert und wie lautet in diesem Fall der Grenzwert?

A.5.13 Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge und $(s_n)_{n\geq 1}$ durch

$$s_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

definiert. Man zeige, dass

(a) $a_n \to a,\ n \to \infty \implies s_n \to a,\ n \to \infty.$
Hinweis: Schreibe $|s_n - a|$ als Summe über $a_k - a$ und schätze diese mit der Dreiecksungleichung ab. Die Beschränktheit von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie die Konvergenzbedingung (5.1) erlauben dann die Summe für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gegen $\varepsilon > 0$ abzuschätzen. Hinreichend groß heißt für alle $n \geq N$ und der „Kniff“ des Beweises liegt in der geschickten Wahl solch eines $N \in \mathbb{N}$.

(b) aus der Konvergenz von $(s_n)_{n\geq 1}$ *nicht* die Konvergenz von $(a_n)_{n\geq 1}$ folgt.

Info: Die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ nennt man Folge der Cesàro-Mittel. Konvergiert sie für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, so bezeichnet man die Folge selbst als Cesàro-konvergent.

A.5.14 Sei $A > 0$ und $0 < b < a$, sodass $ab = A$, d. h., a und b sind die Seiten eines Rechtecks mit Flächeninhalt A. Zur Bestimmung von $\sqrt{A}$ kann man nun wie folgt vorgehen: Verkürze a ein wenig und verlängere dabei gleichzeitig b in solchem Maße, dass der Flächeninhalt A erhalten bleibt. Das arithmetische Mittel $(a+b)/2$ erfüllt offenbar $b < (a+b)/2 < a$ und führt auf den Ansatz ($a_0 = a, b_0 = b$)

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad b_1 = \frac{A}{a_1} = \frac{2a_0 b_0}{a_0 + b_0}.$$

Da im Allgemeinen $a_1 \neq b_1$, ist $\sqrt{A}$ noch nicht gefunden. Fährt man in der beschriebenen Weise fort, erhält man die rekursiv definierten Folgen

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{A}{a_{n+1}} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad n \geq 0.$$

(a) Einsetzen von $b_n = A/a_n$ liefert (vgl. Beispiel 5.4.4)

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right), \quad n \geq 0.$$

Man zeige mithilfe des Monotoniekriteriums (Satz 5.6.6), dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und folgere $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{A}$.

(b) Man zeige, dass obiges Verfahren eine Intervallschachtelung beschreibt, d. h. $[b_{n+1}, a_{n+1}] \subset [b_n, a_n]$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{A}$.

Info: Die beschriebene Methode zur näherungsweisen Berechnung einer Quadratwurzel ist auch als babylonisches Wurzelziehen oder Heron-Verfahren bekannt.

A.5.15 Sei $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$ und die Relation $R \subset M \times M$ durch

$$((p,q),(t,s)) \in R \quad :\Longleftrightarrow \quad (p,q) \sim (t,s) \quad :\Longleftrightarrow \quad ps = tq$$

definiert. Man zeige, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

A.5.16 Man untersuche die nachstehenden Teilmengen aus $\mathbb{R}$ auf Beschränktheit und bestimme gegebenenfalls Supremum und Infimum.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 10x \leq 24\}$

(b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} = \frac{t}{1+t},\ t > 0\right\}$

A.5.17 Man bestimme die Häufungspunkte der nachstehenden Folgen.

(a) $a_n := \left(\frac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)((-1)^n + 1), \quad n \geq 1$

(b) $b_n := \frac{n}{j} - \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor, \quad n \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}_{>0}$

(c) $c_n := \dfrac{(-1)^n n^2}{(2n+\sqrt{n})^2}, \quad n \in \mathbb{N}$

A.5.18 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $|a_n - a_{n+1}| \leq 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, also (5.4) erfüllt.

A.5.19 Für $x > 0$ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $a_0 \in (0, 1/x)$ und $a_{n+1} = a_n(2 - xa_n)$ definiert. Man zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{x}.$$

Hinweis: Monotoniekriterium (Satz 5.6.6)

A.5.20 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der *Fibonacci-Zahlen* (siehe Beispiel 5.1.2 (d)), also $a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Man zeige, dass der Quotient

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

konvergiert. Wie lautet der Grenzwert?
Hinweis: Monotoniekriterium (Satz 5.6.6)

A.5.21 Man zeige die Ungleichung

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}_{>0},$$

und folgere daraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Hinweis: Man nutze, dass $(1+1/n)^n$ *monoton wachsend gegen e konvergiert, und verwende vollständige Induktion.*

6 Unendliche Reihen

Wozu?

Wir haben bereits in Kapitel 2 die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{6.1}$$

kennengelernt. Was passiert, wenn wir diese endliche Summe zu einer „unendlichen Summe“

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

machen? Gehen wir ganz naiv vor: Offenbar ist doch nichts anderes passiert, als dass wir das n gegen ∞ geschickt haben! Nun schaut mal auf die rechte Seite von (6.1). Der einzige von n abhängige Term ist doch x^{n+1}. In diesem Term können wir offenbar das n nicht gegen ∞ schicken, ohne auf die Größe von x zu achten! Der Fall $x = 1$ geht sowieso nicht, weil dann der Nenner der rechten Seite von (6.1) verschwinden würde. Ist $x > 1$, dann geht der Term x^{n+1} selbst gegen ∞. Wenn $0 \leq x < 1$ ist, können wir als Ergebnis

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}, \quad 0 \leq x < 1$$

erwarten. Aber auch für $-1 < x < 0$ funktioniert unsere Überlegung, denn auch dann geht der Term x^{n+1} gegen 0, wenn auch mit immer hin- und herspringenden Vorzeichen. Damit sind wir bei der **geometrischen Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1$$

angekommen, denn „unendliche Summen“ sagt man nicht mehr; es sind **(unendliche) Reihen**.

Im Fall der geometrischen Reihe hatten wir Glück, weil wir eine geschlossene Darstellung der endlichen Summe hatten. Dieses Glück ist uns nicht oft beschieden, daher müssen wir uns fragen: **Was soll**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eigentlich bedeuten? Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- die Definition einer Reihe,

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_6

- die (einfache) Konvergenz von Reihen,
- die absolute Konvergenz von Reihen,
- Doppelreihen,
- das Cauchy-Produkt,
- die Vertauschbarkeit unendlicher Reihen mit Grenzwerten

und ihr Verständnis. Dabei begleiten wir euch auch durch dieses Kapitel mit einer Vielzahl von Beispielen.

6.1 Reihen sind Folgen von Partialsummen

Mathematikerinnen und Mathematiker sind in der Regel faule Leute. Wenn sie schon einmal ein Problem gelöst haben, versuchen sie immer ein neues Problem auf dieses alte zurückzuführen. Genau das machen wir jetzt auch!

Definition 6.1.1: Unendliche Reihen

Eine unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots \tag{6.2}$$

ist definiert als die **Folge** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ **ihrer Partialsummen**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Die unendliche Reihe (6.2) **konvergiert**, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen konvergiert.

Unser erstes, naiv angegangenes Beispiel der geometrischen Reihe ist mit dieser Definition völlig kompatibel und wir halten unser Ergebnis vom Anfang des Kapitels noch einmal fest.

Beispiel 6.1.2: Die geometrische Reihe

Die Partialsummen der **geometrischen Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

sind

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & ; x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & ; x \neq 1 \end{cases}.$$

Das Konvergenzverhalten der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann einfach bestimmbar:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & ; |x| < 1 \\ \text{divergent gegen } \infty & ; x \geq 1 \\ \text{divergent} & ; x \leq -1 \end{cases}$$

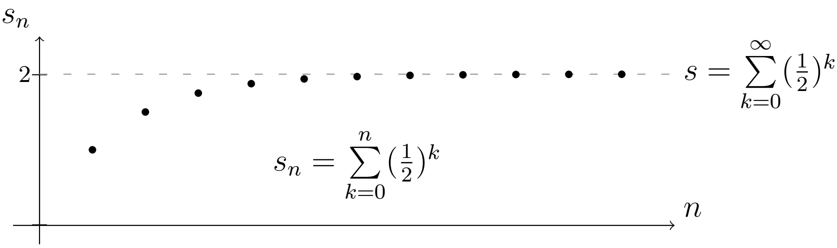

Abbildung 6.1.1. Die Folge der Partialsummen s_n der geometrischen Reihe

Abbildung 6.1.1 veranschaulicht das Verhalten der (geometrischen) Reihe noch einmal für $a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Nun sind wir schon auf heimischem Terrain, denn wir können alle Konvergenzkriterien anwenden, die wir für Folgen entwickelt haben.

6.2 (Einfache) Konvergenz von Reihen

Im Fall der Konvergenz müssen die Partialsummen einer unendlichen Reihe eine Cauchy-Folge bilden. Das liefert schon unser erstes Konvergenzkriterium.

Lemma 6.2.1: Das Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe (6.1) konvergiert $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall k \geq 1 :$$
$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Beweis. Das Lemma ist nur ein Korollar aus Satz 5.5.8. $\square$

Wählen wir im Lemma $k = 1$ dann sehen wir, dass für alle $\varepsilon > 0$ und alle n jenseits von n_0 die Abschätzung $|a_{n+1}| < \varepsilon$ gelten muss! Das liefert uns

Lemma 6.2.2: Das notwendige Kriterium

Notwendig für die Konvergenz einer Reihe (6.2) ist

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

d. h., die Summanden müssen eine Nullfolge bilden.

Macht euch bitte klar, dass die Bedingung *nicht* hinreichend ist, denn wir können für die divergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots$ auch schreiben:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Die Summanden bilden also eine Nullfolge; dennoch ist die Reihe divergent.

Beispiele 6.2.3

(a) Um die Durchschlagskraft des notwendigen Kriteriums zu demonstrieren, betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt{k+\sqrt{k}} - \sqrt{k-\sqrt{k}}\right)}_{=a_k}.$$

Hier sieht man auf den ersten Blick zugegebenermaßen nicht viel. Die Sache wird aber etwas klarer, wenn wir uns an die 3. binomische Formel erinnern und die Summanden wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{k+\sqrt{k}} - \sqrt{k-\sqrt{k}}\right) &= \frac{\left(k+\sqrt{k}\right) - \left(k-\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+\sqrt{k}} + \sqrt{k-\sqrt{k}}} \\ &= \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+\sqrt{k}} + \sqrt{k-\sqrt{k}}}\end{aligned}$$

Damit sehen wir auch schon, dass

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}}\right) \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{k}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{k}}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} \\ &= 1\end{aligned}$$

keine Nullfolge ist und die Reihe damit divergiert.

(b) Mit dem notwendigen Kriterium (Lemma 6.2.2) können wir beispielsweise auch zeigen, dass die alternierende Reihe (dass eine Reihe alterniert bedeutet nichts anderes, als dass die Summanden a_k ihr Vorzeichen wechseln)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$$

nicht konvergiert, denn die Folge der Summanden

$$(a_k)_{k=0}^{\infty} = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

ist offensichtlich keine Nullfolge.

Wie im Beispiel gesehen, ist man manchmal mit Reihen konfrontiert, deren Summanden regelmäßig das Vorzeichen wechseln, also Reihen der Form

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \pm \dots$$

mit positiven Summanden a_k. Reihen dieser Form nennt man **alternierende Reihen**. Ein Konvergenzkriterium für solche Reihen stammt bereits von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

Satz 6.2.4: Das Leibniz'sche Kriterium

Wenn die Größen a_k einer alternierenden Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \pm \dots \tag{6.3}$$

die Bedingungen

$$\begin{array}{lll} \text{(L.1)} & \forall k \in \mathbb{N}: \ a_k > 0, & \text{(Positivität)} \\ \text{(L.2)} & \forall k \in \mathbb{N}: \ a_{k+1} \leq a_k, & \text{(Monotonie)} \\ \text{(L.3)} & \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0 & \text{(Nullfolge)} \end{array}$$

erfüllen, dann konvergiert (6.3) gegen eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}. \tag{6.4}$$

Beweis. Aus der Monotoniebedingung in den Voraussetzungen folgt

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + \underbrace{a_{2k} - a_{2k+1}}_{\geq 0} \geq s_{2k-1},$$

$$s_{2k+2} = s_{2k} \underbrace{-a_{2k+1} + a_{2k+2}}_{\leq 0} \leq s_{2k}.$$

Weil a_{2k+1} positiv ist, folgt

$$s_{2k+1} < s_{2k},$$

denn aus $a_{2k+1} > 0$ folgt

$$s_{2k+1} = a_0 - a_i + \ldots + a_{2k} - a_{2k+1} < a_0 - a_1 + \ldots + a_{2k} = s_{2k}.$$

Kombinieren wir nun die beiden obigen Ungleichungen, dann erhalten wir

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \cdots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0.$$

Für alle k liegt also s_{n+k} immer zwischen s_n und s_{n+1}, und es gilt

$$|s_{n+k} - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}. \tag{6.5}$$

Wegen $a_{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$ konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Beziehung (6.4) folgt aus (6.5) für $k \to \infty$. $\square$

Beispiel 6.2.5: Die alternierende harmonische Reihe

Betrachten wir die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots.$$

Die Konvergenz dieser Reihe können wir nun mithilfe des Leibniz'schen Kriteriums 6.2.4 nachweisen. Dafür bemerken wir zunächst einmal, dass die Folge der Summanden

$$(-1)^{k+1} a_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

die drei Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums erfüllt:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k} > 0 \implies \text{(L.1)} \\ a_{k+1} &= \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} = a_k \implies \text{(L.2)} \\ \lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \implies \text{(L.3)} \end{aligned}$$

Aus dem Leibniz-Kriterium folgt damit sofort die Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe.

Ein weiteres wichtiges Prinzip besteht in der **Majorisierung** beziehungsweise **Minorisierung** von Reihen.

Satz 6.2.6: Das Minoranten- und Majorantenkriterium

Für alle hinreichend großen k sei $0 \leq a_k \leq b_k$. Dann gelten

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ divergent}.$$

Man sagt, die Reihe $\sum b_k$ **majorisiert** die Reihe $\sum a_k$ und die Reihe $\sum b_k$ ist die **Majorante** der Reihe $\sum a_k$. Analog ist die Reihe $\sum a_k$ die **Minorante** der Reihe $\sum b_k$.

Beweis. Setze $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $v_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$, dann folgt die Behauptung aus Korollar 5.6.7, wenn man als Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nimmt. □

Beispiel 6.2.7

Mithilfe des Majoranten-Kriteriums können wir nun etwa zeigen, dass die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$
konvergiert. Erinnern wir uns an A.3.1 aus Kapitel 3 zurück, so gilt $k! \geq 2^k$ für $k \geq 4$ und damit auch

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^k}$$

für $k \geq 4$. Also wird die ursprüngliche Reihe durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{mit} \quad b_k = \begin{cases} a_k & ; k < 4 \\ \frac{1}{2^k} & ; k \geq 4 \end{cases}$$

majorisiert. Und da diese Majorante – im Wesentlichen eine geometrische Reihe – konvergiert,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} b_k &= \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{2^k}\\ &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2^0}-\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \frac{17}{24}+2,\end{aligned}$$

konvergiert auch die ursprüngliche Reihe.

Die Idee hinter dem Minoranten- und Majorantenkriterium 6.2.6 ist also, die vorliegende Reihe nach oben (unten) abzuschätzen und Konvergenz (Divergenz) für die entsprechende Majorante (Minorante) zu zeigen. Die Majorante ist typischerweise deutlich einfacher gewählt als die ursprüngliche Reihe. Divergenz mithilfe des Minorantenkriteriums schauen wir uns jetzt mal an!

Beispiel 6.2.8: Die harmonische Reihe

Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

divergiert, was sich über das Minorantenkriterium beweisen lässt:
Das Argument, das wir nun benutzen, stammt bereits von dem französischen Theologen, Bischof, Naturwissenschaftler und Philosophen Nicole Oresme (vor 1330–1382)! Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} =&1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}\\ &+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\dots\\ &>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots\end{aligned}$$

Wir wissen, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots$$

divergiert, also divergiert nach Satz 6.2.6 auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

denn es gilt $0 < a_k \leq b_k$.

Es zeigt sich, dass die harmonische Reihe in gewisser Weise einen Grenzfall darstellt, wie wir nun beweisen können.

Lemma 6.2.9: Die allgemeine harmonische Reihe

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \tag{6.6}$$

konvergiert für alle $x > 1$ und divergiert für alle $x \leq 1$.

Beweis. Der Fall $x = 1$ wurde gerade behandelt. Für $x < 1$ werden die Summanden noch größer, woraus sofort die Divergenz der Reihe folgt.

Im ersten Schritt zeigen wir die Konvergenz für $x = \frac{j+1}{j} > 1$, $j \geq 1$. Die Idee, die wir hier verfolgen, ist die Nutzung der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{\sqrt[j]{i}} \tag{6.7}$$

als Vergleichsreihe. Mit dem Leibniz'schen Kriterium (Satz 6.2.4) sieht man leicht, dass die Vergleichsreihe (6.7) konvergiert. Wir schauen uns nun zwei aufeinanderfolgende Terme der Vergleichsreihe an:

$$\frac{1}{\sqrt[j]{2i-1}} - \frac{1}{\sqrt[j]{2i}} = \frac{\sqrt[j]{2i} - \sqrt[j]{2i-1}}{\sqrt[j]{2i-1} \cdot \sqrt[j]{2i}}. \tag{6.8}$$

Wir müssen jetzt in eine etwas größere Nebenrechnung einsteigen, bei der wir die Beziehung

$$a^j - b^j = (a-b)\left(\underbrace{a^{j-1} + a^{j-2}b + a^{j-3}b^2 + \ldots + b^{j-1}}_{j \text{ Summanden}}\right)$$

verwenden. Wir setzen $a := \sqrt[j]{2i}$ und $b := \sqrt[j]{2i-1}$ und legen los:

$$\begin{aligned}
1 &= 2i - (2i-1) \\
&= \left(\sqrt[j]{2i} - \sqrt[j]{2i-1}\right) \cdot \\
&\quad \left((2i)^{\frac{j-1}{j}} + (2i)^{\frac{j-2}{j}}(2i-1)^{\frac{1}{j}} + \cdots + (2i)^{\frac{1}{j}}(2i-1)^{\frac{j-2}{j}} + (2i-1)^{\frac{j-1}{j}}\right)
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[j]{2i} - \sqrt[j]{2i-1} \\
&= \frac{1}{(2i)^{\frac{j-1}{j}} + (2i)^{\frac{j-2}{j}}(2i-1)^{\frac{1}{j}} + \ldots + (2i)^{\frac{1}{j}}(2i-1)^{\frac{j-2}{j}} + (2i-1)^{\frac{j-1}{j}}} \\
&\geq \frac{1}{(2i)^{\frac{j-1}{j}} + (2i)^{\frac{j-2}{j}}(2i)^{\frac{1}{j}} + \ldots + (2i)^{\frac{1}{j}}(2i)^{\frac{j-2}{j}} + (2i)^{\frac{j-1}{j}}} \\
&= \frac{1}{j \cdot (2i)^{\frac{j-1}{j}}}
\end{aligned}
$$

Nun geht es weiter mit (6.8):

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt[j]{2i} - \sqrt[j]{2i-1}}{\sqrt[j]{2i-1} \cdot \sqrt[j]{2i}} &\geq \frac{1}{j \cdot (2i)^{\frac{j-1}{j}} \cdot (2i)^{\frac{1}{j}} \cdot (2i-1)^{\frac{1}{j}}} \\
&= \frac{1}{j \cdot (2i) \cdot (2i-1)^{\frac{1}{j}}} \geq \frac{1}{j \cdot (2i) \cdot (2i)^{\frac{1}{j}}} \\
&= \frac{1}{j \cdot (2i)^{\frac{j+1}{j}}} = \underbrace{\frac{1}{j \cdot 2^{\frac{j+1}{j}}}}_{=:C_j} \cdot \frac{1}{i^{\frac{j+1}{j}}} \\
&= C_j \cdot \frac{1}{i^{\frac{j+1}{j}}}
\end{aligned}
$$

Die Zahl C_j ist unabhängig von i, und das ist wichtig. Damit haben wir die Abschätzung

$$
\frac{1}{(2i-1)^{\frac{1}{j}}} - \frac{1}{(2i)^{\frac{1}{j}}} \geq C_j \cdot \frac{1}{i^{\frac{j+1}{j}}}
$$

erreicht. Nun sind wir aber fertig, denn da die alternierende Reihe (6.7) konvergiert, konvergiert nach Satz 6.2.6 auch die Reihe (6.6) für $x = \frac{j+1}{j}$.

Für beliebiges $x > 1$ gibt es nun aber immer ein j, so dass $x > \frac{j+1}{j}$. Nochmaliges Anwenden von Satz 6.2.6 liefert dann die Konvergenz für alle $x > 1$. □

Es gibt noch viele weitere (weniger bekannte) Konvergenzkriterien und wir wollen euch zumindest noch zwei unserer Lieblingskriterien vorstellen.

Satz 6.2.10: Der Satz von Olivier

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen, d. h.

$$
a_{k+1} \leq a_k \quad \text{und} \quad a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.
$$

Dann gilt:

$$
\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \implies \lim_{k\to\infty} k \cdot a_k = 0
$$

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, dann gilt nach Lemma 6.2.1

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall k \geq 1 : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Wählen wir nun $\frac{\varepsilon}{2}$ statt ε und nutzen aus, dass die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, dann erhalten wir

$$|k \cdot a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{bzw.} \quad 2k \cdot a_{n+k} < \varepsilon.$$

Für $k \geq n$ gilt damit insbesondere auch

$$(n + k) \cdot a_{n+k} \leq 2k \cdot a_{n+k} < \varepsilon.$$

Wählen wir sogar $k \geq 2n$, dann gilt $\tilde{k} := k - n \geq n$ sowie $k = n + \tilde{k}$ und damit

$$k \cdot a_k = (n + \tilde{k}) \cdot a_{n+\tilde{k}} < \varepsilon.$$

Wir fassen also zusammen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 = 2n_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : |0 - k \cdot a_k| < \varepsilon,$$

womit $(k \cdot a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. □

Das wirklich Interessante am Satz von Olivier ist seine Kontraposition. Diese liefert uns nämlich ein weiteres notwendiges Kriterium für Konvergenz von Reihen, zumindest für Reihen, deren Summanden monoton fallend und nichtnegativ sind. Gilt für eine solche Reihe nämlich, dass $(k \cdot a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, so ist die Reihe bereits divergent. Das gibt uns noch einmal ein deutlich stärkeres Kriterium als das ursprüngliche notwendige Kriterium.

Beispiele 6.2.11

(a) Wir betrachten zunächst einmal die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

mit $a_k = \frac{1}{k}$. Wir wissen nach Beispiel 6.2.8 und dem Minorantenkriterium 6.2.6 bereits, dass die harmonische Reihe divergiert. Hier sehen wir, dass sich die Divergenz der harmonischen Reihe auch direkt aus dem Satz von Olivier ergibt, denn

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot a_k = \lim_{k\to\infty} k \cdot \frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

(b) Betrachten wir als Nächstes die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\frac{1}{k}$$

mit $a_k = \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\frac{1}{k}$. Hier wird es mit den uns ansonsten bekannten Konvergenzkriterien schon schwerer. Wir bemerken aber, dass

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &< \frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{\pi}{2} \\ \Longrightarrow 0 < \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &< \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

und die Folge der Summanden a_k damit nichtnegativ ist. Weiter ist diese monoton fallend. Der Satz von Olivier ermöglicht also auch hier einen fixen Beweis für die Divergenz der oberen Reihe, denn

$$\lim_{k\to\infty} |k \cdot a_k| = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\right|}_{\geq \sin(\pi/4)} \geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

und $(k \cdot a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist damit offensichtlich keine Nullfolge.

Das nächste Beispiel soll zeigen, dass der Satz von Olivier aber mit Vorsicht zu genießen ist. Vergesst bitte nicht: Der Satz von Olivier gibt uns ein notwendiges Kriterium, aber kein hinreichendes. So kann eine Reihe selbst dann divergent sein, wenn $\lim_{k\to\infty} k \cdot a_k = 0$ gilt.

Beispiel 6.2.12: Die Abel'sche Reihe

Wir haben euch bisher noch nicht mit dem Logarithmus $\ln(x)$ bekannt gemacht (kommt noch!), wollen aber dennoch die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)}$$

mit $a_k = \frac{1}{k\ln(k)}$ betrachten. Das Einzige, was ihr an dieser Stelle über den Logarithmus wissen müsst, ist, dass er für $x \to \infty$ gegen ∞ divergiert. Damit ist hier

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln(k)} = 0,$$

d. h., $(k \cdot a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Dennoch ist die Reihe divergent, was wir gleich mithilfe des Cauchy'schen Verdichtungskriteriums sehen werden.

Satz 6.2.13: Das Cauchy'sche Verdichtungskriterium

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Dann hat die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

das gleiche Konvergenzverhalten wie die **verdichtete Reihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n},$$

d. h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert.}$$

Aber **Achtung**: Die Grenzwerte müssen dabei nicht gleich sein!

Beweis. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Dann ist

$$\begin{aligned} & a_{2^n} \geq a_{2^n+1} \geq \cdots \geq a_{2^{n+1}-1} \geq a_{2^{n+1}} \\ \Longrightarrow\ & 2^n a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \leq 2^n a_{2^n}. \end{aligned}$$

Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wird damit durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

majorisiert. Die Richtung

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert}$$

folgt dann direkt aus dem Majorantenkriterium.
Gleichzeitig wird die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} - a_1\right)$$

minorisiert. Mithilfe des Minorantenkriteriums folgt dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^{n+1}} \text{ divergiert} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ divergiert}$$

und die zweite Richtung der Behauptung entspricht der Kontraposition. □

Beispiel 6.2.14: Die Abel'sche Reihe

Unter Zuhilfenahme des Cauchy'schen Verdichtungskriteriums werfen wir nun noch einmal einen zweiten Blick auf die Abel'sche Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k\ln(k)}}_{a_k}.$$

Offensichtlich ist die Folge der Summanden $\left(\frac{1}{k\ln(k)}\right)_{k=2}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen, womit die Voraussetzungen des Cauchy'schen Verdichtungskriteriums erfüllt sind. Die verdichtete Reihe lautet des Weiteren

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln\left(2^n\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln\left(2\right)}.$$

Dabei haben wir das Logarithmusgesetz $\ln(a^b) = b\ln(a)$ ausgenutzt, das ihr in Kapitel 7 wiederfinden werdet. Die verdichtete Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \frac{1}{\ln(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

entspricht also der mit $\frac{1}{\ln(2)}$ multiplizierten harmonischen Reihe, die nach 6.2.8 divergiert. Mit dem Cauchy'schen Verdichtungskriterium ist damit auch die Abel'sche Reihe divergent.

Beispiel 6.2.15: Die allgemeine harmonische Reihe

Auch die allgemeine harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k^x}}_{a_k}$$

aus Lemma 6.2.9 lässt sich mithilfe des Cauchy'schen Verdichtungskriteriums besonders schön behandeln. Für $x \leq 0$ divergiert die Reihe offensichtlich. Sei also im Folgenden $x > 0$ und $\left(\frac{1}{k^x}\right)_{k=1}^{\infty}$ damit eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Die verdichtete Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{\left(2^n\right)^x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{nx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{x-1}}\right)^n$$

entspricht einer geometrischen Reihe. Diese konvergiert genau dann, wenn $\left|\frac{1}{2^{x-1}}\right| < 1$ beziehungsweise $x - 1 > 0$ gilt. Insgesamt erhalten wir damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{x-1}}\right)^n \text{ konvergiert} \iff x > 1.$$

Falls ihr euch fragen solltet, warum ausgerechnet das Cauchy'sche Verdichtungskriterium eines unserer Lieblingskriterien ist, vergleicht den obigen Beweis gerne mal mit dem ursprünglichen Beweis von Lemma 6.2.9!

6.3 Absolute Konvergenz von Reihen

Wie sich herausstellt, benötigt man noch einen weiteren Konvergenzbegriff für Reihen, den wir zunächst motivieren und euch dann vorstellen möchten.

Beispiel 6.3.1: Umsortierung bei Reihen

Die **alternierende harmonische Reihe**

$$s := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \ldots$$

ist nach dem Leibniz'schen Kriterium (Satz 6.2.4) konvergent. In endlichen Summen dürfen wir ohne Weiteres die Reihenfolge der Summation verändern. Wie steht es bei Reihen? Wir wollen nun die alternierende harmonische Reihe umsortieren:

$$\begin{aligned}
s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \pm \ldots \\
&= \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{=\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{=\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} \pm \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \ldots\right) \\
&= \frac{1}{2} s
\end{aligned}$$

Die Gleichung $s = \frac{1}{2}s$ gilt genau dann, wenn $s = 0$ ist. Wir werden später jedoch zeigen, dass der Wert der alternierenden harmonischen Reihe $\ln 2 \approx 0.6931472$ beträgt.

Beispiel 6.3.1 lässt nur einen Schluss zu: **Der Wert einer Reihe hängt von der Reihenfolge der Summation ab!** Was geht hier vor? Im Folgenden werden wir sehen, dass wir einen stärkeren Konvergenzbegriff benötigen, wenn wir sicherstellen wollen, dass sich das Verhalten einer Reihe nicht unter Umordnung ändert: die **absolute Konvergenz**. Vorher müssen wir aber natürlich einmal festhalten, was wir eigentlich unter einer Umordnung verstehen.

Definition 6.3.2: Umordnungen

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ heißt **Umordnung** der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, falls jeder Summand von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau einmal auch in $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ vorkommt und umgekehrt. Präziser: wenn es eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $a'_k = a_{\sigma(k)}$ gibt.

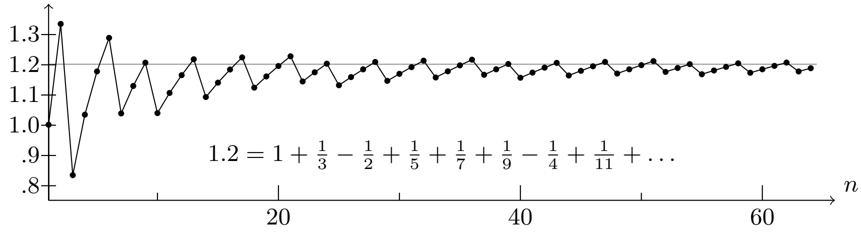

Abbildung 6.3.1. Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe, die gegen 1.2 konvergiert.

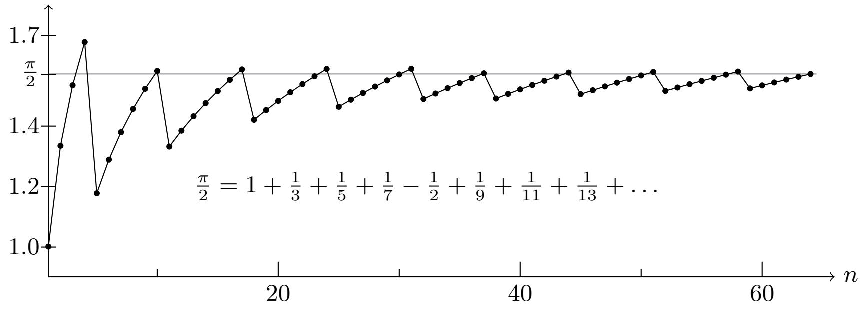

Abbildung 6.3.2. Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe, die gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert.

Die Abbildungen 6.3.1 und 6.3.2 illustrieren zwei verschiedene Umordnungen der (konvergenten) alternierenden harmonischen Reihe aus Beispiel 6.3.1. Dabei ist die erste Umordnung in Abbildung 6.3.1 so gewählt, dass die resultierende Reihe gegen 1.2 konvergiert, während die zweite Umordnung in

Abbildung 6.3.2 so gewählt ist, dass die resultierende Reihe gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert. Was sich hier bereits andeutet: Die Situation ist "beliebig" schlimm! Tatsächlich lässt sich nicht nur zu jedem reellen Grenzwert (beispielsweise 1.2 oder $\frac{\pi}{2}$) eine passende Umordnung finden, sondern auch Divergenz ist möglich. Wir kommen auf das Problem in Satz 6.3.7 zurück.

Der Konvergenzbegriff, den wir bisher bei Reihen zugrunde gelegt haben (Konvergenz der Partialsummen), erweist sich als zu schwach, um umgeordneten Reihen denselben Grenzwert zuzuweisen wie den Ausgangsreihen, und das ist nicht schön! Wir verschärfen jetzt den Konvergenzbegriff und schauen dann, ob wir weiter kommen.

Definition 6.3.3: Die absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Unser neuer Konvergenzbegriff ist tatsächlich stärker als der ursprüngliche, denn es gilt:

Lemma 6.3.4

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

Beweis. Mithilfe der Dreiecksungleichung schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |s_{n+k} - s_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| \\ &\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k}| \end{aligned}$$

und nach dem Cauchy-Kriterium (Lemma 6.2.1) ist

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon$$

für hinreichend große n und $k \geq 1$. $\square$

Beispiele 6.3.5

(a) Wir haben bereits eingesehen, dass die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \dots$$

nach dem Leibniz'schen Kriterium (Satz 6.2.4) konvergiert. Aber wie sieht es mit absoluter Konvergenz aus? Die entsprechende Reihe über die Beträge der Summanden lautet

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\dots$$

und entspricht damit der (nicht alternierenden) harmonischen Reihen, ist also insbesondere divergent. Tatsächlich ist die alternierende harmonische Reihe, welche für die anfänglichen Schweinereien bei der Umsortierung gesorgt hat, also nicht absolut konvergent!

(b) Betrachten wir als Nächstes die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}.$$

Wie sieht es hier mit absoluter Konvergenz aus? Die entsprechende Reihe über die Beträge der Summanden lautet

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

und entspricht damit einer allgemeinen harmonischen Reihe mit Exponenten $2 > 1$. Aus Lemma 6.2.9 folgt also sofort die absolute Konvergenz. Insbesondere ist die Reihe auch konvergent (Lemma 6.3.4), was wir alternativ auch mithilfe des Leibniz'schen Kriteriums (Satz 6.2.4) hätten in Erfahrung bringen können.
Mit Blick auf den Anfang dieses Kapitels nun die nächste Frage: Ist denn hier nun sichergestellt, dass bei Umordnungen der Reihe nichts schiefgeht?

Nun kommt nämlich unsere Nagelprobe: Löst der neue Konvergenzbegriff die Probleme bei der Umordnung? Ja! Denn es gilt der folgende Satz.

Satz 6.3.6: Der Umordnungssatz von Dirichlet

Ist $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, dann konvergieren alle Umordnungen gegen denselben Grenzwert s.

Beweis. Nach Lemma 6.2.1 gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall k \geq 1 : \quad |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ und das zugehörige $n_0 \in \mathbb{N}$ wähle $M \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}$$

in der M-ten Partialsumme

$$s'_M := \sum_{k=0}^{M} a'_k$$

der umgeordneten Reihe auftauchen. Das bedeutet, dass diese Summanden in der Differenz $s_m - s'_m$ für $m \geq M$ nicht mehr auftauchen. Damit folgt für hinreichend großes k:

$$|s_m - s'_m| \leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \ldots + |a_{n_0+k}| < \varepsilon$$

Dies zeigt aber die Konvergenz $s_m - s'_m \to 0$ für $m \to \infty$ und damit konvergiert die umgeordnete Reihe gegen denselben Grenzwert, nämlich s. □

Dass absolute Konvergenz nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür ist, dass alle Umordnungen den gleichen Grenzwert liefern, zeigt auf der anderen Seite der folgende Satz.

Satz 6.3.7: Der Riemann'sche Umordnungssatz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann existiert zu jeder beliebig vorgegebenen reellen Zahl S eine Umordnung σ der Reihenglieder a_n, so dass die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ gegen S konvergiert. Auch zu $S \in \{-\infty, +\infty\}$ gibt es eine Umordnung σ, so dass die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ bestimmt gegen S divergiert.

Beweis. Wir betrachten die Teilfolgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nur die positiven beziehungsweise nichtpositiven Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthalten. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, gelten

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n = -\infty.$$

Das nutzen wir jetzt in der folgenden Konstruktion: Sei $S \in \mathbb{R}$ der gewünschte Grenzwert. Wir konstruieren eine gegen S konvergente Umordnung wie folgt:

(S1) Summiere so lange positive Folgenglieder

$$\tilde{p}_1 := p_0 + \cdots + p_{k_1}$$

auf, bis der Wert S das erste Mal überschritten wird. Für $S < 0$ ist $\tilde{p}_1$ die leere Summe.

(S2) Summiere so lange nichtpositive Folgenglieder

$$\tilde{q}_1 := q_0 + \cdots + q_{l_1}$$

auf, bis der Wert S das erste Mal unterschritten wird.

Wir fassen die positiven und nicht-positiven Folgenglieder in der Partialsumme

$$s_1 = \tilde{p}_1 + \tilde{q}_1$$

zusammen. Für diese gilt

$$|S - s_1| < -q_{l_1}.$$

Anschließend wiederholen wir die beiden Schritte sukzessive. So erhalten wir eine Folge von Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$s_n = s_{n-1} + \tilde{p}_n + \tilde{q}_n \quad \text{mit} \quad \tilde{p}_n = p_{k_n+1} + \cdots + p_{k_{n+1}},\ \tilde{q}_n = q_{l_n+1} + \cdots + q_{l_{n+1}},$$

für welche die Ungleichung

$$|S - s_n| < -q_{l_{n+1}}$$

gilt. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, ist auch $(q_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} |S - s_n| \le \lim_{n\to\infty} -q_{l_{n+1}} = 0.$$

Die so konstruierte Umordnung konvergiert also gegen den Wert S.

Bestimmte Divergenz gegen $S \in \{\infty, -\infty\}$ lässt sich ganz ähnlich beweisen. Sei $S = \infty$, so wählen wir k_n so, dass $\tilde{p}_n \ge n - q_n$ und $l_n = 1$, d. h. $\tilde{q}_n = q_n$. Dann ist

$$s_n = s_{n-1} + \tilde{p}_n + \tilde{q}_n = s_{n-1} + n \implies s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2} \to \infty.$$

Der Fall $S = -\infty$ funktioniert völlig analog. □

Beispiel 6.3.8: Die alternierende harmonische Reihe

Betrachten wir das Standardbeispiel der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \dots$$

und suchen nach einer Umordnung, die gegen den Wert $S = 1.2 = \frac{6}{5}$ konvergiert. Die im Folgenden beschriebene Konstruktion einer geeigneten Umordnung folgt dem Beweis des Riemann'schen Umordnungssatzes 6.3.7 und ist in Abbildung 6.3.1 illustriert. Die Teilfolgen der positiven beziehungsweise nichtpositiven Folgenglieder sind hier durch

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots)$$

$$(q_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \dots)$$

gegeben. Das erste Mal überschreiten wir den Wert $S = 1.2$ für $p_1 + p_2 = 1 + \frac{1}{3} \approx 1.33$ und unterschreiten ihn das erste Mal wieder für

$$s_1 = p_1 + p_2 - q_1 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \approx 0.83.$$

Summieren wir nun erneut positive Folgenglieder auf, so überschreiten wir den Wert $S = 1.2$ das nächste Mal ieder für $s_1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \approx 1.28$ und unterschreiten ihn das nächste Mal für

$$s_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} \approx 1.03.$$

Ab hier geht es im Wechsel zwischen Summation positiver und nichtpositiver Folgenglieder so weiter und zumindest die paar nächsten Schritte könnt ihr Abbildung 6.3.1 entnehmen.

Die absolute Konvergenz einer Reihe garantiert uns also, dass wir die Summationsreihenfolge abändern können. Nun wäre es wünschenswert, wenn wir auch Konvergenzkriterien für absolute Konvergenz zur Hand hätten.

Satz 6.3.9: Das Quotientenkriterium

Gilt für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

dann konvergiert die Reihe absolut. Gilt hingegen

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

dann ist die Reihe divergent.

Beweis. Wähle ein $q \in \mathbb{R}$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q < 1.$$

Dann sind (wegen der Eigenschaften des Limes superior) nur endlich viele Quotienten $|a_{n+1}|/|a_n|$ größer als q und es gilt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q.$$

Daraus folgt die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
|a_{n_0+1}| &\leq q|a_{n_0}| \\
|a_{n_0+2}| &\leq q|a_{n_0+1}| \leq q^2|a_{n_0}| \\
|a_{n_0+3}| &\leq q|a_{n_0+2}| \leq q^3|a_{n_0}| \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Wegen $0 < q < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ und damit auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Ist nun $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, dann ist die Folge $(|a_n|)_n$ für $n \geq n_0$ monoton wachsend, und das verletzt die notwendige Konvergenzbedingung aus Lemma 6.2.2. □

Beispiele 6.3.10

Wir betrachten die harmonische Reihe und die Reihe für die Exponentialfunktion e^x.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$. Wir haben hier $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ und $a_n = \frac{1}{n}$. Für den Quotienten erhalten wir

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

also ist

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

und das Quotientenkriterium ist nicht anwendbar.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Hier ist $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ sowie $a_n = \frac{x^n}{n!}$ und damit folgt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Neben dem Quotientenkriterium ist häufig ein weiteres Kriterium sehr nützlich.

Satz 6.3.11: Das Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Ist hingegen $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, dann divergiert die Reihe.

Beweis. Wähle $q \in \mathbb{R}$ wie im Beweis des Quotientenkriteriums, d. h.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1.$$

Dann gilt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \qquad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

woraus $|a_n| \leq q^n$ für $n \geq n_0$ folgt. Ein Vergleich mit der geometrischen Reihe zeigt die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Für $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ist wieder die notwendige Konvergenzbedingung aus Lemma 6.2.2 verletzt. □

Beispiel 6.3.12

Betrachten wir die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots,$$

dann sind

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Während das Quotientenkriterium hier nicht anwendbar ist, liefert das Wurzelkriterium Konvergenz. Diese Situation ist nicht unüblich.

Das Quotientenkriterium ist häufig einfacher anzuwenden als das Wurzelkriterium, da es oft leichter ist, Quotienten zu berechnen als n-te Wurzeln. Gleichzeitig bietet das Wurzelkriterium aber einen größeren Anwendungsbereich. Was wir euch als Aufgabe überlassen: Wann immer das Quotientenkriterium Konvergenz liefert, so tut dies auch das Wurzelkriterium. Und wann immer das Wurzelkriterium nicht anwendbar ist ($\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$), so ist auch das Quotientenkriterium nicht anwendbar.

6.4 Doppelreihen

Häufig trifft man auf Doppelreihen der Form

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}. \tag{6.9}$$

Hier stehen wir vor einem offensichtlichen Problem, denn wir können natürlich auf viele verschiedene Arten summieren, wie das folgende Tableau zeigt:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{00} & + & a_{01} & + & a_{02} & + & a_{03} & + & a_{04} & + & \dots & =: & s_0 \\
+ & & + & & + & & + & & + & & \dots & & + \\
a_{10} & + & a_{11} & + & a_{12} & + & a_{13} & + & a_{14} & + & \dots & =: & s_1 \\
+ & & + & & + & & + & & + & & \dots & & + \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \dots & & \shortparallel \\
v_0 & + & v_1 & + & v_2 & + & v_3 & + & v_4 & + & \dots & = & \mathbf{?}
\end{array}$$

Wir können also – Konvergenz vorausgesetzt – i festhalten und jeweils die Reihe für die j summieren. Das ergibt die Größen s_k, die wir dann noch summieren müssen. Oder wir halten j fest und summieren dann für i, was die v_k ergibt, die ebenfalls noch summiert werden müssen. Unter welchen

Umständen erhalten wir immer wieder denselben Wert der Doppelreihe? Die Frage lautet also: Wann ist

$$s_0 + s_1 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) = v_0 + v_1 + \ldots \ \textbf{?} \tag{6.10}$$

Um die verschiedenen Summationsreihenfolgen mathematisch in den Griff zu bekommen, starten wir mit einer Definition.

Definition 6.4.1: Lineare Anordungen von Doppelreihen

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt **lineare Anordung** der Doppelreihe (6.9), wenn es eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

mit $b_k = a_{\sigma(k)}$ gibt.

Möglich wäre nach unserer Definition also auch eine „diagonale Summation"

$$a_{00} + (a_{10} + a_{01}) + (a_{20} + a_{11} + a_{02}) + \ldots$$

Beispiele 6.4.2

(a) Betrachten wir die Doppelreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 \ ; j = i \\ -1 \ ; j = i+1 \\ 0 \ ; \text{sonst} \end{cases} .$$

Das entsprechende Tableau ist also durch

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & + & (-1) & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & + & & \ldots & & + \\
0 & + & 1 & + & (-1) & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & + & & \ldots & & + \\
0 & + & 0 & + & 1 & + & (-1) & + & 0 & + & \ldots & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & + & & \ldots & & + \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \\
1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & &
\end{array}$$

gegeben. Damit gilt hier für die Summationsreihenfolgen aus (6.10)

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}s_i=\sum_{i=0}^{\infty}(1-1)=0,$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_{ij}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}v_j=1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1+1)=1$$

und wir sehen, dass unterschiedliche lineare Anordnungen zu verschiedenen Werten für die Doppelreihe führen können.

(b) Werfen wir als Nächstes einen Blick auf die Doppelreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij} \quad \text{mit} \quad a_{ij}=\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}.$$

Das entsprechende Tableau ist also durch

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\left(\frac{1}{2}\right)^0 & + & \left(\frac{1}{2}\right)^1 & + & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & + & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & + & \ldots & = & s_0\\
+ & & + & & + & & + & & \ldots & & +\\
\left(\frac{1}{2}\right)^1 & + & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & + & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & + & \left(\frac{1}{2}\right)^4 & + & \ldots & = & s_1\\
+ & & + & & + & & + & & \ldots & & +\\
\left(\frac{1}{2}\right)^2 & + & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & + & \left(\frac{1}{2}\right)^4 & + & \left(\frac{1}{2}\right)^5 & + & \ldots & = & s_2\\
+ & & + & & + & & + & & \ldots & & +\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots\\
\Vert & & \Vert & & \Vert & & \Vert & & & & \\
v_0 & + & v_1 & + & v_2 & + & v_3 & + & \ldots & &
\end{array}$$

gegeben. Damit gilt

$$s_i=\left(\frac{1}{2}\right)^i\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j=2\left(\frac{1}{2}\right)^i,$$
$$v_j=\left(\frac{1}{2}\right)^j\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=2\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

und für die Summationsreihenfolgen aus (6.10) damit

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}s_i=2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=4,$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_{ij}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}v_j=2\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j=4.$$

Hier liefern die beiden linearen Anordnungen also den gleichen Wert für die Doppelreihe. Und das ist kein Zufall! Wie wir im nächsten Satz sehen werden, liefern hier tatsächlich *alle* linearen Anordnungen den gleichen Wert für die Doppelreihe.

Satz 6.4.3

Gilt für die Doppelreihe (6.9)

$$\exists M \geq 0 \; \forall m \in \mathbb{N} : \quad \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq M, \tag{6.11}$$

dann konvergieren alle linearen Anordnungen gegen denselben Grenzwert.

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte:

(a) Sei $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$ irgendeine lineare Anordnung der Doppelreihe (6.9). Wegen (6.11) ist die Folge

$$\left(\sum_{i=0}^{n} |b_i| \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ und damit auch $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$.

Ebenso zeigt man die Konvergenz der Reihen

$$s_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \text{und} \quad v_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}.$$

(b) Das Cauchy-Kriterium für $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ lautet:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall k \geq 1 : \quad |b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \ldots + |b_{n+k}| < \varepsilon.$$

Zu $\varepsilon > 0$ und korrespondierendem n_0 wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $b_0, b_1, \ldots, b_{n_0}$ im Rechteck $0 \leq i, j \leq N$ liegen. Damit treten die $b_0, b_1, \ldots, b_{n_0}$ sowohl in $\sum_{i=0}^{\ell} b_i$ für $\ell \geq n_0$ als auch in $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}$ für $m, n \geq N$ auf. Damit gilt aber für $\ell \geq n_0$, $m, n \geq N$:

$$\left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} - \sum_{i=0}^{\ell} b_i \right| \leq |b_{n_0+1}| + \ldots + |b_{n_0+k}| < \varepsilon \tag{6.12}$$

für hinreichend großes k.

(c) Sei $s := \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ und man betrachte $\ell \to \infty$, $n \to \infty$ in (6.12). Dann folgt nach Satz 5.3.3

$$\left| \sum_{i=0}^{m} s_i - s \right| \leq \varepsilon.$$

Jetzt vertausche man in (6.12) die (endlichen!) Summen $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}$ und betrachte $\ell \to \infty$ und $m \to \infty$, dann folgt wieder mit Satz 5.3.3

$$\left|\sum_{j=0}^{m} v_j - s\right| \leq \varepsilon.$$

Damit konvergieren $\sum_{i=0}^{\infty} s_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$ gegen s. □

Beispiel 6.4.4

In Beispiel 6.4.2 haben wir bereits gesehen, dass für die Doppelreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}$$

die beiden Summationsreihenfolgen aus (6.10) den gleichen Wert liefern. Wir prüfen nun die Voraussetzungen von Satz 6.4.3 und folgern aus diesem, dass hier tatsächlich *alle* linearen Anordnungen den gleichen Wert liefern. Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 4$$

und (6.11) ist etwa für $M = 4$ erfüllt.

6.5 Das Cauchy-Produkt

Wollen wir zwei Reihen miteinander multiplizieren, dann müssen wir uns fragen, wie wir das Produkt

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

verstehen wollen. Offenbar müssen *alle* auftretenden Produkte $a_k \cdot b_\ell$ summiert werden.

Definition 6.5.1: Das Cauchy-Produkt

Für zwei Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\cdot b_j\right) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \dots$$

das **Cauchy-Produkt** der beiden Reihen.

Beispiel 6.5.2

Wir betrachten die beiden Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}},$$

die nach dem Leibniz'schen Kriterium konvergieren, aber nach dem Satz von Olivier (oder minorisiert durch die harmonische Reihe) nicht absolut konvergieren. Das Cauchy-Produkt ist hier durch

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\cdot b_j\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{\sqrt{n-j+1}}\frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n-j+1}\sqrt{j+1}}\right)}_{=c_n}\end{aligned} \tag{6.13}$$

gegeben. Wegen $j \leq n$ gilt, dann

$$\sqrt{n-j+1}\sqrt{j+1} \leq n+1 \implies |c_n| \geq \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n+1} = 1,$$

und die Folge der Summanden $(-1)^n c_n$ bildet keine Nullfolge. Damit divergiert das Cauchy-Produkt (6.13), da das notwendige Kriterium für Reihenkonvergenz verletzt ist.

Beispiel 6.5.2 zeigt bereits, dass das Cauchy-Produkt zweier konvergenter Reihen nicht wieder konvergent sein muss! Wie schon gewohnt, hilft aber auch hier die absolute Konvergenz.

Satz 6.5.3

Sind beide Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, dann konvergiert ihr Cauchy-Produkt und es gilt:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \cdot b_j\right)$$

Beweis. Wegen der absoluten Konvergenz gelten

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \leq M_1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \leq M_2$$

mit zwei Schranken $M_1, M_2 \geq 0$. Daher folgt

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} |a_j b_k| = \sum_{j=0}^{m} |a_j| \underbrace{\sum_{k=0}^{m} |b_k|}_{M_2} \leq M_1 \cdot M_2, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

und damit ist Satz 6.4.3 anwendbar. Die Summe der j-ten Zeile ergibt

$$s_j := a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} s_j = (\sum_{j=0}^{\infty} a_j) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k).$$

Das Cauchy-Produkt ist eine lineare Anordnung einer Doppelreihe (6.9) und konvergiert daher nach Satz 6.4.3. □

Beispiel 6.5.4

Zum Einüben von Satz 6.5.3 betrachten wir die Reihe für die Euler'sche Zahl

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

und ihr Produkt mit sich selbst, d. h. das Cauchy-Produkt

$$e^2 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right).$$

Die beiden Reihen konvergieren nach dem Quotientenkriterium absolut (siehe auch Beispiel 6.3.10). Nach Satz 6.5.3 konvergiert damit auch ihr Cauchy-Produkt und es gilt

$$
\begin{aligned}
e^2 &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(n-j)!} \frac{1}{j!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1+1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}
\end{aligned}
$$

mithilfe des Binomialtheorems.

6.6 Die Vertauschung unendlicher Reihen mit Grenzwerten

Wir müssen jetzt noch klären, wann wir Grenzwertbildung und unendliche Reihen vertauschen dürfen. In Beispiel 5.6.8 konnten wir sehen, wie der große Euler „ganz naiv“ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

als

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left[\binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\right]$$

berechnet hat, und wir haben bemerkt, auf welch wackeligen Füßen ein solches Vorgehen steht! Mit dem nächsten Beispiel wollen wir euch zeigen, dass das im Allgemeinen auch mal schiefgehen kann.

Beispiel 6.6.1

Betrachten wir etwa die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} s_{nk} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} s_{nk} \quad \text{mit} \quad s_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & ; k \leq n \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases},$$

so ergeben sich

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} s_{nk} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty} s_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Grenzwertbildung und unendliche Reihen können in diesem Beispiel also nicht vertauscht werden!

Nun wollen wir klären, warum es bei Euler doch geklappt hat.

Satz 6.6.2

Alle Elemente der Menge $\{s_{0j}, s_{1j}, s_{2j}, \ldots\}$ haben desselben Vorzeichen und es gelte

$$\forall n, j \in \mathbb{N}: \quad |s_{n+1,j}| \geq |s_{nj}|.$$

Gibt es eine Schranke $M \geq 0$, so dass $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{j=0}^{n} |s_{nj}| \leq M$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s_{nj} = \sum_{j=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty} s_{nj}. \tag{6.14}$$

Beweis. Mit $a_{0j} := s_{0j}$, $a_{ij} := s_{ij} - s_{i-1,j}$ ist

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ij} = s_{nj}.$$

Damit kann (6.14) geschrieben werden als

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}. \tag{6.15}$$

Jetzt rechnen wir ein bisschen:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} a_{ij} &= \sum_{j=0}^{\infty}(a_{0j} + a_{1j} + \ldots + a_{nj}) = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m}(a_{0j} + \ldots + a_{nj})\\ &= \sum_{i=0}^{n}\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij},\end{aligned}$$

also ist (6.15) äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}$$

und das ist äquivalent zu (6.10). Wir müssen also lediglich noch Bedingung (6.11) überprüfen. Nach Voraussetzung haben auch alle $a_{0j}, a_{1j}, \ldots$ das gleiche Vorzeichen, daher gilt

$$\sum_{i=0}^{n} |a_{ij}| = |s_{nj}| \text{ und } \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=0}^{n} |s_{nj}| \leq M.$$

Nun zeigt Satz 6.4.3 die Gültigkeit von (6.15) und damit von (6.14). □

Wir beenden dieses Kapitel mit einem (rigorosen!) Beweis, der Eulers naive Grenzwertbildung aus Beispiel 5.6.8 ersetzt.

Beispiel 6.6.3

Wir wollen

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

zeigen. Wir starten mit dem binomischen Lehrsatz (Satz 2.1.15)

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2(1-\frac{1}{n})}{2!} + \frac{x^3(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!} + \ldots$$

und setzen

$$\begin{aligned} s_{n0} &:= 1, \\ s_{n1} &:= x, \\ s_{n2} &:= \frac{x^2(1-\frac{1}{n})}{s!}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Für festes $x \in \mathbb{R}$ besitzen alle Folgenglieder der Folge $(s_{1j}, s_{2j}, s_{3j}, \ldots)$ übereinstimmende Vorzeichen und die Folge $(|s_{1j}|, |s_{2j}|, |s_{3j}|, \ldots)$ ist monoton wachsend. Es gilt

$$\sum_{j=0}^{n} |s_{nj}| \leq \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{|x|^j}{j!}}_{\text{konvergent nach Quot.krit.}} \leq M.$$

Dann folgern wir aus Satz 6.6.2, dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}s_{nj} &= \sum_{j=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}s_{nj}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{x^j(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{j-1}{n})}{j!}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}.\end{aligned}$$

Zusammenfassung

Aus diesem Kapitel zu Reihen solltet ihr an allererster Stelle einmal mitnehmen, was eine Reihe überhaupt ist, nämlich eine Folge von Partialsummen, d. h.

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k = \lim_{n\to\infty}s_n \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n}a_k.$$

Da wir Reihen nun als spezielle Folgen auffassen, gelten hier ein paar besonders schöne Kriterien für deren Konvergenz. Zunächst einmal solltet ihr hier mit dem notwendigen Kriterium vertraut sein, welches besagt, dass eine Reihe nur dann konvergieren kann, wenn die Folge der Summanden eine Nullfolge bildet. Von besonderem Interesse ist dabei die Kontraposition,

$$\lim_{k\to\infty}a_k \neq 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty}a_k \text{ divergiert},$$

die uns ein fixes Kriterium für die Divergenz einer Reihe liefert. Hinreichende Kriterien für die Konvergenz einer Reihe waren dann etwa das Leibniz'sche Kriterium für alternierende Reihen sowie das Minoranten- und Majorantenkriterium. Nach diesem Kapitel solltet ihr aber gerade bei alternierenden Reihen vorsichtig geworden sein! Wie wir am Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe gesehen haben, kann hier nämlich eine ganze Menge schiefgehen! Ganz konkret kann es uns passieren, dass eine einfache Umsortierung der Summationsreihenfolge in einer Reihe zu völlig neuen Werten (oder sogar divergenten Reihen) führt. Diese Schweinereien lassen sich erst für absolut konvergente Reihen ausschließen. Dabei nennen wir eine Reihe absolut konvergent, wenn auch die Summe über die Beträge ihrer Summanden konvergiert, d. h.

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k| < \infty.$$

Auch für absolute Konvergenz hatten wir zwei besonders schöne Kriterien: das Wurzel- sowie das Quotientenkriterium. Schließlich solltet ihr aus diesem Kapitel das Konzept von Doppelreihen und Cauchy-Produkten mitnehmen. Besonders wichtig für euch: Das Cauchy-Produkt zweier konvergenter Reihen muss im Allgemeinen nicht konvergieren! Dies ist erst sichergestellt, wenn die beiden Reihen (oder zumindest eine der beiden) sogar absolut konvergieren. Noch so eine nützliche Anwendung der absoluten Konvergenz! Schließlich solltet ihr spätestens jetzt auch beim Vertauschen von Grenzwerten und unendlichen Reihen vorsichtig geworden sein. Als Mathematiker solltet ihr natürlich immer vorsichtig sein und jeden eurer Schritte kritisch reflektieren.
Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Was sind Reihen?*
- *Welche Kriterien gibt es für die Konvergenz einer Reihe?*
- *Was ist absolute Konvergenz?*
- *Wie hängen Konvergenz und absolute Konvergenz zusammen?*
- *Gibt es ggf. ein Beispiel für eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, oder umgekehrt?*
- *Wozu braucht man absolute Konvergenz?*
- *Wie hängen absolute Konvergenz und Umordnungen von Reihen zusammen?*
- *Welche Kriterien gibt es für die absolute Konvergenz?*
- *Wie ist das Cauchy-Produkt zweier Reihen definiert?*
- *Wann konvergiert dieses?*
- *Darf man Reihen und Grenzwerte ohne Weiteres vertauschen?*

Reihen bilden das Fundament der Integralrechnung (Kapitel 9), aber auch der Potenzreihen (Kapitel 11), und werden daher immer wieder auftauchen. Es lohnt sich also, dieses Thema einmal wirklich verinnerlicht zu haben! Daher solltet ihr euch mal einige der folgenden Aufgaben zur Brust nehmen.

6.7 Aufgaben

A.6.1 Gegeben seien die Reihen

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} k \quad \text{und} \quad \text{(b)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)}.$$

Wie lauten die Folgen der Partialsummen? Konvergieren die Reihen?

A.6.2 Man berechne die Grenzwerte der folgenden geometrischen Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{5}{3^{k+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{l=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{l+1}}{3^l}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{2n-2}5^{-n+1}}{2^{n-2}}$ (d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j}$

A.6.3 Man prüfe für folgende Reihen, ob das notwendige Kriterium erfüllt ist:

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\mu^3}{4\mu^3-2\mu+8}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ (d) $\displaystyle\sum_{r=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{r+1}} - 1$

Was folgt für die Konvergenz?

A.6.4 Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^{n+1}}-\sqrt{3^n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^l}{(l+1)^l}$ (c) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa \sqrt[\kappa]{\kappa}}$

(d) $\displaystyle\sum_{a=1}^{\infty} \frac{3}{a^2+5a+4}$ (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}+\frac{2}{7^k}\right)$ (f) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sqrt{j^2+j}-j\right)$

A.6.5 Man prüfe für folgende Reihen, ob das Leibniz-Kriterium erfüllt ist:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{2^l}{l!}$

(c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{m^2}{m(m+1)}$ (d) $\displaystyle\sum_{j=4}^{\infty}(-1)^{2j} \frac{1}{\sqrt{j}}$

Was folgt für die Konvergenz?

A.6.6 Man konstruiere eine positive Nullfolge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, so dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ divergiert. Warum widerspricht dieses Beispiel nicht dem Leibniz'schen Kriterium?

A.6.7 Man überprüfe mithilfe des Minoranten- und Majorantenkriteriums die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ (b) $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{l}\cos^2 l}{l^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n^2+4n-1}$ (d) $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\sqrt{j^3+80j^2}}{j^3-1}$

A.6.8 Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\text{(a)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m^3+1} \qquad \text{(b)} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}\sqrt{\sqrt{\mu^3}}}{(2\mu)^2}$$

$$\text{(c)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{5}{3^{k+1}} \qquad \text{(d)} \sum_{r=2}^{\infty} r\left(\frac{r-3}{7r}\right)^r$$

A.6.9 Man prüfe mithilfe des Wurzel- und Quotientenkriteriums die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} \qquad \text{(b)} \sum_{l=2}^{\infty} (-1)^l \frac{l}{l+1} \qquad \text{(c)} \sum_{\kappa=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^{\kappa}}\frac{\kappa^2}{2^{\kappa}}$$

$$\text{(d)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)^2} \qquad \text{(e)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \qquad \text{(f)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j-1}{2^j}$$

A.6.10 Man zeige, dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen

$$\text{(a)} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

$$\text{(b)} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

gelten.

A.6.11 Man beweise mithilfe von A.6.10 folgende Aussagen:

(a) Wenn das Quotientenklriterium absolute Konvergenz liefert, liefert auch das Wurzelkriterium absolute Konvergenz.

(b) Wenn das Wurzelkriterium keine Aussage macht, macht auch das Quotientenkriterium keine Aussage.

Welches der beiden Kriterien ist stärker?

A.6.12 Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)} \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{2^k} \qquad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$

$$\text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+4}\right)^{2k} \qquad \text{(e)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\pi+\frac{1}{k}\right)^k \qquad \text{(f)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k+1)^2}$$

$$\text{(g)} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k-k} \qquad \text{(h)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad a_k = \begin{cases} 2^{-k} & ; k \text{ gerade} \\ 5^{-k} & ; k \text{ ungerade} \end{cases}$$

A.6.13 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Man zeige, dass dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ konvergiert.

A.6.14 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine divergente Reihe mit $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man beweise, dass dann $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ divergiert.

A.6.15 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine divergente Reihe mit $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter bezeichne $s_k := a_0 + \cdots + a_k$ die k-te Partialsumme der Reihe. Man zeige, dass dann $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ divergiert.

A.6.16 Sei $x \in \mathbb{R}$. Man berechne das formale Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ mit sich selbst. Wann konvergiert das Cauchy-Produkt?

A.6.17 Man konstruiere zwei divergente Reihen, deren gemeinsames Cauchy-Produkt konvergiert.

A.6.18 Man berechne

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^{\frac{1}{k}}}.$$

7 Stetigkeit

Wozu?

Wir kommen zurück zu den Funktionen und ihren Eigenschaften. Ein paar Funktionen habt ihr schon in Kapitel 4 kennengelernt. In diesem Kapitel wollen wir euch mit ein paar weiteren, besonders wichtigen Exemplaren bekannt machen; mit dabei sind die Logarithmusfunktion, die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen. Ihr habt in Kapitel 4 auch schon ein paar Eigenschaften von Funktionen kennengelernt, wie etwa Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. In diesem Kapitel wollen wir euch mit der wohl wichtigsten Eigenschaften von Funktionen vertraut machen: der **Stetigkeit**. Der Begriff der Stetigkeit ist von zentraler Bedeutung in der Analysis. Anschaulich gesprochen ist eine Funktion stetig, wenn sie keine "Sprünge" macht, oder etwas exakter ausgedrückt, wenn man Änderungen der Funktionswerte nach Belieben beschränken kann, indem man sich auf hinreichend kleine Änderungen im Argument beschränkt. Das ist es auch schon, was wir unter der heute üblichen **ε-δ-Formulierung** der Stetigkeit verstehen, die auf Karl Weierstraß (Ende des 19. Jahrhunderts) zurückgeht. Die ε-δ-Formulierung ist dabei zwar schön anschaulich, aber häufig unpraktisch. Eine typischerweise angenehmere Umformulierung der Stetigkeit liefert das sogenannte **Folgenkriterium**: Wenn wir eine konvergente Folge von Argumenten vorliegen haben, d. h. $x_n \to x$, dann sollen auch die zugehörigen Funktionswerte entsprechend konvergieren, d. h. $f(x_n) \to f(x)$.

Aber was macht stetige Funktionen eigentlich so viel besser als unstetige Funktionen? Ihr werdet sehen, dass die allermeisten Werkzeuge der Analysis erst für stetige Funktionen so richtig greifen. An Differenzierbarkeit und damit z. B. an die Bestimmung und Charakterisierung von Extremwerten ist ohne Stetigkeit gar nicht erst zu denken! Ganz konkret werdet ihr in diesem Kapitel aber schon einmal den **Satz vom Minimum und Maximum** sowie den **Zwischenwertsatz** für stetige Funktionen kennenlernen.

Schließlich werden wir noch den Begriff des (einseitigen) Funktionsgrenzwertes einführen. Dieser wird es uns erlauben, verschiedene Arten von Unstetigkeiten zu charakterisieren.

Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- die Logarithmusfunktion, die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen,
- der Begriff der Stetigkeit, dabei insbesondere,
- die ε-δ-Formulierung und
- die Folgen-Stetigkeit,

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_7

- der Zwischenwertsatz,
- der Satz vom Minimum und Maximum,
- Funktionsgrenzwerte,
- die verschiedenen Arten von Unstetigkeiten

und ihr Verständnis.
Entscheidend für euch: Wir werden diese Begriffe gleich auch immer auf die wichtigsten Beispiele für Funktionen anwenden.

7.1 Ein kleiner Besuch im großen Funktionenzoo

Wir kennen schon konstante Funktionen, Polynome und die e-Funktion

$$\exp(x) := e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Jetzt wollen wir unseren Blick etwas erweitern.

7.1.1 Logarithmusfunktionen

Definition 7.1.1: Logarithmusfunktionen

Eine Funktion

$$\mathbb{R}_{>0} \ni x \mapsto \ell(x)$$

heißt **Logarithmusfunktion**, wenn

$$\forall x, y > 0 : \quad \ell(x \cdot y) = \ell(x) + \ell(y) \tag{7.1}$$

gilt.

Diese schlichte Definition erlaubt sehr weitreichende Folgerungen.

(a) Setzen wir $y := z/x$, dann folgt aus $\ell(x \cdot z/x) = \ell(x) + \ell(z/x) = \ell(z)$, also

$$\ell\left(\frac{z}{x}\right) = \ell(z) - \ell(x). \tag{7.2}$$

(b) Für $x = y = 1$ folgt $\ell(1) = \ell(1 \cdot 1) = \ell(1) + \ell(1) = 2\ell(1)$ und damit gilt für jede Logarithmusfunktion

$$\ell(1) = 0. \tag{7.3}$$

(c)
$$\ell(x \cdot y \cdot z) = \ell(x) + \ell(y) + \ell(z) \tag{7.4}$$

(d) Schreiben wir $x = \sqrt[n]{x} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{x} = (\sqrt[n]{x})^n$, dann gilt

$$\ell(x) = \ell(\sqrt[n]{x} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{x}) = \ell(\sqrt[n]{x}) + \ldots + \ell(\sqrt[n]{x}) = n \cdot \ell(\sqrt[n]{x})$$

und es folgt
$$\ell\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ell(x),$$
bzw. allgemeiner
$$\ell\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}\ell(x). \tag{7.5}$$

(e) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $\ell(a) = 1$. Dann folgt aus (7.5)
$$\ell\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}. \tag{7.6}$$

Logarithmusfunktionen sind also die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$**!** Sie heißen Logarithmus zur Basis a.

Definition 7.1.2: Der Logarithmus zur Basis a

Der **Logarithmus zur Basis** $a > 0$ ist definiert als

$$y = \log_a x \quad :\Longleftrightarrow \quad x = a^y. \tag{7.7}$$

Für die Analysis spielt der **natürliche Logarithmus (Logarithmus naturalis)** eine besondere Rolle, der definiert ist als

$$\ln x := \log_e x. \tag{7.8}$$

Historisch wichtig ist zudem der **dekadische Logarithmus** oder **Briggs'sche Logarithmus** zur Basis 10, $\log_{10} x$.

Sowohl der natürliche als auch der dekadische Logarithmus sind in Abbildung 7.1.1 illustriert.

Wenn es Logarithmusfunktionen zu verschiedenen Basen gibt, ist eine Umrechnungsformel nützlich. Diese Formel wurde von Euler als **Goldene Regel** bezeichnet.

Lemma 7.1.3: Eulers Goldene Regel

Der Zusammenhang zwischen zwei Logarithmen $\log_a x$ und $\log_b x$ ist gegeben durch

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad a, b > 0.$$

Beweis.

$$x = a^y \overset{(7.5)}{\Longrightarrow} \log_b x = y \log_b a \overset{(7.7)}{\Longrightarrow} \log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

□

Mithilfe des Logarithmus können wir nun die **allgemeine Potenz** definieren.

Definition 7.1.4: Reelle Potenzen

Für $a, x \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ sei

$$a^x := \exp(x \log a) = e^{x \log a}. \tag{7.9}$$

Insbesondere sei $0^x := 0$ für $x > 0$.

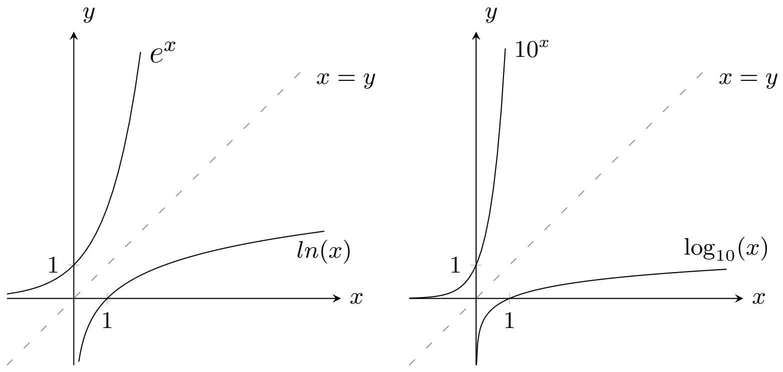

Abbildung 7.1.1. Der natürliche und der dekadische Logarithmus

7.1.2 Exponentialfunktionen

Definition 7.1.5: Exponentialfunktionen

Die Funktionen

$$y = a^x, \quad x \in \mathbb{R},\ a > 0,$$

heißen **Exponentialfunktionen**. Nur zu der speziellen Exponentialfunktion

$$y = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

sagen wir **die Exponentialfunktion**. Für alle Exponentialfunktionen gilt $f(0) = 1$.

Auch Exponentialfunktionen für $a = 10$ und $a = e$ sind in Abbildung 7.1.1 zu sehen. Illustriert ist dabei ihr Zusammenhang zu den entsprechenden Logarithmusfunktionen.

7.1.3 Trigonometrische Funktionen

Ein Kreis mit Radius r hat den Umfang $U = 2\pi r$. Dabei messen wir den Winkel im **Bogenmaß** und nicht in Grad! Zu einem Winkel von 360° gehört der Bogen $2\pi r$, d. h.

$$360^\circ \mathrel{\widehat{=}} 2\pi r \iff 1^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi r}{180} \iff 1 \mathrel{\widehat{=}} \frac{180^\circ}{\pi r}.$$

Die Länge x des Bogens, der zu einem Winkel α in Grad gehört, ist demnach $x = \alpha \frac{\pi r}{180}$.

Wir definieren nun die beiden trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus anhand von Abbildung 7.1.2 am Einheitskreis als

$$x = \cos\varphi,$$
$$y = \sin\varphi.$$

Die Funktionen $\varphi \mapsto \sin\varphi$ und $\varphi \mapsto \cos\varphi$ sind 2π-periodisch.

Zudem sind der Sinus und Cosinus ungerade beziehungsweise gerade, was Folgendes bedeutet:

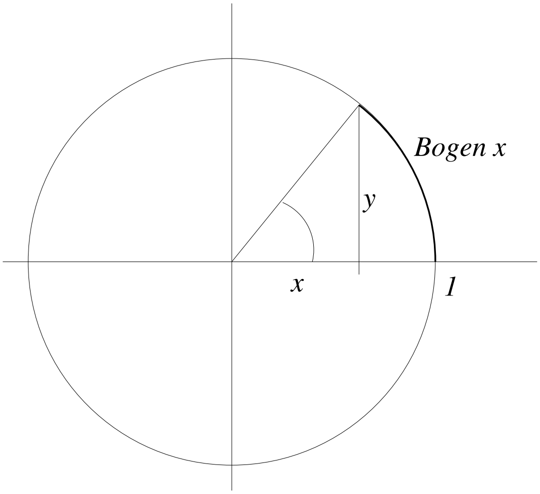

Abbildung 7.1.2. Zur Definition der trigonometrischen Funktionen

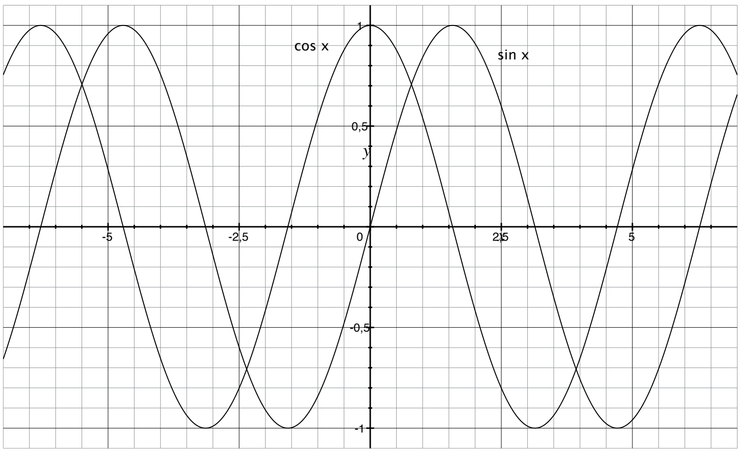

Abbildung 7.1.3. Sinus und Cosinus

Definition 7.1.6: Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion f heißt

$$\begin{aligned} \textbf{gerade} \quad &:\Longleftrightarrow \quad f(-x) = f(x), \\ \textbf{ungerade} \quad &:\Longleftrightarrow \quad f(-x) = -f(x). \end{aligned}$$

Damit ist $f(x) = \sin x$ also eine ungerade Funktion und $f(x) = \cos x$ eine gerade Funktion.

Beispiel 7.1.7

Wir betrachten die Funktionen

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3, \quad f_4(x) = 1 + x.$$

(a) Die Funktion f_1 ist sowohl gerade als auch ungerade, denn

$$f_1(-x) = 0 = f_1(x) \quad \text{und} \quad f_1(-x) = 0 = -0 = -f_1(x).$$

(b) Die Funktion f_2 ist gerade, aber nicht ungerade, denn

$$f_2(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_2(x), \text{ aber } f_2(-1) = 1 \neq -1 = -f_2(x).$$

(c) Die Funktion f_3 ist nicht gerade, aber ungerade, denn

$$f_3(-1) = -1 \neq 1 = f_3(1), \quad \text{aber} \quad f_3(-x) = -x^3 = -f_3(x).$$

(d) Die Funktion f_4 ist weder gerade noch ungerade, denn

$$f_4(-1) = 0 \neq 2 = f_4(1) \quad \text{sowie} \quad f_4(-1) = 0 \neq -2 = -f_4(1).$$

Abgeleitete trigonometrische Funktionen sind die Tangens- und die Cotangensfunktion:

$$\tan\varphi := \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \cot\varphi := \frac{1}{\tan\varphi}$$

Sehr wichtig sind auch die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, die wir für sin, cos und tan mit arcsin, arccos und arctan bezeichnen. Sie lassen sich wie in Abbildung 7.1.4 am Einheitskreis leicht durch zugehörige Bögen geometrisch veranschaulichen.

Bemerkung 7.1.8: Achtung!

Wegen der Periodizität

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x,$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x,$$
$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

sind die Umkehrfunktionen **nicht eindeutig**! Erinnert euch an euer Schulwissen: Wie kann man den Graphen einer Umkehrfunktion zeichnen? Man vertauscht algebraisch x und y, was bedeutet, dass man den Graphen einer Funktion f an der Winkelhalbierenden $y = x$ spie-

gelt. Ein altes Beispiel: Vertauschen wir x und y bei der Funktion $y = f(x) = x^2$, dann folgt $x = y^2$, und die Auflösung nach y liefert die Umkehrfunktion $y = \sqrt{x}$. Geometrisch haben wir damit den Graph von f an der Geraden $y = x$ gespiegelt. Werft dazu auch gerne noch einmal einen Blick auf Abbildung 7.1.1!
Daher schränkt man die Umkehrfunktionen auf **Hauptwerte** ein:

$$\begin{aligned} y = \arcsin x &\iff x = \sin y \text{ für } -1 \le x \le 1,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, \\ y = \arccos x &\iff x = \cos y \text{ für } -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi, \\ y = \arctan x &\iff x = \tan y \text{ für } -\infty < x < \infty,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

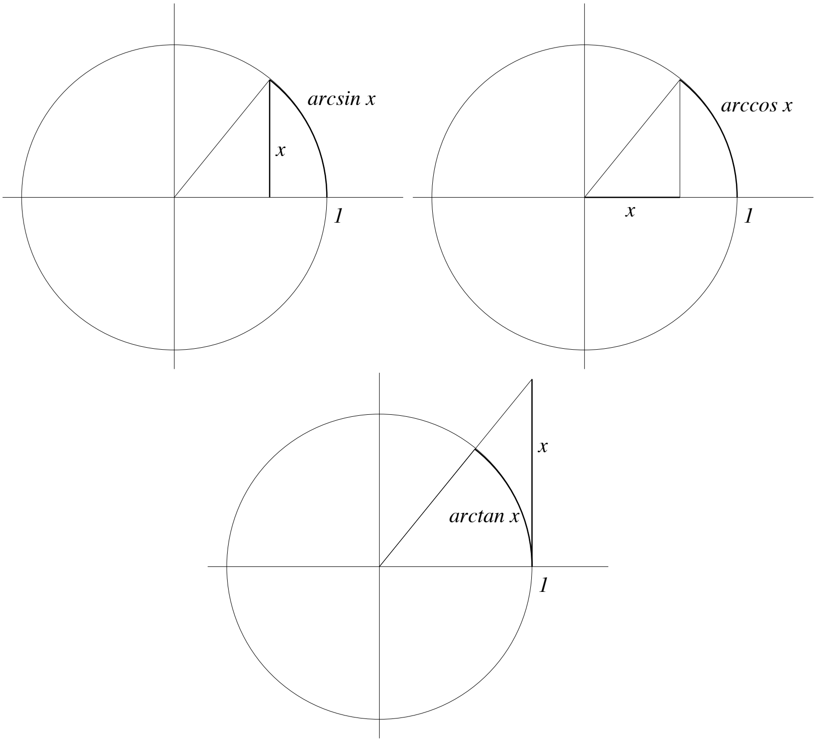

Abbildung 7.1.4. Zur Definition der inversen trigonometrischen Funktionen

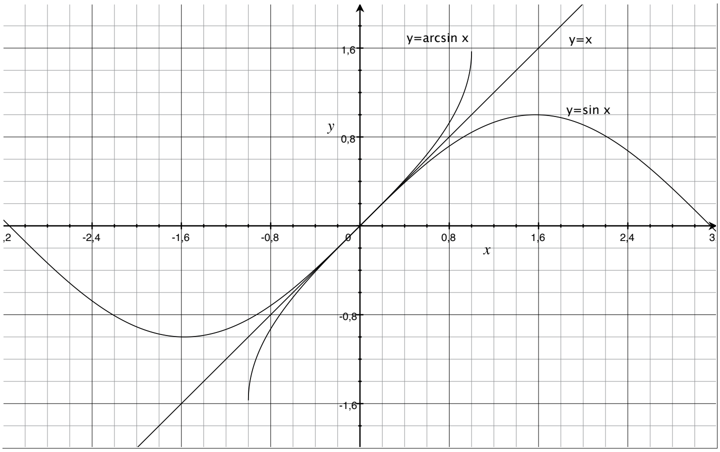

Abbildung 7.1.5. Der arcsin als Umkehrfunktion des Sinus

7.1.4 Weitere Beispiele

Beispiel 7.1.9: Die „Hutfunktion“

Die „Hutfunktion“ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$f(x) := \begin{cases} x & ; 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 - x & ; \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} .$$

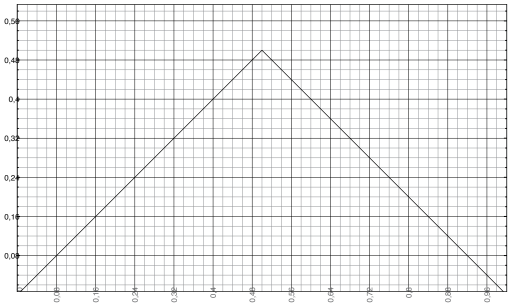

Abbildung 7.1.6. Die Hutfunktion

Beispiel 7.1.10

Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \ ; \ x < 0 \\ 0 \ ; \ x = 0 \\ \frac{\pi}{2} \ ; \ x > 0 \end{cases}$$

erhält man als Grenzfunktion des arctan:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \arctan(nx)$$

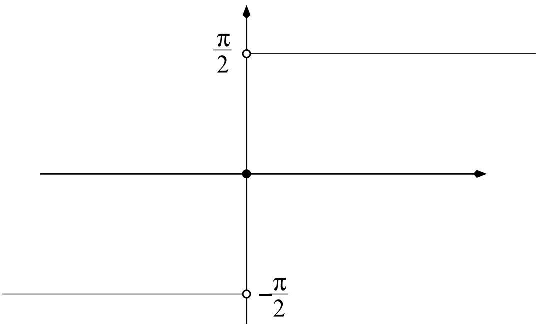

Abbildung 7.1.7. Die Grenzfunktion des arctan

Beispiel 7.1.11: Die Dirichlet-Funktion

Die Dirichlet-Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 \ ; \ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 \ ; \ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

lässt sich nicht mehr zeichnen!

Beispiel 7.1.12: Die Thomae-Funktion

Die Thomae-Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} \ ; \ x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 \ ; \ x \in \{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\} \cap [0,1] \\ 1 \ ; \ x = 0 \end{cases}$$

ist eine Variation der Dirichlet-Funktion.

Beispiel 7.1.13

Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ist sicher beschränkt, denn $|f(x)| \leq 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$, zeigt aber ein Verdichtungsphänomen am Nullpunkt.

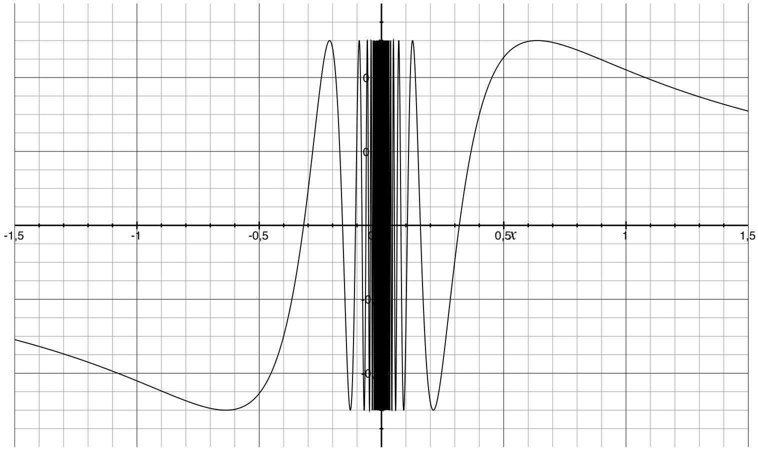

Abbildung 7.1.8. Graph der Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ um $x = 0$

Beispiel 7.1.14

Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

zeigt ebenfalls ein Verdichtungsphänomen am Ursprung, wird dort aber immer kleiner.

Beispiel 7.1.15: Das Riemann'sche Schreckgespenst

Das Riemann'sche Schreckgespenst ist definiert als

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

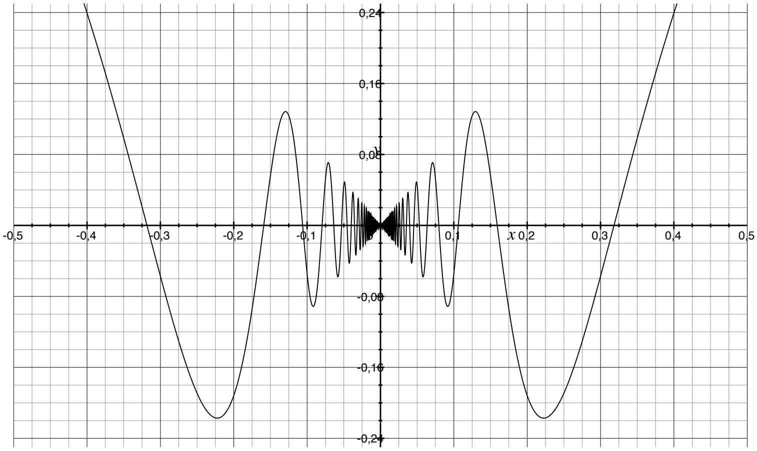

Abbildung 7.1.9. Graph der Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ um $x = 0$

7.2 Stetige Funktionen

In der Analysis spielen solche Funktionen eine ausgezeichnete Rolle, die keine „Sprünge" machen oder deren Graph keine „Löcher" hat.

Definition 7.2.1: Stetigkeit (ε-δ-Formulierung)

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in A$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt **stetig in** x_0, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A : \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (7.10)$$

gilt. Eine Funktion f heißt **stetig (auf** A**)**, wenn f in allen Punkten $x_0 \in A$ stetig ist.

Damit ihr euch an den neuen Begriff gewöhnt, folgt erst einmal ein einfaches Beispiel. Im Fall der Stetigkeit müssen wir zu jedem vorgegebenen ε ein δ finden können, so dass die Bedingung in unserer Definition erfüllt ist.

Beispiel 7.2.2

Wir wollen die Stetigkeit der Funktion $f(x) := 5x+13$ im Punkt $x_0 = 2$ untersuchen. Dazu rechnen wir wie folgt:

$$|f(x) - f(x_0)| = |5x + 13 - 23| = |5x - 10| = 5|x - 2| = 5|x - x_0|.$$

Jetzt sehen wir sofort: Ist $|x - x_0| < \varepsilon/5$, dann ist $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Wir haben also gezeigt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta := \frac{\varepsilon}{5} \ \forall x \in \mathbb{R}: \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Was passiert im Fall der Stetigkeit? Schauen wir uns Abbildung 7.2.1 an, in der wir eine stetige Funktion f dargestellt haben. Am zu untersuchenden Punkt x_0 nimmt f den Funktionswert $f(x_0)$ an. Nun legen wir einen 2ε-Streifen um $f(x_0)$. Dieser Streifen schneidet den Graphen von f in zwei Punkten, zu denen die Punkte a und b gehören. Der Abstand von x_0 zu b ist größer als der von x_0 zu a, also finden wir unser δ im kleineren Abstand. „Wackeln" wir jetzt im 2δ-Streifen um x_0, dann bleiben die Funktionswerte um $f(x_0)$ im 2ε-Streifen. Damit ist f im Punkt x_0 stetig!

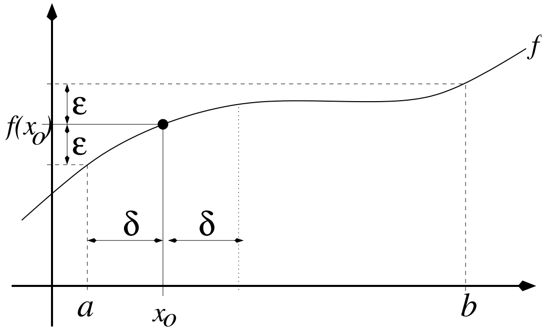

Abbildung 7.2.1. Eine in x_0 stetige Funktion

Betrachten wir nun eine Funktion f mit einem Sprung wie in Abbildung 7.2.2. Ein ausgefüllter Kreis soll andeuten, dass f dort einen Wert annimmt. Entsprechend bedeutet ein leerer Kreis, dass die Funktion diesen Wert nicht annimmt. Legen wir wieder einen 2ε-Streifen um $f(x_0)$, dann fällt auf, dass wir zwar zur Rechten von x_0 ein Intervall erhalten, so dass $f(x)$ für alle x in diesem Intervall in einer ε-Umgebung von $f(x_0)$ bleibt, allerdings finden wir ein solches Intervall zur Linken von x_0 nicht! Damit ist die Funktion in x_0 unstetig.

Auch wenn die Funktion ein „Loch" bei x_0 hat, können wir dort keine Stetigkeit erwarten, wie in Abbildung 7.2.3 gezeigt ist.

Die sogenannte ε-δ-Formulierung aus Definition 7.2.1 lässt sich auch äquivalent – und sehr elegant – als ein Folgenkriterium definieren.

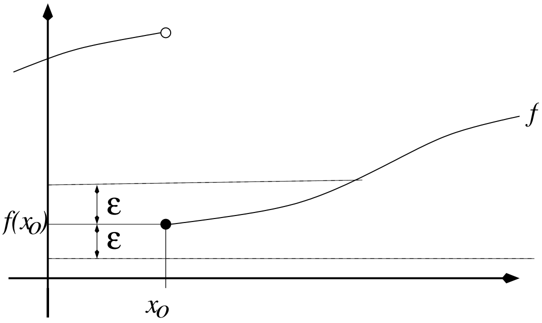

Abbildung 7.2.2. Eine in x_0 unstetige Funktion

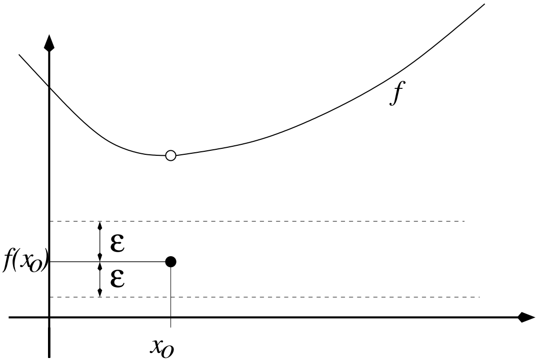

Abbildung 7.2.3. Eine in x_0 unstetige Funktion

Satz 7.2.3: Das Folgenkriterium

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in A$ genau dann, wenn

$$\begin{gathered}\forall (x_n)_{n\geq 1} \subset A \text{ mit } x_n \neq x_0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 : \\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\end{gathered} \tag{7.11}$$

gilt.

Beweis. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$\Longrightarrow$: Da f in x_0 stetig ist, wählen wir für $\varepsilon > 0$ nach Definition 7.2.1 ein $\delta > 0$. Weil $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$, gibt es einen Index n_0, so dass $\forall n \geq n_0$: $|x_n - x_0| < \delta$ gilt. Wegen der Stetigkeit in x_0 folgt dann $\forall n \geq n_0$: $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Damit haben wir

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

$\Longleftarrow$: Wir nehmen an, dass zwar $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt, aber dass f in x_0 unstetig ist. Die Negation von (7.10) ist

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in A : \quad |x - x_0| < \delta \quad \wedge \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Nun wähle $\delta = 1/n$ und weise x jeweils einen Index $n = n(\delta)$ zu. Damit erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ mit $x_n \neq x_0$ und $|x_n - x_0| < 1/n$, also $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$, aber gleichzeitig gilt $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, und das ist ein Widerspruch zu (7.11). □

Stetigkeit ist eine Eigenschaft, die wir nach (7.11) auch dadurch charakterisieren können, dass im Fall von stetigen Funktionen der Grenzwert in das Argument hineingezogen werden darf, dass also $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ gilt.

Beispiel 7.2.4

Wir untersuchen die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

auf Stetigkeit.

1. Machen wir dies über die ε-δ-Formulierung, so geht das wie folgt: Sei ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Weiter sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|x_0 - x| < \delta$. Zunächst einmal bemerken wir, dass
$$|x_0| = |x_0 - x + x| < \delta + |x| \iff |x| > |x_0| - \delta$$
gilt. Für $\delta < \frac{|x_0|}{2}$ folgt damit $|x| > \frac{|x_0|}{2}$ und
$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0|} < \frac{2|x_0 - x|}{|x_0|^2} < \frac{2\delta}{|x_0|^2} \overset{!}{<} \varepsilon$$
$$\iff \delta < \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2}.$$
Wählen wir
$$\delta < \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2}\right\},$$
so gilt schließlich $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ und damit Stetigkeit.
2. Nun zum Folgenkriterium: Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$ eine Folge mit $x_n \to x$. Mit Satz 5.3.1 folgt
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{x} = f(x)$$
und damit Stetigkeit.

Weiterhin respektieren die algebraischen Operationen die Stetigkeit im Sinne des folgenden Satzes.

Satz 7.2.5

Sind $f, g : A \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in A$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch die Funktionen

$$f+g, \quad \lambda f, \quad f \cdot g, \quad f \circ g, \quad \frac{f}{g} \quad (\text{für } g(x_0) \neq 0)$$

stetig in x_0.

Beweis. Betrachte Folge $(x_n)_{n \geq 1} \subset A$ mit $x_n \neq x_0$ und $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Sind f und g stetig in x_0, dann gelten $f(x_n) \to f(x_0)$ und $g(x_n) \to g(x_0)$ für $n \to \infty$. Nach Satz 5.3.1 folgt dann

$$f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0), \quad n \to \infty$$

und damit ist $f + g$ stetig in x_0.

Die weiteren Aussagen zeigt man ganz analog. □

Damit können wir ganze Klassen von Funktionen als stetig erkennen.

Beispiel 7.2.6: Polynome und rationale Funktionen

Die Funktionen $f(x) := a = \text{const.}$ und $g(x) := x$ sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Nach Satz 7.2.5 sind damit alle Polynome stetig sowie rationale Funktionen

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

in allen $x_0 \in \mathbb{R}$, für die $Q(x_0) \neq 0$ gilt.

Für stetige Funktionen gelten starke Sätze, die wir nun beweisen wollen.

Satz 7.2.7: Der Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$. Gelten $f(a) < c$ und $f(b) > c$, dann existiert eine Zahl $\xi \in \,]a, b[$ mit $f(\xi) = c$.

Beweis. Wir beweisen den Satz für $c = 0$. Für den allgemeinen Fall betrachte man $f(x) - c$ anstelle von $f(x)$.

Die Menge $X := \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$ ist nichtleer, denn $a \in X$, und nach oben durch b beschränkt. Daher existiert $\xi = \sup X$. Wir zeigen: $f(\xi) = 0$.

Nimm an, $f(\xi) = K > 0$. Setze $\varepsilon := K/2 > 0$. Wegen der Stetigkeit von f in ξ existiert $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - K| < \frac{K}{2} \quad \text{für} \quad |x - \xi| < \delta.$$

Damit ist $f(x) > K/2 > 0$ für $\xi - \delta < x \leq \xi$, was ein Widerspruch zur Supremumseigenschaft von ξ ist.

Ebenso führt man die Annahme $f(\xi) = K < 0$ zum Widerspruch. □

Beispiel 7.2.8: Nullstellen und andere Lösungen

Insbesondere können wir den Zwischenwertsatz dazu nutzen, um Funktionen auf Nullstellen, gemeinsame Schnittpunkte und Gleichungen auf Lösungen zu untersuchen. Als Beispiel zeigen wir nun mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Gleichung

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = -\frac{x^6 + 1}{x - 3} \tag{7.12}$$

im Intervall $(-1, 3)$ mindestens eine Lösung besitzt. Dazu schreiben wir Gleichung (7.12) als

$$\begin{aligned} (x - 3)(x^2 + 1) &\overset{!}{=} -(x + 1)(x^6 + 1) \\ \Longleftrightarrow f(x) := (x - 3)(x^2 + 1) + (x + 1)(x^6 + 1) &\overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Gesucht ist also eine Nullstelle der stetigen Funktion f. Einfaches Einsetzen liefert $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 190 > 0$. Der Zwischenwertsatz garantiert nun sofort, dass es ein $\xi \in \,]0, 2[$ gibt, so dass $f(\xi) = 0$ gilt.

Satz 7.2.9: Der Satz vom Minimum und Maximum

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auf $[a, b]$ beschränkt und nimmt dort ihr Minimum und ihr Maximum an, d. h. $\exists u, U \in [a, b]$ mit

$$\forall x \in [a, b] : \quad f(u) \leq f(x) \leq f(U).$$

Beweis. Wir gehen in drei Schritten vor:

(a) Wir zeigen: f ist auf $[a, b]$ beschränkt.

Nimm an, f sei unbeschränkt, d. h.

$$\forall n \geq 1 \quad \exists x_n \in [a, b] : \quad |f(x_n)| > n. \tag{7.13}$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge, die wir mit $(x'_n)_{n\geq 1}$ bezeichnen. Es sei $\lim_{n\to\infty} x'_n =: \xi$. Da f in ξ stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(\xi),$$

was (7.13) widerspricht.

(b) Wir zeigen die Existenz von $U \in [a,b]$.

Betrachte die Menge

$$Y := \{y \mid y = f(x), a \leq x \leq b\}.$$

Diese Menge ist nicht leer und beschränkt, also existiert $M := \sup Y$. Da M ein Supremum ist, ist $M - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ keine obere Schranke von Y. Setze $\varepsilon := 1/n$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset [a,b]$ mit

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M. \tag{7.14}$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge (x'_n) und der Grenzwert sei

$$U := \lim_{n\to\infty} x'_n.$$

Weil f stetig in U ist, folgt aus (7.14): $f(U) = M$.

(c) Die Existenz von u folgt analog zu Schritt (b).

□

Beispiel 7.2.10

Hier folgt ein kleines Beispiel, mit dem wir zeigen wollen, dass beim Satz vom Minimum und Maximum weder auf die Stetigkeit der Funktion f noch auf ein beschränktes Intervall $[a,b]$ verzichtet werden kann.

1. Wir betrachten die (in $x_0 = 0$) unstetige Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

auf dem beschränkten Intervall $[0,1]$. Offensichtlich nimmt die Funktion f auf $[0,1]$ nicht ihr Maximum an: Angenommen es gäbe ein $u \in \,]0,1]$ ($u = 0$ kommt schon mal nicht infrage), so dass $f(u) \geq f(x)\ \forall x \in [0,1]$, dann finden wir bereits mit $\frac{u}{2}$ einen größeren Wert, denn

$$f\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{2}{u} > \frac{1}{u} = f(u).$$

Widerspruch!

2. Als Nächstes betrachten wir die stetige Funktion
$$f :]0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$
auf dem beschränkten, aber nicht abgeschlossenen Intervall $]0,1]$. Das gleiche Argument wie zuvor zeigt, dass die Funktion kein Maximum annimmt!
3. Schließlich betrachten wir die stetige Funktion
$$f :]-\infty,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$$
auf dem abgeschlossenen, aber unbeschränkten Intervall $]-\infty,\infty[$. Ganz offensichtlich nimmt die Funktion weder ein Minimum noch ein Maximum an.

Wir sehen: Auf keine der Voraussetzungen im Satz vom Minimum und Maximum kann verzichtet werden!

Definition 7.2.11: Monotonie

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- **streng monoton wachsend**, wenn
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2),$$
- **streng monoton fallend**, wenn
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$
- **monoton wachsend**, wenn
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2).$$
- **monoton fallend**, wenn
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \ge f(x_2).$$

Streng monoton wachsende oder streng monoton fallende Funktionen heißen **streng monoton**, monoton wachsende oder monoton fallende Funktionen heißen **monoton**.

Beispiel 7.2.12

Wir betrachten wieder die Funktionen

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3, \quad f_4(x) = 1 + x.$$

1. Die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist sowohl monoton fallend als auch monoton wachsend, jedoch weder streng monoton fallend noch streng monoton wachsend.
2. Die Funktion $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist weder (streng) monoton fallend noch wachsend. Wenn wir den Definitionsbereich einschränken, sieht das aber schon anders aus: Die Funktion $f_2 :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend und die Funktion $f_2 : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
3. Die Funktion $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
4. Die Funktion f_4 ist streng monoton wachsend.

Streng monotone Funktionen sind offenbar injektiv. Für stetige Funktionen gilt sogar die Umkehrung!

Lemma 7.2.13

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, dann ist f streng monoton.

Beweis. Für irgendwelche drei Punkte $u < v < w$ in $[a, b]$ liegt $f(v)$ zwischen $f(u)$ und $f(w)$, denn wäre das nicht der Fall, läge also $f(v)$ außerhalb des Intervalls $]f(u), f(w)[$ und z. B. näher an $f(u)$, dann existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in]v, w[$ mit $f(u) = f(\xi)$, und das wäre ein Widerspruch zur Injektivität von f, vgl. Abbildung 7.2.4.

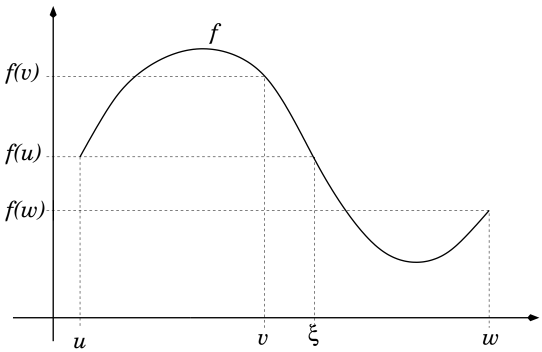

Abbildung 7.2.4. Widerspruch zur Injektivität

Daher gibt es für $a < c < d < b$ nur die beiden Möglichkeiten

$$f(a) < f(c) < f(d) < f(b) \quad \text{und} \quad f(a) > f(c) > f(d) > f(b),$$

denn in allen anderen Möglichkeiten kann $f(v)$ nicht zwischen $f(u)$ und $f(w)$ liegen. □

Satz 7.2.14

Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ stetig und bijektiv. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ stetig.

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [c, d]$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Wir zeigen nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$$

gilt. Stetigkeit von f^{-1} folgt dann aus dem Folgenkriterium (Satz 7.2.3). Dazu betrachten wir die Folge

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad x_n = f^{-1}(y_n).$$

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 5.8.8) eine konvergente Teilfolge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert x. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x'_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} y'_n = y$$

und damit $x = f^{-1}(y)$. Wir sehen: Jede konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f^{-1}(y)$! Damit ist $x = f^{-1}(y)$ der einzige Häufungspunkt der beschränkten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Satz 5.8.15 konvergiert dann aber bereits die ganze Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x = f^{-1}(y)$ und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x = f^{-1}(y)$$

und damit die Behauptung. □

Beispiel 7.2.15: Die Wurzelfunktion

Wir wissen bereits, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f(x) = x^2$$

als Polynom stetig ist. Gleichzeitig ist f streng monoton wachsend und damit bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

ist durch die Wurzelfunktion gegeben, welche also auch stetig ist.

Um Funktionen an Punkten x_0 untersuchen zu können, in denen sie vielleicht nicht stetig sind, ist das Konstrukt des Grenzwertes einer Funktion unentbehrlich.

Definition 7.2.16: Häufungspunkte

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Der Punkt x_0 heißt **Häufungspunkt der Menge** A, falls gilt:

$$\forall \delta > 0 \; \exists x \in A : \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

Bemerkung 7.2.17: Achtung!

Wir haben bereits Häufungspunkte von Folgen kennengelernt. Macht euch klar, dass Häufungspunkte von Folgen und Häufungspunkte von Mengen in der Regel verschiedene Dinge sind, obwohl natürlich auch Folgen als Teilmengen der reellen Zahlen aufgefasst werden können! Bei einer konstanten Folge $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = c = \text{const.}$ ist c sicher Häufungspunkt der Folge, aber nicht Häufungspunkt der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, denn diese Menge ist endlich, weil sie nur genau ein Element enthält.

Beispiele 7.2.18

(a) Für $A = [0,1[\cup \{2\}$ ist die Menge der Häufungspunkte von A durch $[0,1]$ gegeben. $x_0 = 2$ ist hingegen kein Häufungspunkt, da es etwa kein $x \in A$ gibt, so dass $0 < |2-x| < 1$ gilt. Für $x = 2$ ist $|2-x| = 0 \not> 0$ und für $x \in [0,1[$ ist $|2-x| > |2-1| = 1$ und damit $|2-1| \not< 1$.

(b) Für $A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$ ist $x_0 = 0 \notin A$ der einzige Häufungspunkt. Wähle für $\delta > 0$ dazu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ so, dass

$$\frac{1}{n} < \delta \iff n > \frac{1}{\delta}.$$

Dann gilt für $x = \frac{1}{n}$ sowohl $|x - 0| > 0$ als auch $|x - 0| < \delta$.

Definition 7.2.19: Grenzwerte

Es sei x_0 ein Häufungspunkt der Menge $A \subset \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$. Dann hat f einen **Grenzwert** y_0 **bei** x_0, symbolisch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A : \; 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon. \quad (7.15)$$

Diese Definition kann leicht für die Fälle $x_0 = \pm\infty$ oder $y_0 = \pm\infty$ modifiziert werden.

Beispiel 7.2.20

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

aus Abbildung 7.1.8 im Punkt $x_0 = 0$. Dann hat f den Grenzwert $y_0 = 0$ bei $x_0 = 0$. Um das einzusehen, sei $\varepsilon > 0$. Wählen wir $\delta \leq \varepsilon$, so gilt für $0 < |x| < \delta$ die Abschätzung

$$|f(x) - y_0| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| < \delta \leq \varepsilon.$$

Wenn x_0 ein Häufungspunkt der Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist, dann ist

$$\{x \in A \mid 0 < |x - x_0| < \delta\} \neq \emptyset.$$

Damit können wir nun noch eine Charakterisierung der Stetigkeit geben.

Lemma 7.2.21: (zu Satz 7.2.3)

Ist x_0 ein Häufungspunkt von $A \subset \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$, dann ist f in x_0 stetig, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existiert und } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \quad (7.16)$$

Man sagt auch: Der Grenzwert muss existieren und gleich dem Funktionswert sein.

Häufig muss man Funktionen an den Rändern eines Intervalls untersuchen. Dann kann der Grenzwert einer Funktion nur von einer Seite untersucht werden.

Definition 7.2.22: Der einseitige Grenzwert

Der **linksseitige (rechtsseitige) Grenzwert** von f bei x_0 existiert, falls (7.15) unter der Einschränkung $x < x_0$ ($x > x_0$) gilt. Man schreibt

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad \left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) \right).$$

Beispiel 7.2.23

Für die Sprungfunktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x > 0 \end{cases}$$

ist $f(0) = 0$. Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwerte von f bei $x_0 = 0$ sind jedoch durch

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

gegeben, denn für $\varepsilon > 0$ gilt für beliebiges $\delta > 0$

$$\begin{aligned} 0 < |x| < \delta \text{ und } x < 0 \implies & \left| f(x) - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right| = 0 < \varepsilon, \\ 0 < |x| < \delta \text{ und } x > 0 \implies & \left| f(x) - \frac{\pi}{2} \right| = 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Nun überlegt man sich leicht:

Lemma 7.2.24

Der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

existiert genau dann, wenn die einseitigen Grenzwerte existieren und ihr gemeinsamer Wert y_0 ist, also wenn

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = y_0.$$

Satz 7.2.25: (Dedekind)

Der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in A : \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta \\ 0 < |x' - x_0| < \delta \end{cases} \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{7.17}$$

Beweis. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$\Longrightarrow$: Wenn der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ existiert, dann gilt nach Definition

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A : &\quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x' \in A : &\quad 0 < |x' - x_0| < \delta \implies |f(x') - y_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - y_0| + |y_0 - f(x')| < 2\varepsilon.$$

$\Longleftarrow$: Wähle eine Folge $(x_i)_{i \geq 1} \subset A$ mit $x_i \to x_0$ für $i \to \infty$. Wegen (7.17) ist die Folge $(y_i)_{i \geq 1}$ mit $y_i = f(x_i)$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent. Der Grenzwert sei y_0. Für ein x mit $0 < |x - x_0| < \delta$ folgt damit nach (7.17) für hinreichend große i:

$$|f(x) - f(y_0)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - y_0| < 2\varepsilon$$

$\square$

Beispiel 7.2.26

Wir nutzen Satz 7.2.25, um zu zeigen, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

keinen Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$ in $x_0 = 0$ besitzt. Dazu wählen wir $\epsilon = 1$. Für jedes beliebige $\delta > 0$ gibt es nun ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} < \delta$. Wählen wir $x = \frac{1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ und $x' = -\frac{1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$, so gilt

$$0 < |x - 0| < \delta \quad \text{und} \quad 0 < |x' - 0| < \delta,$$

aber gleichzeitig ist

$$|f(x) - f(x')| = \left|\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) - \sin\left(-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\right|$$
$$= |1-(-1)| = 2 > \varepsilon.$$

Wir haben nun genug Werkzeuge beisammen, um unseren Funktionenzoo aus Abschnitt 7.1.4 zu untersuchen. Vorher wollen wir aber noch die möglichen Unstetigkeiten charakterisieren.

Definition 7.2.27: Arten von Unstetigkeiten

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in A$ eine

(a) **hebbare Unstetigkeit** (Unstetigkeitsstelle 0-ter Art), falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

existiert, aber $y_0 \neq f(x_0)$ gilt.

(b) **Sprungunstetigkeit** (Unstetigkeitsstelle 1-ter Art), falls die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

existieren, aber verschieden sind.

(c) **wesentliche Unstetigkeit** (Unstetigkeitsstelle 2-ter Art), falls einer der beiden einseitigen Grenzwerte nicht existiert.

Nun aber zur Diskussion unserer Beispiele aus Abschnitt 7.1.4.

Beispiel 7.2.28

Die Hutfunktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & ; \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & ; \ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

ist stetig in $x_0 = 1/2$, denn es gilt

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} x = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

und

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (1-x) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Für $x_0 < \frac{1}{2}$ sowie $x_0 > \frac{1}{2}$ ist die Hutfunktion zudem als Polynom definiert und damit auch dort stetig.

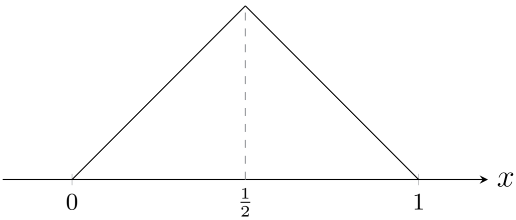

Abbildung 7.2.5. Die Hutfunktion

Beispiel 7.2.29

Die Grenzfunktion der *arctan*-Funktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & ; \; x < 0 \\ 0 & ; \; x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \; x > 0 \end{cases}$$

hat eine Sprungunstetigkeit in $x_0 = 0$, denn

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

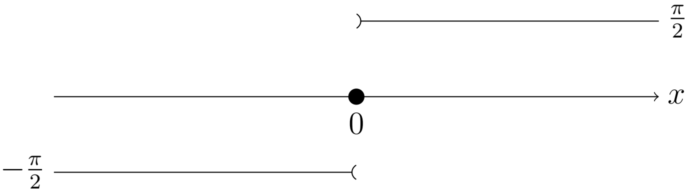

Abbildung 7.2.6. Die Grenzfunktion der *arctan*-Funktion

Beispiel 7.2.30: Die Dirichlet-Funktion

Die Dirichlet-Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & ;\ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

ist nirgendwo stetig! Das kann man sich so erklären: Die Verneinung der Stetigkeit in irgendeinem Punkt x_0 aus $[0,1]$ lautet

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in [0,1] : \quad |x - x_0| < \delta \quad \wedge \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Wähle $\varepsilon = 1/2$ und $\delta > 0$ sei beliebig. Wähle zudem

$$x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

für den Fall $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann folgt

$$|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Für $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ wähle

$$x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap \mathbb{Q}.$$

Dann folgt

$$|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Damit ist die Dirichlet-Funktion der schlimmste Fall, der auftreten kann!

Beispiel 7.2.31: Die Thomae-Funktion

Die Thomae-Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & ;\ x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & ;\ x \in \{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\} \cap [0,1] \\ 1 & ;\ x = 0 \end{cases}$$

ist unstetig in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{Q}$ und stetig in allen $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$! Das kann man sich so erklären:
Sei $x_0 = p_0/q_0$ rational mit p_0, q_0 teilerfremd; dann ist $f(x_0) = 1/q_0$. Sei $0 < \varepsilon < 1/q_0$. In jeder Umgebung von x_0 liegen immer noch unendlich viele irrationale Zahlen, d. h., auf keiner noch so kleinen δ-Umgebung um x_0 ist

$$|f(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

erfüllbar und damit ist f unstetig in x_0.
Sei jetzt x_0 irrational, d. h., es gilt $f(x_0) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$, dann müssen wir die Existenz eines $\delta > 0$ nachweisen, so dass

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Für $\delta > 0$ sei

$$M_\delta := \{x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, : |f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Ein $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ kann nicht Element der Menge M_δ sein, denn sonst wäre $f(x) = 0$. Eine rationale Zahl $x = p/q$ kann nur dann zu M_δ gehören, wenn $|f(x)| = |1/q| \geq \varepsilon$ ist. Also muss $|q| \leq 1/\varepsilon$ gelten, und damit kann es in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ nur endlich viele rationale x mit $|q| \leq 1/\varepsilon$ geben. Wähle ein neues $\delta' > 0$ so klein, dass

$$]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[\, \cap M_\delta = \emptyset$$

gilt. Das heißt aber, dass aus $|x - x_0| < \delta'$ immer $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ folgt, und damit ist f stetig in x_0.
Jetzt liegt die Frage nach einer Funktion, die unstetig in allen irrationalen Punkten, aber stetig in allen rationalen Punkten ist, auf der Hand. Man kann zeigen, dass es eine solche Funktion nicht geben kann!

Beispiel 7.2.32

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}.$$

In jedem Intervall $]-\delta, \delta[$ mit $\delta > 0$, liegen unendlich viele Maxima und Minima von f, denn f hat Maxima in allen Punkten

$$x_k = \frac{2}{\pi + 4k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

und Minima in allen Punkten

$$x_k = \frac{2}{-\pi + 4k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In jedem Maximum ist $f(x) = 1$, in jedem Minimum $f(x) = -1$. Daher existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert im Punkt $x_0 = 0$ nicht. Damit hat f in $x_0 = 0$ eine wesentliche Unstetigkeit.

Beispiel 7.2.33

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \; x \neq 0 \\ 0 & ; \; x = 0 \end{cases}$$

ist stetig in $x_0 = 0$. Es gilt nämlich

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = |x| \cdot \underbrace{\left|\sin \frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} \leq |x|,$$

und wenn man zu $\varepsilon > 0$ jetzt $\delta := \varepsilon$ wählt, folgt

$$|x - 0| = |x| < \delta = \varepsilon \implies |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Das Riemann'sche Schreckgespenst werden wir später behandeln.

Zusammenfassung

In diesem Kapitel habt ihr eines der wichtigsten Konzepte überhaupt kennengelernt, die Stetigkeit von Funktionen! Damit meinen wir im wesentlichen Funktionen, die keine "Sprünge" machen. Etwas konkreter wurde dies durch die sogenannte ε-δ-Formulierung der Stetigkeit einer Funktion f im Punkt x_0:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \;\forall x \in A : \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Man kann also Änderungen der Funktionswerte nach Belieben beschränken, indem man sich auf hinreichend kleine Änderungen im Argument beschränkt. Dabei solltet ihr stets Abbildung 7.2.1 vor Augen haben! Leider erweist sich die ε-δ-Formulierung der Stetigkeit nicht immer als praktisch. Häufig etwas angenehmer ist hier das sogenannte Folgenkriterium, welches Stetigkeit dadurch charakterisiert, dass im Fall von stetigen Funktionen der Grenzwert in das Argument hineingezogen werden darf:

$$\forall (x_n)_{n \geq 1} \subset A, x_n \neq x_0 \text{ mit } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 : \; \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Mithilfe des Konzepts der (einseitigen) Grenzwerte von Funktionen waren wir schließlich noch in der Lage, verschiedene Arten von Unstetigkeiten zu charakterisieren. Dieses Konzept solltet ihr unbedingt verinnerlichen, es wird der Schlüssel zur Differentialrechnung sein! Die Differentialrechnung ist ohne Stetigkeit ohnehin undenkbar, und auch im Zuge der Integralrechnung wird die Stetigkeit immer wieder auftauchen.

Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Wie lautet die ε-δ-Formulierung der Stetigkeit?*
- *Wie lässt sich die ε-δ-Formulierung veranschaulichen?*
- *Wie lautet das Folgenkriterium für Stetigkeit?*
- *Was sind die Vor- und Nachteile der beiden Charakterisierungen?*
- *Welche wichtigen Sätze gelten für stetige Funktionen?*
- *Was ist der Grenzwert einer Funktion?*
- *Welche Arten von Unstetigkeiten gibt es?*

Zum Einüben der Begriffe dieses Kapitels solltet ihr euch mal einige der folgenden Aufgaben zur Brust nehmen.

7.3 Aufgaben

A.7.1 Man beweise mithilfe der ε-δ-Formulierung, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

stetig ist.

A.7.2 Man beweise mithilfe des Folgenkriteriums, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

unstetig ist.

A.7.3 Man untersuche die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

sowohl mithilfe der ε-δ-Formulierung als auch mithilfe des Folgenkriteriums auf Stetigkeit im Punkt $x_0 = -1$.

A.7.4 Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) := x \cdot h(x)$. Man zeige, dass die Funktion u im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

A.7.5 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$f\left(x^2\right) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Man zeige, dass f konstant ist.

A.7.6 Man untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & ; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

auf Stetigkeit und bestimme ggf. die Art der Unstetigkeiten.

A.7.7 Man untersuche die Funktion

$$f : [-3, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + 2 \,; & -3 \leq x < -2 \\ -x - 2 \,; & -2 \leq x < 0 \\ x + 1 \,; & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

auf Stetigkeit und bestimme ggf. die Art der Unstetigkeiten.

A.7.8 Man gebe ein Beispiel für eine Funktion, die überall unstetig ist, deren Betrag aber überall stetig ist.

A.7.9 Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ eine stetige Funktion. Man zeige, dass es dann mindestens ein $x \in [0, 1]$ gibt, so dass $f(x) = x$.

A.7.10 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, wenn

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D$$

gilt. Man beweise, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist. Gilt auch die Umkehrung?

A.7.11 Vorgelegt seien zwei Funktionen $f, g : A \to \mathbb{R}$ auf $A \subset \mathbb{R}$. Des Weiteren sei $x_0 \in A$ ein Häufungspunkt und f, g haben bei x_0 die Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = z_0$. Man zeige, dass dann folgende Aussagen gelten:

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = y_0 + z_0$ (b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = y_0 \cdot z_0$

(c) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{y_0}{z_0}$ für $z_0 \neq 0$

A.7.12 Man gebe ein Beispiel für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = z_0,$$

so dass $f \circ g$ stetig ist, aber

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) \neq y_0.$$

A.7.13 Man berechne ggf. folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 3}{5x + 1}$ (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 3} - 2x$ (c) $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{-x}$

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x}$ (e) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}$ (f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$

(g) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

A.7.14 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Ist die Funktion f dann automatisch stetig?

A.7.15 Man beweise indirekt, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ streng monoton wachsend ist.

A.7.16 Sei $f : \,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Man beweise, dass dann für jeden Punkt $x \in \,]a,b[$ der links- und der rechtsseitige Grenzwert $f(x^-)$ bzw. $f(x^+)$ existieren und

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f\left(x^-\right) \leq f(x) \leq f\left(x^+\right) = \inf_{x<t<b} f(t)$$

gilt. Man zeige des Weiteren für $a < x < y < b$:

$$f\left(x^+\right) \leq f\left(y^-\right)$$

A.7.17 Man zeige, dass monotone Funktionen weder hebbare Unstetigkeiten noch wesentlichen Unstetigkeiten besitzen.

A.7.18 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Man beweise, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.

A.7.19 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$. Man zeige, dass f sein Maximum annimmt, d. h., es gibt ein $U \in \mathbb{R}$, so dass $f(U) \geq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

A.7.20 Man entscheide, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$f(a) = 0 \quad \text{und} \quad f(x) \neq 4 \quad \forall x \in [a,b].$$

Dann gilt $f(b) < 4$.

A.7.21 Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit

$$f(0) > g(0) \quad \text{und} \quad f(x) \neq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Man beweise, dass dann $f(x) > g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

A.7.22 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Man zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a,b]$.

A.7.23 Gibt es eine stetige Funktion $f[0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f([0,1]) = \mathbb{R}$?

8 Gleichmäßigkeit

Wozu?

Wie in jedem Paradies lauert auch im Paradies der Analysis eine Schlange. Wir sind bisher mit unserem Konvergenzbegriff sehr gut zurechtgekommen, aber jetzt müssen wir lernen, neue Begriffe zu akzeptieren, denn es gibt Probleme. So ist die Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen nicht notwendig eine stetige Funktion, die Grenzfunktion einer Folge integrierbarer Funktionen nicht notwendig integrierbar, und selbst eine Folge differenzierbarer Funktionen kann gegen eine Funktion konvergieren, deren Ableitung nichts mit dem Grenzwert der Ableitungen der Funktionen aus der Folge zu tun hat. Die Rettung wird der Begriff der **gleichmäßigen Konvergenz** sein. Mit diesem Konzept von Konvergenz ist dann etwa tatsächlich sichergestellt, dass die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen auch wieder stetig ist.

Ein weiterer ganz wesentlicher Begriff, den ihr in diesem Kapitel kennenlernen werdet, ist die **gleichmäßige Stetigkeit** von Funktionen. Wir werden diesen Begriff und seinen Zusammenhang zur gewöhnlichen Stetigkeit nur knapp behandeln, unter anderem für die Integration in Kapitel 9 wird er aber noch von Bedeutung sein!

Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- Folgen und Reihen von Funktionen,
- die punktweise Konvergenz,
- die gleichmäßige Konvergenz,
- der Satz von Weierstraß für Funktionenfolgen,
- das Weierstraß'sche Kriterium für Funktionenreihen,
- die gleichmäßige Stetigkeit

und ihr Verständnis.

Um euch den Zugang zu erleichtern und ein Gefühl für die neuen Begriffe zu vermitteln, liefern wir euch auch in diesem Kapitel immer gleich ein paar wichtige Beispiele mit.

8.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Wir haben bereits Folgen und Reihen von (reellen) Zahlen kennengelernt. Ganz analog lassen sich nun auch Folgen und Reihen von Funktionen formulieren.

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_8

Definition 8.1.1: Funktionenfolgen

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine **Folge von Funktionen (Funktionenfolge)** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n,$$

die jedem Index n eine Funktion $f_n : A \to \mathbb{R}$ zuordnet.

Entsprechend definieren wir auch Reihen von Funktionen wieder als den Grenzwert der Funktionenfolge der entsprechenden Partialsummen, d. h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x) \quad \text{mit} \quad s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Aber was meinen wir überhaupt mit dem Grenzwert einer Funktionenfolge? Auch hier können wir zunächst auf den uns bekannten Zahlenfolgen aufbauen und bemerken, dass eine Funktionenfolge für festes x immer eine Zahlenfolge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = f_n(x)$$

liefert. Es liegt also nahe, Konvergenz von Funktionenfolgen so zu verstehen, dass für jedes x die entsprechende Zahlenfolge konvergieren soll. Das führt uns auf unseren ersten Konvergenzbegriff für Folgen und Reihen von Funktionen.

Definition 8.1.2: Die punktweise Konvergenz

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$. Für $x \in A$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Gilt nun

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in A,$$

dann **konvergiert** die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **punktweise** gegen die Grenzfunktion f.

Betrachten wir gleich mal ein paar Beispiele, um zu sehen, was unser Konvergenzbegriff so taugt.

Beispiel 8.1.3: Stetigkeit der Grenzfunktion

Wir betrachten die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := x^n.$$

Jede Funktion f_n der Folge ist auf $[0,1]$ stetig. Die Grenzfunktion ist offenbar

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 \; ; \; x < 1 \\ 1 \; ; \; x = 1 \end{cases},$$

denn wählen wir ein $0 \leq x < 1$, wird stets $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ gelten. Nur der Punkt $x = 1$ bleibt wegen $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$ ein Problem. Die Grenzfunktion ist also bei $x = 1$ nicht stetig.

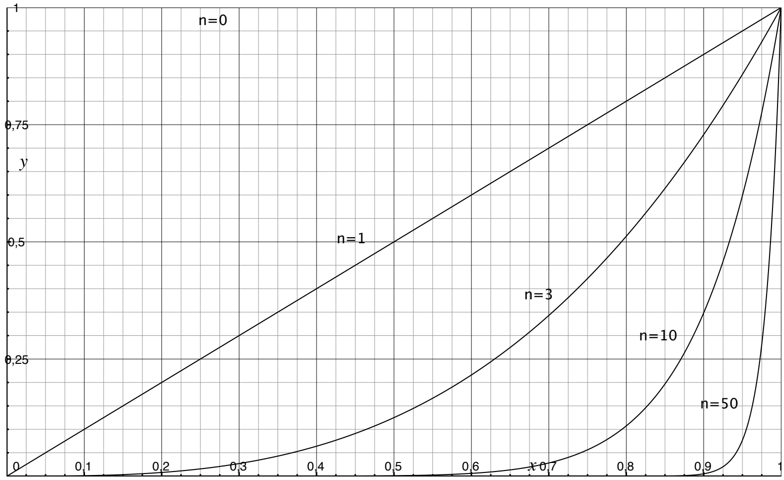

Abbildung 8.1.1. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = x^n$

Beispiel 8.1.4: Differenzierbarkeit der Grenzfunktion

Die Funktionen

$$f_n(x) := \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

sind für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ differenzierbar; ihre Ableitungen sind

$$f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx.$$

Auch wenn wir noch keine Differentialrechnung besprochen haben, appellieren wir hier an eure Schulkenntnisse. Falls diese nicht vorhanden oder verschüttet sind, könnt ihr das Ergebnis vorübergehend auch einfach akzeptieren. Da die Funktion $\sin nx$ für alle n und alle x durch 1 beschränkt ist, ist die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ und sicher gilt $f'(x) = 0$. Der Grenzwert der Ableitungen

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cos nx$$

existiert hingegen an keinem Punkt x!

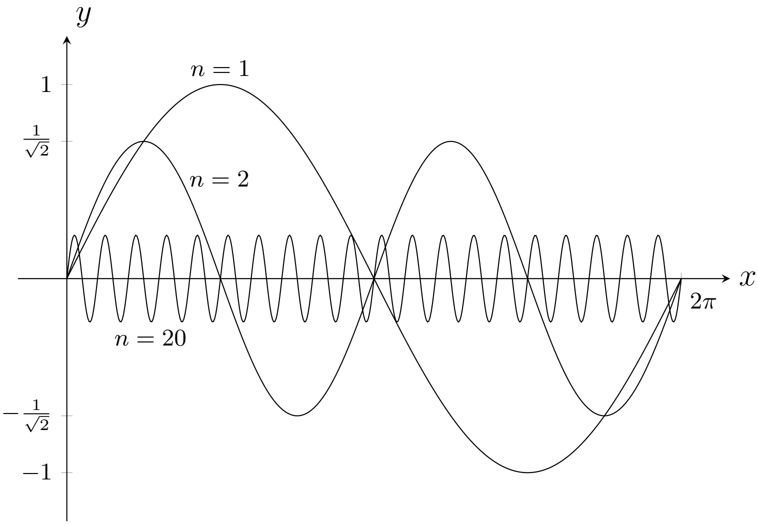

Abbildung 8.1.2. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$

Beispiel 8.1.5: Das Integral der Grenzfunktion

Erinnert euch bitte daran, dass das Integral einer Funktion den Flächeninhalt unter der Funktion wiedergibt. Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, definiert durch die Hutfunktionen

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} 2n^2 x & ;\ 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ -2n(nx-1) & ;\ \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & ;\ \quad x > \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Der Flächeninhalt unter jeder der Hutfunktionen ist $1/2$, unabhängig von n, also

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

was man sofort aus Abbildung 8.1.3 ersehen kann. Die Spitzen der Hutfunktionen wachsen mit wachsendem n; gleichzeitig geht das Intervall, auf dem die Hüte von null verschieden sind, gegen null. Die Grenzfunktion ist also sicher

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Damit gilt auch für den Flächeninhalt der Grenzfunktion

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

aber für den Grenzwert der Flächeninhalte gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq 0.$$

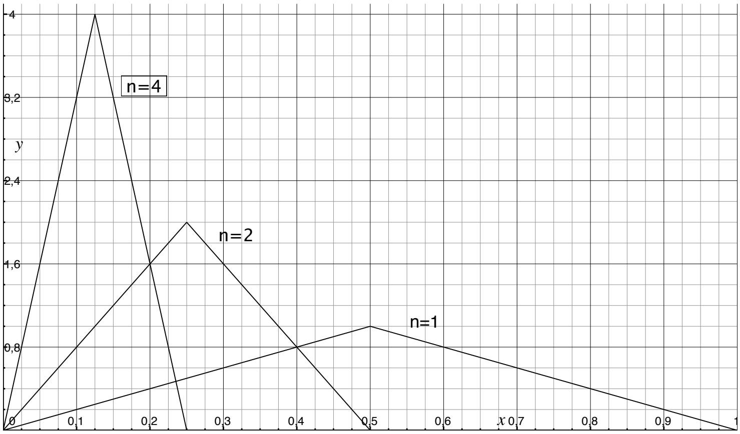

Abbildung 8.1.3. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ der Hutfunktionen

Historische Bemerkung

Die geschilderten Probleme wurden im 19. Jahrhundert nur von einigen wenigen erkannt und es brauchte seine Zeit, bis sich ein neuer Konvergenzbegriff durchsetzte. Die Geschichte der Entdeckung des Begriffs der Gleichmäßigkeit ist von Klaus Viertel [Viertel 2014] im Detail rekonstruiert und dargestellt worden.

Diese drei Beispiele sollen uns genügen. Wir hoffen, ihr seht, dass ein solches Verhalten von Grenzfunktionen unter unserem Begriff der punktweisen

Konvergenz sehr unbefriedigend ist. Würden die Funktionen f_n von einem Index n_0 an innerhalb eines „Schlauches“ um die Grenzfunktion herum bleiben, hätten wir die beschriebenen Probleme nicht. Das bringt uns auf:

Definition 8.1.6: Die gleichmäßige Konvergenz

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen die Grenzfunktion $f : A \to \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \forall x \in A : \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{8.1}$$

gilt.

Bemerkung 8.1.7: Achtung!

Hier sind wir an einer für das Verständnis des analytischen Formalismus wichtigen Stelle angekommen. **Punktweise Konvergenz** bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in A \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

und diese Aussage enthält exakt dieselben Terme wie (8.1), nur in anderer Reihenfolge! Macht euch unbedingt klar, dass es im Fall der punktweisen Konvergenz für jedes $x \in A$ einen Index n_0 gibt (und im Allgemeinen für jedes x ein anderes n_0), während es im Fall der gleichmäßigen Konvergenz *einen* Index n_0 gibt, der *für alle* $x \in A$ gültig ist.

Beispiele 8.1.8: Gleichmäßige Konvergenz

(a) Wir wollen einmal annehmen, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := x^n,$$

gleichmäßig auf $[0,1[$ gegen die Grenzfunktion $f(x) = 0$ konvergiert! Nach Definition 8.1.6 müssen wir damit zu beliebigem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 finden, so dass (8.1) gilt. Fangen wir also an zu rechnen:

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| = x^n,$$

weil $x \geq 0$. Der Fall $x = 0$ ist klar, denn $|f_n(0) - f(0)| = 0$. Um aber $x^n < \varepsilon$ für x nach n aufzulösen, müssen wir logarithmieren:

$$n \log x < \log \varepsilon.$$

Das Ungleichheitszeichen bleibt bestehen, weil log eine monoton wachsende Funktion ist. Nun muss durch $\log x$ dividiert werden, aber für $0 < x < 1$ ist der Logarithmus negativ, woraus

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

folgt. Da auch der Logarithmus von ε für $0 < \varepsilon < 1$ negativ ist, steht auf der rechten Seite eine positive Zahl. Nun sehen wir aber, dass wir nie ein n_0 finden können: Wegen $\log 1 = 0$ können wir bei gegebenem $\varepsilon > 0$ so weit mit x gegen 0 gehen, dass n über alle Grenzen wächst.

(b) Die obige Folge von Funktionen konvergiert allerdings gleichmäßig, sobald wir sie auf ein kleineres Intervall $[0, a]$ mit $a < 1$ einschränken: Sei wieder $\varepsilon > 0$, dann gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq a^n \overset{!}{<} \varepsilon \iff n \overset{!}{>} \frac{\log \varepsilon}{\log a}$$

Wählen wir nun also $n_0 > \frac{\log \varepsilon}{\log a}$, so gilt für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a^n < \varepsilon.$$

Damit konvergiert die Funktionenfolge gleichmäßig.

Natürlich können wir für Definition 8.1.6 wieder das **Cauchy'sche Konvergenzkriterium** verwenden:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 1} \;\; \forall x \in A : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{8.2}$$

Wir sagen auch, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist. Nun können wir die ersten Früchte des neuen Konvergenzbegriffs ernten.

Satz 8.1.9: Satz von Weierstraß

Sind $f_n : A \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen auf A und konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf A gegen eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, dann ist f stetig.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass (8.1) erfüllt ist. Weil f_{n_0} stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt für $|x - x_0| < \delta$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\
&< 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

und damit die Behauptung. □

Man stellt sich hier vielleicht die Frage, ob nicht nur „gleichmäßige Konvergenz stetiger Funktionen → stetige Grenzfunktion" gilt, sondern vielleicht auch die Umkehrung. Das ist nicht der Fall, wie unser folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 8.1.10

Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ von Hutfunktionen

$$
f_n(x) := \begin{cases} nx & ;\ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & ;\ \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & ;\ \quad x > \frac{2}{n} \end{cases} .
$$

Wie man aus Abbildung 8.1.4 erkennen kann, bleiben die Maxima der f_n für alle n bei 1, aber die Intervalle, auf denen die f_n von null verschieden sind, werden immer kleiner. Sicher ist die Konvergenz *nicht* gleichmäßig, aber dennoch ist die Grenzfunktion

$$
f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0
$$

stetig!

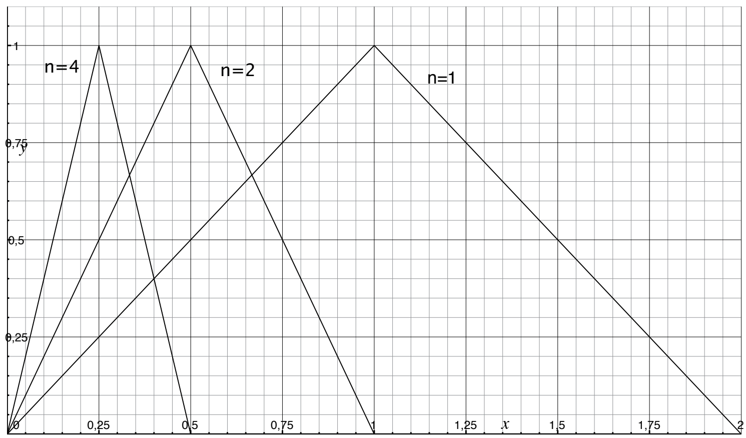

Abbildung 8.1.4. Die Folge der Hutfunktionen

Beispiel 8.1.11

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad x \geq 0,$$

ist ebenfalls nicht gleichmäßig konvergent, vgl. Abbildung 8.1.5. Jedes f_n besitzt bei $x = 1/n$ das Maximum $f_n(1/n) = 1$. Für $x > 0$ gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x}{\frac{1}{n}+nx^2} = 0,$$

und auch bei $x = 0$ sind alle f_n gleich null. Die Grenzfunktion ist also stetig, obwohl die Folge nicht gleichmäßig konvergiert.

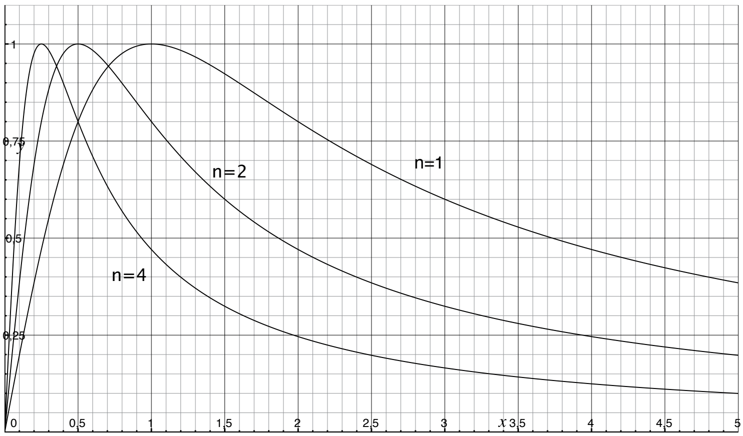

Abbildung 8.1.5. Die Folge der $f_n(x) := \frac{2nx}{1+n^2x^2}$

Wir können nun auch ohne Probleme Reihen von Funktionen analysieren, denn Reihen sind nichts anderes als Folgen ihrer Partialsummen

$$s_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f_i(x) \tag{8.3}$$

mit $f_i : A \to \mathbb{R}$.

Definition 8.1.12: Die gleichmäßige Konvergenz von Reihen

Die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \quad \text{mit} \quad f_i : A \to \mathbb{R}$$

ist **gleichmäßig konvergent** auf A, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (8.3) gleichmäßig auf A konvergiert.

Satz 8.1.13: Weierstraß'sches Kriterium

Sei

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in A$$

und sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig auf A.

Beweis. Offenbar gilt $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt für alle $k \geq 1$ und für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |s_{n+k}(x) - s_n(x)| &= |f_{n+k}(x) + \ldots + f_{n+1}(x)| \\ &\leq |f_{n+k}(x)| + \ldots + |f_{n+1}(x)| \\ &\leq c_{n+k} + \ldots + c_{n+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent ist. Damit ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium gleichmäßig konvergent. □

Beispiele 8.1.14

(a) Wir können jetzt Riemanns Schreckgespenst

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

aus Abschnitt 7.1.4 (g) behandeln. Wegen $|\sin(n^2 x)| \leq 1$ für alle x und alle n ist

$$\left| \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ nach Satz 8.1.13 gleichmäßig konvergent. Die Funktionen

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}$$

sind stetig, so dass nach Satz 8.1.9 auch f stetig ist! Was ist denn dann so schrecklich an Riemanns Schreckgespenst? Man hat lange geglaubt, diese Funktion sei nirgends differenzierbar. Allerdings wurde in jüngerer Zeit gezeigt, dass es vereinzelte Punkte gibt, in denen f doch differenzierbar ist. Vom Standpunkt der Stetigkeit aus ist sie allerdings harmlos.

(b) Die Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, allerdings nicht gleichmäßig. Betrachtet man jedoch $x \in [-a, a]$, $a > 0$, dann gilt

$$\left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{a^k}{k!}$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

ist nach dem Quotientenkriterium konvergent. Damit konvergiert nach Satz 8.1.13 die Reihe für die Exponentialfunktion gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall.

8.2 Gleichmäßige Stetigkeit

Der zweite (und letzte) Gleichmäßigkeitsbegriff betrifft die Stetigkeit. Betrachten wir eine monoton wachsende Funktion wie in Abbildung 8.2.1 (das Phänomen tritt auch bei monoton fallenden Funktionen auf), dann wird das für die Stetigkeit benötigte δ immer kleiner, je größer die Stelle x wird, an der wir die Funktion betrachten.

In einigen der späteren Sätze ist es allerdings notwendig, dass der Abstand beliebiger Paare von Funktionswerten kleiner als ein beliebig vorgegebener Maximalfehler ist, solange auch die Argumente hinreichend nah beieinanderliegen. Dieser Maximalfehler soll sich insbesondere also nicht mit der Lokalität der Argumente ändern. Entscheidend wird dies zum Beispiel sein, um zu zeigen, dass jede stetige Funktion auch integrierbar ist! Diese Forderung führt uns direkt zu folgender Definition:

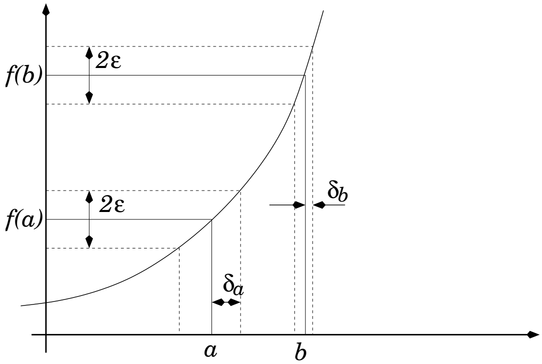

Abbildung 8.2.1. Für dasselbe ε gibt es verschiedene δ.

Definition 8.2.1: Die gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** auf A, wenn

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_0 \in A \;\; \forall x \in A : \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\end{gathered} \tag{8.4}$$

gilt.

Bemerkung 8.2.2: Achtung!

Auch hier weisen wir euch wieder auf den Formalismus hin! Punktweise Stetigkeit bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x_0 \in A \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in A : \;\; |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

und wieder tauchen dieselben Terme auf wie in (8.4), nur in anderer Reihenfolge! Bei punktweiser Stetigkeit gibt es zu jedem x_0 ein $\delta > 0$ (und im Allgemeinen für jedes x_0 ein anderes δ), bei gleichmäßiger Stetigkeit gibt es ein δ für alle x_0! Die gleichmäßige Stetigkeit ist also eine stärkere Form der Stetigkeit.

Satz 8.2.3

Ist $f : \mathbb{R} \supset A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so ist f auch stetig.

Beispiele 8.2.4

(a) Die Wurzelfunktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

ist nicht nur stetig, sondern auch gleichmäßig stetig: Sei $\varepsilon > 0$, so müssen wir nun ein $\delta > 0$ finden (unabhängig von x_0), so dass

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Wir bemerken dazu, dass

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| \leq \sqrt{|x - x_0|}$$

gilt, denn wenn ohne Einschränkung $x \geq x_0$, dann folgt

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right|^2 &= x - 2\sqrt{x x_0} + x_0 \leq x - 2\sqrt{x_0^2} + x_0 \\ &= x - x_0 = |x - x_0| \\ \implies \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| &\leq \sqrt{|x - x_0|}. \end{aligned}$$

Schließlich beobachten wir die Abschätzung

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{|x - x_0|} < \sqrt{\delta}$$

und wählen $\delta < \varepsilon^2$.

(b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

ist zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Dazu machen wir uns klar, dass die Negation der gleichmäßigen Stetigkeit

$$\begin{gathered} \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x_0 \in A \;\; \exists x \in A : \\ |x - x_0| < \delta \;\wedge\; |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \end{gathered}$$

lautet. Und etwa für $\varepsilon = 1$ können wir nun für jedes (noch so kleine) $\delta > 0$ zwei Argumente x, x_0 mit $|x - x_0| < \delta$ finden, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

gilt. Dazu betrachten wir ein beliebiges $\delta > 0$ und wählen $x_0 \geq 0$ sowie $x = x_0 + \delta$, dann ist

$$|f(x) - f(x_0)| = (x_0 + \delta)^2 - x_0^2 = 2\delta x_0 + \delta^2.$$

Wählen wir nun noch $x_0 \geq \frac{1}{\delta}$, so folgt

$$|f(x) - f(x_0)| \geq 2 + \delta^2 \geq 1.$$

Damit kann f nicht gleichmäßig stetig sein!

Wir beenden dieses Kapitel mit einem wichtigen Resultat zur gleichmäßigen Stetigkeit.

Satz 8.2.5

Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sind gleichmäßig stetig, d. h., ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig, dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir nehmen an, f sei *nicht* gleichmäßig stetig, d. h.

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x' \in A \;\; \exists x \in A : \quad |x - x'| < \delta \;\wedge\; |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon.$$

Wähle $\delta = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$, also

$$\begin{aligned} &\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta = \frac{1}{n} > 0 \; \exists x'_n \in A \; \exists x_n \in A : \\ &|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \;\wedge\; |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ziehen wir aus der beschränkten Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ heraus. Sei

$$x := \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$$

und wegen $|x_{n_k} - x'_n| < 1/n_k$ gilt dann auch

$$\lim_{n \to \infty} x'_{n_k} = x.$$

Nun ist f aber stetig und daraus folgt

$$\lim_{j \to \infty} (f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| = f(x) - f(x) = 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Also ist f gleichmäßig stetig. $\square$

Zusammenfassung

Nach Folgen und Reihen von (reellen) Zahlen haben wir in diesem Kapitel auch Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von Funktionen kennengelernt. Das Konzept ist zunächst einmal völlig analog und wird uns in Kapitel 11 dann die Tür zu den Potenzreihen öffnen. Ein besonders wichtiges Beispiel kennt ihr aber natürlich schon, und zwar die Darstellung der Exponentialfunktion als Funktionenreihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

mit $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ beziehungsweise als Grenzwert einer Funktionenfolge $e^x = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ mit $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. In welchem Sinne soll Konvergenz von Funktionen aber verstanden werden? Der kanonische Zugang wäre wohl die punktweise Konvergenz: Wir bemerken, dass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für festes x eine Zahlenfolge bildet, und sagen, dass eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert, wenn $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes x als Zahlenfolge gegen $f(x)$ konvergiert, d. h.

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Leider stellte sich in diesem Kapitel auch heraus, dass sich bei der punktweisen Konvergenz keine der wirklich wichtigen Eigenschaften (etwa Stetigkeit) von den Folgengliedern f_n auf die Grenzfunktion f überträgt. Das ist erst mit dem stärkeren Konvergenzbegriff der gleichmäßigen Konvergenz garantiert. Dabei sagen wir, dass eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in A\ \forall n \geq N : \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

An dieser Stelle lohnt es sich zu bemerken, dass der formale Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz lediglich darin besteht, dass das N bei der punktweisen Konvergenz sowohl von ε als auch x abhängen darf, d. h. $N = N(\varepsilon, x)$, während das N bei der gleichmäßig en Konvergenz unabhängig von der Stelle x sein muss und nur von ε abhängen darf, d. h. $N = N(\varepsilon)$. Die Folgen dieses Unterschieds sind weitreichend und manifestieren sich im Satz von Weierstraß: Sind die Folgenglieder f_n alle stetig und konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, so ist auch die Grenzfunktion f stetig.

Die zweite Säule dieses Kapitels bildete das Konzept der gleichmäßigen Stetigkeit. Der Unterschied zu der uns schon bekannten (gewöhnlichen) Stetigkeit erklärt sich dabei ganz analog zum Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz. Zur Erinnerung: Wir nennen eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, wenn

$$\begin{gathered} \forall x_0 \in A\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in A : \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \end{gathered}$$

und wir nennen sie gleichmäßig stetig, wenn

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x_0, x \in A : \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Wieder ist die Reihenfolge der Quantoren und damit die Abhängigkeit der Schranke, hier δ, entscheidend! Bei der gleichmäßigen Stetigkeit ändert sich der Maximalfehler also nicht mehr mit der Lokalität

der Argumente. Es ist schnell eingesehen, dass nun jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig ist, was die gleichmäßige Stetigkeit zu einem stärkeren Begriff macht. Tatsächlich sind die beiden Begriffe zumindest auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$ aber äquivalent, hier sind stetige Funktionen automatisch auch gleichmäßig stetig. Diese Beobachtung wird es uns im nächsten Kapitel erlauben einzusehen, dass stetige Funktionen immer integrierbar sind.
Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Was bedeutet es, dass eine Folge von Funktionen punktweise konvergiert?*
- *Was bedeutet es, dass eine Folge von Funktionen gleichmäßig konvergiert?*
- *Was ist der Unterschied zwischen den beiden Begriffen?*
- *Welchen Vorteil hat die gleichmäßige Konvergenz?*
- *Wann sind Grenzfunktionen stetig?*
- *Wann sind Reihen von Funktionen stetig?*
- *Was bedeutet es, dass eine Funktion gleichmäßig stetig ist?*
- *Was ist der Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit?*
- *Wie hängen die beiden Begriffe zusammen?*
- *Was ist eine wichtige Anwendung der gleichmäßigen Stetigkeit?*

Zum Einüben der Begriffe dieses Kapitels solltet ihr euch mal an einigen der folgenden Aufgaben versuchen.

8.3 Aufgaben

A.8.1 Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

Man zeige, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ gleichmäßig konvergiert.

A.8.2 Man beweise, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx^n(1 - x)$$

punktweise gegen $f \equiv 0$ konvergiert, jedoch nicht gleichmäßig.

A.8.3 Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge beschränkter Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$, d. h.

$$\forall n \in N \ \exists M_n > 0 \ \forall x \in A : \quad |f_n(x)| \leq M_n.$$

Man beweise, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt ist, d. h.

$$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in A : \quad |f_n(x)| \leq M.$$

A.8.4 Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen auf $A \subset \mathbb{R}$. Man zeige folgende Aussagen:

(a) $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent auf A.

(b) Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zudem beschränkt, dann ist auch die Produktfolge $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent auf A.

A.8.5 Man gebe ein Beispiel an, für zwei gleichmäßig konvergente Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, deren Produktfolge $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

A.8.6 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, die auf $A \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

(a) Man beweise

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

für jede Folge von Argumenten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x \in A$ für $n \to \infty$.

(b) Gilt auch die Umkehrung?

A.8.7 Gegeben sei die Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n .$$

(a) Man zeige, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

(b) Man bestimme den Grenzwert f und untersuche ihn auf Stetigkeit.

(c) Man beweise, dass die Reihe auf $[-1, 1]$ nicht gleichmäßig konvergiert.

A.8.8 Vorgelegt sei die Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}$$

für $x \in [0, \infty[$. Man untersuche,

(a) für welche Werte x die obige Reihe konvergiert.

(b) auf welchen Intervallen die obige Reihe gleichmäßig konvergiert.

(c) ob die obige Reihe überall dort stetig ist, wo sie konvergiert.

(d) ob f beschränkt ist.

A.8.9 Man beweise, dass die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

zwar auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig konvergiert, aber für kein $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

A.8.10 Die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}\sin x$$

ist auf $[0,1]$ stetig und damit auch gleichmäßig stetig. Für $\varepsilon > 0$ bestimme man das entsprechende $\delta > 0$, so dass

$$\forall x_0, x \in [0,1]: \quad |x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt. Wie lautet $\delta > 0$ für $\varepsilon = 0.1$?
Hinweis: Man verwende das Additionstheorem

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

sowie die Abschätzung $|\sin\alpha| \le |\alpha|$.

A.8.11 Seien $f, g : \mathbb{R} \supset A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Man zeige oder widerlege, dass dann auch $f \cdot g$ gleichmäßig stetig ist.

A.8.12 Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn es ein $L > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x, y \in A$$

gilt. Man zeige oder widerlege:

(a) Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

(b) Jede gleichmäßig stetige Funktion ist Lipschitz-stetig.

9 Das Riemann-Integral

Wozu?

Die ursprüngliche Motivation für die Integralrechnung ist die Bestimmung von Flächeninhalten. Ist die Frage im Falle von Rechtecken und Dreiecken (und damit auch insgesamt gradlinig berandeter Flächen) noch elementargeometrisch lösbar, so ist sie im Fall krummlinig berandeter Figuren nicht mehr direkt zugänglich. Dieses Problem hat Mathematiker seit jeher beschäftigt und bereits in der Antike konnte für Spezialfälle eine Lösung gefunden werden. So bewies Archimedes (287–221 v. Chr.), dass die Fläche des Kreises proportional zum Quadrat seines Radius ist, und gab auch eine Methode an, wie man dieses heute als Kreiszahl π bezeichnete Verhältnis mit beliebig hoher Genauigkeit bestimmen kann. Die Idee dabei ist, den Kreis durch Polygone (Vielecke) zu approximieren, deren Flächeninhalt sich dann elementar bestimmen lässt. Mit ähnlichen Überlegungen gelang es Archimedes auch die Fläche unter einem Parabelbogen zu berechnen.
Der Rand einer beliebigen Figur kann mithilfe von Funktionen beschrieben werden und der Ausgangspunkt für den Integralbegriff ist daher das Problem des Inhalts der von einer Funktion und der Abszisse eingeschlossenen Fläche. Allgemeinere Flächen können dann durch Zerlegung, Spiegelung und Differenzenbildung auf diesen Fall zurückgeführt werden. Beispielsweise ist die Einheitskreisfläche das Doppelte der von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf $[-1, 1]$ und Abszisse berandeten Figur. Eine allgemeine Methode zur Berechnung solcher Flächen fehlte lange Zeit und erst Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Isaac Newton (1643–1727) gelangen um 1670 mithilfe der Differentialrechnung (unabhängig voneinander!) der entscheidende Durchbruch. Bevor wir uns aber im nächsten Kapitel ausführlich mit diesem Kalkül befassen werden, wollen wir hier zunächst einmal das Integral einer Funktion sauber definieren.
Die Ideen des Archimedes aufgreifend kann man versuchen, die Fläche unter dem Graphen einer Funktion mit auf der Abszisse stehenden Rechtecken „auszufüllen", sodass die Summe der Rechtecksflächen eine erste Nährung für den Inhalt ist. Für immer feiner werdende Rechtecke führt dies schließlich auf die Definition des **Riemann-Integrals** (nach Bernhard Riemann, 1826–1866). Es sei bemerkt, dass weitere sinnvolle Möglichkeiten zur Definition des Integrals existieren, wie beispielsweise über *Regelfunktionen* oder das *Lebesgue-Integral*. Letzteres ist vor allem in der mehrdimensionalen Integrationstheorie von Vorteil und *der* moderne Integralbegriff in der Mathematik.
Im Falle reellwertiger Funktionen einer Veränderlichen sind die Un-

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_9

terschiede der verschiedenen Definitionen jedoch subtiler Natur und insbesondere für Funktionen mit *abzählbar* vielen Unstetigkeitsstellen stimmen die Integrale alle überein. Wir haben uns für das Riemann-Integral entschieden, da es geometrisch anschaulich ist und die uns bereits bekannten Resultate über Folgen eine vergleichsweise überschaubare formale Herleitung erlauben.
Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- Definition des Riemann-Integrals,
- Integrierbarkeit stetiger Funktionen,
- Mittelwertsatz der Integralrechnung,
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung,
- Integration gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen

und ihr Verständnis.

Historische Bemerkung

Sehr früh erkannten Leibniz und Newton eine Umkehrung der Differentiation, und Leibniz führte schließlich das „Integral" $\int$ ein, das ein langgezogenes S für „Summe" stilisiert. Das Integral war aber nicht nur eine „Anti-Differentiation", sondern man war damit in der Lage, die vorzeichenbehaftete Fläche zwischen einer Funktion und der Abszisse zu berechnen. Aus irgendwelchen Gründen ist der Blick auf das Integral als ein Werkzeug zur Flächenberechnung in der Didaktik in Ungnade gefallen und man spricht lieber von Mittelwerten, aber für uns steht der Flächenaspekt am Beginn unserer Untersuchungen.

Als Generalvoraussetzungen für dieses Kapitel wollen wir verabreden, dass

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

auf $[a,b]$ beschränkt sei, d. h., wir setzen voraus:

$$\exists M \geq 0\colon \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

9.1 Ober- und Untersummen

Beginnen wir mit einer nichtnegativen Funktion $f \geq 0$ auf einem Intervall $[a,b]$. Um den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion und der Abszisse näherungsweise zu berechnen, zerlegen wir das Intervall $[a,b]$ in n Teilintervalle, d. h., wir führen eine **Zerlegung**

$$D := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

ein. Die Länge des i-ten Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$ wollen wir mit

$$\delta_i := x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

bezeichnen. Die Idee ist nun, die Fläche unter dem Graphen durch Rechtecke anzunähern, die jeweils auf den Teilintervallen definiert werden. Wir könnten, zum Beispiel, auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ das Infimum von f, $\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, als die Höhe des Rechtecks mit Grundseite $[x_{i-1}, x_i]$ betrachten, so wie in Abbildung 9.1.1. Natürlich *unter*schätzen wir dabei den wahren Flächeninhalt. Genauso gut hätten wir aber das jeweilige Supremum $\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ verwenden können; dabei hätten wir den wahren Flächeninhalt dann *über*schätzt.
Ist $f < 0$, dann wird der Flächeninhalt negativ. Beim Integral handelt es sich also um ein Werkzeug, mit dem wir *vorzeichenbehaftete* Flächen berechnen können. Den „echten" Flächeninhalt im geometrischen Sinne zwischen dem Graphen von f und der Abszisse erhält man dann durch Betrachtung von $|f|$.

Unsere Idee wird sich als tragfähig erweisen!

Beispiel 9.1.1: Warum Infimum und Supremum?

Vielleicht fragt ihr euch, warum wir das Supremum bzw. Infimum der Funktion auf einem Teilintervall wählen und nicht einfach das Maximum bzw. Minimum der Funktion? Denn läuft das nicht auf das Gleiche hinaus? Im Falle einer *stetigen* Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt nach Satz 7.2.9 in der Tat

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Doch wir haben von $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *nicht* verlangt, stetig zu sein! Nimmt man zum Beispiel die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \ 0 \le x < 1 \\ 0 & ; \ x = 1 \end{cases}$$

und wählt die Zerlegung $D = \{0, 1\}$, dann ist $\sup_{x \in [0,1]} f(x) = 1$, doch $\max_{x \in [0,1]} f(x)$ existiert erst gar nicht. Solange wir also auch *unstetige* Funktionen zulassen, ist nur die Wahl des Supremums bzw. Infimums sinnvoll.

Halten wir unsere bisherigen Überlegungen in einer Definition fest.

Definition 9.1.2: Darboux'sche Unter- und Obersummen

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Definiert man

$$f_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{sowie} \quad F_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

für $i = 1, \ldots, n$, dann heißt

$$s_D(f) := \sum_D f_i \cdot \delta_i := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i$$

die **untere Darboux-Summe** (oder einfach **Untersumme**) von f zur Zerlegung D, und

$$S_D(f) := \sum_D F_i \cdot \delta_i := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i$$

die **obere Darboux-Summe** (oder einfach **Obersumme**) von f zur Zerlegung D.

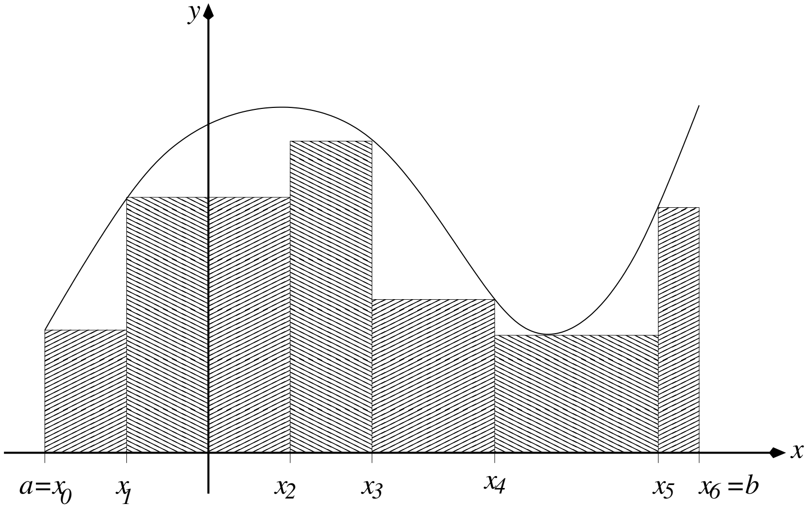

Abbildung 9.1.1. Eine Untersumme

Als einfache Folgerung können wir sofort $s_D(f) \leq S_D(f)$ festhalten, denn $f_i \leq F_i$. Wie verhalten sich Ober- und Untersummen, wenn wir die Zerlegung feiner machen? Dazu definieren wir zunächst:

Definition 9.1.3: Verfeinerungen

Eine Zerlegung $D' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n'}\}$ von $[a, b]$ heißt **Verfeinerung** der Zerlegung $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a, b]$, wenn

$$\{x_0, \ldots, x_n\} \subset \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n'}\}$$

gilt, d. h. es gibt einfach mehr Zerlegungspunkte in D' als in D.

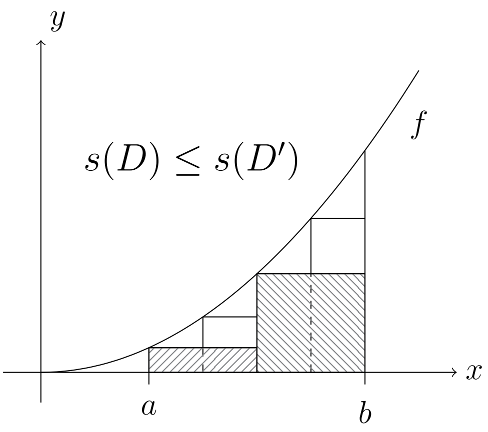

Abbildung 9.1.2. Verfeinerung einer Zerlegung

Anschaulich ist klar, dass durch Hinzunahme von Zerlegungspunkten die Untersumme größer wird (oder sich nicht ändert) und die Obersumme kleiner wird (oder sich nicht ändert).

Lemma 9.1.4

Sei $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Ist D' eine Verfeinerung der Zerlegung D von $[a, b]$, dann gilt

$$s_D(f) \leq s_{D'}(f) \leq S_{D'}(f) \leq S_D(f).$$

Beweis. Die mittlere Ungleichung ist klar. Da sich die Ungleichungen für Unter- und Obersumme analog beweisen lassen, zeigen wir sie nur für die

Untersumme: Sei $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$, dann entsteht die Verfeinerung D' durch sukzessive Hinzunahme von endlich vielen weiteren Punkten und es reicht den Fall zu betrachten, dass D' sich aus D durch Hinzufügen eines einzigen Punktes $x_{k-1} < x' < x_k$ mit $1 \leq k \leq n$ ergibt. Der allgemeine Fall folgt dann durch iterative Wiederholung des nachfolgenden Arguments: Per Definition ist

$$s_D(f) = \sum_{i=1}^{k-1} f_i \delta_i + \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} f_i \delta_i,$$

und da

$$\begin{aligned}
&\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)(x_k - x' + x' - x_{k-1}) \\
&= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)(x' - x_{k-1}) + \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)(x_k - x') \\
&\leq \inf_{x \in [x_{k-1}, x']} f(x)(x' - x_{k-1}) + \inf_{x \in [x', x_k]} f(x)(x_k - x'),
\end{aligned}$$

folgt $s_D(f) \leq s_{D'}(f)$. □

Lemma 9.1.5

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Für zwei beliebige Zerlegungen D_1 und D_2 von $[a, b]$ gilt dann

$$s_{D_1}(f) \leq S_{D_2}(f).$$

Beweis. Sei $D' := D_1 \cup D_2$, dann ist die Zerlegung D' sowohl eine Verfeinerung von D_1 als auch von D_2. Damit folgt das Lemma unmittelbar aus Lemma 9.1.4. □

Nun sind wir in der komfortablen Situation, unser Wissen über reelle Zahlenfolgen anwenden zu können; genauer können wir nun auf Satz 5.6.6 (monoton und beschränkte Folgen sind konvergent) zurückgreifen.

Untersummen sind unter Verfeinerung monoton wachsende Folgen, die nach oben durch eine beliebige Obersumme beschränkt sind (Lemma 9.1.5). Nach Satz 5.6.6 existiert damit ihr Grenzwert, der gleich dem Supremum ist. Obersummen sind unter Verfeinerung monoton fallende Folgen, die nach unten durch eine beliebige Untersumme beschränkt sind (Lemma 9.1.5). Nach Satz 5.6.6 existiert damit ihr Grenzwert, der gleich dem Infimum ist. Das Supremum der Untersummen und das Infimum der Obersummen existieren damit auf jeden Fall! Stimmen Sie überein, so ist dies offenbar ein plausibles Maß für den Flächeninhalt.

Definition 9.1.6: Das Riemann-Integral

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und

$$\mathcal{D} := \{D \mid D \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$$

die Menge aller (abzählbaren) Zerlegungen von $[a,b]$. Die Größen

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf_{D\in\mathcal{D}} S_D(f),$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_{D\in\mathcal{D}} s_D(f)$$

heißen **Oberintegral** bzw. **Unterintegral**. Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **(Riemann-)integrierbar**, wenn Ober- und Unterintegral gleich sind. In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

das **(Riemann-)Integral** von f auf $[a,b]$.

Wir können nun leicht die Riemann-integrierbaren Funktionen charakterisieren.

Satz 9.1.7: Integrabilitätskriterium von Riemann

Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \in \mathcal{D}: \quad S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon. \tag{9.1}$$

Beweis. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

$\Longrightarrow$: Sei f auf $[a,b]$ integrierbar, also

$$\sup_{D\in\mathcal{D}} s_D(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{D\in\mathcal{D}} S_D(f).$$

Für $\varepsilon > 0$ existieren dann Zerlegungen D_1 und D_2 von $[a,b]$, sodass

$$s_{D_1}(f) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad S_{D_2}(f) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Lemma 9.1.4 gilt für die Verfeinerung $D := D_1 \cup D_2$ dann

$$S_D(f) - s_D(f) \le S_{D_2}(f) - s_{D_1}(f) < \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$: Es gelte (9.1). Für $\varepsilon > 0$ existiert dann eine Zerlegung D von $[a, b]$, sodass

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Integrierbarkeit von f auf $[a, b]$. □

Beispiele 9.1.8

(a) Sei $f(x) = x$ auf $[a, b]$. Für die äquidistante Zerlegung

$$D_n := \left\{ x_i = a + ih \;\middle|\; i = 0, 1, \ldots, n \text{ und } h = \frac{b-a}{n} \right\}$$

folgt

$$\begin{aligned}
s_{D_n}(f) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)}_{=x_{i-1}} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=h=\frac{b-a}{n}} \\
&= \sum_{i=1}^n x_{i-1} \cdot \frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (a + (i-1)h) \\
&= \frac{b-a}{n} \left(na + \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i \right) \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right) \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Ganz analog erhält man

$$S_{D_n}(f) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}$$

und damit

$$S_{D_n}(f) - s_{D_n}(f) = \frac{(b-a)^2}{n} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist $f(x) = x$ auf $[a, b]$ integrierbar nach Satz 9.1.7 und es gilt

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2.$$

(b) Sei $f(x) = x^2$ auf $[0,1]$. Als Zerlegung wählen wir

$$D_n := \{x_i = ih \mid i = 0,1,\dots,n;\ h = 1/n\}.$$

Damit ergibt sich (siehe A.2.2)

$$\begin{aligned} s_{D_n}(f) &= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=h=1/n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((i-1)h)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Ganz analog folgt für die Obersumme

$$S_{D_n}(f) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2},$$

also

$$S_{D_n}(f) - s_{D_n}(f) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Damit ist $f(x) = x^2$ auf $[0,1]$ integrierbar und

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

(c) Die **Dirichlet-Funktion**

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ;\ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & ;\ x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

ist *nicht* Riemann-integrierbar! In jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ einer beliebigen Zerlegung D von $[0,1]$ gibt es sowohl rationale, als auch irrationale Zahlen. Daher gilt

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 0 \neq 1 = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

und somit ist

$$s_D(f) = 0 \neq 1 = S_D(f)$$

für alle Zerlegungen D von $[0,1]$.
Wir haben bereits in Beispiel 7.2.30 gesehen, dass die Dirichlet-Funktion überall unstetig ist. Unter Beispiel 7.2.31 haben wir die Thomae-Funktion untersucht, die „nur“ in allen rationalen Punkten unstetig ist. Reicht das zur Integration?

(d) Die **Thomae-Funktion**

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x = 0 \vee x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & ;\ x = \frac{p}{q} \text{ mit } p,q \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

ist unstetig in allen Punkten $[0,1]\cap\mathbb{Q}$, aber integrierbar! Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es nur endlich viele(!) Stellen $\eta_1, \ldots, \eta_k \in [0,1]$, sodass $f(\eta_j) > \varepsilon$, $j = 1, \ldots, k$. Man wähle nun eine Zerlegung $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $\max_{i=1,\ldots,n} \delta_i < \varepsilon/k$ so, dass alle η_j in einem der Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ liegen. Wegen $f(x) \leq 1$ folgt dann:

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)}_{>\varepsilon \text{ in höchstens } k \text{ Fällen}} \cdot\delta_i \leq k \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \delta_i + \varepsilon \cdot 1 < 2\varepsilon$$

Andererseits gilt

$$s_D(f) = 0,$$

also ist die Thomae-Funktion nach Satz 9.1.7 tatsächlich integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Definiert man die **Feinheit** einer Zerlegung $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ durch

$$\delta(D) := \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$$

und bezeichnet mit

$$\mathcal{D}_\delta := \{D \mid D \text{ Zerlegung von } [a,b] \text{ mit } \delta(D) \leq \delta\}$$

die Menge der Zerlegungen der Feinheit $\delta > 0$ von $[a,b]$, dann ergibt sich eine weitere interessante Charakterisierung integrierbarer Funktionen.

Satz 9.1.9: Satz von Du Bois-Reymond und Darboux

Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall D \in \mathcal{D}_\delta: \quad S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon.$$

Beweis. Wir zeigen erst die Hin- und anschließend die Rückrichtung.

$\Longrightarrow$: Sei f integrierbar. Für $\varepsilon > 0$ sei

$$\tilde{D} := \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{\tilde{n}}\} \in \mathcal{D}$$

eine Zerlegung, die (9.1) erfüllt, also

$$\tilde{\Delta}(f) := S_{\tilde{D}}(f) - s_{\tilde{D}}(f) < \varepsilon.$$

Für $\delta > 0$ wähle man nun eine beliebige Zerlegung $D \in \mathcal{D}_\delta$ und definiere

$$\Delta(f) := S_D(f) - s_D(f).$$

Zu zeigen bleibt: $\Delta \to 0$ für $\delta \to 0$.
Bilde dazu die Vereinigung $D' := D \cup \tilde{D}$ und definiere

$$\Delta'(f) := S_{D'}(f) - s_{D'}(f).$$

Die Darboux-Summen für D' und D sind nur auf denjenigen Intervallen ungleich, die Punkte von $\tilde{D}$ enthalten. Das können aber höchstens $\tilde{n} - 1$ Intervalle sein, und da ihre Längen kleiner oder gleich δ sind und wegen der Beschränktheit von f ($-M \leq f(x) \leq M$) gilt

$$\Delta(f) \leq \Delta'(f) + 2(\tilde{n} - 1)\delta M.$$

Da D' eine Verfeinerung von $\tilde{D}$ ist, gilt weiter

$$\Delta'(f) \leq \tilde{\Delta}(f) < \varepsilon,$$

also folgt für $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2(\tilde{n}-1)M}$

$$\Delta(f) < 2\varepsilon.$$

$\Longleftarrow$: Die Rückrichtung folgt sofort aus Satz 9.1.7. $\square$

9.2 Sätze über integrierbare Funktionen

Wir haben zu Beginn das Riemann-Integral auf Unter- und Obersummen gebaut. Es steht uns natürlich frei, gar nicht das Infimum oder Supremum der Funktion f in den Teilintervallen einer Zerlegung zu verwenden, sondern *irgendeinen* Punkt des Teilintervalls.

Definition 9.2.1: Die Riemann-Summe

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $D := \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Für eine Menge $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \subset [a,b]$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, heißt dann

$$R_D(f,\xi) := \sum_D f(\xi_i)\cdot\delta_i := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\delta_i$$

eine **Riemann-Summe** von f zur Zerlegung D mit **Zwischenpunkten** ξ.

Aus der Definition einer Riemann-Summe folgt unmittelbar

$$s_D(f) \le R_D(f,\xi) \le S_D(f), \tag{9.2}$$

denn $f_i \le f(\xi_i) \le F_i$ für $i = 1,\dots,n$. Lässt man die Feinheit $\delta(D)$ der Zerlegung immer kleiner werden, so erwarten wir, dass sich auch die Riemann-Summe dem Riemann-Integral nähert. Um unsere Intuition zu formalisieren, definieren wir

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta(D)\to 0} R_D(f,\xi) = I \in \mathbb{R} \qquad (9.3)\\ :\Longleftrightarrow\quad &\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall D\in\mathcal{D}_\delta\colon\quad |R_D(f,\xi)-I|<\varepsilon, \end{aligned}$$

wobei die Wahl der Zwischenpunkte ξ jeweils beliebig ist. Damit gilt nun folgende Charakterisierung der Integrierbarkeit über Riemann-Summen:

Satz 9.2.2

Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $\lim_{\delta(D)\to 0} R_D(f,\xi) = I$ für ein $I\in\mathbb{R}$. In diesem Fall ist

$$\lim_{\delta(D)\to 0} R_D(f,\xi) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

$\Longrightarrow$: Sei f integrierbar auf $[a,b]$. Für ein $\varepsilon>0$ existiert nach Satz 9.1.9 ein $\delta>0$, sodass $S_D(f)-s_D(f)<\varepsilon/2$ für alle $D\in\mathcal{D}_\delta$. Setzt man $I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und beachtet (9.2), dann folgt für alle $D\in\mathcal{D}_\delta$ mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |R_D(f,\xi)-I| &= |R_D(f,\xi)-s_D(f)+s_D(f)-I|\\ &\le (R_D(f,\xi)-s_D(f)) + (I-s_D(f))\\ &\le 2(S_D(f)-s_D(f))\\ &<\varepsilon, \end{aligned}$$

also $\lim_{\delta(D)\to 0} R_D(f,\xi) = I$.

$\Longleftarrow$: Sei $\varepsilon > 0$ und $I := \lim_{\delta(D)\to 0} R_D(f,\xi)$. Dann gibt es per Definition ein $\delta > 0$, sodass für alle $D \in \mathcal{D}_\delta$ gilt

$$|R_D(f,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad I - \frac{\varepsilon}{2} < R_D(f,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei nun $D = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{D}_\delta$ und wähle Zwischenpunkte $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, sodass

$$f(\xi_i) > F_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} I + \frac{\varepsilon}{2} \; &> R_D(f,\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\delta_i > \sum_{i=1}^n F_i\delta_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^n \delta_i \\ &= S_D(f) - \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} \\ \Longleftrightarrow \qquad I &> \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \end{aligned}$$

Für die Wahl von Zwischenpunkten $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, sodass

$$f(\eta_i) < f_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

ergibt sich analog

$$I < \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt also

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le I \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Andererseits ist das Oberintegral per Definition stets größer gleich dem Unterintegral, und daher ergibt sich insgesamt

$$I = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Der Nachweis der Konvergenz (9.3) Riemann'scher Summen ist sehr aufwendig, da zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ *alle* Zerlegungen und für jede Zerlegung *alle* möglichen Zwischenpunkte in Betracht gezogen werden müssen. Im Fall einer integrierbaren Funktion gilt jedoch das folgende nützliche Korollar:

Korollar 9.2.3

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Für eine Folge $(D^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen mit Zwischenpunkten $(\xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $\delta(D^{(n)}) \to 0$, $n \to \infty$, gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} R_{D^{(n)}}(f, \xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Siehe A.9.11!

Mit integrierbaren Funktionen lässt sich auch rechnen.

Satz 9.2.4

Sind $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann sind auch die Funktionen

$$f+g, \quad \lambda f, \quad f\cdot g, \quad |f|, \quad f/g \;\; (\text{falls } |g(x)| \geq C > 0)$$

auf $[a,b]$ integrierbar. Insbesondere gilt

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.4}$$

Beweis. Wir gehen in fünf Schritten vor.

(i) Wir zeigen zuerst die Integrierbarkeit von $f+g$ in zwei Schritten:

(a) Sei $\varepsilon > 0$ und D eine Zerlegung von $[a,b]$. Wegen der Definition 9.1.2 von F_i und f_i gibt es $\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]$ mit $f(\xi) > F_i - \varepsilon$ und $f(\eta) < f_i + \varepsilon$, also $f(\xi) - f(\eta) > F_i - f_i - 2\varepsilon$. Damit ist

$$F_i - f_i = \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(y)|. \tag{9.5}$$

(b) Sei $h(x) := f(x) + g(x)$ und seien F_i, G_i, H_i die zu f, g, h gehörigen Suprema auf $[x_{i-1}, x_i]$, und f_i, g_i, h_i entsprechend die Infima. Für $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ folgt mit (9.5) dann

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq (F_i - f_i) + (G_i - g_i). \end{aligned} \tag{9.6}$$

und damit

$$\begin{aligned} H_i - h_i &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |h(x) - h(y)| \\ &\leq (F_i - f_i) + (G_i - g_i). \end{aligned}$$

Für die Differenz von Ober- und Untersumme bzgl. D ergibt sich

$$\begin{aligned} S_D(h) - s_D(h) &= \sum_D (H_i - h_i)\delta_i \\ &\leq \sum_D (F_i - f_i)\delta_i + \sum_D (G_i - g_i)\delta_i. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Da f, g integrierbar sind, existiert nach Satz 9.1.7 nun für $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung D von $[a, b]$ so, dass jede der beiden Summen auf der rechten Seite von (9.7) kleiner als $\varepsilon/2$ wird, also

$$S_D(h) - s_D(h) < \varepsilon,$$

und damit ist $h(x) = f(x) + g(x)$ nach Satz 9.1.7 integrierbar.

Die weiteren Beweise verlaufen (fast) analog:

(ii) Für $h(x) := \lambda f(x)$ schließen wir aus

$$|h(x) - h(y)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)|$$

für $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ auf $H_i - h_i \leq |\lambda|(F_i - f_i)$ und die Integrierbarkeit folgt wie unter (b).

(iii) Für $h(x) := f(x) \cdot g(x)$ verwenden wir

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq M \cdot |g(x) - g(y)| + N \cdot |f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

für $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, denn M und N existieren wegen der Beschränktheit von f und g. Also gilt

$$H_i - h_i \leq M(G_i - g_i) + N(F_i - f_i)$$

und die Integrierbarkeit folgt wie unter (b).

(iv) Statt $f(x)/g(x)$ reicht es $h(x) := 1/g(x)$ zu betrachten, denn der allgemeinere Fall folgt dann aus der (bereits bewiesenen) Integrierbarkeit von $f(x) \cdot 1/g(x)$. In diesem Fall ist (9.6) zu ersetzen durch

$$|h(x) - h(y)| = \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(y)| \cdot |g(x)|} \leq \frac{|g(x) - g(y)|}{C^2}$$

für $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$.

(v) Zur Integrierbarkeit von $h(x) := |f(x)|$ siehe A.9.8 (b).

Schließlich gilt für die Riemann-Summen einer Folge von Zerlegungen $(D^{(n)})_n$ mit $\delta(D^{(n)}) \to 0$ und Zwischenpunkten $(\xi^{(n)})_n$

$$\begin{aligned}
R_{D^{(n)}}(\lambda f + \mu g, \xi^{(n)}) &= \sum_{D^{(n)}} \left(\lambda f(\xi_i^{(n)}) + \mu g(\xi_i^{(n)})\right) \delta_i^{(n)} \\
&= \lambda \sum_{D^{(n)}} f(\xi_i^{(n)})\delta_i^{(n)} + \mu \sum_{D} g(\xi_i^{(n)})\delta_i^{(n)} \\
&= \lambda R_{D^{(n)}}(f, \xi^{(n)}) + \mu R_{D^{(n)}}(g, \xi^{(n)}),
\end{aligned}$$

und da $\lambda f + \mu g$ nach (i) und (ii) integrierbar ist, folgt (9.4) für $n \to \infty$ nach Korollar 9.2.3. □

Nach Beispiel 9.1.8 (a) ist $f(x) = x$ integrierbar, also wissen wir nun auf einen Schlag, dass alle Polynome und auch alle rationalen Funktionen (abseits der Singularitäten) integrierbar sind!

Bis jetzt haben wir von unseren Funktionen lediglich die Beschränktheit gefordert. Dies reicht aber im Allgemeinen nicht aus, um die Integrierbarkeit im Sinne der Definition 9.1.6 zu gewährleisten (siehe Beispiel 9.1.8 (c)). Anders verhält es sich mit den stetigen Funktionen. Diese sind immer integrierbar, wie der nachstehende Satz zeigt, und bilden daher die „natürliche“ Funktionenklasse des Riemann-Integrals.

Satz 9.2.5

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f integrierbar.

Beweis. Da f auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, ist f dort gleichmäßig stetig, d. h., für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Wähle nun eine Zerlegung D von $[a, b]$ mit $\delta(D) < \delta$. Sind $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, dann gilt also $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, und wegen (9.5) ist damit $F_i - f_i \le \varepsilon$. Es folgt

$$S_D(f) - s_D(f) = \sum_{i=1}^{n} (F_i - f_i)\delta_i \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \varepsilon(b - a),$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist f nach Satz 9.1.7 integrierbar. □

Monotonie ist ebenfalls ein hinreichendes Kriterium für die Integrierbarkeit einer Funktion.

Satz 9.2.6

Jede monoton wachsende (fallende) Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis. Wir zeigen den Satz für eine monoton wachsende Funktion. Der Fall einer monoton fallenden Funktion folgt analog.

Seien $\varepsilon > \eta > 0$ und man wähle eine äquidistante Zerlegung $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit

$$x_i - x_{i-1} = \eta/(f(b) - f(a)) =: \delta$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$. Ist f monoton wachsend, dann liegt das Infimum der Funktionswerte immer am linken Intervallrand und das Supremum immer am rechten, d. h. $f_i = f(x_{i-1})$, $F_i = f(x_i)$, also $f_{i+1} = F_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Draus folgt

$$\begin{aligned} S_D(f) - s_D(f) =& \sum_{i=1}^{n}(F_i - f_i)\delta \\ =&[(F_1 - f_1) + (F_2 - f_2) + \ldots + (F_n - f_n)]\delta \\ =&[(F_n - f_1) + (F_1 - f_2) + \ldots + (F_{n-1} - f_n)]\delta \\ =&[f(b) - f(a)]\delta = \eta < \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist f integrierbar nach Satz 9.1.7. □

Bemerkung 9.2.7

(a) Sei $\{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann auf $[a, b]$ integrierbar, wenn f auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

siehe A.9.13.

(b) Die Werte $f(a), f(b) \in \mathbb{R}$ einer integrierbaren Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ haben nach A.9.4 weder Einfluss auf das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ noch auf die Integrierbarkeit von f. Zusammen mit (a) folgt daraus: Wird eine integrierbare Funktion f an endlich vielen Stellen abgeändert, dann bleibt f integrierbar und der Wert des Integrals ändert sich nicht.

(c) Ist $a > b$ bzw. $a = b$, dann definiert man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Verschwindet das Integral einer positiven und stetigen Funktion, dann handelt es sich bereits um die Null-Funktion.

Satz 9.2.8

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Beweis. Wir zeigen den Satz per Widerspruch: Angenommen $f(\hat{x}) > 0$ für ein $\hat{x} \in [a,b]$. Aus der Stetigkeit von f folgt dann, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f(x) \geq \varepsilon$ für alle x in einer η-Umgebung $[u,v] := [\hat{x}-\eta, \hat{x}+\eta] \subset [a,b]$ von $\hat{x}$, $\eta > 0$. Sei nun $D = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ eine Zerlegung mit $u, v \in D$, dann gilt für die Untersumme

$$s_D(f) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \delta_i \geq \varepsilon(v-u) > 0.$$

Da f als stetige Funktion integrierbar ist, folgt daraus $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung! □

Korollar 9.2.9

Für stetige Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ergibt sich aus Satz 9.2.8 insbesondere

$$\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0 \iff f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

9.3 Wichtige Ungleichungen

Nicht immer ist der genaue Wert eines Integrals von Interesse, sondern eine hinreichend gute Nährung in Form einer oberen oder unteren Schranke ausreichend. Auch lässt sich der Wert zuweilen gar nicht exakt berechnen. In solchen oder ähnlichen Situationen können Ungleichungen nützlich sein. Wir beginnen mit der Monotonie des Riemann-Integrals.

Satz 9.3.1

Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und gilt $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x)$, dann gilt auch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Nach Satz 9.2.4 ist $h = g - f$ integrierbar und nach Voraussetzung gilt $h(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Somit gilt $s_D(h) \geq 0$ für jede Zerlegung D von $[a,b]$. Mit (9.4) folgt daraus bereits

$$0 \leq \sup_{D \in \mathcal{D}} s_D(h) = \underline{\int_a^b} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Als Korollar halten wir Folgendes fest:

Korollar 9.3.2

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Aus $-f, f \leq |f|$ folgt nach Satz 9.3.1

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

mithin die Behauptung. □

Etwas allgemeiner gilt für das Produkt zweier integrierbarer Funktionen:

Korollar 9.3.3

Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Es gilt

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot |g(x)|$$

und die Behauptung folgt aus dem vorherigen Korollar. □

Unsere bisher wichtigste Ungleichung war die Dreiecksungleichung, und es gibt nur wenige andere Ungleichungen, die dieselbe Bedeutung haben. Hier ist nun eine solche!

Satz 9.3.4: Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU)

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x}.$$

Beweis. Nach Satz 9.2.4 sind $f \cdot g$, f^2 und g^2 integrierbar. Mit Satz 9.3.1 und der Linearität des Integrals folgt nun:

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_a^b & \left(\left(\int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x \right) f(y) - \left(\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \right) g(y) \right)^2 \mathrm{d}y \\
&= \left(\int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x \right)^2 \left(\int_a^b f(y)^2 \, \mathrm{d}y \right) + \left(\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \right)^2 \left(\int_a^b g(y)^2 \, \mathrm{d}y \right) \\
&\quad - 2 \left(\int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b f(y)g(y) \, \mathrm{d}y \right) \\
&= \left(\int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x \right)^2 \left(\int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x \right) - \left(\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \right)^2 \left(\int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \left(\int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x \right) \left(\left(\int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x \right) - \left(\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Daher muss

$$\begin{aligned}
& \left(\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \right)^2 \leq \left(\int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x \right) \\
\iff & \left| \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \sqrt{\int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x} \cdot \sqrt{\int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

gelten. Man sieht leicht, dass Gleichheit nur für den Fall $f = \gamma g$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$ eintreten kann. $\square$

Bemerkung 9.3.5

Wenn man schon weiß, dass

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

ein inneres Produkt auf dem Raum $C([a,b])$ der stetigen Funktionen auf $[a,b]$ ist, und damit

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

eine Norm definiert, dann lässt sich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung kompakt in der Form

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\cdot\|g\|$$

schreiben.

9.4 Mittelwertsätze

Im Leben von Mathematikerinnen und Mathematikern ist es nicht wichtig, konkrete Integrale wirklich auszurechnen, obwohl es keinesfalls zum guten Ton gehört, wenn man das gar nicht kann! Viel wichtiger sind aber kluge Abschätzungen, von denen wir im letzten Abschnitt bereits einige bewiesen haben. Die folgenden Resultate sind zwar keine Ungleichungen, aber sie gehören definitiv in die Kategorie des klugen Umgangs mit Integralen.
Aus dem Zwischenwertsatz erhält man für stetige Funktionen einen interessanten Zusammenhang zwischen Integral und Integrand.

Satz 9.4.1: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\exists \xi\in[a,b]: \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Beweis. Seien $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$ und $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$, d. h.

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x\in[a,b].$$

Wenden wir Satz 9.3.1 an, dann erhalten wir

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a),$$

also

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M.$$

Damit liegt $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zwischen $m = f(u)$ und $M = f(U)$, wodurch $u, U \in [a,b]$ definiert sind. Nun folgt aus Satz 7.2.7 die Existenz eines $\xi \in [a,b]$ mit

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi).$$

$\square$

Geometrisch lässt sich der Mittelwertsatz besonders schön veranschaulichen.

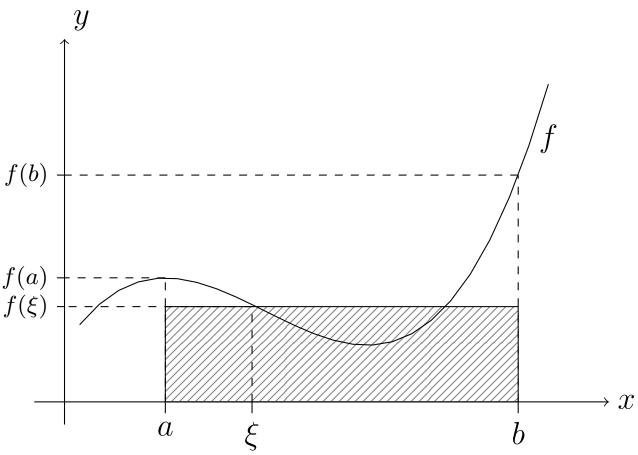

Abbildung 9.4.1. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Man sollte auch die allgemeinere Version des Mittelwertsatzes kennen. Sie ergibt sich bereits durch eine leichte Modifikation des Beweises von Satz 9.4.1.

Satz 9.4.2: Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $g(x) \geq 0$ (oder $g(x) \leq 0$) für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\exists \xi \in [a,b] : \quad \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Sei $g(x) \geq 0$ auf $[a, b]$ (anderenfalls ersetze g durch $-g$). Dann gilt:

$$mg(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq Mg(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

mit $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Jetzt fahre fort wie im Beweis von Satz 9.4.1. □

Beispiel 9.4.3

(a) Eine analoge Rechnung wie in Beispiel 9.1.8 (b) zeigt

$$\int_a^b x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Da $b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$, besagt der Mittelwertsatz für die Funktion $f(x) = x^2$ gerade

$$\int_a^b x^2 \,\mathrm{d}x = f(\xi)(b - a) \quad \text{mit} \quad \xi = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$

(b) Wir wissen bereits, dass die Funktion $f(x) = x - x^2$ integrierbar ist und

$$\int_0^1 x - x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Der Mittelwertsatz garantiert nun die Existenz eines $\xi \in [0, 1]$, sodass $f(\xi) = 1/6$. Lösen der quadratischen Gleichung liefert

$$\xi^2 - \xi + \frac{1}{6} = 0 \iff \xi = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Es gibt also mehrere Möglichkeiten, ξ zu wählen, denn

$$\int_0^1 x - x^2 \,\mathrm{d}x = f(\xi_i) \quad \text{mit} \quad \xi_i = \frac{1}{2} + (-1)^i \frac{1}{\sqrt{12}} \in [0, 1]$$

für $i = 0, 1$. Der Mittelwertsatz besagt *nicht*, dass ξ eindeutig sein muss!
Wegen $x - x^2 = (1 - x)x$ kann auch der erweiterte Mittelwertsatz angewandt werden ($h(x) = 1 - x$ ist stetig und $g(x) = x \geq 0$ für $x \in [0, 1]$). Er besagt in diesem Fall

$$\frac{1}{6} = \int_0^1 (1 - x)x \,\mathrm{d}x = (1 - \xi) \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1 - \xi}{2}$$

für ein $\xi \in [0, 1]$ und offenbar ist die Wahl $\xi = 2/3$ eindeutig.

9.5 Zur Integration unendlicher Reihen

Wir haben schon Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

kennengelernt, so z. B. die Reihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Solche Reihen sind nichts anderes als Folgen von Partialsummen, und diese Partialsummen sind Funktionenfolgen. Der Schlüssel zum Verständnis der Integration von unendlichen Reihen liegt also im Verständnis der Integration von Funktionenfolgen.

Wir untersuchen die Funktionenfolge

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & ;\ 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & ;\ 1/n \le x \le 2/n \\ 0 & ;\ 2/n \le x \le 2 \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

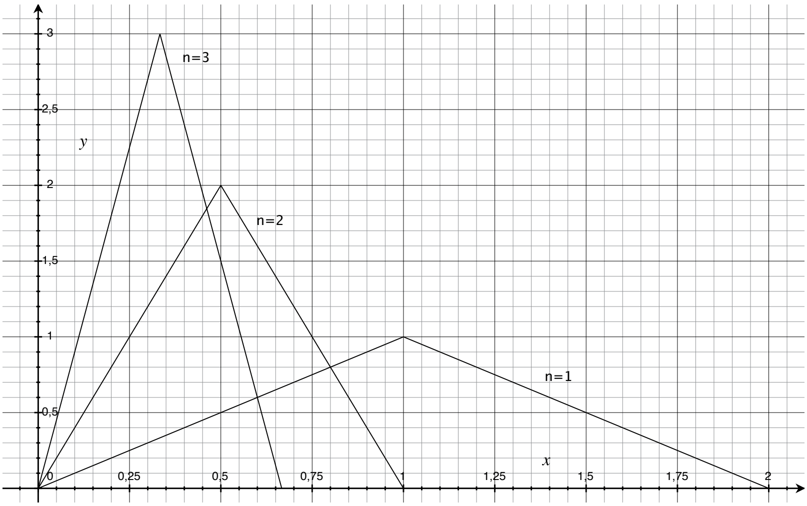

Abbildung 9.5.1. Die ersten drei Funktionen der Folge f_n

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt sicher

$$\begin{aligned}\int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= n^2\int_0^{1/n} x\,\mathrm{d}x + 2 - n^2\int_{1/n}^{2/n} x\,\mathrm{d}x \\ &= 2 + n^2\left(\frac{1}{2n^2} - \frac{3}{2n^2}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

aber für alle $x \in [0,2]$ ist die punktweise Grenzfunktion $f(x) = 0$ und daher

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Um Integration und Grenzwertbildung vertauschen zu können, ohne das Ergebnis zu ändern, brauchen wir also mehr als nur punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge. Wieder erweist sich die gleichmäßige Konvergenz als Schlüssel.

Satz 9.5.1

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und es gelte $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Dann ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ gilt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [a,b] : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &< |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + 2\varepsilon\end{aligned}$$

für alle $x, y \in [a,b]$. Da f_{n_0} integrierbar ist, existiert nach Satz 9.1.7 eine Zerlegung $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$, sodass

$$S_D(f_{n_0}) - s_D(f_{n_0}) = \sum_D (F_{n_0,i} - f_{n_0,i})\delta_i < \varepsilon,$$

wobei $F_{n_0,i} := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_{n_0}(x)$ und $f_{n_0,i} := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_{n_0}(x)$. Aus der obigen Abschätzung folgt mit (9.5) nun

$$F_i - f_i = \sup_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(y)| \leq F_{n_0,i} - f_{n_0,i} + 2\varepsilon,$$

also gilt

$$\begin{aligned} S_D(f) - s_D(f) &= \sum_D (F_i - f_i)\delta_i \\ &\leq \sum_D (F_{n_0,i} - f_{n_0,i})\delta_i + 2\varepsilon \sum_D \delta_i \\ &< \varepsilon + 2(b-a)\varepsilon \\ &= (1 + 2(b-a))\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist f nach Satz 9.1.7 integrierbar. Nach Satz 9.2.4 ist damit auch $f_n - f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ integrierbar und Korollar 9.3.2 liefert

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon(b-a),$$

d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Beispiel 9.5.2

Wir wollen $f(x) = e^x$ über $[0,1]$ integrieren. Dazu nutzen wir, dass die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen $f(x) = e^x$ konvergiert. Integration und Grenzwertbildung können also vertauscht werden und man erhält (siehe A.9.2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1. \end{aligned}$$

Wir wollen das Integral nun noch einmal direkt mittels Riemann-Summen berechnen: Sei dazu $x_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$ eine äquidistante

Zerlegung von $[0,1]$ und $\xi_i := x_i$ für $i = 1,\ldots,n$. Dann gilt für die Riemann-Summe

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sqrt[n]{e})^i \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt[n]{e}(1-e)}{1-\sqrt[n]{e}}\right) \\ &= \frac{\sqrt[n]{e}}{(1-\sqrt[n]{e})n}(1-e).\end{aligned}$$

Da wir den Wert des Integrals bereits kennen(!), folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{(1-\sqrt[n]{e})n}(1-e) = e-1,$$

also insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{(1-\sqrt[n]{e})n} = -1.$$

Man beachte, dass dieser Grenzwert mit den bisherigen Techniken nur mühevoll zu bestimmen wäre.

Wie das Beispiel zeigt, übersetzt sich der Satz im Fall einer gleichmäßig konvergenten Funktionenreihe in eine Vertauschung von Integral und Reihe.

Korollar 9.5.3

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das letzte Beispiel zeigt auch, dass in Fällen, in denen der Wert des Integrals nicht bekannt ist, mitunter recht komplizierte Grenzwerte bestimmt werden müssen. Die Berechnung von Integralen über Darboux- bzw. Riemann-Summen ist also nur bedingt praktikabel, will man nicht ständig mit Grenzwerten ringen. Wir werden nun im nächsten Kapitel sehen, dass sich durch Hinzunahme der Differentialrechnung in vielen Fällen ein sehr viel eleganterer Weg zur Integration finden lässt.

Zusammenfassung

Für eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert man zu einer **Zerlegung** $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ die **Unter-** bzw. **Obersumme** durch

$$s_D(f) := \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i \quad \text{mit} \quad f_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$S_D(f) := \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i \quad \text{mit} \quad F_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

wobei $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. Dann heißt f **(Riemann-)integrierbar** über $[a,b]$, falls

$$\sup_{D \in \mathcal{D}} s_D(f) = \inf_{D \in \mathcal{D}} S_D(f) =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dabei wird das Supremum bzw. Infimum über der Menge $\mathcal{D}$ aller Zerlegungen gebildet. Eine wichtige **Charakterisierung für Integrierbarkeit** lautet dann

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \in \mathcal{D}: \quad S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon$$

und bedeutet anschaulich, dass die Fläche zwischen dem Funktionsgraph und der Abszisse durch immer feiner werdende Rechtecke beliebig genau approximiert werden kann. Es zeigt sich, dass insbesondere alle **stetigen Funktionen immer integrierbar** sind. Wie man Integrale stetiger Funktionen konkret berechnet, werden wir uns nun im nächsten Kapitel genau anschauen.

Im Umgang mit Integralen, solltet ihr euch die folgenden Regeln gut merken:

- **Linearität**: $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- **Additivität**: $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ für $a < b < c$
- **Monotonie**: $f \leq g \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- **Dreiecksungleichung**: $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$
- **CSU**: $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x}$
- **Mittelwertsatz**: $\exists \xi \in [a,b]: \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$
- **Integration $\leftrightarrow$ Grenzwertbildung**: $f_n \to f$ gleichmäßig, dann $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$

Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Wie lautet die Definition von Ober- und Unterintegral?*

- *Was versteht man unter einer Verfeinerung einer Zerlegung?*
- *Was ist eine Riemann'sche Summe?*
- *Wieso sind stetige Funktionen integrierbar?*
- *Kennen Sie eine weitere wichtige Klasse integrierbarer Funktionen?*
- *Sind Summe, Produkt und Quotient integrierbarer Funktionen stets integrierbar?*
- *Wie lautet der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Integralrechnung?*

Zum Einüben der Begriffe dieses Kapitels solltet ihr euch mal an einigen der folgenden Aufgaben versuchen.

9.6 Aufgaben

A.9.1 Sei $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ für alle $a > 0$ integrierbar und es gelte $f(x) \to \eta \ni \mathbb{R}$, $x \to \infty$. Man zeige, dass dann ebenfalls

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \to \eta, \quad a \to \infty.$$

Hinweis: Man orientiere sich am Beweis von A.5.13 (a).

A.9.2 Für $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ bestimme man das Integral

$$\int_0^a x^m\,\mathrm{d}x = \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

mittels Riemann'scher Summen über äquidistanten Zerlegungen.
Hinweis: Per vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + q_m n^m + \ldots + q_1 n$$

für rationale Zahlen $q_1, \ldots q_m$.

A.9.3 Man zeige, dass

$$0 \leq \int_0^1 x^{19}\cos^3(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{20}.$$

Hinweis: Man verwende das Ergebnis aus A.9.2.

A.9.4 Man beweise Korollar 9.2.3.

A.9.5 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Man zeige, dass f dann auch auf jedem Teilintervall $[c,d] \subseteq [a,b]$ integrierbar ist.

A.9.6 Sei $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $a < b < c$. Man zeige: f ist genau dann auf $[a,c]$ integrierbar, wenn f auf $[a,b]$ und $[b,c]$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A.9.7 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \to a$ sowie $b_n \to b$. Man zeige, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A.9.8 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und $f([a,b]) \subset [c,d]$. Man zeige, dass die Komposition $h = g \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

A.9.9 Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $|g(x)| \geq C > 0$. Man gebe mithilfe von A.9.5 einen alternativen Beweis für die Integrierbarkeit von f/g.

A.9.10 Man bestimme für $p, q \in \mathbb{N}$ das Integral

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q\,\mathrm{d}x = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Hinweis: Man verwende das Ergebnis aus A.9.2.

A.9.11 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und man definiere $f^+, f^-\colon [a,b] \to [0,\infty[$ durch

$$f^+ := \begin{cases} f(x) & , f(x) \geq 0, \\ 0 & , f(x) < 0, \end{cases} \qquad f^- := \begin{cases} 0 & , f(x) \geq 0, \\ -f(x) & , f(x) < 0. \end{cases}$$

Man zeige, dass f genau dann integrierbar ist, wenn f^+ und f^- integrierbar sind.

A.9.12 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und man definiere für eine beliebige Zerlegung $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ die „Treppenfunktion" $R_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$R_n(x) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i)}(x), \quad R(b) = b,$$

wobei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ und $\mathbb{1}_A$, $A \subset \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion bezeichne (siehe Beispiel 4.1.2).

(a) Man zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung D existiert, sodass

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - R_n(x)| < \varepsilon.$$

(b) Man folgere aus (a), dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A.9.13 Man bestimme die folgenden Integrale mittels Riemann'scher Summen über *geometrischen Zerlegungen* $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$, d. h. $x_i/x_{i-1} = q_n$, $i = 1, \ldots, n$, für ein geeignetes $q_n > 0$:

$$\text{(a)} \int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,\ a > 0 \qquad \text{(b)} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,\ b > 1.$$

Man folgere daraus einen geschlossenen Ausdruck für

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,\ 0 < a < b.$$

Hinweis: $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln(x)$ *für* $x > 0$.

A.9.14 Man bestimme für $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ein $\xi \in [0,1]$ so, dass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$.

A.9.15 Man zeige, dass ein $\xi \in [0,1]$ existiert mit

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{e-1}{1+\sqrt{x}}.$$

10 Differentialrechnung und Fortführung der Integralrechnung

Wozu?

Die Differentialrechnung wurde unabhängig von Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz im 17. Jahrhundert entwickelt. Dabei hatten beide jedoch unterschiedliche Motive: Newtons Ansatz war physikalischer Natur, er betrachtete Kurven als stetige Bewegung und es ging ihm um die Berechnung von Momentangeschwindigkeiten, -beschleunigungen und Ähnlichem. Bei Leibniz stand die Geometrie im Vordergrund, er sah Kurven als „Unendlichecke" und wollte das Tagentenproblem lösen. Gemein ist beiden Ansätzen, aus den jeweils mittleren Änderungsraten Momentangeschwindigkeit bzw. Sekantensteigung durch Grenzübergang auf die momentane Änderungsrate, also Momentangeschwindigkeit bzw. Tangentensteigung zu schließen. Aus moderner Sicht ist aber die *Linearisierung* eines funktionalen Zusammenhangs die entscheidende Idee bei der Herleitung der **Ableitung**.
Wie die Integralrechnung gehört die Differentialrechnung zum Kernbestand der Analysis und zusammen bilden sie den Inhalt der klassischen Infinitesimalrechnung (*Calculus*). Das wichtigste Resultat dieses Kalküls ist der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**, der einen fundamentalen Zusammenhang zwischen diesen beiden Säulen herstellt. Er besagt, dass Differentiation und Integration zueinander inverse Operationen sind, und liefert insbesondere für stetige Funktionen einen systematischen und eleganten Weg zur Integration über kompakten Intervallen. Für solche garantiert er nämlich die Existenz einer **Stammfunktion**, mit der man dann bequem integrieren kann. Das Bestimmen einer Stammfunktion ist mitunter nicht einfach und es gibt dafür keine einheitliche Methode. In der mathematischen Weisheit *„Differenzieren ist ein Handwerk, Integrieren eine Kunst"* kommt dies schön zum Ausdruck. Neben der Differentialrechnug stehen daher die wichtigsten **elementaren Integrationstechniken** im Zentrum dieses Kapitels.
Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- Ableitung und Differentiationsregeln,
- Hauptsatz der Differential und Integralrechnung,
- Substitutionsregel und partielle Interation,
- Integration durch Partialbruchzerlegung,
- komplexe Zahlen

und ihr Verständnis.

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_10

Historische Bemerkung

Schon die alten Griechen waren in der Lage, den Flächeninhalt von komplizierten Figuren wie dem Kreis zu berechnen. Dazu erfanden sie die „Exhaustion“ und die „Kompression“. Bei der Exhaustion schreibt man in den Kreis reguläre Polygone ein, beginnend mit einem Quadrat. Dann geht man zum Achteck über, dann zum 16-Eck usw. So erhält man immer bessere Näherungen an den Flächeninhalt des Kreises und füllt den Kreis schließlich von innen aus. Bei der Kompression umschreibt man den Kreis mit einem Quadrat und geht dann zu regulären Polygonen mit immer weiter wachsender Eckenzahl über. Dabei brauchten die Griechen gar keinen Grenzwertbegriff (den sie gar nicht kannten), sondern sie benutzten sehr geschickt einen geometrischen Satz von Euklid (ca. 300 v. Chr.)[a]. Nun ist das noch keine wirklich infinitesimale Methode, aber schon Archimedes (um 287–212 v. Chr.) brachte das Kunststück fertig, Schnitte von Figuren oder Körpern auf einer gedachten Waage mithilfe der Hebelgesetze miteinander zu vergleichen[b]. So gelangen ihm Flächen- und Volumenberechnungen, die erst Jahrhunderte später wieder möglich wurden.
Die eigentlichen „Erfinder“ der Differential- und Integralrechnung sind natürlich Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), und zwar unabhängig voneinander[c]. Der eigentliche Schlüssel zur Entdeckung dieser Mathematik liegt in der Erkenntnis, dass Differentiation und Integration zueinander invers sind, d. h. die Gültigkeit des Hauptsatzes, und sowohl Newton, als auch Leibniz, haben das erstmals erkannt.
Kaum war diese Mathematik in der Welt, da explodierten förmlich die verschiedenen Anwendungen in der Physik. Die Brüder Jakob (1655–1705) und Johann Bernoulli (1667– 1748) aus Basel bereicherten die Differential- und Integralrechnung wesentlich, und Johanns Schüler Leonhard Euler (1707–1783) galt schon seinen Zeitgenossen als „Sonne der Mathematiker“ und „fleischgewordene Analysis“. Er hat die gesamte Mechanik fest auf die Differential- und Integralrechnung gegründet und damit das Tor zu den Anwendungen weit aufgestoßen.
Bis ins 19. Jahrhundert feierte die Leibniz/Euler’sche Analysis einen Triumph nach dem anderen, wobei man sich nicht scheute, mit „unendlich kleinen Größen“ wie $\mathrm{d}x$ so zu rechnen, als seien sie wirkliche Größen. Aber in eben diesem 19. Jahrhundert fiel es einigen Mathematikern, allen voran Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897) und Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), schwer, mit so etwas Verrücktem wie unendlich kleinen Zahlen rechnen zu müssen. Sie entwickelten daher den heute noch verwendeten Grenzwertbegriff und machten damit die Analysis zu einer wirklich rigorosen mathematischen Theorie. Richard Dedekind (1831–1916) (als Erster) und Georg Cantor (1845–

1918) entwickelten dann eine saubere Theorie der reellen Zahlen, die bis dahin einfach „irgendwie“ von den Mathematiker verwendet worden waren.

[a] Vgl. S. 33 ff. in: Sonar: *3000 Jahre Analysis*, 2. Auflage, Springer 2016.

[b] Vgl. S. 71 ff. in: Sonar: *3000 Jahre Analysis*, 2. Auflage, Springer 2016.

[c] Die beiden haben sich am Ende furchtbar gestritten, wer denn der erste Erfinder gewesen sei. Die Geschichte dieses Streits ist spannender als ein Krimi! (vgl. Sonar: *Zur Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton*, Springer 2016.)

10.1 Die Ableitung

Die Ableitung einer Funktion kann auf mehrere äquivalente Weisen definiert werden, die wir hier nacheinander vorstellen wollen. Wir beginnen mit der geometrischen Interpretation:
Eine Gerade durch den Punkt (x_1, y_1) in der (x, y)-Ebene $\mathbb{R}^2$ mit *Steigung* s ist nichts anderes als der Graph der linearen Funktion $g(x) = s(x - x_1) + y_1$, denn $g(x_1) = y_1$ und

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \frac{s(x - y)}{x - y} = s, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Gibt man statt der Steigung s einen weiteren Punkt (x_0, y_0) vor, so entspricht der Graph von

$$g(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1) + y_1, \quad x \in \mathbb{R},$$

der durch die beiden Punkte gelegten Gerade. In jedem Fall ist die Steigung $s = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ konstant, also unabhängig von x. Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $x_0 \neq x_1 \in I$ entspricht der Graph von

$$g(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) + f(x_1), \quad x \in \mathbb{R},$$

dann der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$. In diesem Fall nennt man den Graphen von g auch *Sekante* und kann die Sekantensteigung

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

in naheliegender Weise nutzen, um der Funktion f selbst in jedem Punkt $x_0 \in I$ eine Steigung zuzuordnen. Dazu hält man x_0 fest und lässt x_1 immer näher an x_0 heranrücken. Dies führt auf die geometrische Definition der Ableitung.

Definition 10.1.1: Differenzierbarkeit und Ableitungen

Sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist **differenzierbar** in x_0, wenn der Grenzwert

$$\begin{aligned} f'(x_0) &:= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned} \tag{10.1}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ die **Ableitung** von f in x_0. Die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit Steigung $f'(x_0)$ heißt **Tangente** an den Graphen von f in x_0 und entspricht dem Graphen der Funktion

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ist f differenzierbar in allen $x \in I$, dann heißt f **differenzierbar** auf I. Ist $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann heißt f auf I **stetig differenzierbar**.

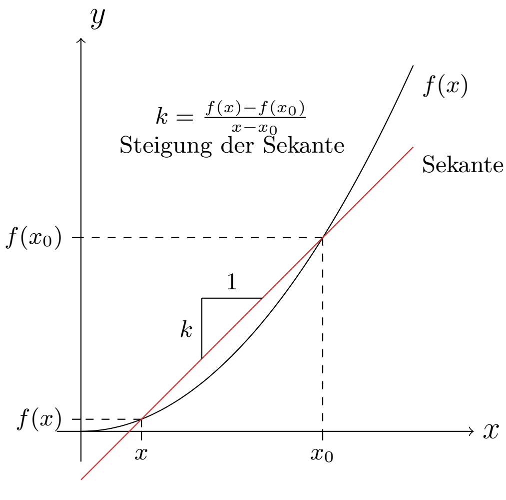

Abbildung 10.1.1. Die Ableitung in einem Punkt als Grenzwert von Sekantensteigungen

Da wir im Umgang mit Grenzwerten bereits einige Routine haben, können wir direkt ein paar Beispiele geben.

Beispiele 10.1.2

(a) Sei $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, für ein $c \in \mathbb{R}$, dann ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von f ist eine parallel zur x-Achse verlaufende Gerade und hat daher überall die Steigung null.

(b) Sei $f(x) = a + sx$, $x \in \mathbb{R}$, für $a, s \in \mathbb{R}$, dann ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{s(x - x_0)}{x - x_0} = s, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von f ist die Gerade durch den Punkt $(0, a)$ mit Steigung s. Die Ableitung ist somit genau die Steigung dieser Geraden, nicht aber die Gerade selbst. Es gilt aber

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = a + sx = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

d. h., die Tangente an den Graphen von f in x_0 stimmt mit dem Graphen von f überein.

(c) Sei $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 2x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Wir sehen, dass die Ableitung $f'(x_0) = 2x_0$ hier (linear) von $x_0 \in \mathbb{R}$ abhängt, denn der Graph von f ist eine Parabel, deren Steigung mit wachsendem x zunimmt. Es gilt

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2x_0 x - x_0^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

und daher

$$|f(x) - T(x)| = |x^2 - 2x_0 x + x_0^2| = (x - x_0)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Tangente an den Graphen von f in x_0 stimmt also nur im „Berührungspunkt“ x_0 mit der Parabel überein.

(d) Sei $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, für ein $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} x_0^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^n - 1}{\frac{x}{x_0} - 1} \\
&\overset{\text{geom. Reihe}}{=} x_0^{n-1} \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \\
&= x_0^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= n x_0^{n-1}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(e) Ist $I = [a, b]$ und $x_0 = a$ oder $x_0 = b$, dann sind *einseitige Grenzwerte* zu verwenden.

(f) Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist differenzierbar für alle $x_0 < 0$ mit $f'(x_0) = -1$ und für alle $x_0 > 0$ mit $f'(x_0) = +1$. Damit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} |x|/x$ nicht und f ist in 0 *nicht* differenzierbar.

(g) Sei $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Der Grenzwert lässt sich hier nicht mehr ohne Weiteres direkt bestimmen. Wir nutzen, dass für $x \in \mathbb{R}$ stets ein $n_0(x) = \lceil |x| \rceil \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x/n \geq -1$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$. Aus der Bernoulli'schen Ungleichung folgt dann

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x, \quad n \geq n_0(x).$$

Wegen $e^x = \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$, erhält man daraus die Ungleichung $e^x \geq 1 + x$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir konstruieren nun eine Einschachtelung (siehe Satz 5.3.5), um obigen Grenzwert zu bestimmen. Zunächst folgt aus der Ungleichung

$$\begin{aligned}
1 + (x - x_0) &\leq e^{x - x_0} \\
&= \frac{1}{e^{x_0 - x}} \\
&\leq \frac{1}{1 + (x_0 - x)} \\
&= 1 + \frac{(x - x_0)}{1 - (x - x_0)},
\end{aligned}$$

also gilt

$$
\begin{aligned}
(x - x_0) \leq e^{x-x_0} - 1 \leq \frac{(x - x_0)}{1 - (x - x_0)} \\
\iff e^{x_0} \leq \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} \leq \frac{1}{1 - (x - x_0)} e^{x_0}.
\end{aligned}
$$

Damit gilt für die Ableitung

$$
f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.
$$

(h) Sei $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, dann gilt mit der 3. binomischen Formel

$$
f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \quad x_0 > 0.
$$

Man beachte, dass f in 0 *nicht* differenzierbar ist!

Bemerkung 10.1.3

Für die Ableitung einer Funktion haben sich (im Laufe der Geschichte) verschiedene Notationen etabliert:
In der Leibniz'schen Formulierung schreibt man

$$
f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},
$$

wobei $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ als **Differentialquotient** und $(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$ als **Differenzenquotient** bezeichnet wird. Wir werden von Zeit zu Zeit sehen, wie mächtig die Leibniz'sche Schreibweise ist.
Von Newton stammt die Schreibweise $\dot{f}(x_0)$ statt $f'(x_0)$, die insbesondere in der Physik und Differentialgeometrie Verwendung findet.
Schreibt man die Funktionsvorschrift als $y = f(x)$, dann ist auch

$$
f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)
$$

eine gängige und praktische Notation.

Die Ableitungen der trigonometrischen Funkionen Sinus und Cosinus können wir elementargeometrisch herleiten.

Lemma 10.1.4: Ableitung von Sinus und Cosinus

Für $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ und $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ gelten:

$$(a) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) = \sin'(x) = \cos(x)$$
$$(b) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$$

Beweis. Wir greifen vor auf das Additionstheorem (10.15) in der Form

$$\sin(x+h) = \sin(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \cdot \sin(h)$$

und folgern daraus

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \cdot \sin(h) - \sin(x)}{h} \\
&= \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h-1)}{h}}_{=:A} + \cos(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{=:B}.
\end{aligned}$$

(i) Berechnung von A:

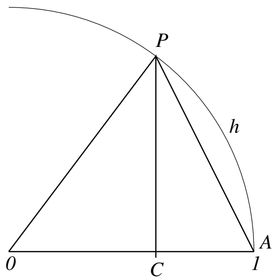

Abbildung 10.1.2. Zur Berechnung von A

Mit Blick auf Abbildung 10.1.2 ist der Punkt P gegeben durch $P = (\cos(h), \sin(h))$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\overline{AP}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{CA}^2 = \sin^2(h) + (1 - \cos(h))^2.$$

Da die Gerade kürzer ist als jede andere Strecke zwischen zwei Punkten, gilt $h > \overline{AP}$ und es folgt

$$\begin{aligned}0 &\leq \sin^2(h) + (1 - \cos(h))^2 \\ &= \sin^2(h) + 1 - 2\cos(h) + \cos^2(h) \\ &\leq h^2.\end{aligned}$$

Wegen $\sin^2(h) + \cos^2(h) = 1$ folgt sofort

$$0 \leq 1 - \cos(h) \leq \frac{h^2}{2} \iff 0 \leq \frac{1 - \cos(h)}{h} \leq \frac{h}{2}.$$

Betrachten wir nun $h \to 0$, dann ergibt sich aus der Einschachtelung

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0,$$

also $A = 0$.

(ii) Berechnung von B:

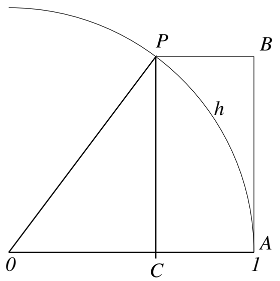

Abbildung 10.1.3. Zur Berechnung von B

Mit Blick auf Abbildung 10.1.3 gilt

$$\overline{PC} \leq h \leq \overline{PB} + \overline{BA},$$

wobei h wieder die Länge des Bogens bezeichnen soll. Das bedeutet

$$\sin(h) \leq h \leq (1 - \cos(h)) + \sin(h),$$

woraus

$$\frac{\sin(h)}{h} \leq 1 \leq \frac{1 - \cos(h)}{h} + \frac{\sin(h)}{h}$$

folgt. Für $h \to 0$ sei $\lim_{h \to 0} \sin(h)/h =: x$, dann folgt mit dem ersten Teil

$$x = \lim_{h \to 0} \sin(h)/h \leq 1 \leq \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} + x = x,$$

und somit ist $B = 1$.

Damit ist die Behauptung für den Sinus bewiesen. Ganz analog zeigt man auch $\cos'(x) = -\sin(x)$. □

Die geometrische Definition (10.1) besitzt leider einen inhärenten Nachteil: Als Steigung des Funktionsgraphen erscheint uns $f'(x_0)$ einfach als **Zahl**. Die eigentliche und tiefer liegende Idee der Ableitung ist aber die *Linearisierung* der Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, d. h., man man möchte f in einer Umgebung von $x_0 \in I$ bestmöglich durch eine lineare Funktion $g(x) = s(x - x_0) + a$ mit $s, a \in \mathbb{R}$ approximieren. Bestmöglich soll dabei heißen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - g(x_0 + h)}{h} = 0, \tag{10.2}$$

der Fehler $f(x_0+h)-g(x_0+h)$ geht also schneller gegen 0 als das linear gegen null strebende h. Angenommen g erfüllt (10.2), also

$$\frac{f(x_0 + h) - g(x_0 + h)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - a}{h} - s \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

dann folgt aus der Existenz des Grenzwerts zunächst $f(x_0 + h) - a \to 0$ für $h \to 0$, mithin $a = f(x_0)$. Weiterhin ergibt sich durch Einsetzen

$$s = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

und somit

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir sehen, der Graph von g ist gerade die Tangente an den Graph von f in x_0! Die Bestimmung der Steigung einer Funktion in einem Punkt x_0 vermöge (10.1) ist also äquivalent zur Bestimmung der bestmöglichen linearen Approximation. Für den Approximationsfehler gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right)(x - x_0) \\
&=: r(x)(x - x_0) \\
\iff \qquad f(x) &= g(x) + r(x)(x - x_0) \\
&= f(x_0) + \big(f'(x_0) + r(x)\big)(x - x_0)
\end{aligned}$$

Aus der Differenzierbarkeit von f in x_0 folgt nun, dass $r\colon I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 ist und $r(x_0) = 0$. Ist andererseits $r\colon I \to \mathbb{R}$ eine in x_0 stetige Funktion mit $r(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ so, dass obige Darstellung gilt, dann folgt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \lim_{x\to x_0} r(x) = f'(x_0)$$

Insgesamt haben wir eine Formulierung der Ableitung hergeleitet, die $f'(x_0)$ tatsächlich als lineare Abbildung zeigt:

Definition 10.1.5: Die Weierstraß'sche Formulierung

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn eine lineare Abbildung $f'(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine in x_0 stetige Funktion $x \mapsto r(x)$ mit $r(x_0) = 0$ existieren, so dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0). \tag{10.3}$$

Offenbar ist

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

die Gleichung der **Tangente** an f im Punkt x_0.

Bevor wir nun wirklich in die Differentialrechnung einsteigen, wollen wir noch eine weitere nützliche Formulierung der Ableitung geben. Setzen wir in (10.3) $\varphi(x) := f'(x_0) + r(x)$, dann folgt

Definition 10.1.6: Caratheodorys Formulierung

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn eine in x_0 stetige Funktion $x \mapsto \varphi(x)$ existiert, so dass

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0). \tag{10.4}$$

Offenbar ist $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

Korollar 10.1.7

Die Formulierung von Caratheodory erlaubt zwei einfache Folgerungen:

(a) Ist eine Funktion f in x_0 differenzierbar, dann ist f auch stetig in x_0. Dies folgt direkt aus (10.4), denn

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| &= \lim_{x \to x_0} |\varphi(x)||x - x_0| \\ &= |f'(x_0)| \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) Die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ist für $x \neq x_0$ eindeutig bestimmt. Damit ist aber auch im Fall der Existenz $f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Nach Satz 7.2.9 nimmt jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ihr Minimum und Maximum an. Neben der Existenz solcher kritischen Stellen sagt der Satz aber nichts über deren Lage aus, d. h., wir wissen nicht, an welchen Punkten des Intervalls die Funktion minimal bzw. maximal wird.

Im Fall einer differenzierbaren Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ liefert die Ableitung nun ein *notwendiges Kriterium*, ob die Funktion an einem Punkt $x_0 \in I$ ein (lokales) Minimum oder Maximum, d. h. ein Extremum besitzt.

Satz 10.1.8

Ist $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ in $x_0\ \in]a,b[$ differenzierbar und $f'(x_0) > 0$, dann existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\begin{aligned} \forall x \in]a,b[\text{ mit } x_0 < x < x_0 + \delta: &\quad f(x) > f(x_0), \\ \forall x \in]a,b[\text{ mit } x_0 - \delta < x < x_0: &\quad f(x) < f(x_0). \end{aligned}$$

Hat f in x_0 ein Extremum, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Wenn $f'(x_0) > 0$, dann ist auch $\varphi(x_0) > 0$ in (10.4). Da φ in x_0 stetig ist, gilt $\varphi(x) > 0$ noch in einer Umgebung von x_0 und die Aussage des Satzes folgt damit aus Korollar 10.1.7 (b).

Hat f ein Extremum in x_0, dann ist $f(x) \le f(x_0)$ im Fall eines Maximums auf beiden Seiten von x_0, bzw. $f(x) \ge f(x_0)$ bei einem Minimum. Das kann aber nur dann sein, wenn $f'(x_0) = 0$. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts bemerken wir noch, dass die Ableitung f' selbst auch wieder differenziert werden kann, falls die Funktion f hinreichend "glatt" ist.

Definition 10.1.9: Höhere Ableitungen

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I. Ist die Ableitung $f'\colon I \to \mathbb{R}$ wieder differenzierbar, dann heißt f **zweimal differenzierbar** auf I und man schreibt

$$f''(x) := (f')'(x), \quad x \in I.$$

Mit $f^{(0)} := f$ definiert man für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ allgemein

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x), \quad x \in I,$$

und f heißt **n-mal differenzierbar**, falls $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Ist zudem $f^{(n)}\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, dann heißt f **n-mal stetig differenzierbar**. Existieren alle Ableitungen $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ auf I, dann heißt f **unendlich oft differenzierbar**.

10.2 Rechenregeln

Die Beispiele 10.1.2 (d) und (g) zeigen bereits, dass die Bestimmung einer Ableitung durch Bilden des Grenzwerts (10.1) mitunter recht aufwendig ist. Daher kommen wir nun zu einigen Regeln, die das Berechnen der Ableitung auch ohne expliziete Grenzwertbestimmung erlauben.

Satz 10.2.1

Sind $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, dann sind es auch

$$f+g, \quad f\cdot g, \quad \frac{f}{g} \ (\text{falls } g(x_0) \neq 0)$$

und es gelten

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + f'(x_0) \qquad (\textbf{Summenregel})$$

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad (\textbf{Produktregel})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \qquad (\textbf{Quotientenregel})$$

Beweis. Seien $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$.

(a) Aus der Definition der Ableitung folgt sofort

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(b) Der Differenzenquotient eines Produktes lässt sich umformen zu

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nun ist f stetig in x_0 und damit folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0).$$

(c) Sei nun zudem $g(x_0) \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right)\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}\left(\frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h}\right)\\ &= -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

Zusammen mit der Produktregel folgt daraus die Quotientenregel.

□

Beispiel 10.2.2

Allein aus diesen einfachen Regeln folgt bereits, dass alle rationalen Funktionen $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ auf ihrem Definitionsbereich $\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ differenzierbar sind. Für

$$f(x) = \frac{x^7 + 7x}{3x^2 + x + 4} =: \frac{g(x)}{h(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

folgt mit

$$g'(x) = 7x^6 + 7 \quad \text{sowie} \quad h'(x) = 6x + 1$$

und der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(7x^6 + 7)(3x^2 + x + 4) - (x^7 + 7x)(6x + 1)}{(3x^2 + x + 4)^2} \\ &= \frac{15x^8 + 6x^7 + 28x^6 - 21x^2 + 28}{(3x^2 + x + 4)^2}. \end{aligned}$$

Wie verhält es sich mit der Komposition differenzierbarer Funktionen?

Satz 10.2.3: Die Kettenregel

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subseteq J$, differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$. Dann ist $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gilt die **Kettenregel**:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \tag{10.5}$$

Beweis. Nach (10.4) gilt:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \varphi(x)(x - x_0), \quad \varphi(x_0) = f'(x_0) \\ g(y) - g(y_0) &= \psi(y)(y - y_0), \quad \psi(y_0) = g'(y_0) \end{aligned}$$

Setzen wir nun $f(x) = y$ und $f(x_0) = y_0$ in die zweite Gleichung ein, dann folgt:

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) \\ &= \psi(f(x))\varphi(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von φ in x_0 bzw. ψ in y_0 ist auch $\psi(f(x)) \cdot \varphi(x)$ stetig in x_0. Nach (10.4) ist $g \circ f$ damit differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = \psi(f(x_0)) \cdot \varphi(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

□

Bemerkung 10.2.4

Die Überlegenheit der Leibniz'schen Schreibweise zeigt sich besonders bei der Kettenregel. Im Fall einer verketteten Funktion

$$y = f(g(h(j(x))))$$

leitete Leibniz einfach von links nach rechts ab und erhielt so

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}j} \cdot \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x}.$$

Dass diese Beziehung richtig sein muss, sah Leibniz einfach dadurch, dass er die Differentialquotienten als wirkliche Quotienten ansah und kürzte, denn

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\cancel{\mathrm{d}g}} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{d}g}}{\cancel{\mathrm{d}h}} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{d}h}}{\cancel{\mathrm{d}j}} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{d}j}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

zeigt, dass wir tatsächlich die Ableitung von $y = f(x)$ nach x berechnet haben!
Anfängerinnen und Anfänger sind in der Regel geschockt, wenn wir sie mit dem Leibniz'schen Kalkül konfrontieren, denn natürlich lernen sie, dass man den Differentialquotienten *in gar keinem Fall* als einen gewöhnlichen Quotienten auffassen darf! Lehnt euch zurück und werdet locker: Leibniz hat seine Notation gerade so gemacht, dass man es (heimlich!) doch darf!

Die Kettenregel (10.5) beschränkt sich natürlich nicht nur auf den Fall zweier Funktionen, sondern überträgt sich rekursiv auf die Komposition beliebig vieler Funktionen. Wir geben zwei Beispiele; das erste verwendet einfach (10.5), das zweite nutzt den Leibniz'schen Kalkül.

Beispiel 10.2.5

(a) Die Funktion

$$f(x) = e^{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

kann als Komposition der Funktionen

$$u(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad h(u) = u^3, \quad g(h) = e^h,$$

in der Form $f(x) = g \circ h \circ u(x)$ geschrieben werden. Nach der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned}(g \circ h \circ u)'(x) &= g'(h \circ u(x)) \cdot (h \circ u)'(x) \\ &= g'(h \circ u(x)) \cdot h'(u(x)) \cdot u'(x)\end{aligned}$$

Einsetzen der Ableitungen

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \qquad \text{(Quotientenregel)} \\
h'(u) &= 3u^2 \\
g'(h) &= e^h
\end{aligned}
$$

liefert dann:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{(h\circ u)(x)} \cdot 3u(x)^2 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= e^{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3} \cdot 3\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{3x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^4} e^{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3}
\end{aligned}
$$

(b) Berechne die Ableitung der Funktion

$$y = f(x) = e^{\sqrt{\sin x^4}}.$$

Wir führen unsere „lokalen“ Definitionen ein:

$$
\begin{aligned}
j(x) &:= x^4, \qquad & h(j) &:= \sin j, \\
g(h) &:= \sqrt{h}, \qquad & f(g) &:= e^g,
\end{aligned}
$$

denn $f(x) = f(g(h(j(x))))$. Jetzt kommen die einzelnen Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} &= e^g = e^{\sqrt{h}} = e^{\sqrt{\sin j}} = e^{\sqrt{\sin x^4}} \\
\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h} &= \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{\sin j}} = \frac{1}{\sqrt{\sin x^4}} \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}j} &= \cos j = \cos x^4 \\
\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x} &= 4x^3
\end{aligned}
$$

Es gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}j} \cdot \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x}$ (denn nach dem „Kürzen“ ist das $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$!), also

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^{\sqrt{\sin x^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin x^4}} \cdot \cos x^4 \cdot 4x^3 \\
&= 4x^3 \cos x^4 \frac{e^{\sqrt{\sin x^4}}}{\sqrt{\sin x^4}}.
\end{aligned}
$$

Ist es nicht wunderbar, wie der Kalkül arbeitet?

(c) Allgemein gilt folgende Regel: Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann folgt für $g(x) := \exp \circ f(x) = e^{f(x)}$ aus der Kettenregel

$$g'(x) = f'(x)e^{f(x)}, \quad x \in I.$$

Nachdem wir Summen, Produkte, Quotienten und Kompositionen differenzierbarer Funktionen auf Differenzierbarkeit untersucht haben und dabei als Nebenprodukt auch immer nützliche Regeln gewinnen konnten, betrachten wir nun die Umkehrfunktion. Wir wissen bereits, dass sich die Stetigkeit im Falle einer bijektiven Funktion auf ihre Umkehrfunktion „vererbt“ (Satz 7.2.14). Gilt das auch für die Differenzierbarkeit?

Satz 10.2.6: Ableitung der Umkehrfunktion

Seien I und J Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I \to J$ bijektiv, stetig und differenzierbar in $x_0 \in I$. Weiterhin sei $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0) \in J$ und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{10.6}$$

Beweis. Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt nach (10.4)

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad \varphi(x_0) = f'(x_0).$$

Ersetzen von x bzw. x_0 durch $f^{-1}(y)$ bzw. $f^{-1}(y_0)$ sowie von $f(x)$ bzw. $f(x_0)$ durch y bzw. y_0 liefert

$$y - y_0 = \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)).$$

Nach Voraussetzung ist $\varphi(f^{-1}(y_0)) = f'(x_0) \neq 0$. Da die Funktion φ stetig in x_0 und f^{-1} nach Satz 7.2.14 stetig in y_0 ist, ist auch die Komposition $\varphi \circ f^{-1}$ stetig in y_0 und daher $\varphi(f^{-1}(y)) \neq 0$ in einer Umgebung von y_0. In dieser Umgebung gilt dann

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}(y - y_0).$$

Nach Satz 7.2.5 ist $1/(\varphi \circ f^{-1})$ stetig in y_0 und damit f^{-1} nach (10.4) differenzierbar in y_0 mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

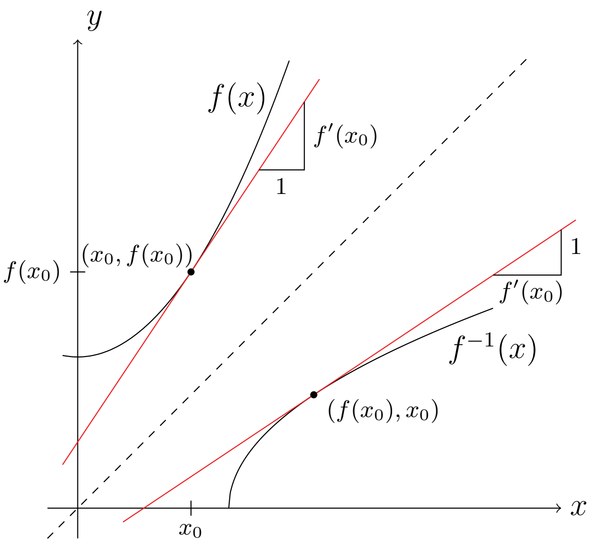

Abbildung 10.2.1. Die Ableitung der Umkehrfunktion

Bemerkung 10.2.7

Lasst uns noch einmal etwas Begeisterung für Leibniz's genialen Kalkül versprühen. In seiner Notation liest sich (10.6) nämlich einfach: Ist $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$ die Umkehrfunktion, dann ist (nach den Regeln der Bruchrechnung!)

$$f' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{(f^{-1})'}.$$

Als Beispiel möge uns $y = \sqrt{x}$ dienen. Wir wissen, dass $y = x^{1/2}$ die Umkehrfunktion von $x = y^2$ ist, also folgt mit $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 2y$ nach Leibniz:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Noch ein Beispiel gefällig? Die Funktion $y = f(x) = \ln x$ ist die Umkehrfunktion von $x = e^y$. Wir wissen bereits $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = e^y$, also folgt sofort:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Mit den Ableitungsregeln können wir nun die Ableitung wichtiger elementarer Funktionen bestimmen.

Beispiele 10.2.8: Logarithmus- und Potenzfunktionen

(a) Wir wissen bereits, dass $f(x) := e^x$ als Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ bijektiv ist und differenzierbar mit $f'(x) = e^x \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Daher ist die Umkehrfunktion $f^{-1} = \ln\colon\ ]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar und an der Stelle $y = e^x$ gilt für die Ableitung

$$\ln'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

(b) Für den *allgemeinen Logarithmus* zu einer Basis $a > 0$ gilt nach (a) und Eulers goldenen Regel

$$\log_a'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{x\ln(a)} = \frac{\log_a(e)}{x}, \quad x > 0.$$

(c) Für $a > 0$ ist $f(x) = a^x = \exp(x\ln(a))$ und daher gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x\ln(a)) = \ln(a)\cdot a^x.$$

(d) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f(x) = x^a$ mit $x > 0$. Mit dem gleichen Ansatz wie in (c) erhält man für die Ableitung der *allgemeinen Potenz*

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(a\ln(x)) = \frac{a}{x}x^a = ax^{a-1}.$$

(e) Als nächstes probieren wir mal

$$\left(e^{e^{e^{e^x}}}\right)'$$

zu berechnen. Wir fangen „ganz oben“ an:

$$j(x) := e^x \qquad h(j) := e^j$$
$$g(h) := e^h \qquad f(g) := e^g$$

Die einzelnen Ableitungen sind einfach zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x} &= e^x\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}j} &= e^j = v\\
\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h} &= e^h = e^{e^j} = e^{e^{e^x}}\\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} &= e^g = e^{e^h} = e^{e^{e^j}} = e^{e^{e^{e^x}}}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gesamte Ableitung zu

$$\left(e^{e^{e^{e^x}}}\right)' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}j}\cdot\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x} = e^{e^{e^{e^x}}}\cdot e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x}\cdot e^x.$$

Beispiele 10.2.9: Arcusfunktionen

(a) Die Funktion

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni x \quad \mapsto \quad \sin(x) \in [-1, 1]$$

ist bijektiv und differenzierbar (also insbesondere stetig) mit

$$\sin'(x) = \cos(x) \neq 0 \quad \text{für} \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

Die Umkehrfunktion *Arcussinus* (die Funktion liefert gerade den zu einem Sinuswert korrespondierenden Bogen, also Winkel, daher der Name) ist deshalb auf $\sin(]-\pi/2, \pi/2[) =]-1, 1[$ ebenfalls differenzierbar und für die Ableitung an der Stelle $y = \sin(x) \in]-1, 1[$ folgt

$$\begin{aligned}\arcsin'(y) = (\sin^{-1})'(y) &= \frac{1}{\sin'(x)} \\ &= \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.\end{aligned}$$

(b) Für den *Arcuskosinus* ergibt ein analoges Vorgehen wie in (a) für die Ableitung

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad y \in]-1, 1[.$$

(c) Für den Tangens gilt zunächst

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0\end{aligned}$$

für $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Also ist der *Arcustangens* auf $\tan(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$ differenzierbar und für die Ableitung an der Stelle $y = \tan(x) \in \mathbb{R}$ folgt

$$
\begin{aligned}
\arctan'(y) = (\tan^{-1})'(y) &= \frac{1}{\tan'(x)} \\
&= \cos^2(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} \\
&= \frac{1}{\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} \\
&= \frac{1}{1+y^2}.
\end{aligned}
$$

(d) Für den *Arcuskotangens* ergibt ein analoges Vorgehen wie in (c) für die Ableitung

$$\operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

10.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir kommen nun zu einem der großartigsten Ergebnisse der Mathematik überhaupt! Die Analysis konnte ihren Siegeszug erst antreten, als klar wurde, dass Differentiation und Integration zwei zueinander inverse Operationen sind. Diese Einsicht gelang Leibniz und Newton unabhängig voneinander. Zunächst halten wir fest, dass aus Integration eine differenzierbare Funktion hervorgeht.

Satz 10.3.1: Existenz einer Stammfunktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ist dann differenzierbar auf $]a, b[$ und es gilt

$$F'(x) = f(x).$$

Definition 10.3.2: Stammfunktionen

Eine Funktion F wie in Satz 10.3.1 heißt eine **Stammfunktion** von f.

Beweis. Weil f stetig ist, existiert F nach Satz 9.2.5. Für $x, x_0 \in [a,b]$ gilt

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d. h.

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aus dem Mittelwertsatz 9.4.1 folgt

$$F(x) - F(x_0) = f(\xi)(x - x_0)$$

mit einem ξ irgendwo zwischen x_0 und x. Für $x \to x_0$ folgt dann $\xi \to x_0$, und da f stetig ist, gilt weiter $\lim_{\xi \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$. Das zeigt die Differenzierbarkeit von F in x_0 nach (10.4) mit $F'(x_0) = f(x_0)$. Da $x_0 \in [a,b]$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 10.3.3: Satz von Rolle

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar mit $f(a) = f(b)$. Dann gilt

$$\exists \xi \in]a,b[: \quad f'(\xi) = 0.$$

Beweis. Da f stetig ist, existieren $u, U \in [a,b]$, so dass

$$f(u) \le f(x) \le f(U) \quad \forall x \in [a,b].$$

Gilt $f(u) = f(U)$, dann ist $f = \text{const.}$ und $f' \equiv 0$. Für $f(u) < f(U)$ ist mindestens einer der beiden Werte verschieden von $f(a) = f(b)$. Dieser Wert sei $f(U)$. Dann gilt $a < U < b$ und nach Satz 10.1.8 ist $f'(U) = 0$. □

Wie in der Integralrechnung gibt es auch in der Differentialrechnung einen Mittelwertsatz, der ebenfalls von zentraler Bedeutung in der Analysis ist. Er ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Rolle und folgt unmittelbar aus diesem.

Satz 10.3.4: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann gilt

$$\exists \xi \in]a,b[: \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Beweis. Subtrahiere die Strecke von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$ von f und wende den Satz von Rolle an: Für

$$h(x) := f(x) - \left(f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)$$

gilt $h(a) = h(b) = 0$ und

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit $h'(\xi) = 0$, woraus direkt die Behauptung folgt. □

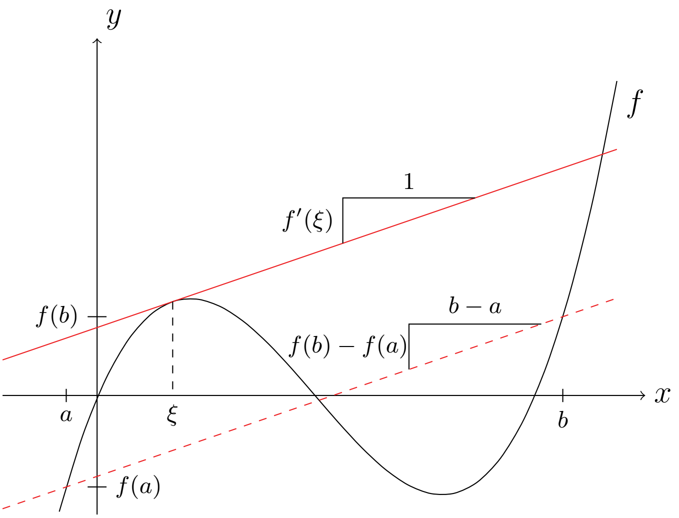

Abbildung 10.3.1. Der Mittwelwertsatz der Differentialrechnung

Mithilfe des Mittelwertsatzes können wir aus Eigenschaften der Ableitung auf Eigenschaften der Funktion selbst schließen.

Korollar 10.3.5

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gelten:

(a) Aus $f'(\xi) = 0 \ \forall \xi \in]a, b[$ folgt $f(x) = f(a)$, $x \in [a, b]$, also $f = \text{const}$.
(b) Aus $f'(\xi) = g'(\xi) \ \forall \xi \in]a, b[$ folgt $f(x) = g(x) + \text{const.}$, $x \in [a, b]$.
(c) Aus $f'(\xi) > 0$ $(f'(\xi) < 0)$ $\forall \xi \in]a, b[$ folgt, dass f monoton wachsend (fallend) ist.

(d) Aus $|f'(\xi)| \leq M \ \forall \xi \in]a,b[$ folgt, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$, $x_1, x_2 \in [a,b]$.

Beweis. Anwendung von Satz 10.3.4 auf dem Intervall $[a,x]$ liefert (a) mit *const.=f(a)*. Aussage (b) folgt sofort aus (a), und (c) und (d) folgen aus Satz 10.3.4, angewendet auf $[x_1, x_2]$. □

So, nun ist es aber so weit für den Hauptsatz! Bisher haben wir nur eine konzeptuelle Darstellung des Integrals über Ober- und Untersummen bzw. Riemann-Summen. Im vorigen Kapitel hatten wir bereits gesehen, dass dieses Verfahren aber zur konkreten Berechnung von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nur bedingt geeignet ist. Mithilfe von Stammfunktionen gibt es nun in vielen Fällen einen weitaus bequemeren und eleganteren Weg zur Integration:

Satz 10.3.6: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Weiterhin gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)\big|_{x=a}^{b} \tag{10.7}$$

Beweis. Die Existenz einer Stammfunktion ist klar wegen Satz 10.3.1. Die Eindeutigkeit bis auf eine additive Konstante folgt aus Korollar 10.3.5 (b). Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, dann ist

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mathit{const.}$$

Einsetzen von $x = a$ liefert $\mathit{const.} = F(a)$, d. h. $F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + F(a)$. □

Bemerkung 10.3.7

Ist F *irgendeine* Stammfunktion einer gegebenen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, gilt also

$$f(x) = F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right), \quad x \in]a,b[,$$

dann schreibt man auch

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad F = \int f\,\mathrm{d}x,$$

obwohl es korrekterweise heißen müsste:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$$

für ein $C \in \mathbb{R}$. Das **unbestimmmte Integral** $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ steht also für die Menge aller Stammfunktionen bzw. für eine beliebige Stammfunktion von f. Im Gegensatz dazu, bezeichnet man $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ auch als **bestimmtes Integral**.

10.4 Elementare Integrationstechniken

Es gehört keinesfalls zum guten Ton, nicht zu wissen, wie man ein Integral ausrechnet. Daher ist ein kleiner Exkurs in elementaren Integrationstechniken notwendig. Mithilfe des Hauptsatzes lassen sich aus den uns bekannten Differentiationsregeln nun auch praktische Regeln zur Integration ableiten.

10.4.1 Die Substitutionsregel

Aus der Kettenregel der Differentialrechnung folgt eine sehr nützliche Regel für Integrale:

Satz 10.4.1: Die Substitutionsregel

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ integrierbar mit Stammfunktion F und $s\colon [a,b] \to I$ stetig differenzierbar mit $s([a,b]) \subseteq I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(s(x)) \cdot s'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{s(a)}^{s(b)} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{10.8}$$

Beweis. Nach der Kettenregel gilt

$$(F \circ s)'(x) = F'(s(x))s'(x) = f(s(x))s'(x), \quad x \in [a,b]$$

und die zweimalige Anwendung des Hauptsatzes liefert

$$\begin{aligned}\int_a^b f(s(x)) \cdot s'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (F \circ s)'(x)\,\mathrm{d}x = F \circ s(b) - F \circ s(a)\\ &= F(s(b)) - F(s(a)) = \int_{s(a)}^{s(b)} f(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

$\square$

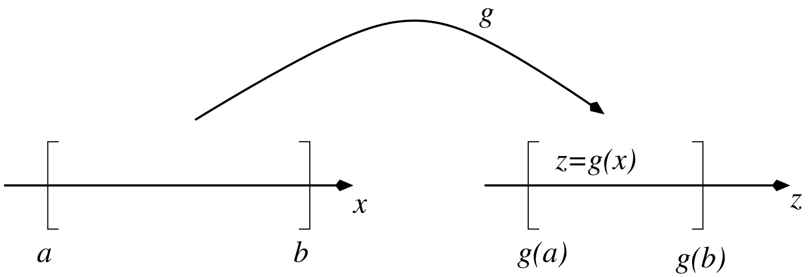

Abbildung 10.4.1. Zur Substitutionsregel

Wie bestimmt man nun ein Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe der Substitutionsregel? Zunächst bietet sie sich nicht für alle Integranden (so nennt man die zu integrierende Funktion) gleichermaßen an, sondern insbesondere für solche der Form $f(x) = f(x, s(x))$, d. h., f „enthält" einen Term $s(x)$, den man *substituieren* möchte. Gesucht ist dann eine Funktion g, sodass

$$f(x) = f(x, s(x)) = g(s(x)) \cdot s'(x). \tag{10.9}$$

Da g nur noch von $s(x)$ abhängt, liefert die Substitutionsregel in diesem Fall

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(s(x)) \cdot s'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{s(a)}^{s(b)} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Natürlich hat man nichts gewonnen, wenn g selbst wieder nur schwer zu integrieren ist. Die Kunst liegt hier in der geschickten Wahl von $s(x)$, sodass die Funktion g in (10.9) elementar zu integrieren bzw. eine Stammfunktion von g bereits bekannt ist. Am besten erklärt sich das Vorgehen anhand von Beispielen:

Beispiele 10.4.2

(a) Es soll

$$\int_0^1 e^{5x+2}\,\mathrm{d}x$$

bestimmt werden. Für den Integranden $f(x) = e^{5x+2}$ bietet sich die Substitution $s(x) = 5x + 2$ an. Aus $s'(x) = 5$ ergibt sich $g(s(x)) = e^{s(x)}/5$, denn $f(x) = e^{s(x)} \stackrel{!}{=} g(s(x)) \cdot s'(x)$. Mit der Substitutionsregel folgt daraus

$$\int_0^1 e^{5x+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{s(x)}}{5}\cdot 5\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{5}\int_2^7 e^s\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{5}(e^7 - e^2).$$

In der Praxis geht man häufig nicht so formal bei der Substitution vor, sondern nutzt die Leibniz'sche Notation: Wir interpretieren den Differentialquotienten als Bruch und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 5 \iff \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{d}s.$$

Einsetzen von $s = 5x + 2$ liefert dann sofort

$$\int_0^1 e^{5x+2}\,\mathrm{d}x = \int_2^7 e^s\frac{1}{5}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{5}(e^7 - e^2).$$

(b) Es soll

$$\int_1^2 x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

bestimmt werden. Wir setzen die Substitution $s(x) = 4 - x^2$ an, also $s'(x) = -2x$. Aus

$$f(x, s(x)) = x\sqrt{s(x)} \stackrel{!}{=} g(s(x))\cdot(-2x)$$

folgt $g(s(x)) = -\sqrt{s(x)}/2$ und somit

$$\int_1^2 \underbrace{x\sqrt{s(x)}}_{f(x,s(x))}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \underbrace{-\frac{1}{2}\sqrt{s(x)}}_{g(s(x))}\cdot\underbrace{(-2x)}_{s'(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{s(1)}^{s(2)} g(s)\,\mathrm{d}s$$
$$= -\frac{1}{2}\int_3^0 \sqrt{s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{s}\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot s^{\frac{3}{2}}\Big|_{s=0}^{3} = \frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 0\sqrt{0})$$
$$= \sqrt{3}.$$

Alternativ in Leibniz'scher Notation:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -2x \iff -\frac{1}{2}\mathrm{d}s = x\mathrm{d}x$$

und Einsetzen von $s = 4 - x^2$ liefert somit

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}x\,\mathrm{d}x = -\int_3^0 \frac{1}{2}\sqrt{s}\,\mathrm{d}s = \sqrt{3}.$$

(c) Manchmal hat man auch Glück und ein Integral liegt direkt in Form der linken Seite von (10.8) vor, wie beispielsweise im Fall

$$\int_0^1 7(1+x^7)^4 x^6 \,\mathrm{d}x.$$

Setzt man nämlich $f(s) = s^4$ und $s(x) = 1 + x^7$, dann folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}\int_0^1 7(1+x^7)^4 x^6 \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(s(x) \cdot s'(x) \,\mathrm{d}x = \int_1^2 s^4 \,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{5}s^5\bigg|_1^2 = \frac{31}{5}.\end{aligned}$$

Alternativ in Leibniz'scher Notation:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 7x^6 \iff \mathrm{d}s = 7x^6\mathrm{d}x$$

und Einsetzen von $s = 1 + x^7$ liefert somit

$$\int_0^1 7(1+x^7)^4 x^6 \,\mathrm{d}x = \int_1^2 s^4 \,\mathrm{d}s = \frac{31}{5}.$$

(d) Nicht immer muss eine Substitution zum Erfolg führen. Will man beispielsweise

$$\int_0^\pi \sin(x^2) \,\mathrm{d}x$$

berechnen, so liegt zunächst die Substitution $s(x) = x^2$ nahe. Wegen $s'(x) = 2x$ und $f(x) = \sin(s(x)) \stackrel{!}{=} g(s(x)) \cdot 2x$ ist

$$g(s(x)) = \frac{\sin(s(x))}{2\sqrt{s(x)}}$$

und somit

$$\int_0^\pi \sin(x^2) \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi g(s(x)) \cdot s'(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(s)}{\sqrt{s}} \,\mathrm{d}s.$$

Das Integral auf der rechten Seite können wir aber genauso wenig lösen wie das auf der linken Seite und die Substitution war damit nutzlos.

Eine weitere wichtige Integrationsregel, die sofort als Spezialfall aus der Substitutionsregel folgt, ist die sogenannte **logarithmische Integration**. Sie ist immer dann anwendbar, wenn wir auf Integrale der Form

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

stoßen. In diesem Fall führt die Substitution $s(x) = f(x)$ sofort auf

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{g(s(x))} \cdot \underbrace{f'(x)}_{s'(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{s(a)}^{s(b)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \ln(|s|)\Big|_{s=s(a)}^{s(b)}, \qquad (10.10)$$

wobei man Beträge verwendet, da sowohl der Integrand $1/s$ als auch die rechte Seite $\ln|s|$ beide für alle $x \neq 0$ erklärt sind und eine Fallunterscheidung $\ln'|s| = 1/s$ zeigt.

Beispiel 10.4.3

Wir wollen

$$g(x) = \frac{6x+1}{9x^2+3x-7}$$

über $[1,2]$ integrieren. Setze $f(x) = 9x^2 + 3x - 7$, dann zeigt genaues Hinsehen

$$\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{18x+3}{9x^2+3x-7}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

und mit (10.10) folgt

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{6x+1}{9x^2+3x-7}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\ln(|s|)\Big|_{f(1)=5}^{f(2)=35} \\ &= \frac{\ln(35)-\ln(5)}{3} \\ &= \frac{\ln(7)}{3}.\end{aligned}$$

Neben der Berechnung bestimmter Integrale, können wir auch Stammfunktionen mithilfe der Substitutionsmethode ermitteln: Angenommen $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist eine integrierbare Funktion, sodass (10.9) gilt. Ist G eine Stammfunktion von g, dann folgt aus der Kettenregel

$$(G \circ s)'(x) = g(s(x))s'(x) = f(x),$$

also ist $F = G \circ s$ eine Stammfunktion von f. Den letzten Schritt nennt man auch *Rücksubstitution.*

Beispiele 10.4.4

Wir greifen die vorherigen Beispiele noch einmal auf.

(a) Es gilt $f(x) = e^{5x+2} = (e^{s(x)}/5) \cdot s'(x)$ mit $s(x) = 5x+2$. Weiterhin wissen wir bereits
$$\int \frac{e^s}{5}\,\mathrm{d}s = \frac{e^s}{5},$$
also ist
$$\int e^{5x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{s(x)}}{5} = \frac{1}{5}e^{5x+2}.$$

(b) Es gilt
$$f(x) = x\sqrt{4-x^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{s(x)} \cdot s'(x)$$
mit $s(x) = 4 - x^2$. Weiterhin gilt
$$\int -\frac{\sqrt{s}}{2}\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int \sqrt{s}\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}s^{3/2} = -\frac{1}{3}s^{3/2}$$
und somit ist
$$\int x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}s(x)^{3/2} = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}.$$

(c) Es gilt
$$f(x) = 7(1+x^7)^4x^6 = (s(x))^4 s'(x)$$
mit $s(x) = 1 + x^7$. Wegen $\int s^4\,\mathrm{d}s = s^5/5$ ist
$$\int 7(1+x^7)^4x^6\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}s(x)^4 = \frac{1}{5}(1+x^7)^5.$$

(d) Es gilt
$$f(x) = \frac{6x+1}{9x^2+3x-7} = \frac{s'(x)}{3s(x)}$$
mit $s(x) = 9x^2 + 3x - 7$. Wegen $\int 1/(3s)\,\mathrm{d}s = \ln|s|/3$ ist
$$\int \frac{6x+1}{9x^2+3x-7}\,\mathrm{d}s = \frac{\ln|s(x)|}{3} = \frac{\ln|9x^2+3x-7|}{3}.$$

Wir wollen noch ein weiteres Beispiel geben, um zu zeigen, dass die Wahl einer geeigneten Substitution nicht immer direkt offensichtlich ist. Die Integration nichtrationaler Funktionen mittels Substitution gleicht einer Kunst, die zu erlernen nur durch viel Übung und Erfahrung gelingt.

(e) Es soll

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

bestimmt werden. Ein naheliegender Ansatz ist $s(x) = \sin(x)$, also $s'(x) = \cos(x)$ und

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(x)\cos(x)} &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)\cos^2(x)}\\ &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)\left(1-\sin^2(x)\right)}\\ &= \frac{s'(x)}{s(x)\,(1-s(x)^2)}.\end{aligned}$$

Das Integral

$$\int \frac{1}{s(1-s^2)}\,\mathrm{d}s = \int \frac{1}{s-s^3}\,\mathrm{d}s$$

ist nun aber auch nur mithilfe von Partialbruchzerlegung lösbar, die wir noch kennenlernen werden. In diesem Sinne führt die Substitution zwar letztendlich zum Ziel, aber es geht viel eleganter: Setzt man $s(x) = \tan(x)$, dann ist $s'(x) = 1/\cos^2(x)$ und

$$\frac{1}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cos^2(x)} = \frac{1}{\tan(x)\cos^2(x)} = \frac{s'(x)}{s(x)}.$$

Wegen

$$\int \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \ln|s|,$$

folgt durch Rücksubstitution sofort

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\tan(x)|.$$

10.4.2 Die partielle Integration

Auch die Produktregel liefert in Kombination mit dem Hauptsatz eine sehr wichtige Integrationsregel.

Satz 10.4.5: Partielle Integration

Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_{x=a}^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.11}$$

sowie

$$\int f'g\,\mathrm{d}x = fg - \int fg'\,\mathrm{d}x. \tag{10.12}$$

Beweis. Nach der Produktregel gilt zunächst

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Mit dem Hauptsatz folgt daraus

$$\begin{aligned} f(x)g(x)|_{x=a}^b &= \int_a^b (f \cdot g)'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

also (10.11). Analog erhält man (10.12). □

Folgende Beispiele veranschaulichen das Vorgehen bei der partiellen Integration.

Beispiele 10.4.6

(a) Man bestimme

$$\int_0^1 x^2 e^x\,\mathrm{d}x.$$

Da $(e^x)' = e^x$ liegt der Ansatz $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x^2$ nahe. Partielle Integration liefert dann

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{x^2}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{f'(x)}\,\mathrm{d}x &= \underbrace{x^2 e^x}_{g(x)f(x)}\,|_{x=0}^1 - \int_0^1 \underbrace{2x}_{g'(x)}\underbrace{e^x}_{f(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= e - 2\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Für das Integral auf der rechten Seite ergibt sich durch nochmalige partielle Integration analog

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x|_{x=0}^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - e = 0,$$

also ist $\int_0^1 x^2 e^x \,\mathrm{d}x = e$.

(b) Es soll eine Stammfunktion von $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ für $x \in]-1,1[$ bestimmt werden. Mit dem „Trick“ $f(x) = x$ und wegen

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

folgt aus (10.12)

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

also

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right).$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $g_n(x) := (1+x^2)^{-n}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{n}{(1+x^2)^{n-1}} \cdot \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x \\ &= \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}\end{aligned}$$

liefert der gleiche Trick wie in (b)

$$\begin{aligned}I_n &:= \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{2n(1+x^2) - 2n}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}.\end{aligned}$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach I_{n+1} erhalten wir die *rekursive* Darstellung

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Aus Beispiel 10.2.9 (c) folgt für $n = 1$ direkt

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)$$

und daher

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan(x), \\
I_3 &= \int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan(x)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{(5+x^2)x}{(1+x^2)^2} + 3\arctan(x)\right),
\end{aligned}$$

usw.

10.4.3 Die komplexen Zahlen

Es gibt noch eine weitere elementare Integrationsregel, die man unbedingt kennen sollte: die **Integration durch Partialbruchzerlegung**. Dazu ist es jedoch notwendig, dass wir eine neue Menge von Zahlen einführen, die **komplexen Zahlen**. Diese Zahlen sind die Grundlage der **komplexen Funktionentheorie**, aber auch in der reellen Analysis spielen sie eine so wichtige Rolle, dass man mit ihnen umgehen können *muss*!

Die Gauß'sche Ebene

Die einfache Gleichung $x^2 = -1$ ist in den reellen Zahlen nicht lösbar und daher hat man früh (seit dem 16. Jahrhundert) – allerdings damals erfolglos – nach Lösungsmöglichkeiten gesucht. Der italienische Mathematiker Gerolamo Cardano (1501–1576) war wohl der Erste, der klar erkannte, dass Wurzeln aus negativen Zahlen durchaus bei der Lösung algebraischer Gleichungen auftreten können. Aber er hatte letztlich kein Rezept, das Problem zu lösen. Das gelang erst Carl Friedrich Gauß (1777–1855) an der Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert. Er führte die **imaginäre Einheit**

$$i^2 = -1$$

ein und entwickelte die Vorstellung, dass die neuen Zahlen sich in einer Ebene darstellen lassen, in der **Gauß'schen Ebene**. Wir führen daher die **Menge**

der komplexen Zahlen ein als

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}.$$

Eine **komplexe Zahl** $z \in \mathbb{C}$ besitzt also die Darstellung

$$z = x + iy.$$

Dabei heißt

$$\Re z := x \in \mathbb{R}$$

der **Realteil** von z, und

$$\Im z := y \in \mathbb{R}$$

der **Imaginärteil**. Ist $x = 0$, dann liegt mit $z = iy$ eine rein **imaginäre Zahl** vor. Man kann an dieser Bezeichnung die Angst der alten Mathematiker vor diesen Zahlen erkennen, denn für uns sind imaginäre Zahlen genau so real (oder genau so irreal) wie reelle Zahlen. Wir folgen Gauß und stellen diese Zahlen als „Zeiger“ (Vektoren) in der Gauß'schen Ebene dar.

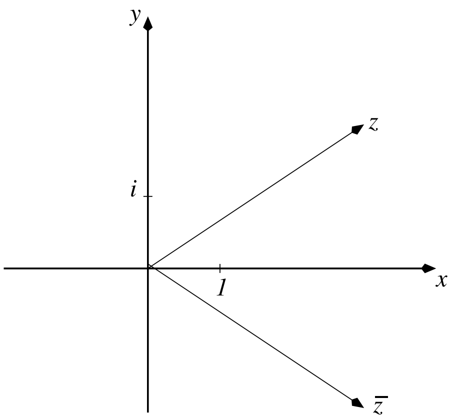

Abbildung 10.4.2. Zeiger in der Gauß'schen Ebene

Die komplexe Zahl

$$\overline{z} := x - iy$$

heißt die zu z **konjugiert komplexe** Zahl. Geometrisch entspricht die Konjugation gerade der Spiegelung an der reellen Achse.

Wir wollen nun unserer Menge von komplexen Zahlen eine algebraische Struktur geben, damit wir mit ihnen rechnen können.

Definition 10.4.7: Rechenoperationen in $\mathbb{C}$

Es seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ zwei komplexe Zahlen. Dann definieren wir die

(a) **Addition** durch

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

(b) **Multiplikation** durch

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &:= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Für die Division erweitern wir mit der komplex Konjugierten des Nenners:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Wegen

$$z_2 \cdot \overline{z_2} = (x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2) = x_2^2 + y_2^2 \in \mathbb{R}$$

können wir den **Betrag** der komplexen Zahl z mithilfe des Satzes von Pythagoras definieren als

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Damit haben wir eine Regel erhalten für die

(c) **Division** durch

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Wenn wir die Axiome für einen Körper untersuchen, kommen wir zu der Aussage:

Satz 10.4.8

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweis. Siehe A.10.1. □

Bei der Erweiterung der reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen haben wir die Möglichkeit der **Anordnung** verloren, d. h., Aussagen wie $z_1 < z_2$ sind unmöglich und daher sinnlos. Allerdings erbt der Körper $\mathbb{C}$ natürlich die **Vollständigkeit** der reellen Zahlen, d. h., Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$ sind konvergent!

Lemma 10.4.9

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

(a) $\overline{\overline{z}} = z$

(b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(c) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ sowie $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(d) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

(e) $|z| = |\overline{z}|$

(f) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(g) $|\Re z|, |\Im z| \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|$

(h) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (**Dreiecksungleichung**)

Beweis. Bis auf (g) und die Dreiecksungleichung folgen alle Aussagen direkt aus den Definitionen bzw. sie lassen sich leicht nachrechnen. Für $z = x + iy$ ist einerseits $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq x, y$. Andererseits gilt wegen der Monotonie der Wurzel

$$\begin{aligned} (|x| + |y|)^2 &= x^2 + 2|x||y| + y^2 \geq x^2 + y^2 \\ \iff |x| + |y| &\geq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \end{aligned}$$

also folgt insgesamt (g). Für (h) rechnen wir

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \cdot (\overline{z + w}) \overset{(c)}{=} (z + w) \cdot (\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \overset{(b)}{=} |z|^2 + 2\Re(z\overline{w}) + |w|^2, \end{aligned}$$

wobei man $z\overline{w} + w\overline{z} = 2\Re(z\overline{w})$ leicht direkt nachrechnen kann. Weil aber

$$\Re(z \cdot \overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z| \cdot |w|$$

gilt, folgt

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

□

Bemerkung 10.4.10

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge komplexer Zahlen $z_n = x_n + iy_n$. Analog zu reellen Folgen konvergiert die Folge gegen eine komplexe Zahl $z = x + iy$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

Da

$$|x_n - x|, \ |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

nach Lemma 10.4.9 (g), gilt

$$z_n \to z \iff x_n \to x \quad \wedge \quad y_n \to y.$$

In weiterer Analogie heißt die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall k \geq 0\colon \quad |z_{n+k} - z_n| < \varepsilon.$$

Mit Lemma 10.4.9 (g) folgt also insgesamt:

$$\begin{aligned} & (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge} \\ \iff & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sind Cauchy-Folgen} \\ \iff & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sind konvergent} \\ \iff & (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent.} \end{aligned}$$

Auf diese Weise erbt der Körper $\mathbb{C}$ die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Polardarstellung, Potenzen und Wurzeln

Häufig ist es sinnvoll, eine komplexe Zahl nicht in der **kartesischen Form** $z = x + iy$ zu notieren, sondern in der **Polarform**

$$z = re^{i\varphi},$$

so dass der „Zeiger" z nicht durch seine beiden Koordinaten in der Gauß'schen Ebene beschrieben wird, sondern durch seinen Winkel φ und seine Länge $r := |z|$.

Damit unsere Polardarstellung sinnvoll ist, müssen wir die seltsame Funktion $e^{i\varphi}$ erklären und *definieren* hier

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{10.13}$$

Später werden wir sehen, dass diese Beziehung mithilfe von Potenzreihen tatsächlich beweisbar ist, aber zurzeit haben wir nur die Möglichkeit der Definition.

Lemma 10.4.11

Mit der Definition (10.13) lassen sich komplexe Zahlen $z = x + iy$ in der **Polarform**

$$z = x + iy = re^{i\varphi} \tag{10.14}$$

mit $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arctan(y/x)$ darstellen.

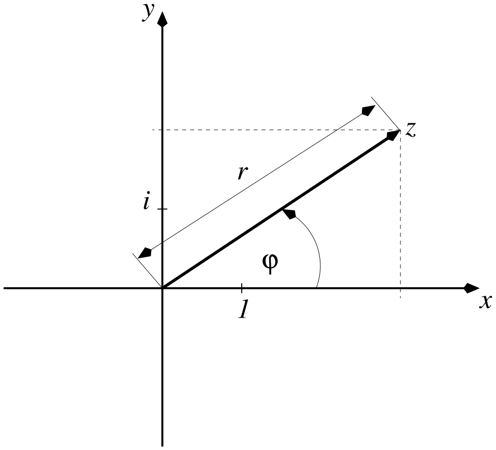

Abbildung 10.4.3. Polardarstellung einer komplexen Zahl

Beweis. Der Beweis verläuft ganz elementargeometrisch anhand von Abbildung 10.4.4. Offenbar ist

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \quad \text{sowie} \quad \cos\varphi = \frac{x}{r},$$

also

$$\frac{y}{x} = \tan\varphi$$

und damit

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Das gilt allerdings nur für $x > 0, y \geq 0$. Im Fall $x = 0, y > 0$ ist $\varphi = \pi/2$, für $x < 0$ ist $\varphi = \pi/2 + \arctan(y/x)$. Für $x = 0, y < 0$ haben wir $\varphi = 3\pi/2$ und schließlich ist $\varphi = 2\pi + \arctan(y/x)$ im Fall $x > 0, y < 0$. Diese Fallunterscheidungen sind notwendig wegen der Periodizität der Tangensfunktion, aber sie sollen uns hier nicht weiter beschäftigen.

Wenn $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, dann folgt sofort

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi \\ &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \overset{(10.13)}{=} re^{i\varphi}. \end{aligned}$$

□

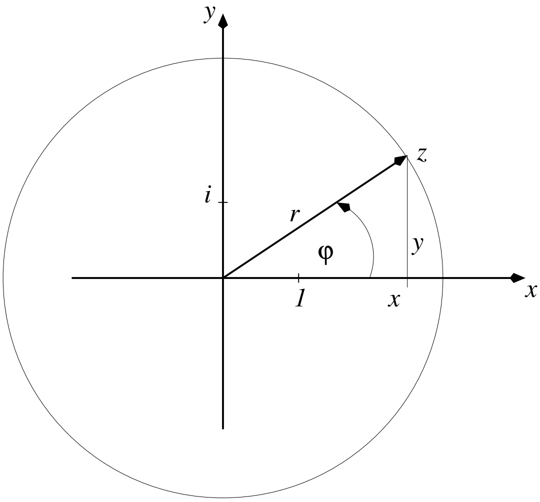

Abbildung 10.4.4. Polar- und kartesische Darstellung einer komplexen Zahl

Lemma 10.4.12: Additionstheoreme

Es gelten

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{10.15}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{10.16}$$

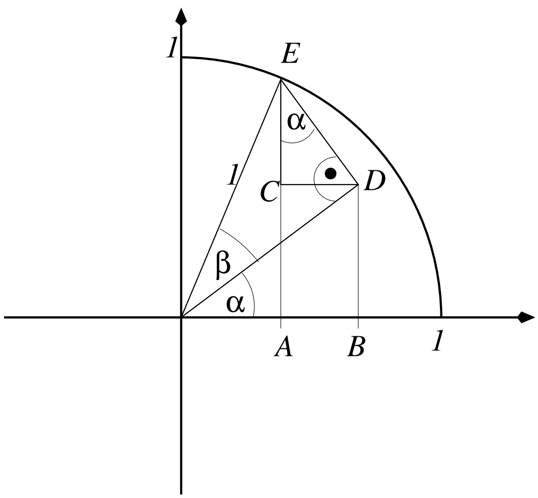

Abbildung 10.4.5. Geometrie für die Additionstheoreme

Beweis. Wir argumentieren an Abbildung 10.4.5. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \frac{AE}{OE} = \frac{BD}{OE} + \frac{CE}{OE} \\
&= \frac{BD}{OD} \cdot \frac{OD}{OE} + \frac{CE}{ED} \cdot \frac{ED}{OE} \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OE} - \frac{CD}{OE} \\
&= \frac{OB}{OD} \cdot \frac{OD}{OE} - \frac{CD}{ED} \cdot \frac{ED}{OE} \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

□

In der Polardarstellung lässt sich besonders hübsch rechnen.

Lemma 10.4.13

Seien $z = r_z e^{i\varphi},\ w = r_w e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

(a) $\overline{z} = r_z e^{-i\varphi}$

(b) $z \cdot w = r_z \cdot r_w \cdot e^{i(\varphi+\vartheta)}$

(c) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r_z}{r_w} e^{i(\varphi-\vartheta)}$

Den Kern dieser Rechenregeln bildet die Aussage $e^{i\varphi} \cdot e^{i\vartheta} = e^{i(\varphi+\vartheta)}$. Um zu zeigen, dass dies tatsächlich gilt, wenn wir unsere Definition (10.13) zugrunde legen, brauchen wir die obigen Additionstheoreme.

Beweis. Seien $z = r_z e^{i\varphi},\ w = r_w e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$.

(a) Beachtet man, dass *cos* eine gerade Funktion und *sin* eine ungerade Funktion ist, dann folgt

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= r_z \overline{(cos(\varphi) + i\sin(\varphi))} \\
&= r_z (cos(-\varphi) - i\sin(-\varphi)) \\
&= r_z e^{-i\varphi}.
\end{aligned}$$

(b) Es ist nur zu zeigen, dass tatsächlich $e^{i\varphi} \cdot e^{i\vartheta} = e^{i(\varphi+\vartheta)}$ gilt. Mithilfe von Lemma 10.4.12 folgt direkt

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \cdot e^{i\vartheta} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \\ &= (\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta) + i(\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta) \\ &\overset{\text{Lemma 10.4.12}}{=} \cos(\varphi+\vartheta) + i\sin(\varphi+\vartheta) \\ &= e^{i(\varphi+\vartheta)}. \end{aligned}$$

(c) Aus (a) und (b) folgt

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{1}{r_w^2} r_z e^{i\varphi} r_w e^{-i\theta} = \frac{r_z}{r_w} e^{i(\varphi-\theta)}.$$

□

Mithilfe der Polardarstellung können wir auch leicht Potenzen komplexer Zahlen bestimmen. Für $z = re^{i\varphi}$ ist $z^n = r^n e^{in\varphi}$ für $n \in \mathbb{N}$ und aufgrund unserer Definition (10.13) folgt insbesondere

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = e^{in\varphi} = (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Damit haben wir die berühmte **Formel von Moivre** gefunden:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \tag{10.17}$$

Wir können entsprechend auch Wurzeln aus komplexen Zahlen ziehen.

Definition 10.4.14: n-te Einheitswurzeln

Eine komplexe Zahl z, die für ein $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = 1$$

erfüllt, heißt **n-te Einheitswurzel**. Für $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt eine komplexe Zahl z **n-te Wurzel** aus a, falls $z^n = a$ gilt. Man schreibt in diesem Fall $z = \sqrt[n]{a}$.

Im Gegensatz zu reellen Wurzeln sind komplexe Wurzeln aufgrund der Periodizität von *sin* und *cos* nicht mehr eindeutig, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 10.4.15

Es gibt genau n n-te Einheitswurzeln, d. h. Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

und zwar

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Beweis. Wegen $|z^n| = |z|^n = 1$ gilt $|z| = 1$, d. h., z liegt auf dem Einheitskreis. Damit besitzt z die Polardarstellung

$$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

und wegen der Formel von Moivre (10.17) ist

$$z^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = 1.$$

Es können also nur solche $n\varphi$ auftreten, bei denen der Sinus verschwindet und der Cosinus gerade 1 ist. Also muss gelten:

$$n\varphi = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

was auf

$$\varphi = \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

führt. Davon sind nur n Werte voneinander verschieden, nämlich die für $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Damit sind die Einheitswurzeln gefunden:

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

□

Die Lage der 8-ten Einheitswurzeln in der komplexen Ebene zeigt Abbildung 10.4.6.

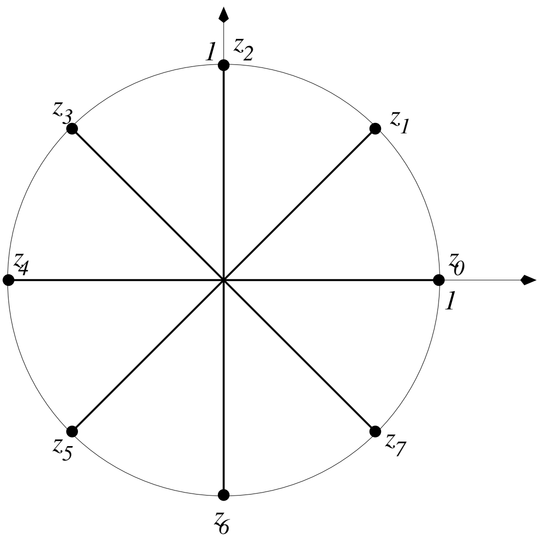

Abbildung 10.4.6. Die 8-ten Einheitswurzeln

Mithilfe der Einheitswurzeln lassen sich auch die Wurzeln beliebiger komplexer Zahlen bestimmen.

Lemma 10.4.16

Sei $a = re^{i\varphi} \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, dann existieren genau n n-te Wurzeln $\sqrt[n]{a}$, nämlich

$$z_k = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Beweis. Bedenkt man die Periodizität der komplexen e-Funktion, dann folgt mit (10.17)

$$z_k^n = r\left(e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}\right)^n = re^{i(\varphi+2\pi k)} = re^{i\varphi}.$$

□

Polynome und ihre Nullstellen in $\mathbb{C}$

In der elementaren Integrationstechnik der Partialbruchzerlegung werden wir es mit Polynomen und ihren komplexen Nullstellen zu tun haben. Aber auch sonst ist es wichtig, über Polynome Bescheid zu wissen.

Zuerst sehen wir, dass eine komplexe Nullstelle eines Polynoms niemals allein auftaucht.

Lemma 10.4.17

Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle eines Polynoms

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$, dann ist $\overline{z}$ ebenfalls Nullstelle.

Beweis. Ist $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, dann folgt mit Lemma 10.4.9 (c):

$$\begin{aligned}
P(\overline{z}) &= a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 \\
&\overset{a_k = \overline{a_k}}{=} \overline{a_n}\,\overline{z}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z}^{n-1} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{P(z)} = \overline{0} = 0
\end{aligned}$$

□

Jetzt brauchen wir nur noch den Hauptsatz der Algebra, den wir an dieser Stelle ohne Beweis zitieren.

Satz 10.4.18: Hauptsatz der Algebra

Jedes Polynom P vom Grad höchstens $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$. Dadurch lässt sich P über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerlegen:

$$P(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

wobei die z_k die nicht notwendig verschiedenen Nullstellen von P sind.

Gewöhnlich wird der Hauptsatz der Algebra in etwas trockenerer Form formuliert als: „Jedes Polynom vom Grad höchstens $n \geq 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$." Dann folgt aus der Polynomdivision, dass man diese Nullstelle abdividieren kann, so dass ein Polynom vom Grad höchstens $n - 1$ verbleibt, das nun wieder eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat.

Gibt es k paarweise verschiedene Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_k$ mit zugehörigen Vielfachheiten $m_1, m_2, \ldots, m_k$ und normieren wir das Polynom durch $a_n = 1$, dann lautet die Faktorisierung

$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdot (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_k)^{m_k}.$$

Nun aber zurück zur Integration durch Partialbruchzerlegung!

10.5 Integration durch Partialbruchzerlegung

Hier geht es nun um die Integration von rationalen Funktionen der Form

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

mit Polynomen mit reellen Koeffizienten P und Q. Alle solche Funktionen sind tatsächlich elementar integrierbar.

Wir wollen immer davon ausgehen, dass schon der Fall Grad $P <$ Grad Q vorliegt. Ist Grad $P \geq$ Grad Q, dann nutzen wir die Polynomdivision und überführen R in die Form

$$R(x) = S(x) + \frac{\hat{P}(x)}{Q(x)},$$

wobei S ein Polynom ist und nun Grad $\hat{P} <$ Grad Q gilt.

10.5.1 Die komplexe Version

Nun berechnen wir die Linearfaktordarstellung von Q, wobei wir $a_n = 1$ annehmen können:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-\alpha_1)^{m_1} \cdot (x-\alpha_2)^{m_2} \cdots (x-\alpha_k)^{m_k} \\ &= \prod_{i=1}^{k} (x-\alpha_i)^{m_i}, \end{aligned} \tag{10.18}$$

wobei die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ paarweise verschiedene Nullstellen mit zugehörigen Vielfachheiten $m_1, m_2, \ldots, m_k$ bezeichnen.

Satz 10.5.1

Sei Q wie in (10.18) faktorisiert und es gelte Grad $P <$ Grad Q, dann existieren Konstanten C_{ij}, so dass

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{C_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \tag{10.19}$$

Beweis. Wegen der Faktorisierung von Q gilt für eine Nullstelle α mit Vielfachheit m

$$Q(x) = (x-\alpha)^m \cdot q(x).$$

mit einem Polynom q. Wir zeigen: Es existieren eine Konstante C und ein Polynom p mit Grad$(p) <$ Grad$(Q)-1$, so dass

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^m q(x)} = \frac{C}{(x-\alpha)^m} + \frac{p(x)}{(x-\alpha)^{m-1} q(x)}.$$

Das ist offenbar äquivalent zu

$$P(x) = C \cdot q(x) + p(x) \cdot (x-\alpha).$$

Setzt man $x = \alpha$, dann wird die Wahl

$$C := \frac{P(\alpha)}{q(\alpha)}$$

motiviert. Das Polynom $p(x)$ ist das Resultat der Division von $P(x) - C \cdot q(x)$ durch $(x-\alpha)$, was zu zeigen war.

Wendet man diese Konstruktion rekursiv auf *alle weiteren* Nullstellen an, ergibt das schließlich die Zerlegung (10.19). □

Beispiel 10.5.2

Es sei

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{6x^4 + 20x^2 - 4x + 19}{x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4}.$$

Die Nullstelle $\alpha_1 = -1$ von Q kann man raten. Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{l}
\left(x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4\right) : (x+1) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 \\
\underline{x^5 + x^4} \\
\quad - 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 \\
\quad \underline{-2x^4 - 2x^3} \\
\qquad\quad - 3x^3 + x^2 + 8x + 4 \\
\qquad\quad \underline{-3x^3 - 3x^2} \\
\qquad\qquad\quad 4x^2 + 8x + 4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{4x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad\qquad - 4x + 4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-4x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Das Restpolynom $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ hat wieder die Nullstelle -1, und Polynomdivision liefert

$$\left(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4\right) : (x+1) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

Das Restpolynom $x^3 - 3x^2 + 4$ hat nun wieder die Nullstelle -1, und Polynomdivison zeigt

$$\left(x^3 - 3x^2 + 4\right) : (x+1) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Es gibt also zwei paarweise verschiedene Nullstellen: $\alpha_1 = -1$ mit Vielfachheit $m_1 = 3$ und $\alpha_2 = 2$ mit Vielfachheit $m_2 = 2$. Damit lautet die Faktorisierung von Q:

$$Q(x) = (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$$

Nach (10.19) ist

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{6x^4 + 20x^2 - 4x + 19}{x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4} \\
&= \frac{6x^4 + 20x^2 - 4x + 19}{(x+1)^3 \cdot (x-2)^2} \\
&= \frac{C_{11}}{x - \alpha_1} + \frac{C_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{C_{13}}{(x-\alpha_1)^3} + \frac{C_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{C_{22}}{(x-\alpha_2)^2} \\
&= \frac{C_{11}}{x+1} + \frac{C_{12}}{(x+1)^2} + \frac{C_{13}}{(x+1)^3} + \frac{C_{21}}{x-2} + \frac{C_{22}}{(x-2)^2}
\end{aligned}$$

und wir haben die fünf Koeffizienten $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}$ zu berechnen. Das geschieht, indem wir die letzte Gleichung mit $(x+1)^3 \cdot (x-2)^2$ multiplizieren:

$$\begin{aligned}
&6x^4 + 20x^2 - 4x + 19 \\
&= C_{11} \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2)^2 + C_{12} \cdot (x+1) \cdot (x-2)^2 \\
&\quad + C_{13} \cdot (x-2)^2 + C_{21} \cdot (x+1)^3 \cdot (x-2) \\
&\quad + C_{22} \cdot (x+1)^3
\end{aligned}$$

Die rechte Seite wird ausmultipliziert und nach Potenzen von x geordnet, was auf

$$\begin{aligned}
&6x^4 + 20x^2 - 4x + 19 \\
&= (C_{11} + C_{21})x^4 + (-2C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22})x^3 \\
&\quad + (-3C_{11} - 3C_{12} + C_{13} - 3C_{21} + 3C_{22})x^2 \\
&\quad + (4C_{11} - 4C_{13} - 5C_{21} + 3C_{22})x \\
&\quad + (4C_{11} + 4C_{12} + 4C_{13} - 2C_{21} + C_{22})
\end{aligned}$$

führt. Schließlich liefert ein Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}
C_{11} + C_{21} &= 6, \\
-2C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22} &= 0, \\
-3C_{11} - 3C_{12} + C_{13} - 3C_{21} + 3C_{22} &= 20, \\
4C_{11} - 4C_{13} - 5C_{21} + 3C_{22} &= -4, \\
4C_{11} + 4C_{12} + 4C_{13} - 2C_{21} + C_{22} &= 19,
\end{aligned}$$

und das ist ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten, das man beispielsweise mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren lösen kann. Man erhält

$$\begin{aligned}
&C_{11} = 3, \quad C_{12} = \frac{106}{27}, \quad C_{13} = \frac{49}{9}, \\
&C_{21} = 3, \quad C_{22} = \frac{187}{27}
\end{aligned}$$

und Einsetzen liefert die Partialbruchzerlegung

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3}{x+1} - \frac{106}{27(x+1)^2} + \frac{49}{9(x+1)^3} + \frac{3}{x-2} + \frac{187}{27(x-2)^2}.$$

Hat man die unbekannten Koeffizienten C_{ij} der Darstellung (10.19) berechnet, dann bleibt nur noch, die Integrale der rechten Seite von

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\int \frac{C_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} C_{ij}\int \frac{1}{(x-\alpha_i)^j}\,\mathrm{d}x$$

auszurechnen, was man mithilfe von

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^j}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{-1}{(j-1)(x-\alpha)^{j-1}} & ; j > 1 \\[2ex] \ln|x-\alpha| & ; j = 1 \end{cases} \tag{10.20}$$

bewerkstelligen kann.

Beispiel 10.5.3

Wir greifen das obige Beispiel noch einmal auf und erhalten

$$\begin{aligned} &\int \frac{6x^4+20x^2-4x+19}{x^5-x^4-5x^3+x^2+x+4}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\ln|x+1| + \frac{106}{27(x+1)} - \frac{49}{18(x+1)^2} \\ &\quad + 3\ln|x-2| - \frac{187}{27(x-2)} \\ &= 3\left(\ln|x+1| + \ln|x+2|\right) - \frac{18x^2+123x+56}{6x^3+18x+12}. \end{aligned}$$

Der Nachteil der eben beschriebenen Integration durch Partialbruchzerlegung liegt darin, dass einige der α_i komplex sein können. Wir müssten also vollständig in $\mathbb{C}$ rechnen. Um das zu vermeiden, verwenden wir jetzt unser Wissen um die Nullstellen von Polynomen, um eine reelle Variante herzuleiten.

10.5.2 Die reelle Version

Wir wissen: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von Q, dann ist nach Lemma 10.4.17 auch $\overline{z}$ eine Nullstelle. Ist also $z = \alpha + i\beta$ eine Nullstelle von Q, dann taucht in der Faktorisierung von Q immer ein Term der Form

$$(x - (\alpha + i\beta) \cdot (x - (\alpha - i\beta))$$

auf. Dieser Term ist nun aber reell, wie man leicht durch Ausmultiplizieren bestätigt:

$$(x - (\alpha + i\beta) \cdot (x - (\alpha - i\beta)) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$$

Damit sind wir in der Lage, eine reelle Version von Satz 10.5.1 zu beweisen.

Satz 10.5.4

Das Nennerpolynom Q besitze ℓ paarweise verschiedene konjugierte Paare komplexer Nullstellen $\alpha_j \pm i\beta_j$, $j = 1, 2, \dots, \ell$, und k paarweise verschiedene reelle Nullstellen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Dann besitzt Q die reelle Faktorisierung

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{\ell} \left((x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right)^{m_i} \prod_{i=1}^{k} (x-\gamma_i)^{n_i} \tag{10.21}$$

mit den zugehörigen Vielfachheiten m_i, n_i der Nullstellen. Sei P ein Polynom mit Grad $P <$ Grad Q, dann existieren Konstanten $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij} + B_{ij}x}{\left((x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right)^j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}. \tag{10.22}$$

Beweis. Die Faktorisierung (10.21) ist klar, ebenso die Behandlung der reellen Nullstellen in (10.22). Für ein komplexes Nullstellenpaar $\alpha \pm i\beta$ mit Vielfachheit m schreiben wir

$$Q(x) = \left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^m q(x).$$

Dann existieren reelle Konstanten A, B und ein Polynom p mit Grad$(p) <$ Grad(Q)-2, so dass

$$\frac{P(x)}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^m q(x)} = \frac{A + Bx}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^m} + \frac{p(x)}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^{m-1} q(x)}.$$

Das sieht man aus

$$P(x) = (A + Bx) \cdot q(x) + p(x) \cdot \left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right);$$

setzt man $x = \alpha \pm i\beta$, dann folgen A und B und p ergibt sich einfach aus der Division von

$$P(x) - (A + Bx) \cdot q(x)$$

durch $\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)$. Die Beziehung (10.22) ergibt sich dann durch rekursive Behandlung aller Nullstellen. $\square$

Beispiel 10.5.5

Es sei

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1+x}{1+x^4}.$$

Die Nullstellen von Q sind offenbar die 4-ten Wurzeln von -1. Wegen $-1 = e^{i\pi}$ sind diese nach Lemma 10.4.16 gegeben durch

$$z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{\left(i\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)}, \quad k = 0,1,2,3.$$

Die kartesischen Darstellungen lauten

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \\ z_1 &= -\frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Das Nennerpolynom Q besitzt also zwei komplexe Nullstellenpaare $1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2}$ und $-1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2}$. Nach (10.21) gilt daher

$$Q(x) = \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)\left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)$$

und nach (10.22) existieren geeignete Konstanten $A_{11}, B_{11}, A_{21}, B_{21}$ aus $\mathbb{R}$, sodass

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11} + B_{11}x}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{A_{21} + B_{21}x}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}.$$

Um die Konstanten zu bestimmen, multipliziert man beide Seiten mit Q und erhält so zunächst

$$\begin{aligned} P(x) =& (A_{11} + B_{11}x)\left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ &+ (A_{11} + B_{11}x)\left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ =&(A_{11} + A_{21}) + \left(\sqrt{2}(A_{11} - A_{21}) + (B_{11} + B_{21})\right)x \\ &+ \left((A_{11} - A_{21}) + \sqrt{2}(B_{11} + B_{21})\right)x^2 + (B_{11} + B_{21})x^3. \end{aligned}$$

Da $P(x) = 1 + x$, führt ein Koeffizientenvergleich auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_{11} + A_{21} &= 1 \\ \sqrt{2}(A_{11} - A_{21}) + B_{11} + B_{21} &= 1 \\ A_{11} + A_{21} + \sqrt{2}(B_{11} - B_{21}) &= 0 \\ B_{11} + B_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten und vierten Gleichung folgen $A_{21} = 1 - A_{11}$ und $B_{21} = -B_{11}$. Einsetzen in die zweite und dritte Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(2A_{11} - 1) = 1 &\iff A_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 + 2\sqrt{2}B_{11} = 0 &\iff B_{11} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

woraus dann auch unmittelbar

$$A_{21} = 1 - A_{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B_{21} = -B_{11} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

folgt. Insgesamt erhalten wir die Darstellung

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{x}{2\sqrt{2}}}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{x}{2\sqrt{2}}}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass man den zweiten Term in (10.22) mithilfe von (10.20) integrieren kann. Bleibt noch zu klären, wie sich der erste Term integrieren lässt. Man beachte dazu zunächst

$$\frac{A + Bx}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^j} = \frac{B(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^j} + \frac{A + B\alpha}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^j}. \tag{10.23}$$

Mit der Substitution $s(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$ gilt für den ersten Ausdruck

$$\frac{B(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^j} = \frac{Bs'(x)}{2s(x)^j}$$

und da nach (10.20)

$$\int \frac{B}{2s^j}\,\mathrm{d}s = \begin{cases} \frac{-B}{2(j-1)s^{j-1}} & ; j > 1 \\ \frac{B}{2}\ln|s| & ; j = 1 \end{cases}$$

folgt durch Rücksubstitution

$$\int \frac{B(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{-B}{2(j-1)((x-\alpha)^2+\beta^2)^{j-1}} & ; j > 1 \\[2ex] \dfrac{B}{2}\ln\left|(x-\alpha)^2+\beta^2\right| & ; j = 1. \end{cases} \tag{10.24}$$

Für den zweiten Ausdruck in (10.23) setzen wir die Substitution $s(x) = (x - \alpha)/\beta$ an, sodass

$$\frac{A+B\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j} = \frac{A+B\alpha}{(1+s(x)^2)^j \cdot \beta^{2j-1}} s'(x).$$

Nach Beispiel 10.4.6 (c) können wir das Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{A+B\alpha}{(1+s^2)^j \cdot \beta^{2j-1}}\,\mathrm{d}s &= \frac{A+B\alpha}{\beta^{2j-1}} \int \frac{1}{(1+s^2)^j}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{A+B\alpha}{\beta^{2j-1}} I_j(s) \end{aligned}$$

iterativ bestimmen und erhalten so

$$\int \frac{A+B\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}\,\mathrm{d}x = \frac{A+B\alpha}{\beta^{2j-1}} I_j\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right). \tag{10.25}$$

Für $j = 1$ gilt also insbesondere

$$\begin{aligned} &\int \frac{A+Bx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{B}{2}\ln\left|(x-\alpha)^2+\beta^2\right| + \frac{A+B\alpha}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right). \end{aligned} \tag{10.26}$$

Wir können daher insgesamt festhalten, dass sich *jede rationale Funktion* in der Form (10.22) schreiben und mithilfe von (10.20), (10.23), (10.24) und (10.25) elementar integrieren lässt!

Beispiel 10.5.6

Wir setzen das bisherige Beispiel fort, wonach

$$\int \frac{1+x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{x}{2\sqrt{2}}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{x}{2\sqrt{2}}}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Obwohl wir hier direkt die Formel (10.26) für den Fall $j = 1$ ansetzen könnten, nutzen wir lieber (10.23), (10.24) und (10.25), um euch das allgemeine Vorgehen besser zu veranschaulichen. Für das erste Integral auf der rechten Seite gilt

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{x}{2\sqrt{2}}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right| + \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} I_1\left(\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right),
\end{aligned}
$$

wobei nach Beispiel 10.4.6 (c)

$$
I_1(s) = \int \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \arctan(s).
$$

Nutzen wir noch, dass der Arcustangens eine ungerade Funktion ist, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{x}{2\sqrt{2}}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\left(-\sqrt{2}\ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \left(2\sqrt{2}+4\right)\arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)\right).
\end{aligned}
$$

Analog erhält man

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{x}{2\sqrt{2}}}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\left(\sqrt{2}\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + \left(2\sqrt{2}-4\right)\arctan\left(1+\sqrt{2}x\right)\right),
\end{aligned}
$$

also insgesamt

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1+x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = &\frac{1}{8}\Big(\sqrt{2}\left(\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| - \ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right|\right) \\
&+ \left(2\sqrt{2}-4\right)\arctan\left(1+\sqrt{2}x\right) \\
&- \left(2\sqrt{2}+4\right)\arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)\Big).
\end{aligned}
$$

10.6 Die Bernoulli-de L'Hospital'schen Regeln

Der Marquis Guillaume Francois Antoine de L'Hospital (1661–1704) war ein früher Anhänger der Leibniz'schen Differentialrechnung und mit Johann Bernoulli (1667– 1748) befreundet, bei dem er auch die Leibniz'sche Mathematik gelernt hatte. Im Jahr 1696 veröffentlichte er in Frankreich ein erstes Lehrbuch[1] zur Differentialrechnung unter dem Titel *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* („Analysis der unendlich Kleinen um Kurven zu verstehen"), das sehr einflußreich in der Verbreitung der Leibniz'schen Ideen auf dem Kontinent war. Nach dem Tod de L'Hospitals enthüllte Johann Bernoulli, dass de L'Hospital gewisse Resultate von ihm abgekauft hatte, darunter die de L'Hospital'schen Regeln, die sich in *Analyse des infiniment petits* finden.

Bei den Bernoulli-de L'Hospital'schen Regeln handelt es sich um Regeln, die bei Grenzwertbetrachtungen der Form

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Anwendung finden, falls die jeweiligen Grenzwerte von f und g entweder beide 0 oder beide ∞ sind. Deshalb spricht man etwas locker über die Fälle „0/0" bzw. „∞/∞". Für den Beweis brauchen wir zunächst die allgemeine Version des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Der Beweis ähnelt dem von Satz 10.3.4, läuft wieder über den Satz von Rolle und ist eine gute Übung für euch!

Satz 10.6.1: Allg. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann gilt

$$\exists \xi \in]a,b[: \quad \big(f(b)-f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(\xi).$$

Ist zudem $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann kann die Gleichung auch in der Form

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

geschrieben werden.

Beweis. Siehe A.10.11. □

[1] Das ist historisch nicht ganz richtig, aber seine Vorgänger blieben beide bedeutungslos, vgl. S. 245 und S. 349 in: Sonar: *Zur Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton*, Springer 2016.

So, nun kommen wir aber zu den bereits angekündigten Regeln. Wir betrachten zuerst den Fall „0/0“:

Satz 10.6.2: Bernoulli-de L’Hospital’sche Regel I

Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $g'(x) \neq 0$ auf $]a, b[$. Gilt

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0,$$

aber $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert, dann folgt

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Beweis. Existenz von $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| < \varepsilon, \quad b - \delta < \xi < b.$$

Für $u, v \in]b - \delta, b[$ folgt aus Satz 10.6.1 dann

$$\left| \frac{f(u) - f(v)}{g(u) - g(v)} - \lambda \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| < \varepsilon. \tag{10.27}$$

Für $v \to b^-$ folgt unter Beachtung von

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

dann weiter

$$\left| \frac{f(u)}{g(u)} - \lambda \right| \leq 0$$

für $b - \delta < u < b$. □

Korollar 10.6.3

Der Satz bleibt offenbar richtig, wenn $b = \infty$, und gültig für den Fall, dass $\lim_{x \to a^+}$ betrachtet wird. Auch der Fall $\lambda = \pm\infty$ ist eingeschlossen.

Ein analoges Resultat gilt auch für den Fall „∞/∞“:

Satz 10.6.4: Bernoulli-de L'Hospital'sche Regel II

Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $g'(x) \neq 0$ auf $]a, b[$. Gilt

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty,$$

aber $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert, dann folgt

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Beweis. Multiplikation von (10.27) mit $\frac{g(v)-g(u)}{g(v)} = 1 - \frac{g(u)}{g(v)}$ liefert

$$\left| \frac{f(v) - f(u)}{g(v)} - \lambda \left(1 - \frac{g(u)}{g(v)} \right) \right| < \varepsilon \left| 1 - \frac{g(u)}{g(v)} \right|.$$

Das schreiben wir etwas um in die Form

$$\varepsilon \left| 1 - \frac{g(u)}{g(v)} \right| > \left| \underbrace{\left(\frac{f(v)}{g(v)} - \lambda \right)}_{=:A} - \underbrace{\left(\frac{f(u) - \lambda g(u)}{g(v)} \right)}_{=:B} \right|.$$

Wenden wir die (allgemein gültige) Ungleichung $|A - B| \geq |A| - |B|$ an, dann folgt

$$\left| \frac{f(v)}{g(v)} - \lambda \right| < \varepsilon \left| 1 - \frac{g(u)}{g(v)} \right| + \left| \frac{f(u) - \lambda g(u)}{g(v)} \right|.$$

Halten wir nun u fest und betrachten den Grenzwert $v \to b^-$, dann strebt die rechte Seite gegen ε und es folgt

$$\left| \frac{f(v)}{g(v)} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

□

Wie praktisch diese Regeln sind, zeigen die folgenden Beispiele.

Beispiele 10.6.5

(a) Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

führt auf den Fall „0/0“. Für die Ableitungen gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

also folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(b) Ist $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, dann führt der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^n}$$

auf den Fall „∞/∞". Für den Quotienten der Ableitung erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha e^{\alpha x}}{n x^{n-1}},$$

und das ist wieder der Fall „∞/∞", aber niemand sagt uns, dass wir hier aufhören müssen, denn die Bernoulli-de L'Hospital'sche Regel ist wieder anwendbar. So leiten wir Zähler und Nenner immer weiter ab, bis x aus dem Nenner verschwunden ist:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha e^{\alpha x}}{n x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha^2 e^{\alpha x}}{n\cdot(n-1)x^{n-2}} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha^n e^{\alpha x}}{n!},$$

und nun ist der Grenzwert ablesbar:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha^n e^{\alpha x}}{n!} = \infty$$

Wir haben damit eine ungemein wichtige Beobachtung gemacht: **Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz von x.**

(c) Ist $a > 0$, dann führt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a}$$

auf den Fall „∞/∞". Betrachten wir den Quotienten der Ableitungen, folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{a x^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a x^a} = 0,$$

und wir haben eine weitere wichtige Erkenntnis gewonnen: **Der $\ln$ wächst langsamer als jede Potenz von x.**

(d) Wenn wir

$$\lim_{x\to 0^+} (x\cdot \ln x)$$

etwas umformen, ist Bernoulli-de L'Hospital wieder anwendbar! Denn:

$$\lim_{x\to 0^+} (x\cdot \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

und der Grenzwert der Ableitungen zeigt

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

(e) Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

ist demnach

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{(\lim_{x\to 0^+}(x\ln x))} \stackrel{(d)}{=} e^0 = 1.$$

10.7 Die Ableitung von unendlichen Reihen

Wann darf man die Ableitung einer unendlichen Reihe durch gliedweise Differentiation der Terme berechnen? Es lässt sich vermuten, dass dies bei einem geeigneten Konvergenzverhalten der Partialsummen möglich ist.
Statt einer Folge von Partialsummen kann man auch etwas allgemeiner eine Folge von Funktionen $(f_n)_n$ mit Grenzfunktion f betrachten. Wir wollen untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die Ableitung f' mit dem Limes der Folge $(f'_n)_n$ übereinstimmt. Es ist jetzt wohl nicht verwunderlich, dass die gleichmäßige Konvergenz auch hier wieder eine große Rolle spielt.

Betrachten wir die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

falls $n > \varepsilon^{-2}$. Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Die Folge der Ableitungen $f'_n(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ ist aber offenbar divergent und daher

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) \neq \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'.$$

Gleichmäßige Konvergenz reicht also noch *nicht* aus, um Differentiation und Grenzprozessbildung zu vertauschen! Es gilt aber der folgende Satz:

Satz 10.7.1

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen. Gelten

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[\,,$$
$$\text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} f_n' = p \text{ gleichmäßig auf }]a,b[\,,$$

dann ist f stetig differenzierbar auf $]a,b[$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \quad \forall x \in]a,b[\,.$$

Beweis. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n') folgt mit Satz 9.5.1 und mit $x_0 \in]a,b[$:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) \\ &\overset{(a)}{=} f(x) - f(x_0).\end{aligned}$$

Aus Satz 10.3.1 folgt dann $p(x) = f'(x)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$. Die Stetigkeit von f' folgt aus Satz 8.1.9. □

Als Korollar erhalten wir folgendes Resultat für unendliche Reihen:

Satz 10.7.2

Sei $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ punktweise konvergent auf $]a,b[$. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ gleichmäßig auf $]a,b[$, dann gilt

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in]a,b[\,.$$

Zusammenfassung

Wir haben in diesem Kapitel das **Differential bzw. die Ableitung** einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in I$ auf zwei äquivalente Arten definiert: einmal klassisch über den *Grenzwert*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

und alternativ über die *lineare Approximierbarkeit* der Funktion (Weierstraß'sche Formulierung). Dabei ist die zweite Definition *der* Zugang zur Differentiation in höheren Dimensionen!
Die Differentiation einer beliebigen Funktion anhand der Definition ist mühselig, kann aber mit folgenden **Differentiationsregeln** für differenzierbare Funktionen $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ auf wenige bekannte Ableitungen zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)'(x_0) &= \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}, \quad g(x_0) \neq 0 \\ (f \circ g)'(x_0) &= f'(g(x_0))g'(x_0) \\ (f^{-1})'(x_0) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \end{aligned}$$

Für eine stetige Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf $]a, b[$ differenzierbar ist, liefert der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** bezüglich der Differenz von Funktionswerten die nützliche Darstellung

$$\exists \xi \in]a, b[\colon \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Eine verallgemeinerte Version dieses Satzes führt dann auf die **Regeln von Bernoulli-de L'Hospital**, welche die Bestimmung von Funktionsgrenzwerten entscheidend vereinfachen.
Das Herzstück der Analysis bildet der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**: Für eine stetige Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert eine **Stammfunktion** F und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)\big|_{x=a}^{b}.$$

Damit reduziert sich das Problem der Integration einer stetigen Funktion auf die Bestimmung einer Stammfunktion. Die zwei wichtigsten Techniken zur Berechnung von Integralen sind die **Substitution**

$$\int_a^b f(s(x))s'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{s(a)}^{s(b)} f(s)\,\mathrm{d}s$$

für stetig differenzierbares $s \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, und die **partielle Integration**

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\big|_{x=a}^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

die sich jeweils aus der Integration der Ketten- bzw. der Produktregel ergeben. In der mehrdimensionalen Analysis besitzt die Substitutionsregel mit dem *Transformationssatz* eine weitreichende Verallgemeinerung, die beispielsweise die Berechnung von Volumina ermöglicht.
Eine dritte nützliche Technik für rationale Funktionen ist die **Integration durch Partialbruchzerlegung**. Ausgangspunkt des Verfahrens ist die Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms. Nun hat aber beispielsweise x^2+1 *keine* reellen Nullstellen. Wir haben daher an dieser Stelle die **imaginäre Einheit** $i^2=-1$ und die **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ eingeführt. Nach dem **Hauptsatz der Algebra** besitzt dann jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten genau n komplexe Nullstellen und lässt sich über $\mathbb{C}$ *faktorisieren.* Entsprechend kann dann jede rationale Funktion in Partialbrüche über $\mathbb{C}$ zerlegt werden. Da für jede komplexe Nullstelle z auch $\overline{z}$ eine Nullstelle ist, gibt es eine reelle Version der Partialbruchzerlegung und aus dieser folgt, dass *jede rationale Funktion elementar integrierbar* ist.
Um sich das Leben etwas einfacher zu machen, sollte man die folgenden Integrale kennen (der Kürze halber verzichten wir auf die Angabe der Gültigkeitsbereiche):

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-1\} \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|)$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)}, \quad a>0$$

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x)-x \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{artanh}(x)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(x) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh}(x)$$

Die *hyperbolischen Funktionen* werden wir zwar erst im nächsten Kapitel kennenlernen, doch in einer Übersicht elementarer Stammfunktionen sind sie unverzichtbar (siehe auch A.11.13).
Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Wann heißt eine Funktion $f\colon I\to\mathbb{R}$ in $x_0\in I$ differenzierbar bzw. auf I differenzierbar?*
- *Wie lässt sich die Differenzierbarkeit geometrisch interpretieren?*

- *Wie lässt sich die Differenzierbarkeit durch die Existenz einer stetigen Funktion mit bestimmten Eigenschaften charakterisieren?*
- *Wie lässt sich die Kettenregel beweisen?*
- *Wie lautet das notwendige Kriterium für ein lokales Extremum?*
- *Warum besitzt jede stetige Funktion eine Stammfunktion?*
- *Wie lautet eine Stammfunktion von* $\cos(x)\sin(x)$*?*
- *Was besagen die Regeln von Bernoulli-de L'Hospital?*
- *Was versteht man unter einer* n*-ten Einheitswurzel?*
- *Wie geht man allgemein bei der Integration einer rationalen Funktion vor?*

Wie zu Beginn des Kapitels erwähnt, ist das Integrieren eine Kunst und Verfahren wie Substitution oder partielle Integration gelingen nur bei einem „guten mathematischen Auge“. Um das eure in dieser Hinsicht zu schärfen und das Verständnis für den *Calculus* zu festigen, solltet ihr euch mal an einigen der folgenden Übungsaufgaben probieren.

10.8 Aufgaben

A.10.1 Man zeige, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

A.10.2 Seien $z = 1 + 2i$, $w = -5 + 10i \in \mathbb{C}$. Man berechne

$$\text{(a)}\ \ |w|, \quad \text{(b)}\ \ \overline{w}, \quad \text{(c)}\ \ \frac{1}{z}, \quad \text{(d)}\ \ z \cdot w, \quad \text{(e)}\ \ \frac{w}{z}, \quad \text{(f)}\ \ z - w.$$

A.10.3 Man bestimme jeweils die kartesische Form der folgenden komplexen Zahlen:

$$\text{(a) } i^n \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(b) } \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n \text{ mit } n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{(c) } \sum_{k=0}^{7} \left(\frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^k \qquad \text{(d) } \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$$

A.10.4 Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen. Man zeige die *Produktregel für höhere Ableitungen (Leibniz-Regel)*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \quad x \in I,$$

und folgere aus ihr den binomischen Lehrsatz.

A.10.5 Man bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = (x^x)^x, \quad x > 0$

(b) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

(c) $f(x) = \ln(x)^x, \quad x > 0$

(d) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - x}{x^3 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

(e) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right), \quad x > 0$

(f) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1 + x^2}, \quad x > 0$

(g) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$

(h) $f(x) = \ln(\tan(x)) - \dfrac{\cos(2x)}{\sin^2(x)}$

A.10.6 Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Man zeige, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

A.10.7 Man zeige, dass für $0 \leq x < y$ gilt:

$$\frac{y - x}{1 + y^2} < \arctan(y) - \arctan(x) < \frac{y - x}{1 + x^2}.$$

A.10.8 Man zeige mit Methoden der Differentialrechnung, dass von allen Rechtecken mit festem Umfang $L > 0$ das Quadrat den maximalen Flächeninhalt hat.

A.10.9 Man zeige mithilfe partieller Integration, dass für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$A(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$$

Hinweis: Man zeige zunächst $2A(n) = \frac{1}{n} + A(n-1)$ *und benutze danach vollständige Induktion.*

A.10.10 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{(1 + n^2 x^2)^2}$ definiert.

(a) Man bestimme das Maximum von f_n, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Man zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Satz 9.5.1?

A.10.11 Man beweise den allgemeinen Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 10.6.1).
Hinweis: Man nutze den Satz von Rolle (Satz 10.3.3) und orientiere sich am Beweis von Satz 10.3.4.

A.10.12 Man zeige mithilfe partieller Integration, dass für $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

gilt, und folgere daraus die *Wallis'sche Produktformel*

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}.\end{aligned}$$

A.10.13 Man bestimme mittels geeigneter Substitution

(a) $\displaystyle\int e^{x^2} x^3\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\frac{2}{x\ln^2(x)+x}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^3(x)}}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{a^x+a^{-x}}\,\mathrm{d}x, \quad a>0,\ a\neq 1$

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$ (j) $\displaystyle\int \frac{2x^4-3x^2+4}{2x^5-5x^3+20x-1}\,\mathrm{d}x$

A.10.14 Das Integral einer rationalen Funktion von sin und cos, kann oft mithilfe der Substitution $s(x) = \tan(x/2)$ bestimmt werden.

(a) Man zeige:

(i) $\displaystyle s'(x) = \frac{1+s(x)^2}{2}$ (ii) $\displaystyle\sin(x) = \frac{2s(x)}{1+s(x)^2}$

(iii) $\displaystyle\cos(x) = \frac{1-s(x)^2}{1+s(x)^2}$

(b) Man bestimme

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$

Hinweis: Man nutze die Additionstheoreme 10.4.12.

A.10.15 Man bestimme den Flächeninhalt der *Ellipse*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\},$$

$a, b > 0$, mithilfe der Integralrechnung und unter Berücksichtigung der Achsensymmetrie. Welcher Spezialfall ist offenbar enthalten?
Hinweis: Beispiel 10.4.6 (b)

A.10.16 Man bestimme die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

$$\text{(a)} \quad \int \frac{3x^2 - 9x + 8}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{(b)} \quad \int \frac{3x^5 - 8x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 1}{3x^3 - 8x^2 + 3x + 2}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{(c)} \quad \int \frac{x}{1 + x^3}\,\mathrm{d}x$$

A.10.17 Man bestimme die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \ln(2 - x^2)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,\mathrm{d}x, \quad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

(c) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int e^x(1 - x + x^2)\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$

A.10.18 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi, \psi\colon [c,d] \to [a,b]$ differenzierbar. Man zeige, dass dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x), \quad x \in [c,d].$$

Hinweis: Kettenregel!

A.10.19 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Man zeige:

$$\text{(a)} \quad \int_a^b |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$\text{(b)} \quad \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \le \sqrt{\frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x)^2\,\mathrm{d}x}, \quad \text{falls } f(a) = f(b) = 0$$

Hinweis: Man nutze $(f^2)' = 2f'f$ und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

A.10.20 Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{3x} - 5x\right)^{1/x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{3x} - 5x\right)^{1/x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 2^x}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\sin(x)}{x^2}\right)$

11 Potenzreihen

Wozu?

Wir haben bereits gesehen, dass man eine Funktion f als den Grenzprozess einer Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren kann. Die wichtigsten Vertreter solcher Funktionen sind spezielle Reihen, **Potenzreihen** genannt, die wir in diesem Kapitel genauer kennenlernen wollen. Mit einigen prominenten Vertretern aus dieser Klasse, etwa der Exponentialfunktion oder der geometrischen Reihen sind wir auch schon vertraut. Wie bei diesen Spezialfällen stellt sich allgemein zunächst die Frage nach der Konvergenz solcher Reihen.
Im Zentrum des Kapitels stehen dann aber Untersuchungen bezüglich der (lokalen) Darstellbarkeit von Funktionen als Potenzreihen. Dies führt auf den Begriff der **Taylor-Reihe** und wir werden sehen, dass viele elementare Funktionen wie der Logarithmus oder die trigonometrischen Funktionen eine (lokale) Darstellung als Reihe erlauben. Waren diese Funktionen bisher nur durch bestimmte Eigenschaften charakterisiert, so liefert der Zugang über Potenzreihen nun also eine *analytische Definition.*
Da Potenzreihen insbesondere sowohl mit der Integration als auch der Differentiation verträglich sind, man mit ihnen also „fast" wie mit Polynomen rechnen kann, erlauben sie weitreichende mathematische Aussagen und bilden einen zentralen Gegenstand der Analysis.
Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- Definition einer Potenzreihe,
- Konvergenzradius,
- Taylor-Reihe,
- analytische Definition elementarer Funktionen

und ihr Verständnis.

Historische Bemerkung

Reihen von Zahlen tauchen in der Geschichte der Mathematik bereits sehr früh auf und können in den Arbeiten von Archimedes (um 287–212 v. Chr.) gefunden werden. Anders verhält es sich mit den Potenzreihen $\sum c_n x^n$. Einen ersten Erfolg konnte Nicholas Mercator (ca. 1620–1687) 1668 mit der Publikation der Logarithmusreihe

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots$$

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_11

verbuchen, aber der eigentliche Urheber dieser Reihe war Isaac Newton (1643–1727) schon ein paar Jahre zuvor – er publizierte sie allerdings nicht. Neben Newton ist natürlich Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zu nennen, der sich intensiv mit Potenzreihen beschäftigte. Richtig in Schwung kamen die Potenzreihen durch die nach Brook Taylor (1685–1731) benannten Taylor-Reihen, die 1715 erstmals publiziert wurden. Aber auch hier waren andere schneller: Newton verwendete die Taylor-Reihe bereits 1692 und auch Leibniz, Johann Bernoulli (1667–1748) sowie vermutlich James Gregory (1638–1675) waren in ihrem Besitz. Unter den Händen von Leonhard Euler (1707– 1783) wurden die Potenzreihen zum Rückgrat der klassischen Analysis. Mit ihnen und den Taylor-Reihen nahm die Analysis jedenfalls mächtig Fahrt auf und sie sind heute aus allen Bereichen der Mathematik (inklusive der Numerik) und deren Anwendungen nicht mehr wegzudenken.

Wir haben uns bereits mit unendlichen Reihen beschäftigt und auch schon mit solchen, die von einer Variablen abhängen, wie etwa die Exponentialreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

oder die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Bei unseren Untersuchungen ergab sich, dass die erste Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, die zweite hingegen nur für $x \in]-1,1[$. In jedem Fall erhält man somit Funktionen auf dem jeweiligen Konvergenzgebiet mit x als Argument. Hier wollen wir nun keine weiteren Einzelfalluntersuchungen solcher Reihen mehr durchführen, sondern zu einer allgemein brauchbaren Theorie gelangen. Schaut man genau hin, dann ist den obigen beiden Reihen gemein, dass ihr n-tes Glied jeweils aus einem konstanten Faktor (der von n abhängen kann) multipliziert mit der *Potenz* x^n besteht. Diese „Bauart“ motiviert nun die folgende Definition:

Definition 11.0.1: Potenzreihe

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{11.1}$$

eine **formale Potenzreihe**. Die c_k nennt man **Koeffizienten**.

Häufig treten (formale) Potenzreihen in der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

mit einem **Entwicklungspunkt** $x_0 \in \mathbb{R}$ auf. Dies ermöglicht eine Potenzreihe an verschiedenen Stellen der Zahlengerade zu lokalisieren. Wir wollen uns aber zunächst auf den Fall $x_0 = 0$ beschränken. Ist $x_0 \neq 0$, dann führt die Substitution $y := x - x_0$ wieder auf eine Reihe der Form (11.1).

11.1 Konvergenzfragen

Als Erstes stellt sich die Frage, für welche $x \in \mathbb{R}$ eine Reihe der Form (11.1) überhaupt konvergiert. Es liegt nahe, sich dazu der bereits für allgemeine Reihen bekannten Kriterien zu bedienen. Mithilfe des Majorantenkriteriums können wir zunächst das Folgende festhalten:

Lemma 11.1.1

Konvergiert (11.1) für ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, dann auch für alle x mit $|x| < |\tilde{x}|$. Weiterhin konvergiert dann (11.1) auf jedem Intervall $[-\eta, \eta]$ mit $0 < \eta < |\tilde{x}|$ absolut und gleichmäßig.

Beweis. Die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{x}^n$ impliziert die Beschränktheit der Folge $(c_n \tilde{x}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, d. h.

$$\exists M \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |c_n \tilde{x}^n| \leq M.$$

Für $|x| \leq \eta < |\tilde{x}|$ folgt dann

$$|c_n \tilde{x}^n| \leq |c_n| \eta^n = |c_n \tilde{x}^n| \cdot \left|\frac{\eta}{\tilde{x}}\right|^n \leq M \cdot q^n$$

mit $q := \eta / |\tilde{x}| < 1$. Die geometrische Reihe ist also eine Majorante und absolute Konvergenz folgt aus Satz 6.2.6. Die gleichmäßige Konvergenz folgt aus Satz 8.1.9. □

Die in Lemma 11.1.1 beschriebene Konvergenzeigenschaft von Potenzreihen legt es nahe, einen „Konvergenzradius“ zu definieren. Lässt man als Argument in (11.1) allgemein $z \in \mathbb{C}$ zu, dann führt ein analoges Vorgehen auf einen „Konvergenzkreis“ in der Gauß'schen Ebene und erst im Komplexen zeigen die Potenzreihen ihre ganze Kraft – das ist aber erst Inhalt einer Vorlesung zum Thema „Funktionentheorie“.

Definition 11.1.2: Konvergenzradius

Die Größe

$$\rho := \sup\left\{|x| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ konvergiert}\right\} \geq 0$$

heißt **Konvergenzradius** der formalen Potenzreihe (11.1). Es gilt entweder $\rho \in [0, \infty[$ oder $\rho = \infty$, falls (11.1) für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Bemerkung 11.1.3: Achtung!

Für $|x| = \rho$ kann (11.1) divergieren, denn als Supremum ist ρ nicht zwingend ein Element der Menge $\{|x| \mid (11.1) \text{ konvergiert}\}$.

Wir können nun mithilfe von Lemma 11.1.1 die eingangs gestellte Frage nach der Konvergenz von (11.1) in recht allgemeiner Form beantworten.

Satz 11.1.4

Eine formale Potenzreihe (11.1) konvergiert für alle x mit $|x| < \rho$, sie divergiert für alle x mit $|x| > \rho$, und die Konvergenz ist gleichmäßig auf $[-\eta, \eta]$ für $0 < \eta < \rho$.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \rho$. Dann gibt es ein $\tilde{x}$ mit $|x| < |\tilde{x}| < \rho$, so dass (11.1) für $\tilde{x}$ konvergiert, denn als Supremum erfüllt ρ nach Definition 5.6.1:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists |\tilde{x}| \in \left\{|x| \;\middle|\; \sum c_n x^n \text{ konvergent}\right\} : \quad |\tilde{x}| > \rho - \varepsilon.$$

Nehmen wir als Beispiel $\tilde{x} = (|x| + \rho)/2$ für $\varepsilon = (\rho - |x|)/2$. Nach Lemma 11.1.1 folgt damit Konvergenz für $|x| < \rho$, die auf $[-\eta, \eta]$ mit $0 < \eta < \rho$ auch gleichmäßig ist. Dass (11.1) für $|x| > \rho$ divergiert, folgt direkt aus der Definition des Konvergenzradius. □

Der einzige Fall, den Satz 11.1.4 nicht abdeckt, ist $|x| = \rho$. Für das Verhalten einer Potenzreihe an den Stellen $x = -\rho$ und $x = \rho$ sind auch per Definition von ρ keine allgemeinen Aussagen möglich. Man muss also jede Potenzreihe an diesen Stellen separat auf Konvergenz untersuchen.

11.2 Der Konvergenzradius

Im Fall unendlicher Reihen reeller Zahlen haben wir bereits das Quotienten- und das Wurzelkriterium kennengelernt. Aus diesen Kriterien können wir nun auch Berechnungsmethoden für den Konvergenzradius gewinnen.

Satz 11.2.1

Wenn der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

existiert oder $+\infty$ ist, dann gilt

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{11.2}$$

Beweis. Das Quotientenkriterium (Satz 6.3.9), angewandt auf die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n := c_n x^n$$

liefert

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| \\ &= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \\ &= \frac{|x|}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|}.\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, wenn ein $0 < q < 1$ existiert, so dass

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$$

gilt. Also konvergiert (11.1), falls

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| =: \rho$$

gilt. Im Fall $|x| > \rho$ divergiert die Potenzreihe. □

Mit Satz 11.2.1 können wir jetzt leicht das uns schon bekannte Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe und der Exponentialreihe nochmals verifizieren.

Beispiele 11.2.2

(a) Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ist (11.1) mit $c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit berechnet sich der Konvergenzradius zu

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 1.$$

Die geometrische Reihe konvergiert also für $|x| < 1$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jedem Intervall $[-\eta, \eta]$ mit $0 < \eta < 1$. Offenbar divergiert die Reihe für $|x| \geq 1$, also insbesondere für $|x| = 1$.

(b) Die Exponentialreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ist (11.1) mit $c_n = \frac{1}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für den Konvergenzradius folgt

$$\begin{aligned}\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| \\ = \lim_{n\to\infty} (n+1) &= \infty.\end{aligned}$$

Die Exponentialreihe bzw. e-Funktion ist daher auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent.

(c) Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 3n + 2}$$

ist (11.1) mit $c_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\begin{aligned}\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+3}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{3}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1,\end{aligned}$$

also folgt $\rho = 1$. Damit konvergiert die Potenzreihe sicher auf $]-1, 1[$. Wir untersuchen noch das Verhalten an den Randpunkten: Für $|x| = 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$$
$$\leq \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$< \infty,$$

also konvergiert die Reihe auf $[-1,1]$.

Aus dem Wurzelkriterium (Satz 6.3.11) ergibt sich folgende Berechnungsvorschrift für den Konvergenzradius:

Satz 11.2.3: Satz von Cauchy-Hadamard

Der Konvergenzradius der Potenzreihe (11.1) ist

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{11.3}$$

Dies beinhaltet auch die Fälle $\rho = 1/0 = \infty$ und $\rho = 1/\infty = 0$.

Beweis. Wende das Wurzelkriterium (Satz 6.3.11) auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n := c_n x^n$ an. Wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

konvergiert (11.1) für

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} =: \rho$$

und divergiert für

$$|x| > \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

□

Bemerkung 11.2.4

(a) Mit den Sätzen 11.2.1 und 11.2.3 haben wir also zwei Möglichkeiten, den Konvergenzradius ρ zu bestimmen, wobei jedoch die erste Methode (11.2) den Nachteil hat, dass sie die Existenz des Grenzwertes benötigt. Die Formel (11.3) aus Satz 11.2.3 ist hingegen immer anwendbar, da der Limes superior stets existiert.

(b) Der Konvergenzradius einer allgemeinen Potenzreihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{11.4}$$

ist definiert als der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_n c_n y^n$, d. h., die Formeln (11.2) und (11.3) sind auch in diesem Fall anwendbar.

(c) Sei ρ der Konvergenzradius von (11.4), dann überträgt sich das Resultat aus Satz 11.1.4 vermöge der Substitution $y = x - x_0$ wie folgt: Die Potenzreihe (11.4) konvergiert für alle $|x - x_0| < \rho$, also $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$, und divergiert für alle $|x - x_0| > \rho$. Ferner ist die Konvergenz gleichmäßig auf $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ für $0 < \eta < \rho$.

Beispiele 11.2.5

(a) Für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-2)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2,$$

also folgt $\rho = 1/2$ nach (11.3). Da weder $(-2)^n (1/2)^n = (-1)^n$ noch $(-2)^n(-1/2)^n = 1$ Nullfolgen sind, divergiert die Reihe an den Randpunkten $|x| = 1/2$.

(b) Für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

also $\rho = 0$ nach (11.3), und die Reihe divergiert für alle $x \neq 0$.

(c) Für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 3^n x^n$$

gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 3^n} = 3 \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^3 = 3,$$

also $\rho = 1/3$ nach (11.3). An den Randpunkten gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n^3 3^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n^3(-1)^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^3 - k^3 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 3k^2 + 3k + 1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} n^3 3^n \frac{1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^3,\end{aligned}$$

also divergiert die Reihe für $|x| = 1/3$.

(d) Für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$$

gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

also $\rho = 1$, und die Reihe konvergiert sicher auf $]0, 2[$. An den Randpunkten gilt

$$x = 0\colon \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{sowie} \quad x = 2\colon \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

und die erste Reihe konvergiert (alternierende harmonische Reihe), die zweite hingegen divergiert (harmonisch Reihe). Folglich konvergiert die Reihe genau für $x \in [0, 2[$.

Auch eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{kn}$ für $k \in \mathbb{N}$, die auf den ersten Blick nicht ganz der Bauart (11.1) zu entsprechen scheint, ist eine Potenzreihe. Denn es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{kn} &= c_0 + c_1 x^k + c_2 x^{2k} + c_3 x^{3k} + \ldots \\ &= c_0 + 0 \cdot x + \ldots + 0 \cdot x^{k-1} + c_1 x^k + 0 \cdot x^{k+1} + \ldots \\ &\qquad + 0 \cdot x^{2k-1} + c_2 x^{2k} + \ldots,\end{aligned}$$

und setzt man

$$a_m = \begin{cases} c_j & ; m = jk \\ 0 & ; \text{sonst}, \end{cases}$$

so ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{kn} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m .$$

Um den Konvergenzradius einer solchen Reihe zu bestimmen, substituiert man $s = x^k$: Hat dann $\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n$ den Konvergenzradius $\tau \geq 0$, so hat die ursprüngliche Reihe wegen

$$|s| = |x|^k < \tau \iff |x| < \sqrt[k]{\tau}$$

den Konvergenzradius $\rho = \sqrt[k]{\tau}$.

Beispiel 11.2.6

Es soll der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n}}{(4 + (-1)^n)^{3n}}$$

bestimmt werden. Aus

$$\sqrt[n]{|(4 + (-1)^n)^{-3n}|} = (4 + (-1)^n)^{-3} = \frac{1}{(4 + (-1)^n)^3}$$

folgt

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(4 + (-1)^n)^{-3n}|} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27},$$

also ist $\rho = \sqrt[5]{27}$ nach (11.3).

11.3 Stetigkeit, Differentiation und Integration

Wie schon eingangs erwähnt, definiert eine Potenzreihe (11.1) auf ihrem *Konvergenzbereich*

$$D := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Die Potenzreihe (11.1) konvergiert}\}$$

eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in D. \tag{11.5}$$

Wir wollen nun diese Funktion, die man auch als Potenzreihe bezeichnet, auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit untersuchen! Fangen wir mit der Stetigkeit an:

Satz 11.3.1

Sei $\rho \geq 0$ der Konvergenzradius der durch (11.5) definierten Potenzreihe f, dann ist $f\colon]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis. Nach Satz 11.1.4 konvergiert f auf $[-\eta, \eta]$ für $0 < \eta < \rho$ gleichmäßig und nach Satz 8.1.9 ist $f\colon]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ somit stetig. □

Wie steht's um die Stetigkeit an den Rändern $x = \pm\rho$?

Satz 11.3.2: Satz von Abel

Konvergiert die Potenzreihe (11.5) für $x_0 = \rho$ (bzw. für $x_0 = -\rho$), dann ist f in $x_0 = \rho$ (bzw. in $x_0 = -\rho$) stetig.

Beweis. Wir dürfen $\rho = 1$ und $x_0 = \pm 1$ annehmen, anderenfalls ersetze x_0 durch $\pm x_0/\rho$. Nach Voraussetzung konvergiert die Potenzreihe (11.5) in $x_0 = 1$, also folgt aus Lemma 6.2.1 für $n \geq n_0$ und $k \geq 1$:

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+k}| < \varepsilon. \tag{11.6}$$

Wähle $x \in [0, 1]$. Dann gilt für die Partialsumme $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$:

$$f_{n+k}(x) - f_n(x) = c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \ldots + c_{n+k}x^{n+k}$$

Sind alle $c_i \geq 0$, dann folgt aus (11.6)

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Anderenfalls benutzt man „Abels partielle Summation", die wir für den Fall $k = 4$ notieren, weil man in diesem Fall das Prinzip schon gut erkennen kann:

$$\begin{array}{llll} c_{n+1}x^{n+1} & +\, c_{n+2}x^{n+2} & +\, c_{n+3}x^{n+3} & +\, c_{n+4}x^{n+4} \\ =c_{n+1}x^{n+4} & +\, c_{n+2}x^{n+4} & +\, c_{n+3}x^{n+4} & +\, c_{n+4}x^{n+4} \\ +\, c_{n+1}(x^{n+3}-x^{n+4}) & +\, c_{n+2}(x^{n+3}-x^{n+4}) & +\, c_{n+3}(x^{n+3}-x^{n+4}) & \\ +\, c_{n+1}(x^{n+2}-x^{n+3}) & +\, c_{n+2}(x^{n+2}-x^{n+3}) & & \\ +\, c_{n+1}(x^{n+1}-x^{n+2}) & & & \end{array}$$

Ab der zweiten Zeile dieses Schemas kann man immer einen gemeinsamen positiven Faktor ausklammern, wobei wir wieder zu einem allgemeinen k übergehen: aus der zweiten Zeile x^{n+k}, aus der dritten $x^{n+k-1} - x^{n+k}$, aus der vierten $x^{n+k-2} - x^{n+k-1}$, usw. Mit der Dreiecksungleichung und (11.6) folgt dann

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \left(x^{n+k} + (x^{n+k-1} - x^{n+k}) + \ldots + (x^{n+1} - x^{n+2})\right)$$

gleichmäßig auf $[0,1]$. Damit folgt die Stetigkeit von f in $x_0 = 1$ aus dem Satz 8.1.9 von Weierstraß. Der Beweis von $x_0 = -1$ verläuft ganz analog. □

Die Frage nach der Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von (11.5) zeigt nun das Potenzial, das in Potenzreihen steckt: Beide Operationen dürfen *gliedweise* durchgeführt werden! Die weitreichenden Folgerungen, die damit einhergehen, diskutieren wir im Anschluss.

Satz 11.3.3

Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius der durch (11.5) definierten Potenzreihe f, dann ist $f\colon]-\rho,\rho[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad |x| < \rho. \tag{11.7}$$

Eine Stammfunktion von f ist auf $]-\rho,\rho[$ gegeben durch

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{11.8}$$

Beweis. Nach Lemma 5.8.14 gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nc_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Damit hat (11.7) den gleichen Konvergenzradius ρ wie f und die Konvergenz ist nach Satz 11.1.4 auf $[-\eta,\eta]$ mit $0 < \eta < \rho$, gleichmäßig. Es folgt die Differenzierbarkeit und die Darstellung (11.7) aus Satz 10.7.2. Die Darstellung (11.8) folgt aus Korollar 9.5.3. □

Korollar 11.3.4

Offenbar ist (11.7) auch eine Potenzreihe mit gleichem Konvergenzradius $\rho > 0$ und wir können Satz 11.3.3 abermals anwenden:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}, \quad |x| < \rho.$$

Auch $f''(x)$ ist nun wieder eine Potenzreihe (mit gleichem Konvergenzradius) und iterativ erhalten wir

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k)c_n x^{n-k}, \quad |x| < \rho \tag{11.9}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Wir sehen also, dass Potenzreihen **unendlich oft differenzierbar** sind und für die k-te Ableitung (11.9) gilt. Insbesondere ergibt sich daraus

$$f^{(k)}(0) = c_k \cdot k! \iff c_k = \frac{f^k(0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{11.10}$$

d. h., die *gesamte* Potenzreihe f ist bereits durch ihr Verhalten im Punkt $x = 0$ bestimmt und kann vermöge (11.10) rekonstruiert werden. Eine naheliegende Frage ist nun: Gilt auch umgekehrt für eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon [-\eta, \eta] \to \mathbb{R}$ eine Darstellung der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \tag{11.11}$$

und wenn ja, für welche $x \in [-\eta, \eta]$? Wir werden uns im nächsten Abschnitt dieser Frage nochmals aus einem anderen Blickwinkel nähern und die Möglichkeit einer solchen Darstellung ausführlich diskutieren.

Die gliedweise Differentiation und Integration kann bei der Bestimmung von Potenzreihendarstellungen hilfreich sein, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiele 11.3.5

(a) Es ist eine Potenzreihendarstellung von $f(x) = (1-x)^{-2}$ auf einem geeigneten Intervall gesucht. Dazu nutzen wir, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} = f(x)$$

und

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

Mit (11.7) folgt dann

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \quad |x| < 1.$$

An den Rändern $|x| = 1$ divergiert die Reihendarstellung offenbar.

(b) Wir wissen bereits

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+t)|_0^x = \ln(1+x)$$

und mit der geometrischen Reihe gilt

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad |t| < 1.$$

Gliedweise Integration gemäß (11.8) für $|x| < 1$ liefert dann eine Potenzreihendarstellung des Logarithmus

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \mp \dots \end{aligned}$$

Die Reihe ist alternierend und nach dem Leibniz-Kriterium folgt die Konvergenz auch für $x = 1$. Bei $x = -1$ ergibt sich die harmonische Reihe, welche divergiert und somit gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in]-1, 1].$$

Nach dem Satz von Abel 11.3.2 dürfen wir also $x = 1$ einsetzen und erhalten

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \dots.$$

Vergleicht dieses Ergebnis noch einmal mit der Diskussion am Anfang von Abschnitt 6.3.

Es bleibt noch die Frage zu klären, ob die Darstellung einer Funktion als Potenzreihe eindeutig ist, also ob die Koeffizienten in der Darstellung (11.5) eindeutig durch die Werte der Funktion bestimmt sind. Der folgende Satz gibt eine positive Antwort und rechtfertigt daher insbesondere die Methode des Koeffizientenvergleichs bei Potenzreihen (also auch bei Polynomen!).

Satz 11.3.6: Identitätssatz

Seien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

zwei Potenzreihen mit gemeinsamem Konvergenzradius $\rho > 0$. Stimmen f und g auf irgendeiner Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_k \neq x_0$ für alle k, mit

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$$

überein, dann sind die beiden Reihen (und damit die beiden Funktionen f und g, die durch die Reihen definiert werden) bereits vollständig identisch, d. h., es gilt

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \,]x_0 - \rho, x_0 + \rho[=: K$$

und

$$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion:
Da f und g stetig sind, folgt $f(x_0) = \lim_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{k \to \infty} g(x_k) = g(x_0)$, und damit ist $a_0 = b_0$. Nun angenommen, es gelte $a_k = b_k$ für $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Die Potenzreihen

$$f_1(x) := a_{N+1} + a_{N+2}(x - x_0) + a_{N+3}(x - x_0)^2 + \dots,$$
$$g_1(x) := b_{N+1} + b_{N+2}(x - x_0) + b_{N+3}(x - x_0)^2 + \dots$$

konvergieren beide auf K (warum?) und für alle $x \neq x_0$ gilt

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n}{(x - x_0)^{N+1}},$$

$$g_1(x) = \frac{g(x) - \sum_{n=0}^{N} b_n (x - x_0)^n}{(x - x_0)^{N+1}}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $f_1(x_k) = g_1(x_k)$ für alle $k = 0, 1, \dots, N$ und aus der Stetigkeit folgt

$$f_1(x_0) = \lim_{k \to \infty} f_1(x_k) = \lim_{k \to \infty} g_1(x_k) = g_1(x_0),$$

woraus sich $a_{N+1} = b_{N+1}$ ergibt. $\square$

11.4 Taylor-Reihen

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion, dann kann man versuchen, f in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ durch Polynome zu approximieren. Dabei kann man wie folgt vorgehen:

Das gesuchte Polynom (vom Grad $\leq n$) schreiben wir in der Form

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n.$$

Je höher der Grad des Polynoms, um so mehr Ableitungen von f sollen mit den Ableitungen von p_n an der Stelle x_0 übereinstimmen.

(a) Für den Grad $n = 0$ verlangen wir $p_0(x_0) = f(x_0)$, d. h.

$$a_0 = f(x_0).$$

Das konstante Polynom, das f in x_0 am besten approximiert, ist daher

$$p_0(x) = f(x_0).$$

(b) Das Polynom vom Grad $n = 1$, das f bei x_0 am besten approximiert, muss die beiden Bedingungen

$$p_1(x_0) = f(x_0),$$
$$p_1'(x_0) = f'(x_0)$$

erfüllen. Nun ist $p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$, und somit folgt aus der ersten Bedingung wieder

$$p_1(x_0) = a_0 = f(x_0).$$

Wegen $p_1'(x) = a_1$, folgt dann aus der zweiten Bedingung

$$p_1'(x_0) = a_1 = f'(x_0).$$

Das lineare Polynom, das f bei x_0 am besten approximiert, ist also

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(c) Nun wenden wir uns dem quadratischen Polynom ($n = 2$) zu, $p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$. Es muss die drei Bedingungen

$$p_2(x_0) = f(x_0)$$
$$p_2'(x_0) = f'(x_0)$$
$$p_2''(x_0) = f''(x_0)$$

erfüllen. Wegen

$$\begin{aligned} p_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 \\ p_2'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) \\ p_2''(x) &= 2a_2 \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} p_2(x_0) &= a_0 = f(x_0) \\ p_2'(x_0) &= a_1 = f'(x_0) \\ p_2''(x_0) &= 2a_2 = f''(x_0) \end{aligned}$$

Das quadratische Polynom, das f bei x_0 am besten approximiert, ist daher

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

(d) Nun zum kubischen Polynom ($n = 3$), das die Bedingungen

$$\begin{aligned} p_3(x_0) &= f(x_0) \\ p_3'(x_0) &= f'(x_0) \\ p_3''(x_0) &= f''(x_0) \\ p_3'''(x_0) &= f'''(x_0) \end{aligned}$$

erfüllen muss. Wegen

$$\begin{aligned} p_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 \\ p_3'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 \\ p_3''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) \\ p_3'''(x) &= 2 \cdot 3a_3 \end{aligned}$$

folgt also:

$$\begin{aligned} p_3(x_0) &= a_0 = f(x_0) \\ p_3'(x_0) &= a_1 = f'(x_0) \\ p_3''(x_0) &= 2a_2 = f''(x_0) \\ p_3'''(x_0) &= 2 \cdot 3a_3 = f'''(x_0) \end{aligned}$$

Damit ist das kubische Polynom, das f bei x_0 am besten approximiert, gerade

$$p_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3}(x - x_0)^3.$$

Nach diesem kleinen Exkurs schauen wir uns nun den allgemeinen Fall eines Polynoms n-ten Grades an: Für die Ableitungen ergibt sich zunächst sukzessive:

$$
\begin{aligned}
p_n(x) =& a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + a_1(x-x_0) + a_0 \\
p_n'(x) =& n \cdot a_n(x-x_0)^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1}(x-x_0)^{n-2} + \ldots \\
& \ldots + 2a_2(x-x_0) + a_1 \\
p_n''(x) =& (n-1) \cdot n \cdot a_n(x-x_0)^{n-2} + (n-2) \cdot (n-1) \cdot a_{n-1}(x-x_0)^{n-3} \\
& + \ldots + 2 \cdot a_2 \\
& \vdots \\
p_n^{(n)}(x) =& 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot a_n
\end{aligned}
$$

Aus der Forderung

$$p_n^{(i)}(x_0) = i \cdot (i-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_i = i!\, a_i = f^{(i)}(x_0),$$

folgt dann $a_i = f^{(i)}(x_0)/i!$, $i = 0, \ldots, n$. Das so gewonnene Polynom n-ten Grades, das f bei x_0 am besten approximiert, heißt **Taylor-Polynom** vom Grad höchstens n und ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
T_n(x; x_0) :=& \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \\
=& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\
& + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.
\end{aligned}
\tag{11.12}
$$

Betrachten wir (formal) $n \to \infty$, dann folgt eine Potenzreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

der bekannten Form $\sum_{i=0}^{\infty} c_i y^i$ mit $y := x - x_0$ und $c_i := \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$.

Definition 11.4.1: Taylor-Reihen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar, dann heißt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i, \quad x \in \mathbb{R} \tag{11.13}$$

die **Taylor-Reihe** von f zum **Entwicklungspunkt** x_0.

Bemerkung 11.4.2

Über die Approximation einer Funktion durch Polynome sind wir also wieder auf die Darstellung (11.11) gestoßen und können festhalten: Ist eine Funktion f als Potenzreihe um x_0 darstellbar, also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad x \in D,$$

dann gilt gemäß (11.10) für die Koeffizienten

$$c_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

und f ist gleich seiner Taylor-Reihe auf dem Konvergenzbereich D. *Bei gleichem Entwicklungspunkt x_0 stimmen also Taylor-Reihe und Potenzreihendarstellung einer Funktion überein.* Sofern es möglich ist, benutzt man daher für die Taylor-Reihenentwicklung anstatt der Definition (11.13) lieber bereits bekannte Potenzreihen.

Beispiel 11.4.3

Sei $x \in]0, 2]$, dann gilt nach Beispiel 11.3.5 (b)

$$\ln(x) = \ln(1 + (x - 1)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{n} (x - 1)^n,$$

und da Potenzreihendarstellung und Taylor-Reihe bei gleichem Entwicklungspunkt übereinstimmen, ist das schon die Taylor-Reihe des natürlichen Logarithmus zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Die ersten Taylor-Polynome lauten:

$$\begin{aligned}
T_1(x; 1) &= x - 1 \\
T_2(x; 1) &= (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} \\
T_3(x; 1) &= (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3}
\end{aligned}$$

Wir können nun jeder beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihre Taylor-Reihe (11.13) zum Entwicklungspunkt x_0 zuweisen, aber eine Frage bleibt: Gilt denn auch immer

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i,$$

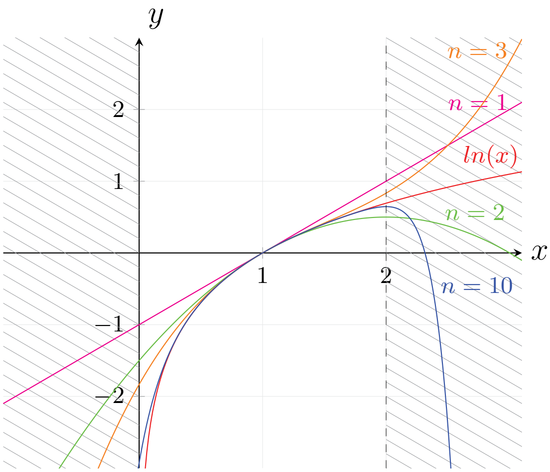

Abbildung 11.4.1. Taylor-Polynome vom Grad $n = 1, 2, 3, 10$ von $\ln(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Der Konvergenzradius (um $x_0 = 1$) ist $\rho = 1$. Die entsprechende Taylor-Reihe konvergiert also auf $]0, 2]$.

d. h., stellt die Taylor-Reihe tatsächlich immer die Ausgangsfunktion f dar? Die Antwort ist: Nein! Das folgende Beispiel soll uns als Gegenbeispiel dienen.

Beispiel 11.4.4

Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar und in Abbildung 11.4.2 dargestellt. Es sieht so aus, als sei unsere Behauptung falsch, denn immerhin haben wir im Punkt $x = 0$ eine gesonderte Definition vorgenommen. Für f ist das nichts weiter als die stetige Ergänzung, denn es gilt

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{y:=1/x^2}{=} \lim_{y \to \infty} \frac{1}{e^y} = 0.$$

Für die erste Ableitung folgt aber

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}}, \quad x \neq 0,$$

und weil die e-Funktion schneller wächst, als x^3 gegen null geht (vgl. Seite 316), kann man wieder stetig ergänzen:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

Für die zweite Ableitung folgt nun

$$f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0,$$

und auch hier können wir wieder stetig ergänzen, weil die e-Funktion schneller wächst, als der Ausdruck $-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}$ gegen null geht, also

$$f''(x) = \begin{cases} \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}.$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass diese Situation bei *allen* Ableitungen auftritt, d. h., sämtliche Ableitungen können durch $f(0) = 0$ stetig ergänzt werden! Damit ist aber f beliebig oft stetig differenzierbar! Wählen wir nun den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, dann folgt für die Taylor-Reihe von f:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

Damit haben wir einen Fall vorliegen, in dem $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ für $x \neq 0$ gilt! Die Taylor-Reihe, wie weit wir auch immer entwickeln, stellt die Funktion f nur genau im Punkt $x = 0$ dar!

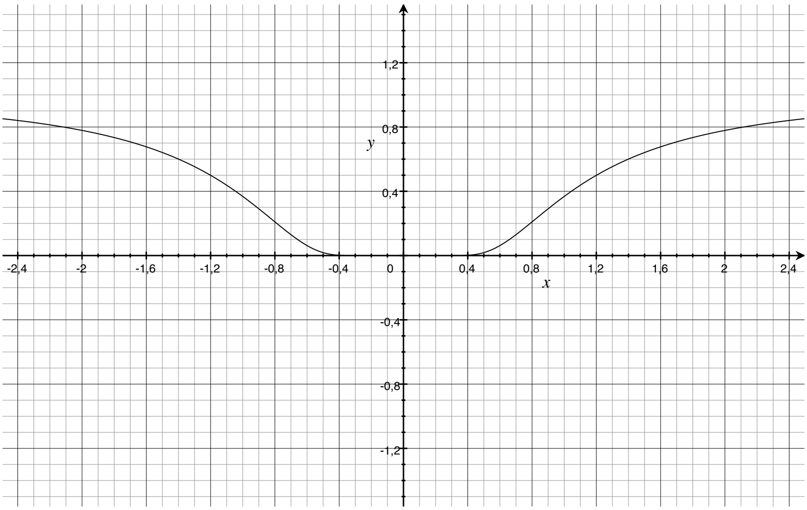

Abbildung 11.4.2. Unser Gegenbeispiel

Um das Verhalten unserer Funktion im Gegenbeispiel verstehen zu können, müssen wir den „Rest“ bei der Approximation einer Funktion f durch ihre Taylor-Reihe untersuchen.

Satz 11.4.5: Satz von Taylor

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar auf $[x_0, x]$, $x_0 < x$ (falls $x < x_0$, betrachte $[x, x_0]$), dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \,\mathrm{d}t \\ &= T_k(x;x_0) + R_k(x;x_0) \end{aligned}$$

und man nennt $R_k(x;x_0) := f(x) - T_k(x;x_0)$ **Restglied**.

Beweis. Wir schreiben

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} 1 \cdot f'(t) \,\mathrm{d}t$$

und berechnen das Integral mit partieller Integration:

$$\int_{x_0}^{x} \underbrace{1 \cdot f'(t)}_{=:u(t)\cdot v'(t)} \,\mathrm{d}t = u(t)\cdot v(t)\big|_{t=x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} u(t)\cdot v'(t)\,\mathrm{d}t =: I.$$

Für die Stammfunktion von $u'(t) = 1$ wählen wir nicht einfach $u(t) = t$ sondern $u(x) = -(x-t)$, und erhalten so

$$I = -(x-t)\cdot f'(t)\big|_{t=x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,\mathrm{d}t$$

und damit

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wieder bearbeiten wir das Integral mit partieller Integration:

$$\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)\cdot f''(t)}_{=:u'(t)\cdot v(t)} \,\mathrm{d}t$$

Dabei wählen wir jetzt für die Stammfunktion von $u'(t) = x - t$ die Funktion $u(t) = -(x-t)^2/2!$ und erhalten

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Jetzt ist es klar, wie es weitergeht. Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung des Satzes. $\square$

Wir haben im Gegenbeispiel (Beispiel 11.4.4) offenbar eine Funktion konstruiert, die immer im Restglied der Taylor-Reihe „versteckt“ bleibt. Eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird also nur dann durch ihre Taylor-Reihe um x_0 (11.13) dargestellt, wenn das Restglied für $k \to \infty$ verschwindet, d. h.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \iff \lim_{k\to\infty} R_k(x,x_0) = 0.$$

Setzt man $y = x - x_0$ in (11.14) ein, dann ergibt sich die ebenfalls häufig verwendete Darstellung

$$\begin{aligned} f(x_0+y) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} y^i + R_{k+1}(x_0+y,x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}y^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}y^k + R_{k+1}(x_0+y,x_0). \end{aligned}$$

Beispiel 11.4.6

Sei $f(x) = \sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Für die ersten Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x) & f''(x) &= 2\cos(2x) \\ f'''(x) &= -4\sin(x) & f^{(4)}(x) &= -8\cos(2x) \\ f^{(5)}(x) &= 16\sin(2x) & f^{(6)}(x) &= 32\cos(2x) \end{aligned}$$

Und durch scharfes Hinsehen (oder induktiv) folgt

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}-1} 2^{k-1}\cos(2x) & ; k \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} 2^{k-1}\sin(2x) & ; k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wegen $f(0) = 0$ und

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}-1} 2^{k-1} & ; k \text{ gerade} \\ 0 & ; k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

ergibt sich aus dem Satz von Taylor (Satz 11.4.5):

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= T_{2k}(x;0) + R_{2k}(x;0) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{i-1}2^{2i-1}}{(2i)!} x^{2i} + \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \int_0^x \sin(2t)(x-t)^{2k}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Unter den historisch bedeutsamen Taylor-Reihen ist unbedingt das Newton'sche Binomialtheorem zu nennen, mit dessen Hilfe Isaac Newton wichtige Ergebnisse seiner neuen Differentialrechnung gelangen.

Satz 11.4.7: Newtons Binomialtheorem

Für $|x| < 1$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots \tag{11.14}$$

In Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten (2.1) definiert man dazu für $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} \dfrac{a \cdot (a-1) \cdots (a-k+1)}{k!} & , k > 0 \\ 1 & ; \quad k = 0 \\ 0 & , \quad k < 0. \end{cases} \tag{11.15}$$

Man sieht sofort, dass (11.15) für $a = n \in \mathbb{N}$ der Formel (2.1) entspricht. Damit können wir (11.14) in Übereinstimmung mit dem binomischen Lehrsatz (Satz 2.1.15) nun schreiben als

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k. \tag{11.16}$$

Beweis. Wir entwickeln $f(x) = (1+x)^a$ in eine Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Aus

$$\begin{aligned} f'(x) &= a(1+x)^{a-1} \\ f''(x) &= a(a-1)(1+x)^{a-2} \\ f'''(x) &= a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-k+1)(1+x)^{a-k} \end{aligned}$$

folgt

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & ; k = 0 \\ a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-k+1) & ; k > 0. \end{cases}$$

Damit ist (11.14) die Taylor-Reihe von $(1+x)^a$ um $x_0 = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} \left| \binom{a}{k} \middle/ \binom{a}{k+1} \right| &= \left| \frac{a \cdot (a-1) \cdot \ldots \cdot (a-k+1)}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-k)} \right| \\ &= \left| \frac{k+1}{a-k} \right| = \frac{1 + 1/k}{|a/k - 1|} \xrightarrow{k \to \infty} 1 \end{aligned}$$

ergibt sich nach Satz 11.2.1 der Konvergenzradius zu $\rho = 1$. Es bleibt zu zeigen, dass das Restglied

$$R_k(x) := \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-k)\cdot (1+t)^{a-k-1}\,\mathrm{d}t, \quad |x| < 1$$

für $k \to \infty$ verschwindet. Aus dem Mittelwertsatz (Satz 9.4.1) folgt mit $\xi := \Theta_k x$, $0 < \Theta_k < 1$:

$$\begin{aligned} R_k(x) &= \frac{(x-\Theta_k x)^k}{k!} a\cdot (a-1)\cdot \ldots \cdot (a-k)\cdot (1+\Theta_k x)^{a-k-1}\cdot x \\ &= \frac{(a-1)\cdot (a-2)\cdot \ldots \cdot (a-k)}{k!} x^k \left(\frac{1-\Theta_k}{1+\Theta_k x}\right)^k (1+\Theta_k x)^{a-1} a x \end{aligned}$$

Der Faktor ax ist für festes x konstant,

$$(1+x)^{a-1} > (1+\Theta_k x)^{a-1} > 1,$$

und wegen $|x| < 1$ ist

$$\left|\frac{1-\Theta_k}{1+\Theta_k x}\right| < 1.$$

Der verbleibende Faktor

$$\frac{(a-1)\cdot (a-2)\cdot \ldots \cdot (a-k)}{k!} x^k$$

ist wegen $|x| < 1$ ein Term einer konvergenten Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-1)\cdot (a-2)\cdot \ldots \cdot (a-k)}{k!} x^k,$$

daher muss

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(a-1)\cdot (a-2)\cdot \ldots \cdot (a-k)}{k!} x^k = 0$$

gelten (notwendige Bedingung der Konvergenz einer unendlichen Reihe). Damit haben wir

$$\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$$

bewiesen. □

Beispiel 11.4.8: Reihenentwicklung des Arcussinus

Aus Satz 11.4.7 bzw. (11.16) folgt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^{2k}$$

für $|x| < 1$ und mit Satz 11.3.3 gilt weiter

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) &= \int \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^{2k} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k \int x^{2k} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1.
\end{aligned}$$

Die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten gemäß (11.15) lauten

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{k} &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k} \\
&= (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2} \cdot \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k} \\
&= (-1)^k \frac{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2k} \\
&= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k k!} \cdot \frac{1}{2^k k!} = (-1)^k \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k}
\end{aligned}$$

für $k > 0$. Eingesetzt ergibt sich damit

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)}, \quad |x| < 1. \tag{11.17}$$

Wegen (siehe A.11.11)

$$\left| \binom{-1/2}{k} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{k}}, \quad k \geq 1,$$

gilt für $|x| = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{-1/2}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \binom{-1/2}{k} \right| \frac{1}{2k+1} \\
\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4/3}} < \infty,
\end{aligned}$$

nach Lemma 6.2.9. Also konvergiert (11.17) auch an den Rändern $|x| = 1$ und ist dort nach dem Satz von Abel stetig. Insbesondere folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \arcsin(1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k(2k+1)} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k} \cdot \frac{1}{2k+1} \\
&= 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots
\end{aligned}
$$

Wir haben das Restglied bisher in Form eines Integrals kennengelernt. E s gibt noch zahlreiche andere Darstellungen, von denen wir nur eine beweisen wollen, weil man sie des Öfteren benötigt. Sie geht auf Lagrange zurück.

Satz 11.4.9: Restglieddarstellung von Lagrange

Sei f stetig auf $[x_0, x]$ und $(k+1)$-mal differenzierbar auf $]x_0, x[$, $x_0 < x$ (falls $x < x_0$, betrachte $[x, x_0]$). Dann existiert ein $\xi \in]x_0, x[$ (bzw. $\xi \in]x, x_0[$) mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}.$$

Die Idee für den folgenden Beweis stammt von Cauchy.

Beweis. Wir schreiben das Restglied in der Form

$$R_k(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0)$$

und vergleichen es mit

$$S_k(x) := \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Es gelten

$$R_k(x_0) = 0, \quad R_k'(x_0) = 0, \quad \ldots \quad R_k^{(k)}(x_0) = 0$$

und ebenso $S_k^{(i)}(x_0) = 0$ für $i = 0, 1, \ldots, k$. Jetzt wenden wir Satz 10.6.1 wiederholt an:

$$\begin{aligned}\frac{R_k(x)}{S_k(x)} &= \frac{R_k(x)-R_k(x_0)}{S_k(x)-S_k(x_0)} = \frac{R_k'(\xi_1)}{S_k'(\xi_1)} \\ &= \frac{R_k'(\xi_1)-R_k'(x_0)}{S_k'(\xi_1)-S_k'(x_0)} = \frac{R_k''(\xi_2)}{S_k''(\xi_2)} \\ &= \frac{R_k''(\xi_2)-R_k''(x_0)}{S_k''(\xi_2)-S_k''(x_0)} = \dots \\ &= \frac{R_k^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{S_k^{(k+1)}(\xi_{k+1})}\end{aligned}$$

mit ξ_1 zwischen x und x_0, ξ_2 zwischen ξ_1 und x_0, usw. Wegen $S_k^{(k+1)}(x) = 1$ und $R_k^{(k+1)}(x) = f^{k+1}(x)$ folgt dann schon

$$R_k(x) = S_k(x) \cdot f^{(k+1)}(\xi), \quad \xi := \xi_{k+1}.$$

□

11.5 Anwendung: Lokale Extrema

Wir wollen nicht in die Details einer Kurvendiskussion einsteigen, aber an dieser Stelle bietet sich an, unsere Restglieddarstellung nach Lagrange zum Einsatz zu bringen.

Satz 11.5.1: Kriterien für lokale Extrema

Sei $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in]a,b[$. Es sei $f'(x_0) = 0$. Dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Maximum, wenn

$$f''(x_0) < 0$$

gilt. Im Fall eines strengen lokalen Minimums gilt

$$f''(x_0) > 0.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz für den Fall eines strengen lokalen Maximums (der Beweis für ein Minimum verläuft völlig analog):
Sei $x \in]a,b[$ und ohne Einschränkung $x_0 < x$. Nach Satz 11.4.9 folgt für $k = 1$ mit $f'(x_0) = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2, \quad \xi \in]x_0, x[.$$

Da f'' nach Voraussetzung stetig in x_0 ist, gilt noch in einer Umgebung $U(x_0) =]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $\delta > 0$, dass $f''(x) < 0$ für $x \in U(x_0)$. Da aus $x \in U(x_0)$ auch $\xi \in U(x_0)$ folgt, gilt somit $f''(\xi) < 0$. Daher ist $f(x) - f(x_0) < 0$, also $f(x) < f(x_0)$, für alle $x \in U(x_0)$, $x_0 < x$. □

Beispiel 11.5.2

Die Funktion $f(x) = xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ist unendlich oft stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2},.$$

Da $e^{-x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt

$$f'(x_0) = 0 \iff 1 - 2x_0^2 = 0 \iff x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Für die zweite Ableitung gilt

$$f''(x) = -4xe^{-x^2} + (1-2x^2)(-2x)e^{-x^2} = (4x^3 - 6x)e^{-x^2}$$

und wegen

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{6}{\sqrt{2}} &= -\frac{4}{\sqrt{2}} < 0, \\ 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{6}{\sqrt{2}} &= \frac{4}{\sqrt{2}} > 0, \end{aligned}$$

besitzt f bei $x_0 = -1/\sqrt{2}$ ein lokales Minimum und bei $x_0 = 1/\sqrt{2}$ ein lokales Maximum. Da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, sind die Extrema sogar globaler Natur, d. h.

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}} f(x) &= f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}, \\ \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) &= f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}. \end{aligned}$$

Das folgende Korollar lässt sich analog zu Satz 11.5.1 beweisen.

Korollar 11.5.3

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $2n$-mal stetig differenzierbar und für $x_0 \in]a,b[$ gelte $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1,\dots,2n-1$. Dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Maximum, wenn

$$f^{(2n)}(x_0) < 0.$$

Ein strenges lokales Minimum liegt vor, falls

$$f^{(2n)}(x_0) > 0.$$

Beweis. Siehe A.11.5 □

11.6 Anwendung: Elementare Funktionen

Wir kennen bereits die Reihendarstellung der e-Funktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

die des Logarithmus

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in]-1,1]$$

sowie die des Arcussinus (Beispiel 11.4.8) und wegen

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x), \quad x \in [-1,1]$$

auch die des Arcuscosinus. Nun wollen wir noch weitere Reihen anderer wichtiger elementarer Funktionen herleiten und ihnen somit eine analytische Definition geben. Kümmern wir uns zuerst um den Sinus und den Cosinus: Die Ableitungen beider Funktionen sind besonders simpel und wiederholen sich periodisch. Es liegt daher nahe, einfach eine Taylor-Entwicklung vorzunehmen.

Satz 11.6.1

Es gelten

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$

und

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x), & \sin''(x) &= -\sin(x), \\ \sin'''(x) &= -\cos(x), & \sin^{(4)}(x) &= \sin(x), \ldots \end{aligned}$$

sowie

$$\cos'(x) = -\sin(x), \qquad \cos''(x) = -\cos(x),$$
$$\cos'''(x) = \sin(x), \qquad \cos^{(4)}(x) = \cos(x), \ldots$$

also

$$\sin^{(2k)}(0) = 0, \qquad \sin^{2k+1}(0) = (-1)^k$$
$$\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k, \qquad \cos^{2k+1}(0) = 0$$

für $k \in \mathbb{N}$. Für das $(2n+1)$-Taylor-Polynom um $x_0 = 0$ des Sinus folgt somit:

$$\begin{aligned} T_{2n+1}(x;0) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}}{k!} x^k \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \end{aligned}$$

Nach Satz 11.4.9 gilt für das Restglied

$$\sin(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{\sin^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

und aus der Konvergenz der Exponentialreihe folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Analog zeigt man die Reihendarstellung des Cosinus. □

Nun können wir auch mühelos zeigen, dass die Gleichung (10.13) sinnvoll ist. Die Potenzreihe von e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig und absolut konvergent, daher können wir ihre Summanden beliebig umsortieren. Gleiches gilt natürlich auch für die Reihe e^z mit $z \in \mathbb{C}$ und daher ist

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \ldots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} \pm \ldots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots\right)}_{=\cos x} + i \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots\right)}_{=\sin x} \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Als Nächstes wollen wir noch auf zwei weitere Funktionen eingehen, die in der Praxis wichtig sind und sich von der e-Funktion ableiten.

Definition 11.6.2: Hyperbelfunktionen

Die Funktionen $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh\colon \mathbb{R} \to [1, \infty)$, definiert durch

$$\begin{aligned} \sinh(x) &:= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \\ \cosh(x) &:= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \end{aligned}$$

heißen **Hyperbelfunktionen**, und zwar **Sinus hyperbolicus** und **Cosinus hyperbolicus**.

Setzen wir die Potenzreihe für die e-Funktion ein, dann folgt sofort die Potenzreihendarstellung der Hyperbelfunktionen.

Lemma 11.6.3

Es gelten die Reihendarstellungen

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beweis. Mit der Exponentialreihe folgt direkt

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \ldots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Analog folgt die Reihe für den Cosinus hyperbolicus. □

Der Cosinus hyperbolicus ist auch in verschiedenen Anwendungen zu finden. Hängt man beispielsweise eine Kette mit vernachlässigbarer Masse an zwei Punkten einer Ebene auf, dann nimmt sie die Form des Cosinus hyperbolicus (und *nicht* einer Parabel) an!

Differenziert man die Funktionen aus Definition 11.6.2, dann folgt sofort:

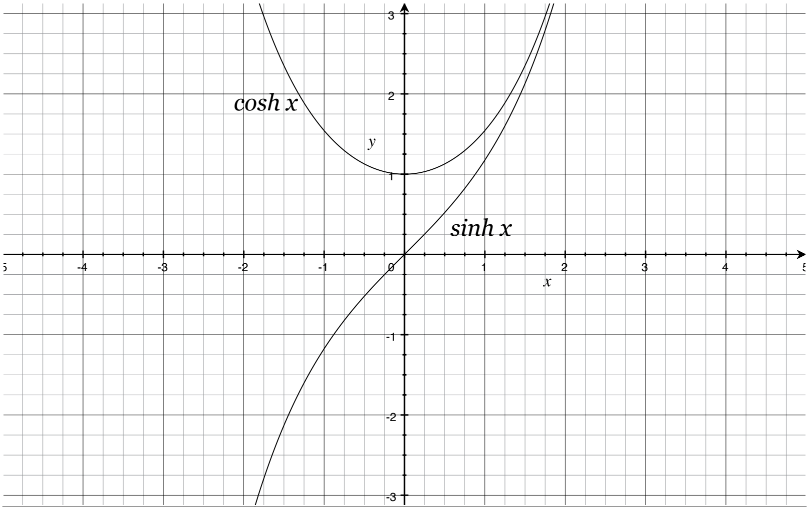

Abbildung 11.6.1. Die Hyperbelfunktionen

Lemma 11.6.4

Es gelten

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) &= \cosh(x),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) &= \sinh(x).\end{aligned}$$

Für die hyperbolischen Funktionen gilt eine Art „Anti-Pythagoras“:

Lemma 11.6.5

Es gilt

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Beweis.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x}2 + e^{-2x}\right) = 1$$

□

Dies erklärt auch den Namen der Funktionen: Die *Hyperbel*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

wird gerade durch $x = \cosh(\omega)$ und $y = \sinh(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$ parametrisiert, genau wie $x = \cos(\varphi)$ und $y = \sin(\varphi)$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$ den Einheitskreis parametrisieren. Man nennt ω daher auch *hyperbolischen Winkel*, obwohl es sich streng genommen bei ω um keinen Winkel handelt.

Die Ähnlichkeiten zwischen den trigonometrischen Funktionen sin, cos und den Hyperbelfunktionen sinh, cosh gehen noch weiter. Wiederum aus Definition 11.6.2 folgert man die Additionstheoreme (Funktionalgleichungen) der Hyperbelfunktionen:

Lemma 11.6.6

Es gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y),\\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y).\end{aligned}$$

Beweis. Siehe A.11.6 □

Schließlich halten wir noch fest, dass sich die hyperbolischen Umkehrfunktionen, anders als der Arcussinus und der Arcuscosinus, in geschlossener Form darstellen lassen.

Lemma 11.6.7

Die Funktionen $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh\colon [0, \infty[\to [1, \infty[$ sind jeweils bijektiv und für ihre Umkehrfunktionen gilt:

(a) $\quad \operatorname{arsinh}(x) := \sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$

(b) $\quad \operatorname{arcosh}(x) := \cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$

Beweis. Aus der Monotonie der Exponentialfunktion folgt $e^x < e^y$ und $-e^{-x} < -e^{-y}$ für $x < y$. Daher gilt

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) < \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \sinh(y), \quad x < y,$$

also ist der Sinus hyperbolicus streng monoton und somit bijektiv. Eingeschränkt auf $[0, \infty)$ ist auch der Cosinus hyperbolicus streng monoton (und somit bijektiv), denn für $0 \leq x < y$ gilt:

$$\begin{aligned}\cosh(y) - \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^y - e^x + e^{-y} - e^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^y - e^x + \underbrace{e^{x-y-x} - e^{y-x-y}}_{=(e^x-e^y)e^{-x-y}}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{e^y - e^x}_{>0})(1 - \underbrace{e^{-(x+y)}}_{<1}) > 0\end{aligned}$$

Die Umkehrfunktionen bestimmen sich nun wie folgt: Sei $x \geq 0$ und $y = \cosh(x) \geq 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\cosh(x) = y &\iff e^x + e^{-x} = 2y\\ &\iff s + s^{-1} = \frac{s^2+1}{s} = 2y \quad \text{mit} \quad s := e^x \geq 1 \ (x \geq 0)\\ &\iff s^2 - 2ys + 1 = 0\\ &\iff s = y \pm \sqrt{y^2-1} \overset{!}{\geq} 1\end{aligned}$$

Für $y \geq 1$ ist

$$y - \sqrt{y^2-1} = \frac{y^2 - (y^2-1)}{y + \sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{y + \underbrace{\sqrt{y^2-1}}_{\geq 0}} \leq 1,$$

also kommt nur $s = y + \sqrt{y^2-1}$ infrage und somit

$$\begin{aligned}x &= \ln(e^x) = \ln(s)\\ &= \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = \cosh^{-1}(y)\\ \implies \operatorname{arcosh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \in [1, \infty[.\end{aligned}$$

Analog ergibt sich die Darstellung für arsinh. □

Zusammenfassung

Eine (formale) **Potenzreihe** mit **Entwicklungspunkt** $x_0 \in \mathbb{R}$ und Koeffizienten $c_n \in \mathbb{R}$ ist eine Reihe der speziellen Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Jeder solchen Reihe lässt sich ein **Konvergenzradius** $\rho \geq 0$ zuordnen und wir haben gesehen, dass die Potenzreihe für $|x - x_0| < \rho$ gleichmäßig konvergiert und für $|x - x_0| > \rho$ divergiert. Auf dem Rand $x = x_0 \pm \rho$

ist keine allgemeine Aussage möglich. Zur Berechnung bietet sich

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

an, falls der Grenzwert existiert oder allgemeiner der **Satz von Cauchy-Hadamard**

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt nun, dass eine Potenzreihe auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ stetig sowie gliedweise differenzierbar und integrierbar ist. Konvergiert die Potenzreihe auch an einem Randpunkt $x = x_0 \pm \rho$, dann ist sie nach dem **Satz von Abel** auch dort stetig. Der **Identitätssatz** besagt, dass zwei Potenzreihen um denselben Entwicklungspunkt mit gemeinsamem Konvergenzradius $\rho > 0$ genau dann übereinstimmen, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen. Damit ergibt sich insbesondere die Möglichkeit des Koeffizientenvergleichs bei Potenzreihen.
Die Approximation beliebig oft stetig differenzierbarer Funktionen f durch Polynome führt auf die **Taylor-Reihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

zum Entwicklungspunkt x_0. Besitzt f eine Potenzreihendarstellung, dann stimmt diese (bei gleichem Entwicklungspunkt) mit der Taylor-Reihe überein. Im Allgemeinen muss eine konvergente Taylor-Reihe aber nicht unbedingt die Ausgangsfunktion darstellen! Eine Aussage über den Fehler bei der Taylor-Approximation liefert der **Satz von Taylor**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k \, \mathrm{d}t \\ &= T_k(x; x_0) + R_k(x; x_0). \end{aligned}$$

Man nennt $T_k(x; x_0)$ k-tes **Taylor-Polynom** zum Entwicklungspunkt x_0 und $R_k(x; x_0)$ heißt **Restglied**. Gilt für das Restglied $\lim_{n\to\infty} R_k(x; x_0) = 0$, dann ist die Funktion f also in eine Potenzreihe entwickelbar und diese Potenzreihe ist durch die Taylor-Reihe gegeben.
Wichtige Potenz- bzw. Taylor-Reihen sind:

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in]-1,1] \\
(1+x)^{\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1, \\
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \\
\arcsin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)}, \quad |x| \leq 1 \\
\arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1 \\
\sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\operatorname{artanh}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1
\end{aligned}$$

Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Was versteht man unter einer Potenzreihe?*
- *Wie ist der Konvergenzradius definiert?*
- *Warum ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ auf $]-\rho, \rho[$ stetig?*
- *Man gebe ein Beispiel für eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1, die aber für $|x| = 1$ divergiert.*
- *Was versteht man unter einer Taylor-Reihe und was besagt der Satz von Taylor?*
- *Wie lautet die Restglieddarstellung von Lagrange?*
- *Warum gilt die Formel $\ln(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 \ldots$?*

Zum Einüben der Begriffe dieses Kapitels solltet ihr euch mal an einigen der folgenden Aufgaben versuchen.

11.7 Aufgaben

A.11.1 Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} x^n$$
$$\text{(c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \qquad \text{(d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{ne^n}(x+1)^n$$

A.11.2 Man bestimme die Taylor-Reihe von $\ln(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 > 0$ und gebe den Konvergenzbereich an.

A.11.3 Man bestimme die Taylor-Reihe von $f(x) = x^a$ für ein $a \in \mathbb{R}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 > 0$ und gebe den Konvergenzbereich an.

A.11.4 Es seien die Voraussetzungen aus dem Satz von Taylor (Satz 11.4.5) gegeben und $l \in \{1, \ldots, k+1\}$. Man zeige die *Restglieddarstellung von Schlömilch*: Es existiert ein $\xi \in [x_0, x]$ (bzw. $\xi \in [x, x_0]$), sodass

$$R_k(x, x_0) = \frac{f^{k+1}(\xi)}{k! \cdot l}(x - \xi)^{k-l+1}(x - x_0)^l.$$

Hinweis: Man nutze Satz 9.4.2.

A.11.5 Man entwickle folgende Funktionen auf einem geeigneten Intervall in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$:

$$\text{(a)}\quad f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3} \qquad \text{(b)}\quad f(x) = \frac{10x - 4}{x^2 - 1}$$
$$\text{(c)}\quad f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 12} \qquad \text{(d)}\quad f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

A.11.6 Man zeige die Reihendarstellung des Arcus tangens

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

und folgere daraus die *Leibnizsche Reihe*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \ldots$$

A.11.7 Man beweise Korollar 11.5.3.

A.11.8 Man zeige die Additionstheoreme aus Lemma 11.6.6.

A.11.9 Der *Tangens hyperbolicus* ist definiert durch $\tanh(x) := \sinh(x)/\cosh(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Man zeige, dass $\tanh\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$ bijektiv ist und für die Umkehrfunktion

$$\operatorname{artanh}(x) := \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in]-1,1[$$

gilt.

(b) Man zeige, dass

$$\operatorname{artanh}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| < 1.$$

A.11.10 Seien $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und es gelte

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

sowie $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in]a,b[$. Man zeige, dass dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Hinweis: Man nutze Satz 11.4.9.

A.11.11 Man zeige, dass

$$\left|\binom{-1/2}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \quad n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Hinweis: Vollständige Induktion

A.11.12 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der *Fibonacci-Zahlen*, also $a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Man zeige nacheinander:

(a) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist $\rho = \Phi^{-1}$, wobei $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$.

(b) Für alle $|x| < \Phi^{-1}$ gilt: $f(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$

(c) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$, $n \in \mathbb{N}$

Hinweis: Man nutze das Ergebnis aus A.5.20.

A.11.13 Man zeige, dass

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(x), \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh}(x), \quad x \geq 1,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{artanh}(x), \quad |x| < 1.$$

A.11.14 Der Umfang der *Ellipse*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\},$$

$a > b > 0$, ist gegeben durch das *vollständige elliptische Integral 2. Art*

$$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(x)}\, \mathrm{d}x,$$

wobei die *numerische Exzentrizität* $\varepsilon^2 = 1 - (b/a)^2 \in (0,1)$ die „Abweichung" von einem Kreis beschreibt. Dieses Integral ist *nicht* elementar integrierbar! Man zeige, dass ein Potenzreihenansatz aber die Darstellung

$$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(x)}\, \mathrm{d}x = 2\pi a \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\varepsilon^{2k}}{1-2k} \right)$$

liefert.
Hinweis: Man nutze das Binomialtheorem (Satz 11.4.7) sowie A.10.12 und orientiere sich am vorgehen in Beispiel 11.4.8.

12 Uneigentliche Integrale

Wozu?

Bei der Definition des Riemann-Integrals einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind sowohl die Kompaktheit des Integrationsintervalls $[a, b]$ als auch die Beschränktheit des Integranden wesentlich. Nur unter diesen Bedingungen ist die fundamentale Integralabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq (b-a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

möglich. Will man aber den Inhalt von Figuren wie dem „Zwickel"

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \right\}$$

berechnen, stößt man vermeintlich auf ein Problem: Das Integrationsintervall ist hier nicht mehr kompakt. Durch einen nahe liegenden Grenzübergang lässt sich jedoch die Definition des (Riemann-)Integrals erweitern, und zwar sowohl für den Fall unbeschränkter Integrationsintervalle als auch für den Fall eines an einem Punkt unbeschränkten Integranden. Solche **uneigentlichen Integrale** wollen wir nun genauer studieren.
Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- Definition uneigentlicher (Riemann-)Integrale,
- Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale,
- Integralkriterium für Reihen,
- Gamma-Funktion

und ihr Verständnis.

12.1 Unbeschränktes Integrationsintervall

Wir beginnen mit dem Fall eines einseitig unbeschränkten Integrationsintervalls. Ähnlich wie bei Reihen, die ja als Grenzwert endlicher Summen definiert wurden, liegt es nahe, das Integral als Grenzwert von Integralen über immer größer werdenden abgeschlossenen Intervallen zu definieren. Der Grenzwert kann dann, wie schon bei Reihen, entweder existieren oder nicht, es gibt also konvergente und divergente Integrale.

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_12

Definition 12.1.1: Uneigentlich integrierbar auf $]-\infty, b$ und $[a, \infty[$

Sei $f\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b]$, $a<b$, integrierbar. Wenn der Grenzwert

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert, dann nennt man f **uneigentlich integrierbar** auf $[a,\infty[$ und sagt, $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ sei ein **konvergentes Integral**. Analog definiert man für eine Funktion $f\colon\,]-\infty,b]\to\mathbb{R}$, die auf jedem Intervall $[a,b]$, $a<b$, integrierbar ist,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wenn der Grenzwert existiert. Ein nichtkonvergentes Integral heißt **divergent**.

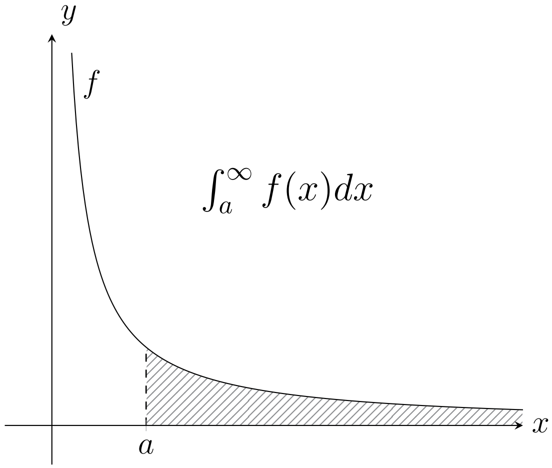

Abbildung 12.1.1. Uneigentliches Integral auf einem unbeschränkten Integrationsintervall $[a,\infty[$

Zwei einfache Beispiele sollen das Vorgehen erläutern.

Beispiele 12.1.2

(a) Der Kehrwert der Exponentialfunktion ist auf $[0,\infty[$ uneigentlich integrierbar, denn

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^b\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(1-e^{-b}\right) = 1.\end{aligned}$$

(b) Die Funktion $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist auf $[1,\infty)$ genau dann uneigentlich integrierbar, falls $\alpha > 1$. Für $\alpha \neq 1$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b\\ &= \frac{1}{\alpha-1} + \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases}\infty & ,\ \alpha < 1\\ (\alpha-1)^{-1} & ,\ \alpha > 1\end{cases}\end{aligned}$$

und für $\alpha = 1$ ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\ln(b) = \infty.$$

Insbesondere folgt für den Flächeninhalt des Zwickels

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

(c) Die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$, $x \geq 0$, ist nicht uneigentlich integrierbar. Mit A.11.13 gilt nämlich

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{a\to\infty}\operatorname{arsinh}(x)\big|_{x=0}^a\\ &= \lim_{a\to\infty}\operatorname{arsinh}(a) = \infty.\end{aligned}$$

Die Beispiele (b) und (c) zeigen insbesondere, dass Beschränktheit und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ nicht ausreichen, um die Konvergenz von $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ zu gewährleisten.

Jetzt wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen wir Konvergenz oder Divergenz zu erwarten haben. Angenommen $f\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ ist uneigentlich integrierbar, dann konvergiert insbesondere $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = \int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ für jede Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n \to \infty$. Also ist $(I_n)_n$ eine Cauchy-Folge und somit existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned}|I_n - I_m| &= \left| \int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{b_m}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.\end{aligned}$$

Diese Überlegung führt direkt auf folgenden Satz, der als Analogon zum Cauchy-Kriterium für Folgen zu sehen ist.

Satz 12.1.3: Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale

Sei $f\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$, dann ist $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ genau dann konvergent, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \geq a \quad \forall s, s' \geq c\colon \qquad \left| \int_s^{s'} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $\varphi(t) := \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}t$, $t \geq a$. Dann existiert $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $c = c(\varepsilon) \geq a$ existiert, sodass

$$|\varphi(s') - \varphi(s)| = \left| \int_s^{s'} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

□

Beispiel 12.1.4: Kardinalsinus

Es gilt $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$ und somit ist $\mathrm{si}\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

stetig. Die so definierte Funktion si heißt **Kardinalsinus** oder **Sinus cardinalis** und tritt in verschiedenen Bereichen innerhalb und außerhalb der Mathematik auf. Aus der Stetigkeit folgt, dass die Funktion auf jedem Intervall $[0, b]$, $b > 0$, integrierbar ist, und für $0 < s \leq s'$ gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_s^{s'} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= -\left.\frac{\cos(x)}{x}\right|_{x=s}^{s'} - \int_s^{s'} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\cos(s)}{s} - \frac{\cos(s')}{s'} - \int_s^{s'} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\left| \int_s^{s'} \frac{\sin(x)}{x} \,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} + \int_s^{s'} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x < \frac{2}{s} + \left(-\frac{1}{x}\Big|_{x=s}^{s'} \right)$$
$$< \frac{2}{s} + \frac{s'-s}{ss'} < \frac{3}{s},$$

also existiert für $\varepsilon > 0$ ein $c = 3/\varepsilon$, sodass

$$\left| \int_s^{s'} \frac{\sin(x)}{x} \,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \quad \forall s, s' \geq c.$$

Nach Satz 12.1.3 ist das Integral $\int_0^\infty \mathrm{si}(x)\,\mathrm{d}x$ somit konvergent. Der Wert $\mathrm{si}(0) = 1$ spielt für den Wert des Integrals keine Rolle und es lässt sich zeigen, dass

$$\int_0^\infty \mathrm{si}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Das Konzept der absoluten Konvergenz kann direkt auch auf uneigentliche Integrale übertragen werden.

Definition 12.1.5: absolut uneigentlich integrierbar

Sei $f\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b]$ integrierbar, dann heißt f **absolut uneigentlich integrierbar** auf $[a,\infty[$, falls $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergent ist. Man nennt dann $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ ein **absolut konvergentes Integral**.

Bemerkung 12.1.6

Ist $f\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ absolut uneigentlich integrierbar, dann folgt aus Satz 12.1.3 wegen

$$\left| \int_s^{s'} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_s^{s'} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon, \quad \forall s' \geq s \geq a,$$

unmittelbar, dass f auch uneigentlich integrierbar ist. Das Beispiel 12.1.7 zeigt, dass die Umkehrung aber im Allgemeinen nicht gilt. Wie wir es schon von den Reihen kennen, gibt es also konvergente uneigentliche Integrale, die nicht absolut konvergent sind. Die absolute Konvergenz ist somit auch in diesem Fall eine stärkere Eigenschaft.

Beispiel 12.1.7

Nach Beispiel 12.1.4 ist der Kardinalsinus $\mathrm{si}\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar. Das Integral

$$\int_0^\infty \mathrm{si}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

ist aber nicht absolut konvergent, wie folgende Abschätzung zeigt: Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt somit

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x = \infty.$$

Wie schon bei Folgen und Reihen, können wir auch bei uneigentlichen Integralen durch Vergleich mit geeigneten Majoranten bzw. Minoranten auf Konvergenz bzw. Divergenz schließen.

Lemma 12.1.8

Sei $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b]$ integrierbar.

(a) Ist $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \geq a$ und $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent, dann ist $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ absolut konvergent.

(b) Ist $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \geq a$ und $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ divergent, dann ist auch $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ divergent.

Beweis. Der Beweis ist einfach:

(a) Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert nach Voraussetzung ein $c > a$, sodass für alle $c \leq s \leq s'$ gilt:

$$\int_s^{s'} |f(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_s^{s'} g(x) \,\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

wobei ohne Einschränkung $s \leq s'$ sei. Nach Satz 12.1.3 ist $|f|$ daher auf $[a, \infty[$ uneigentlich integrierbar.

(b) Wäre f uneigentlich integrierbar, dann gäbe es nach Satz 12.1.3 zu $\varepsilon > 0$ ein $c > a$, sodass

$$\int_s^{s'} g(x) \,\mathrm{d}x \leq \int_s^{s'} f(x) \,\mathrm{d}x < \varepsilon \quad \forall s' \geq s \geq c.$$

Damit wäre aber auch g uneigentlich integrierbar, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Beispiel 12.1.9

Mithilfe einer geeigneten Marjorante lässt sich zeigen, dass

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

konvergiert. Für $x \geq 1$ gilt offenbar

$$\left|\frac{\cos(x)}{1+x^2}\right| = \frac{|\cos(x)|}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

und nach Beispiel 12.1.2 (b) ist $\int_1^{\infty} 1/x^2 \,\mathrm{d}x$ konvergent.

Eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern kann auch als das uneigentliche Integral einer geeigneten „Treppenfunktion“ (vgl. A.9.12) gesehen werden. Daher können uneigentliche Integrale genutzt werden, um das Konvergenzverhalten von Reihen zu untersuchen. Umgekehrt lässt sich aus dem Konvergenzverhalten einer Reihe auch auf die Existenz eines uneigentlichen Integrals schließen. Präzise fasst dies der folgende Satz:

Satz 12.1.10: Integralkriterium für Reihen

Sei $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ und $f\colon [\ell, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. Dann gilt:

(a) $\displaystyle\sum_{n=\ell}^{\infty} f(n)$ konvergent $\iff$ $\displaystyle\int_\ell^{\infty} f(x) \,\mathrm{d}x$ konvergent.

(b) Die Folge

$$d_m := \sum_{n=\ell}^{m} f(n) - \int_{\ell}^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad m \geq \ell$$

ist nicht negativ, monoton wachsend und konvergent mit

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} d_m \leq f(\ell).$$

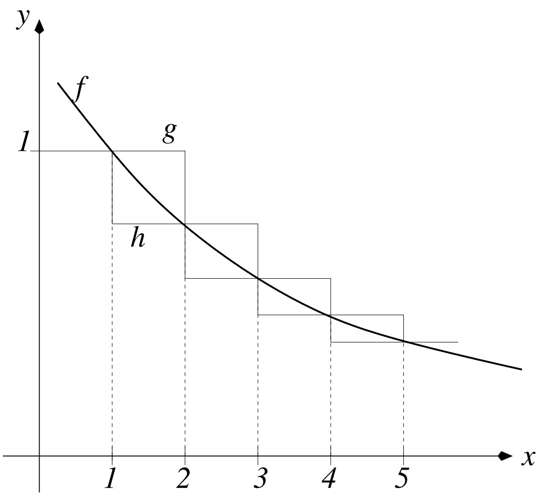

Abbildung 12.1.2. Treppenfunktionen

Beweis. Sei ohne Einschränkung $\ell = 1$ und man setze $g(x) := f(\lfloor x \rfloor)$ und $h(x) := f(\lfloor x \rfloor + 1)$. Dann sind g, h monoton fallende Treppenfunktionen und als solche auf endlichen Intervallen nach Satz 9.2.6 integrierbar. Des Weiteren gilt $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \geq 1$. Für $k, m \in \mathbb{N}_{>0}$, $k < m$, folgt aus der Monotonie des Integrals somit

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_k^m h(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=k+1}^{m} f(n) \leq \int_k^m f(x)\,\mathrm{d}x \\ \leq \int_k^m g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=k}^{m-1} f(n). \end{aligned}$$

Aus diesen Ungleichungen folgen nun die Behauptungen:

(a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent, dann ist $s_m = \sum_{n=1}^{m} f(n)$ eine Cauchy-Folge, also existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass für alle $m > k \geq n_0$ gilt:

$$\int_k^m f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{n=k}^{m-1} f(n) < \varepsilon$$

Nach Satz 12.1.3 ist $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ somit konvergent. Andererseits folgt nach Satz 12.1.3 aus der Konvergenz von $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}_{>0} \quad \forall m > k > n_0\colon \quad s_m - s_k \le \int_k^m f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Also ist $(s_m)_m$ eine Cauchy-Folge und die Reihe mithin konvergent.

(b) Aufgrund der Monotonie gilt offenbar

$$\begin{aligned} d_{m+1} &= \sum_{n=1}^{m+1} f(n) - \int_1^{m+2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{m} f(n) + f(m+1) - \int_1^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{m+1}^{m+2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= d_m + f(m+1) - \int_{m+1}^{m+2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\ge d_m \\ &= \sum_{n=1}^{m} f(n) - \int_1^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_m &= \sum_{n=1}^{m} f(n) - \sum_{n=2}^{m+1} \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\le \sum_{n=1}^{m} f(n) - \sum_{n=2}^{m+1} f(n) \\ &= f(1) - f(m+1) \\ &\le f(1). \end{aligned}$$

Also ist $(d_m)_m$ monoton wachsend sowie nach oben beschränkt und nach Satz 5.6.6 daher konvergent. □

Beispiele 12.1.11

(a) Die Funktion $f(x) = x^{-\alpha}$ ist für $\alpha > 0$ auf $[1, \infty[$ monoton fallend und nach Beispiel 12.1.2 (b) ist das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

genau dann konvergent, wenn $\alpha > 1$. Mit Satz 12.1.10 folgt daraus sofort das bereits bekannte Konvergenzverhalten der **allgemeinen harmonischen Reihe** (vgl. Lemma 6.2.9)

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{konvergent} \iff \alpha > 1.$$

Die Divergenz der Reihe für $\alpha \leq 0$ ist klar, da in diesem Fall $f(n) = n^{|\alpha|}$ keine Nullfolge ist. Für $\alpha = 1$ erhält man insbesondere

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \int_1^{m+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq 1 \\ \iff \ln(m+1) \leq \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(m+1), \end{aligned}$$

also eine Abschätzung, wie schnell (bzw. langsam) die harmonische Reihe divergiert. Der Grenzwert

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \ln(m+1) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n} - \ln(m+1) - \frac{1}{m+1} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \ln(m) \\ &\approx 0,57721\ldots \end{aligned}$$

heißt **Euler-Mascheroni-Konstante** und ist eine wichtige mathematische Konstante, die häufig bei Problemen der Analysis, Zahlentheorie oder Funktionentheorie auftritt. Es ist *nicht* bekannt, ob γ rational ist!

(b) Untersucht man die Reihe

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln(n)\sqrt{\ln(\ln(n))}}$$

auf Konvergenz, stellt man fest, dass weder Quotientenkriterium, noch Wurzelkriterium eine Aussage liefern. Die Funktion $f(x) = 1/(x\ln(x)\sqrt{\ln(\ln(x))})$ ist aber monoton fallend auf $[2, \infty[$ und mit der Substitution $s(x) = \ln(\ln(x))$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln(x)\sqrt{\ln(\ln(x))}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{s'(x)}{\sqrt{s(x)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_{s(2)}^{s(b)} \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s \\
&= \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{s}\Big|_{s=\ln(\ln(2))}^{\ln(\ln(b))} \\
&= \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{\ln(\ln(b))} - 2\sqrt{\ln(\ln(2))} \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

also divergiert die Reihe nach Satz 12.1.10.

Man könnte nun auf die Idee kommen, Integrale über $]-\infty,\infty[$ durch die Definition

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen. Das geht so aber nicht![1] Das sieht man wie folgt ein. Zuerst berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} x\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}x^2\Big|_{-r}^{r} \\
&= \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Jetzt versuchen wir einmal den Weg über

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (x+1)\,\mathrm{d}x &\overset{z:=x+1;dz=dx}{=} \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-r}^{r} \\
&= \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2}r^2 + r - \frac{1}{2}r^2 + r\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} 2r = \infty.
\end{aligned}$$

So geht es also nicht! Sinnvoller ist:

[1] Na ja, das geht eigentlich schon, aber das liegt außerhalb unserer Reichweite. Solch ein Integral nennt man dann – bei korrekter Definition – den *Cauchy'schen Hauptwert*.

Definition 12.1.12: uneigentlich integrierbar auf $]-\infty, \infty[$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, b]$ integrierbar. Dann definiert man

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $-\infty < x_0 < \infty$ ein beliebiger Punkt ist. Wenn die beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite konvergieren, nennt man f auf $]-\infty, \infty[$ uneigentlich integrierbar.

Bemerkung 12.1.13

Aus der Additivität des (Riemann-)Integrals und der Definition des uneigentlichen Integrals folgt sofort, dass der Wert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ unabhängig von der Wahl des „Trennungspunktes“ $x_0 \in \mathbb{R}$ ist.

Schauen wir uns ein kurzes Beispiel an.

Beispiel 12.1.14

Für das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to-\infty} \arctan(x)\big|_{x=b}^{0} + \lim_{a\to\infty} \arctan(x)\big|_{x=0}^{a} \\
&= -\lim_{b\to-\infty} \arctan(b) + \lim_{a\to\infty} \arctan(a) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

12.2 Unbeschränkte Integranden

Der zweite Fall, in dem wir uneigentliche Integrale studieren müssen, beinhaltet Funktionen, die an einem Punkt unbeschränkt werden.

Definition 12.2.1: Uneigentlich Integrierbar

Sei $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$ für $\varepsilon > 0$ integrierbar und $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$. Wenn der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to a^+} \int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert, dann nennt man f **uneigentlich integrierbar** auf $[a,b]$ und sagt, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist ein **konvergentes Integral**. Analog definiert man für eine Funktion $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$, die auf jedem Intevall $[a, b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, integrierbar ist,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to b^-} \int_a^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wenn der Grenzwert existiert.
Für eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$, $a < x_0 < b$, die jeweils auf $[a, x_0 - \varepsilon]$ und $[x_0+\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$, intgrierbar ist, definiert man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wenn die Integrale auf der rechten Seite konvergieren.

Bemerkung 12.2.2

Der Satz 12.1.3 und Lemma 12.1.8 gelten analog für uneigentliche Integrale des Typs aus Definition 12.2.1.

Beispiel 12.2.3

Die Funktion $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist auf $[b, 1]$, $b > 0$, integrierbar. Für $\alpha \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & , \alpha > 1 \\ (1-\alpha)^{-1} & , \alpha < 1 \end{cases}\end{aligned}$$

und für $\alpha = 1$ ist

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(\varepsilon) = \infty.$$

Zusammen mit Beispiel 12.1.2 (b) können wir daher festhalten, dass

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Unser abschließendes Beispiel eröffnet uns einen Zugang zur Welt der **Gamma-Funktion**, die innermathematisch, wie auch in den Anwendungen, eine außerordentlich große Rolle spielt.

Beispiel 12.2.4

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt mit partieller Integration (siehe A.10.17 (b))

$$\int x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{n} \frac{n!x^{n-k}}{(n-k)!}e^{-x}$$

und daher gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} -\sum_{k=0}^{n} \frac{n!x^{n-k}}{(n-k)!}e^{-x}\Big|_0^b \\ &= n! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \lim_{b\to\infty} \frac{b^{n-k}}{e^{-b}} \\ &= n!\end{aligned}$$

nach Beispiel 10.6.5 (b).

Das Beispiel 12.2.4 legt nun nahe, wie man die Fakultätsfunktion auf beliebige positive reelle Zahlen erweitern kann.

Definition 12.2.5: Gamma-Funktion

Für $\alpha > 0$ definiert man die **Gamma-Funktion** durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{12.1}$$

Bemerkung 12.2.6: Achtung!

Das Integral (12.1) ist im *doppelten Sinne uneigentlich*. Sowohl das Integrationsintervall ist unbeschränkt, als auch der Integrand für $0 < \alpha < 1$, weil in diesem Fall

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha-1}e^{-x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{1-\alpha}e^{x}} = \infty.$$

Daher gilt

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x := \\ \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha > 0. \tag{12.2}$$

Nun ist nicht direkt klar, ob (12.1) überhaupt konvergiert und die Definition der Gamma-Funktion somit sinnvoll ist. Wir überprüfen die Existenz, indem wir die beiden Integrale in (12.2) gesondert betrachten:
Es gilt $x^{\alpha-1}e^{-x} \leq x^{\alpha-1}$ für $x \geq 0$ und nach Beispiel 12.2.3 konvergiert

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}x \quad \forall \alpha > 0,$$

also existiert das erste Integral nach Lemma 12.1.8. Für $\alpha > 0$ gilt weiterhin

$$x^{\alpha-1}e^{-x/2} = \frac{x^{\alpha-1}}{e^{x/2}} = \left(\frac{x^{2(\alpha-1)}}{e^{x}}\right)^{1/2} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

nach Beispiel 10.6.5 (b) und somit existiert ein $M > 0$, sodass

$$x^{\alpha-1}e^{-x} = x^{\alpha-1}e^{-x/2}e^{-x/2} \leq Me^{-x/2}.$$

Nun gilt

$$\int_1^\infty e^{x/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} -2e^{-x/2}\Big|_{x=1}^{b} = 2e^{-1/2}$$

und daher konvergiert auch das zweite Integral nach Lemma 12.1.8 für alle $\alpha > 0$.

Satz 12.2.7: Eigenschaften der Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion (12.1) besitzt für $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaften:

(a) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

(b) $\Gamma(\alpha+n+1) = (\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$

(c) $\Gamma(n+1) = n!$ und $\Gamma(1) = 1$

Beweis. Wir gehen die drei Eigenschaften der Reihe nach durch:

(a) Mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{x^\alpha}{\alpha}e^{-x}\Big|_{x=0}^{b} + \frac{1}{\alpha}\int_0^b x^\alpha e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{b^\alpha}{\alpha e^b} + \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\alpha}\int_0^b x^{(\alpha+1)-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1).\end{aligned}$$

(b) Folgt durch rekursives Anwenden von (a).

(c) Nach Beispiel 12.1.2 (a) ist $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(n+1) = n!$ somit ein Spezialfall von (b).

□

Man beachte, dass gemäß (b) die Gamma-Funktion bereits eindeutig durch ihre Werte im Intervall $]0,1]$ bestimmt ist. Durch die Gleichung

$$\Gamma(\alpha-1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}$$

lässt sich die Gamma-Funktion auf $\mathbb{R}\backslash\{-1,-2,-3,\ldots\}$ fortsetzen.

Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir den Begriff des **uneigentlichen Integrals** kennengelernt: (1) Für eine Funktion $f\colon [a,\infty[\to\mathbb{R}$ definiert man

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

falls der Grenzwert existiert. (2) Für eine Funktion $f\colon (a,b]\to\mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to a}|f(x)| = \infty$ definiert man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

falls der Grenzwert existiert. Dies kann jeweils als Erweiterung des Riemann-Integrals für *unbeschränkte Intervalle* oder *unbeschränkte Integranden* gesehen werden. Zwei wichtige Beispiele, die man sich merken sollte, sind:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \infty & ; \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & ; \alpha > 1 \end{cases} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \infty & ; \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & ; \alpha < 1 \end{cases}$$

Oft ist es einfacher, die Konvergenz eines uneigentlichen Integrals zu zeigen, als seinen Wert zu berechnen. In dieser Hinsicht gibt es dann Ähnlichkeiten zu Folgen und Reihen wie das **Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale** oder die Möglichkeit, durch geeignete Majoranten bzw. Minoranten auf Konvergenz bzw. Divergenz zu schließen. Einen engen Zusammenhang zwischen uneigentlichen Integralen und Reihen zeigt das **Integralkriterium für Reihen**, welches ein weiteres nützliches Kriterium für die Konvergenz von Reihen liefert. Insbesondere folgt daraus die berühmte **Euler-Mascheroni-Konstante**

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(k) \approx 0.57721\ldots$$

Schließlich haben wir noch gesehen, dass auch doppelt uneigentliche Integrale wie

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha > 0$$

konvergieren können. Die so definierte **Gamma-Funktion** Γ verallgemeinert die Fakultät auf beliebige positive reelle Zahlen und ist eine der wichtigsten Funktionen in der Analysis.
Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Welche verschiedenen Arten von uneigentlichen Integralen gibt es?*
- *Wann heißt ein uneigentliches Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ absolut konvergent?*
- *Wie lautet ein Beispiel für ein konvergentes, aber nicht absolut konvergentes uneigentliches Integral.*
- *Wie ist der Ausdruck $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ zu verstehen?*
- *Welche grundlegenden Eigenschaften besitzt die Gamma-Funktion?*

Zum Einüben der Begriffe dieses Kapitels solltet ihr euch mal einige der folgenden Aufgaben zur Brust nehmen.

12.3 Aufgaben

A.12.1 Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{|1+x|}}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(x)^2\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2-\sqrt{x}}{x^4-x}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

Hinweis zu (e): $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$

A.12.2 Man untersuche die folgenden Integrale auf Konvergenz, ohne sie zu berechnen:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{2x-e^{-x}}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(1/x)}{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x-1/2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha\in\mathbb{R}$

A.12.3 Man zeige, dass das *Fresnel'sche Integral*

$$\int_{0}^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

konvergiert.
Hinweis: Man nutze Satz 12.1.3.

A.12.4 Sei $f_n\colon [0,\infty[\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}, \quad x \geq 0.$$

Man zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, aber

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_{0}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folgerung: Der Satz 9.5.1 gilt nicht für uneigentliche Integrale!

A.12.5 Man untersuche die *allgemeine Abel'sche Reihe*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln(k)^\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R},$$

auf Konvergenz.

A.12.6 Man zeige mit partieller Integration, dass für $s>0$ gilt:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-sx}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+s^2}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-st}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{s}{1+s^2}$

A.12.7 Man folgere aus $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

A.12.8 Man zeige, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\Delta := 4b - a^2 > 0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + ax + b}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$$

Hinweis: Man nutze quadratische Ergänzung.

13 Metrik, Norm, Topologie

Wozu?

Viele der in diesem Buch behandelten Konzepte lassen sich über die reellen Zahlen hinaus verallgemeinern. Insbesondere für eure nächsten Semester, in denen ihr etwa Funktionen, Integration sowie Differentiation in mehreren Dimensionen behandeln werdet, ist diese Verallgemeinerung auch zwingend notwendig. Daher wollen wir euch in diesem Kapitel mit den wichtigsten topologischen Grundbegriffen vertraut machen, die ihr dafür benötigt. Wir werden damit beginnen, Abstandsbegriffe, die sogenannten **Metriken**, sowie Längenbegriffe, die sogenannten **Normen**, auf allgemeinen Mengen beziehungsweise Vektorräumen einzuführen. Darauf aufbauend sind wir schließlich in der Lage, das Konzept der **offenen** und **abgeschlossenen Mengen** klar zu definieren sowie konvergente Folgen und Cauchy-Folgen auch in allgemeinen metrischen Räumen zu behandeln.
Wichtige **Lernziele** in diesem Kapitel sind:

- Metriken und metrische Räume,
- Normen und normierte Räume,
- offene und abgeschlossene Mengen,
- Konvergenz und Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

und ihr Verständnis. Auch am Ende dieses Kapitels haben wir euch ein paar Übungsaufgaben bereitgestellt, mit deren Hilfe ihr die neuen Begriffe gleich einmal einüben könnt.

13.1 Metrische Räume

In $\mathbb{R}$ messen wir Abstände zwischen zwei Zahlen mit dem Betrag:

$$d_{\mathbb{R}}(x, y) := |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Neben der Analysis habt ihr auch eine einführende Vorlesung zur Linearen Algebra gehört und da waren $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ ganz sicher einfache Beispiele für **Vektorräume**, in denen die „Punkte" des Raumes die Zahlen aus $\mathbb{R}$ bzw. die Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ sind. In $\mathbb{R}^n$ messen wir Abstände zwischen zwei Punkten mit der **Euklidischen Norm**

$$d_{\mathbb{R}^n}(x, y) := \|x - y\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_13

und in $\mathbb{C}$ mit dem Betrag

$$d_{\mathbb{C}}(z,w) := |z-w| = \sqrt{(z-w)(\overline{z}-\overline{w})}.$$

Offenbar tragen die Vektorräume $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}$ eine Abstandsfunktion, also eine **Metrik**. Man benötigt aber für Abstandsfunktionen gar nicht die Struktur eines Vektorraums; eine nichtleere Menge reicht schon!

Definition 13.1.1: Metriken und metrische Räume

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine **Metrik** auf X ist eine Funktion

$$d : X \times X \to \mathbb{R},$$

so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(M1) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (Positive Definitheit)

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung)

Die Größe $d(x,y)$ heißt **Abstand** zwischen x und y und (X,d) heißt **metrischer Raum**.

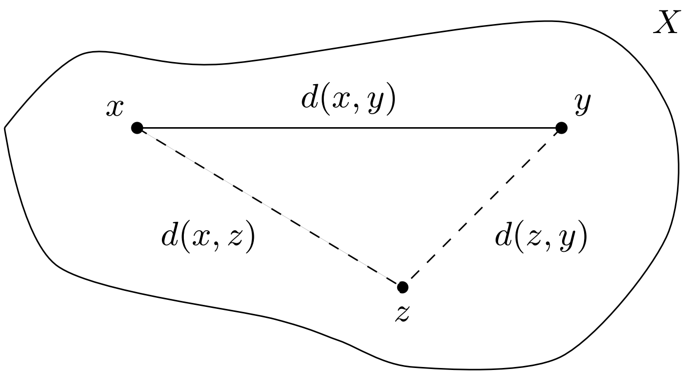

Abbildung 13.1.1. Metrik $d(\cdot,\cdot)$ auf einer Menge X

Offenbar sind

$$(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}}), \quad (\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n}), \quad (\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$$

metrische Räume.

Beispiele 13.1.2

(a) Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 \; ; \; x = y \\ 1 \; ; \; x \neq y \end{cases} .$$

Man überprüft leicht, dass (X,d) ein metrischer Raum ist, d. h. dass die Funktion d tatsächlich eine Metrik ist! Diese Metrik d heißt **triviale Metrik** oder **diskrete Metrik**.

(b) Die Menge $X := \mathbb{R}^n$ mit

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

ist ein metrischer Raum. Diese Metrik auf $\mathbb{R}^n$ nennt man auch **Taxi-Metrik** (oder **Manhattan-Metrik**), aber nur wenn man den Stadtplan von New York mit den Streets und Avenues zugrunde legt!

(c) Wir bleiben bei $X := \mathbb{R}^n$ und betrachten die Funktion

$$d(x,y) := \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}.$$

Auch diese Funktion ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$, die **Maximumsmetrik**. Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - z_i|\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|(x_i - y_i) + (y_i - z_i)|\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - z_i|\} \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

(d) Sei $X := C([0,1])$ die Menge aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$. Dann sind

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \text{ und} \\ d_\infty(f,g) &= \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x) - g(x)|\} \end{aligned}$$

Metriken auf X. Die Definitheit von d_1 ist etwa durch Satz 9.2.8 garantiert.

Die Abstandsfunktion $d_{\mathbb{R}^n}$ haben wir über die Euklidische Norm definiert. Das bringt uns zu der Frage, ob jede Metrik durch eine Norm definiert werden kann. Die Antwort ist: Nein! Aber wir müssen zuerst definieren, was wir unter einer Norm verstehen wollen.

13.2 Normierte Räume

Im Gegensatz zu metrischen Räumen benötigen wir für die Definition normierter Räume etwas mehr Struktur, d. h., als Grundraum reicht nicht mehr nur eine einfache nichtleere Menge.

Definition 13.2.1: Normen und normierte Vektorräume

Es sei X ein Vektorraum. Eine **Norm** auf X ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R},$$

so dass für alle $x, y, z \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(N1) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Positive Definitheit)

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (Homogenität)

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

$(X, \|\cdot\|)$ heißt **normierter Vektorraum**.

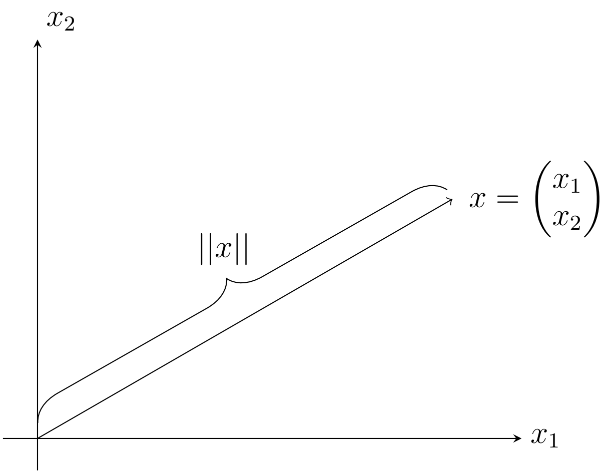

Abbildung 13.2.1. (Euklidische) Norm im $\mathbb{R}^2$

Beispiel 13.2.2: Die p-Normen

Wir betrachten eine Verallgemeinerung der Euklidischen Norm: die sogenannten **p-Normen**

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

auf $\mathbb{R}^n$ für $1 \leq p < \infty$. Wir werfen gleich einmal einen Blick auf die drei Normaxiome:

(N1) $\|x\|_p \geq 0$ ist klar. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}\|x\|_p = 0 &\iff \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|^p}_{\geq 0} = 0 \\ &\iff x_i = 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

(N2) Zur Homogenität:

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda|^p \cdot |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \cdot \|x\|_p$$

(N3) Der Fall $p = 1$ folgt direkt aus der Dreiecksungleichung für den gewöhnlichen Betrag auf $\mathbb{R}$. Der Fall $1 < p < \infty$ folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, welche wir euch als Übungsaufgabe überlassen. Nun bemerken wir noch, dass

$$\begin{aligned}|x_i + y_i|^p &= |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq (|x_i| + |y_i|) \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}\end{aligned}$$

gilt. Summieren wir auf und wenden die Hölder-Ungleichung für $q = \frac{p}{p-1}$ an, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt, dann folgt

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p \\
&\le \sum_{i=1}^n |x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\cdot\|x+y\|_p^{p-1}
\end{aligned}
$$

und damit

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Wir kommen nun zum Zusammenhang zwischen Normen und den vorherigen Metriken. Während eine Metrik uns lediglich den Abstand zwischen zwei Punkten liefert, erlaubt die Norm zusätzlich auch die Länge von Vektoren zu bestimmen. Es zeigt sich also, dass der Begriff der Norm ein stärkerer ist, als der Begriff der Metrik.

Lemma 13.2.3

Jede Norm induziert eine Metrik durch

$$d(x,y) := \|x-y\|.$$

Beweis. Man vergleiche lediglich die Definitionen von Norm und Metrik.

Damit ist jeder normierte Vektorraum auch ein metrischer Raum. Aber nicht jeder metrische Raum ist auch ein normierter Raum! Das sieht man so:

Beispiel 13.2.4

Wir betrachten die diskrete Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \,;\, x=y \\ 1 \,;\, x\neq y \end{cases}.$$

Gäbe es eine Norm mit

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

dann folgte für $x \neq 0$ und $y = 0$:

$$d(x, 0) = \|x\| = 1 \quad \forall x \in X.$$

Damit kann aber $\| \cdot \|$ nicht mehr homogen sein, denn

$$1 = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = |\lambda|$$

kann nicht für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt sein!
Die diskrete Metrik ist, um es rundheraus zu sagen, zu gar nichts anderem gut, als für Gegenbeispiele zu sorgen. Da ist sie aber unübertroffen!

13.3 Topologische Grundbegriffe

Wir haben in unserem Kurs Funktionen auf verschiedenen Intervallen betrachtet, „offenen" wie $]a, b[$, „abgeschlossenen" wie $[a, b]$ und solchen wie $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, \infty[$, etc. Wir wollen uns jetzt um geeignete Verallgemeinerungen kümmern.

13.3.1 Offene Mengen

Definition 13.3.1: Offene Kugeln

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $r > 0$. Die Menge

$$B_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

heißt **offene Kugel** um x_0 mit Radius r oder **offene r-Kugel um x_0**.

Beispiele 13.3.2

Wir sehen hier, dass die offenen Kugeln von der Metrik abhängen.

(a) In der trivialen Metrik ist

$$B_1(x_0) = \{x_0\},$$

d. h., die 1-Kugel um x_0 ist die Menge, die nur aus dem Punkt x_0 besteht. Solch eine Menge nennt man **Singleton**.

(b) In $\mathbb{R}$ mit dem Betrag als Metrik sind die offenen Kugeln die offenen Intervalle

$$B_1(x_0) =]x_0 - r, x_0 + r[= (x_0 - r, x_0 + r).$$

(c) In $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik

$$d(x, y) = \|x - y\|_2$$

ist die offene 1-Kugel um 0 ein Kreis

$$B_1(x_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

(d) In $\mathbb{R}^2$ mit der New Yorker Taxi-Metrik

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

ist die offene 1-Kugel um 0 eine Raute

$$B_1(x_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}.$$

(e) In $\mathbb{R}^2$ mit der Maximumsmetrik

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq 2} \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

ist die offene 1-Kugel um 0 ein Quadrat

$$B_1(x_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\}.$$

Nun reicht es uns nicht, nur offene r-Kugeln zu betrachten.

Definition 13.3.3: Offene Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $G \subset X$ heißt **offen**, wenn

$$\forall x \in G \; \exists r > 0 : \quad B_r(x) \subset G$$

gilt.

Das folgende Lemma sorgt in Vorlesungen immer für viel Schmunzeln.

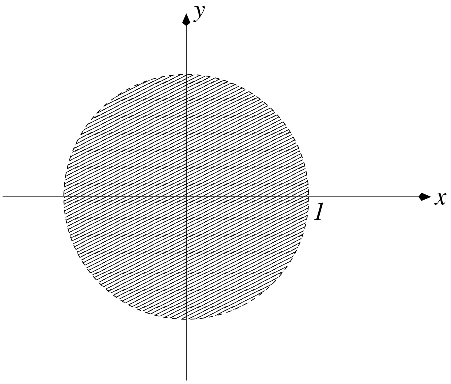

Abbildung 13.3.1. Offene 1-Kugel in der Euklidischen Metrik

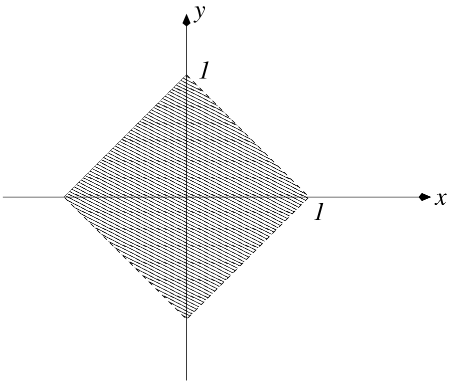

Abbildung 13.3.2. Offene 1-Kugel in der New Yorker Taxi-Metrik

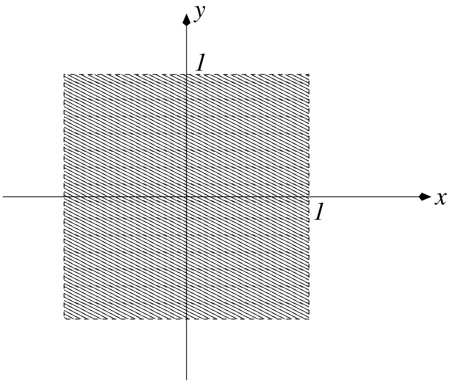

Abbildung 13.3.3. Offene 1-Kugel in der Maximumsmetrik

Lemma 13.3.4

In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sind offene Intervalle offen.

Der Beweis ist offensichtlich, aber es ist wichtig, dass ihr erkennt, dass es sich wirklich um ein beweiswürdiges Resultat handelt und nicht um eine Tautologie! Wir haben die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ ja nur „offenes Intervall" $]a, b[$ *genannt*, aber nun gibt uns das Lemma die Sicherheit, dass unsere damalige Benennung vernünftig war.

Lemma 13.3.5

In jedem metrischen Raum (X, d) sind $\emptyset$ und X offen.

Beweis. Die leere Menge $\emptyset$ ist offen, weil $\emptyset$ keine Elemente enthält und damit Definition 13.3.3 automatisch erfüllt ist. Die gesamte Menge X ist offen, weil jede offene Kugel um jedes $x_0 \in X$ ganz in X liegt. □

Bemerkung 13.3.6: Achtung!

$G := [0, 1[$ ist als Teilmenge von $X = \mathbb{R}$ nicht offen, aber im Fall $X := [0, 1[$ sehr wohl!

Nun zu einer allgemeinen Version des Lemmas 13.3.4.

Lemma 13.3.7

In jedem metrischen Raum sind offene Kugeln offen.

Beweis. Sei $B_r(x_0)$ eine offene Kugel in X und sei $x \in B_r(x_0)$. Zu zeigen ist nun, dass es eine offene Kugel um x gibt, die ganz in $B_r(x_0)$ liegt.

Wegen $d(x, x_0) < r$ ist $r_1 := r - d(x, x_0) > 0$. Wir zeigen: $B_{r_1}(x) \subset B_r(x_0)$. Ist $y \in B_{r_1}(x)$, d. h. $d(x, y) < r_1$, dann folgt

$$\begin{aligned} d(y, x_0) &\leq d(y, x) + d(x, x_0) < r_1 + d(x, x_0) \\ &= (r - d(x, x_0)) + d(x, x_0) = r \end{aligned}$$

und damit ist $y \in B_r(x_0)$. □

Der nächste Satz zeigt, dass die offenen Kugeln in einem metrischen Raum so etwas wie die „Atome" aller offenen Mengen sind.

Satz 13.3.8

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $G \subset X$. Dann gilt:

$$G \text{ ist offen} \iff G \text{ ist Vereinigung offener Kugeln.}$$

Beweis. Wir zeigen erst die Hin- und dann die Rückrichtung.

$\Longrightarrow$: Sei G offen. Ist $G = \emptyset$, dann ist nichts zu zeigen. Ist $G \neq \emptyset$, dann ist jedes $x \in G$ Mittelpunkt einer offenen Kugel, die ganz in G liegt. Damit ist G die Vereinigung aller offenen Kugeln in G.

$\Longleftarrow$: Sei nun G die Vereinigung einer Menge S von offenen Kugeln. Ist $S = \emptyset$, dann $G = \emptyset$ und G ist offen. Ist $S \neq \emptyset$, dann sei $x \in B_r(x_0) \in S$. Nach Lemma 13.3.7 ist x dann Mittelpunkt einer offenen Kugel $B_{r_1}(x) \subset B_r(x_0)$. Wegen $B_r(x_0) \subset G$ ist auch $B_{r_1}(x) \subset G$ und damit ist G offen. □

Satz 13.3.9

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Jede Vereinigung offener Mengen in X ist offen.
(b) Jeder endliche Durchschnitt offener Mengen in X ist offen.

Beweis. Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $\{G_i\}$ eine beliebige Menge offener Mengen in X. Zu zeigen ist nun, dass $G := \bigcup_i G_i$ offen ist. Ist $\{G_i\} = \emptyset$, dann $G = \emptyset$ und damit ist G offen. Ist $\{G_i\} \neq \emptyset$, dann ist nach Satz 13.3.8 jedes G_i die Vereinigung offener Kugeln und G damit die Vereinigung aller dieser offenen Kugeln. Damit ist nach Satz 13.3.8 auch G offen.

(b) Sei $\{G_i\}$ eine endliche Menge offener Mengen in X. Zu zeigen ist nun, dass dann auch $G := \bigcap_{i=1}^n G_i$ offen ist. Für $\{G_i\} = \emptyset$, ist $G = X$ und G damit offen. Für $\{G_i\} \neq \emptyset$ sei $\{G_i\} = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$. Ist $G = \emptyset$, dann ist G offen. Ist $G \neq \emptyset$, dann sei $x \in G$ und damit $x \in G_i$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$. Weil alle G_i offen sind, gilt $\forall i \; \exists r_i > 0 : B_{r_i}(x) \subset G_i$. Sei $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Dann gilt $B_r(x) \subset B_{r_i}(x)$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$ und damit $B_r(x) \subset G_i$ für alle i. Also ist $B_r(x) \subset G$ und G ist offen. □

Dass wirklich nur *endliche* Durchschnitte offener Mengen wieder offen sind, sieht man am folgenden Beispiel:

Beispiel 13.3.10

Betrachte den metrischen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und die offenen Intervalle

$$\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[, \quad n \geq 1.$$

Dann ist

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

und $\{0\}$ ist nicht offen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$!

Definition 13.3.11: Das Innere

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Die Menge

$$\mathring{A} := \{x \in A \mid \exists r > 0 : B_r(x) \subset A\}$$

heißt **Inneres von** A.

Zum Abschluss noch eine kleine Fingerübung, die wir euch für später als Übungsaufgabe überlassen:

Lemma 13.3.12

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) $\mathring{A}$ ist die größte offene Teilmenge von A.

(b) A offen $\iff \mathring{A} = A$

(c) Sind G_i die offenen Teilmengen von A, dann $\mathring{A} = \bigcup_i G_i$.

13.3.2 Abgeschlossene Mengen

Nun müssen wir uns noch um die Verallgemeinerungen unserer abgeschlossenen Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kümmern! Zuerst verallgemeinern wir den Begriff des Häufungspunkts.

Definition 13.3.13: Häufungspunkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** von A, falls jede offene Kugel um x mindestens einen Punkt $y \in A$, $x \neq y$, beinhaltet.

Definition 13.3.14: Abgeschlossene Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $F \subset X$. Die Menge F heißt **abgeschlossen**, wenn F jeden seiner Häufungspunkte enthält.

Beispiele 13.3.15

(a) Wir betrachten das abgeschlossene Intervall $[a, b]$. Offensichtlich ist die Menge der Häufungspunkte von $[a, b]$ durch

$$[a, b]$$

gegeben. Damit liegt jeder Häufungspunkt in der Menge und $[a, b]$ ist abgeschlossen.

(b) Nehmen wir nun den rechten Endpunkt raus und betrachten das (halb abgeschlossene) Intervall $[a, b[$. Wieder ist die Menge der Häufungspunkte durch

$$[a, b]$$

gegeben. Man bemerke, dass der Punkt b weiterhin ein Häufungspunkt ist, denn zu jeder offenen Kugel $B_r(b)$ um b mit $r > 0$ finden wir ein $y = b - \varepsilon \in [a, b[$, so dass $y \neq b$, aber $y \in B_r(b)$. Da der Punkt b aber kein Element der Menge $[a, b[$ ist, ist Intervall $[a, b[$ nicht abgeschlossen.

(c) Schließlich betrachten wir die Menge

$$M := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Kein Element $x = \frac{1}{N}$ der Menge M ist Häufungspunkt dieser, denn der minimale Abstand von $\frac{1}{N}$ zu einem der anderen Elemente aus M ist durch

$$\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)}$$

gegeben; und wählen wir $0 < r < \frac{1}{N(N+1)}$, so findet sich kein $y \in M$ mit $y \neq x$, so dass $y \in B_r(x)$. Einen Häufungspunkt hat die Menge M aber doch, und zwar $0 \notin M$, denn zu jedem $r > 0$ findet sich ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass $\frac{1}{n} < r$. Da der Häufungspunkt 0 aber nicht zur Menge M gehört, ist diese nicht abgeschlossen.

Insbesondere zeigen die obigen Beispiele, dass abgeschlossene Intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sämtliche ihrer Häufungspunkte enthalten und daher in $\mathbb{R}$ abgeschlossen sind.

Satz 13.3.16

In jedem metrischen Raum (X,d) sind $\emptyset$ und X abgeschlossen.

Beweis. Im Fall der leeren Menge ist auch die Menge der Häufungspunkte leer. Somit $(\emptyset \subset \emptyset)$ enthält die leere Menge die Menge aller ihrer Häufungspunkte. Die Menge X umfasst alle Punkte, also auch alle Häufungspunkte. $\square$

Satz 13.3.17

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $F \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$F \text{ ist abgeschlossen} \iff F^C \text{ ist offen}$$

Beweis. Wir zeigen erst die Hin- und dann die Rückrichtung.

$\Longrightarrow$: Sei F abgeschlossen. Ist $F^C = \emptyset$, dann ist F^C offen. Ist $F^C \neq \emptyset$, dann sei $x \in F^C$. Da F abgeschlossen ist und $x \notin F$, kann x kein Häufungspunkt von F sein. Also existiert eine offene Kugel $B_r(x)$ mit $B_r(x) \cap F = \emptyset$. $B_r(x)$ ist eine offene Kugel in F^C und x war beliebig, also ist F^C offen.

$\Longleftarrow$: Sei F^C offen. F kann nur dann nicht abgeschlossen sein, wenn F einen Häufungspunkt in F^C besitzt. Aber da F^C offen ist, gibt es um jeden Punkt von F^C eine offene Kugel, die disjunkt zu F ist. Kein solcher Punkt kann Häufungspunkt von F sein. $\square$

Definition 13.3.18: Abgeschlossene Kugeln

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $r > 0$. Die Menge

$$\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x,x_0) \leq r\}$$

heißt **abgeschlossene Kugel** um x_0 mit Radius r.

Wie bei den offenen Mengen lässt sich nun bei den abgeschlossenen Mengen eine Reihe von Resultaten beweisen. Wir geben noch drei an, überlassen den Beweis aber euch als Übungsaufgabe.

Satz 13.3.19

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gelten:

(a) Jede abgeschlossene Kugel ist abgeschlossen.
(b) Jeder beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
(c) Jede endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Definition 13.3.20: Der Abschluss & Randpunkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Die Menge

$$\overline{A} := A \cup \{\text{Häufungspunkte von } A\}$$

heißt **Abschluss** von A.
Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **Randpunkt** von A, wenn jede offene Kugel um x_0 sowohl Punkte aus A als auch Punkte aus A^C enthält.

Eine Menge $A \subset X$ ist also genau dann abgeschlossen, wenn A alle ihre Randpunkte enthält.

Beispiele 13.3.21

(a) Wir betrachten das halboffene Intervall $[a, b[\subset \mathbb{R}$. Wir haben zuvor bereits eingesehen, dass die Menge der Häufungspunkte von $[a, b)$ durch das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ gegeben ist. Damit lautet der Abschluss hier:

$$\overline{[a, b[} = [a, b[\cup [a, b] = [a, b]$$

Des Weiteren sind die Randpunkte von $[a, b[$ die zwei Punkte $a \in [a, b[$ und $b \notin [a, b[$. Damit ist das Intervall $[a, b[$ nicht abgeschlossen.

(b) Betrachten wir als Nächstes erneut die Menge

$$M := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Wir haben bereits eingesehen, dass die Menge der Häufungspunkte durch $\{0\}$ gegeben ist. Der Abschluss lautet damit

$$\overline{M} = M \cup \{0\} = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \cup \{0\}.$$

Gleichzeitig ist die Menge der Randpunkte von M durch

$$\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \cup \{0\} = \overline{M}$$

gegeben. Damit ist M nicht abgeschlossen.

Wir schließen dieses Unterkapitel mit einer Warnung: Obwohl die Notation es auf den ersten Blick suggeriert, sind die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_r(x)$ und der Abschluss der offenen Kugel $\overline{B_r(x)}$ im Allgemeinen unterschiedliche Mengen. Das zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 13.3.22

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit der diskreten Metrik

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \begin{cases} 0 \,;\, x = y \\ 1 \,;\, x \neq y \end{cases}.$$

Dann sind die offene Kugel von Radius 1, ihr Abschluss und die abgeschlossene Kugel von Radius 1 durch

$$B_1(x) = \{x\}, \quad \overline{B_1(x)} = \overline{\{x\}} = \{x\}, \quad \overline{B}_1(x) = \mathbb{R}^n$$

gegeben.

13.4 Konvergenz und Vollständigkeit

Auch unsere Untersuchungen der Konvergenz von reellen Zahlenfolgen übertragen sich mühelos auf allgemeine metrische Räume.

Definition 13.4.1: Konvergenz und Cauchy-Folgen

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge in X. Eine Folge (x_n) **konvergiert** in X gegen $x \in X$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \quad d(x_n, x) < \varepsilon,$$

oder, äquivalent,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \quad x_n \in B_\varepsilon(x).$$

Eine Folge (x_n) heißt **Cauchy-Folge**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq 1 \quad \forall n \geq n_0 : \quad d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon.$$

Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt **vollständiger metrischer Raum**. Ein normierter Vektorraum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt **Banach-Raum**.

Wir kommen zu einigen besonders wichtigen Beispielen.

13.4.1 Der Raum $\ell^\infty(T)$

Definition 13.4.2: Der Raum $\ell^\infty(T)$

Es sei T eine Menge und $\ell^\infty(T)$ sei der Vektorraum aller **beschränkten Funktionen** $x : T \to \mathbb{R}$. Die Norm auf $\ell^\infty(T)$ sei die Supremumsnorm

$$\|x\|_\infty := \sup_{t \in T}\{|x(t)|\}.$$

Satz 13.4.3

$(\ell^\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banach-Raum.

Beweis. Wir haben erst zu zeigen, dass $\|\cdot\|_\infty$ tatsächlich eine Norm ist. Dabei ist nur die Dreiecksungleichung zu zeigen. Seien also $x, y \in \ell^\infty(T)$, $t_0 \in T$, dann folgt

$$\begin{aligned} |x(t_0) + y(t_0)| &\leq |x(t_0)| + |y(t_0)| \\ &\leq \sup_{t \in T}\{|x(t)|\} + \sup_{t \in T}\{|y(t)|\} \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

Der Übergang zum Supremum über alle $t_0 \in T$ liefert

$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

und das ist die Dreiecksungleichung.

Nun zur Vollständigkeit: Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in $\ell^\infty(T)$. Zu zeigen ist: $\exists x \in \ell^\infty(T)$ mit $\|x_n - x\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$. Für alle $t \in T$ und alle $y \in \ell^\infty(T)$ gilt $|y(t)| \leq \|y\|_\infty$, also ist $(x_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ für festes $t \in T$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Der Grenzwert sei $x(t)$. Damit haben wir eine Abbildung $x : T \to \mathbb{R}$ definiert. Wir zeigen: x ist beschränkt und es gilt $\|x - x_n\|_\infty \to 0$.

Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein N mit

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Sei $t \in T$. Wegen $x_n(t) \to x(t)$ existiert $m_0 = m_0(\varepsilon, t)$ mit

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq m_0.$$

Wähle $m \geq N$ und $m \geq m_0$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x(t)| &\leq |x_n(t) - x_m(t)| + |x_m(t) - x(t)| \\ &\leq \|x_n - x_m\|_\infty + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned} \tag{13.1}$$

Zum einen gilt für beliebiges $t \in T$:

$$|x(t)| \leq |x_N(t)| + |x(t) - x_N(t)| \leq \|x_N\|_\infty + 2\varepsilon,$$

d. h., x ist beschränkt. Des Weiteren folgt durch Supremumsbildung in (13.1) für alle $n \geq N$:

$$\|x_n - x\|_\infty < 2\varepsilon.$$

Das ist aber $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und damit ist $\ell^\infty(T)$ vollständig. □

Bemerkung 13.4.4: Merke

Konvergenz bzgl. der Supremumsnorm ist gleichmäßige Konvergenz!

13.4.2 Der Raum $C^b(T)$

Wir wollen noch einen weiteren Funktionenraum untersuchen. Dazu wird sich das folgende Lemma als nützlich erweisen.

Lemma 13.4.5

Es gelten:

(a) Ist X ein Banach-Raum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum, dann ist U vollständig.
(b) Ist X ein normierter Vektorraum und $U \subset X$ ein vollständiger Untervektorraum, dann ist U abgeschlossen.

Beweis. Im Folgenden sei $U \subset X$.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in U. Weil X vollständig ist, existiert $\lim_{n\to\infty} x_n =: x$. Und da des Weiteren U abgeschlossen ist, muss x in U liegen.

(b) Seien $x_n \in U$ und gelte $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Als konvergente Folge ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge, d. h., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen Grenzwert in U. Da Grenzwerte eindeutig bestimmt sind, ist $x \in U$. □

Definition 13.4.6: Der Raum $C^b(T)$

Sei (T, d) ein metrischer Raum und $C^b(T)$ der Vektorraum der stetigen beschränkten Funktionen von T nach $\mathbb{R}$.

Offenbar ist $C^b(T)$ ein Untervektorraum von $\ell^\infty(T)$.

Satz 13.4.7

$\big(C^b(T), \|\cdot\|_\infty\big)$ ist ein Banach-Raum.

Beweis. Nach Lemma 13.4.5 ist zu zeigen, dass $C^b(T)$ abgeschlossen in $\ell^\infty(T)$ ist, d. h. dass eine gleichmäßig konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter stetiger Funktionen gegen eine beschränkte stetige Funktion x konvergiert. Das ist aber eine uns gut bekannte Eigenschaft gleichmäßiger Konvergenz (Satz 8.1.9 sowie A.8.3). □

13.5 Schreckgespenster

Wir haben bereits in Kapitel 8 gezeigt, dass Riemanns Schreckgespenst

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

gleichmäßig konvergent und damit stetig ist. Man hatte lange die Vermutung, dass f nirgends differenzierbar sei, aber Joseph Gerver [Gerver 1970] konnte 1970 zeigen, dass f an gewissen Punkten differenzierbar ist, z. B. bei $x = \pi$.

Jetzt wollen wir eine stetige Funktion konstruieren, die tatsächlich nirgends differenzierbar ist. Das Beispiel geht auf Bartel van der Waerden (1903–1996) zurück.

Beispiel 13.5.1

Definiere

$$K(x) := \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & ; \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \tag{13.2}$$

und setze K auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fort durch

$$K(x+1) = K(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definiere

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^k} K(2^k x)}_{=: f_k(x)} = K(x) + \frac{1}{2} K(2x) + \frac{1}{4} K(4x) + \ldots \tag{13.3}$$

Wegen $|K(x)| \leq \frac{1}{2}$ und weil $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ konvergiert, ist (13.3) gleichmäßig konvergent und daher stetig nach dem Satz von Weierstraß (Satz 8.1.9). Gleichzeitig gilt aber:

Satz 13.5.2

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch (13.3), ist zwar überall stetig, aber nirgends differenzierbar.

Beweis. Man halte $x_0 \in \mathbb{R}$ fest und wähle $i_n \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\alpha_n \leq x_0 \leq \beta_n \quad \text{mit} \quad \alpha_n := \frac{i_n}{2^n}, \quad \beta_n := \frac{i_n + 1}{2^n}, \quad i_n = \lfloor 2^n x_0 \rfloor.$$

Man betrachte

$$r_n := \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}.$$

Nun ist für $x = \alpha_n$ oder $x = \beta_n$ die Summe in (13.3) endlich, weil

$$f_k(\alpha_n) = \frac{1}{2^k} K\left(2^k \frac{i_n}{2^n}\right) = 0$$

für alle $k \geq n$ gilt und ebenso für $f_k(\beta_n)$. Damit folgen

$$f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(\alpha_n), \qquad f(\beta_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(\beta_n)$$

und

$$r_n = \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{f_k(\beta_n) - f_k(\alpha_k)}{\beta_n - \alpha_n}}_{=\pm 1}$$

mit

$$r_{n+1} = r_n \pm 1.$$

Damit kann $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergieren! Andererseits ist

$$r_n = \lambda_n \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \frac{f(x_0) - f(\alpha_n)}{x_0 - \alpha_n}$$

mit

$$\lambda_n := \frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n} \in]0, 1].$$

Für $\alpha_n = x_0$ ist $\lambda_n = 1$. Wäre f differenzierbar in x_0, dann müsste für große n

$$|r_n - f'(x_0)| < \lambda_n \varepsilon + (1 - \lambda_n)\varepsilon = \varepsilon$$

gelten, was ein Widerspruch ist. □

Zusammenfassung

In diesem letzten Kapitel habt ihr schon einmal die wichtigsten Begriffe kennengelernt um die vorher behandelten Konzepte aus der Analysis in euren nächsten Semestern weiter zu verallgemeinern. Ganz entscheidende Anwendungen werden etwa die Differential- und Integralrechnung in mehreren Raumdimensionen sein. So erlauben euch etwa die Begriffe der Metriken und Normen auch in allgemeinen Räumen von Abständen sowie Länge von Vektoren zu sprechen. Viele weitere topologische Grundbegriffe werden sich hier als wichtig erweisen. Eine herausragende Rolle spielen aber sicher die offenen und abgeschlossenen Mengen, die ihr in diesem Kapitel kennengelernt habt. Aber auch Folgen, Konvergenz und Cauchy-Folgen in allgemeinen metrischen Räumen werden euch immer wieder begegnen!
Folgende Fragen solltet ihr nach diesem Kapitel beantworten können:

- *Was ist ein metrischer Raum?*
- *Was ist ein normierter Raum?*
- *Was sind offene Mengen und wie sind diese charakterisiert?*
- *Was sind abgeschlossene Mengen und wie sind diese charakterisiert?*
- *Wie lässt sich Konvergenz von Folgen auf metrische Räume verallgemeinern?*

Zum Einüben der neuen Begriffe, solltet ihr euch mal einige der folgenden Aufgaben zur Brust nehmen.

13.6 Aufgaben

A.13.1 Man zeige, dass

$$d(x,y) = \frac{1}{3}\left(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\right) + \frac{2}{3}\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

eine Metrik auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist.

A.13.2 Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien folgende Abbildungen definiert:

(a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$ (b) $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

(c) $d_3(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$ (d) $d_4(x,y) = |x - 2y|$

(e) $d_5(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$

Man entscheide, ob durch diese Abbildungen jeweils eine Metrik gegeben ist oder nicht.

A.13.3 Sei (X,d) ein metrischer Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Metrik $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ erfülle des Weiteren die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &(E1) \quad d(y-x,0) = d(x,y), \\ &(E2) \quad d(\lambda x, 0) = |\lambda| \cdot d(x,0), \end{aligned}$$

mit $x, y \in X$ und $\lambda \in K$. Man beweise, dass dann durch $\delta_0(x) := d(x,0)$ eine Norm auf X definiert wird.

A.13.4 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Man zeige, dass dann

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

für alle $x, y \in X$ gilt.

A.13.5 Vorgelegt sei der Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Man beweise, dass die Abschätzung

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

A.13.6 Man zeige oder widerlege, dass durch

$$\|x\|_{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

A.13.7 Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und seien $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass die Hölder-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

gilt.

Hinweis: Ihr dürft verwenden, dass eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *genau dann konvex ist, d. h.*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall \lambda \in [0,1] : \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

wenn ihre zweite Ableitung nichtnegativ ist.

A.13.8 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Man beweise folgende Aussagen:

(a) $\overset{\circ}{A}$ ist die größte offene Teilmenge von A.

(b) A offen $\iff \overset{\circ}{A} = A$

(c) Sind G_i die offenen Teilmengen von A, dann $\overset{\circ}{A} = \bigcup_i G_i$.

A.13.9 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Man zeige:

(a) Jede abgeschlossene Kugel ist abgeschlossen.

(b) Jeder beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(c) Jede endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

A.13.10 Man konstruiere eine beschränkte Menge reeller Zahlen, die genau drei Häufungspunkte besitzt.

A.13.11 Vorgelegt sei der normierte Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Man bestimme den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$x_n = \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{n} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

14 Lösungen

14.1 Lösungen zu Kapitel 1

A.1.1 Wir definieren A: "Es regnet" und B: "Es schneit". Dann lautet die Aussage

$$(A \vee B) \wedge (\neg A) \implies B.$$

A.1.2 Betrachte die falsche Aussage $0 = 1$. Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit 2, so erhalten wir die falsche Aussage $0 = 2$. Multiplizieren wir aber beide Seiten der Gleichung mit 0, so erhalten wir die wahre Aussage $0 = 0$.

A.1.3

(a) Wahrheitswertetafel:

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
$\boldsymbol{w}$	f	$\boldsymbol{w}$
$\boldsymbol{w}$	f	$\boldsymbol{w}$
$\boldsymbol{f}$	w	$\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$	w	$\boldsymbol{f}$

Wir sehen, dass die Aussagen A und $\neg(\neg A)$ die gleichen Wahrheitswerte haben. Damit sind diese äquivalent.

(b) Wahrheitswertetafel:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg B \implies \neg A)$	$(\neg A \vee B)$
w	w	f	f	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$
w	f	f	w	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
f	w	w	f	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$
f	f	w	w	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$

Wir sehen, dass die Aussagen $(\neg B \implies \neg A)$ und $(\neg A \vee B)$ die gleichen Wahrheitswerte haben. Damit sind diese äquivalent.

A.1.4

(a) Wahrheitswertetafel:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	w	$\boldsymbol{f}$	f	f	$\boldsymbol{f}$
w	f	w	$\boldsymbol{f}$	f	w	$\boldsymbol{f}$
f	w	w	$\boldsymbol{f}$	w	f	$\boldsymbol{f}$
f	f	f	$\boldsymbol{w}$	w	w	$\boldsymbol{w}$

(b) Wahrheitswertetafel:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	w	$\boldsymbol{f}$	f	f	$\boldsymbol{f}$
w	f	f	$\boldsymbol{w}$	f	w	$\boldsymbol{w}$
f	w	f	$\boldsymbol{w}$	w	f	$\boldsymbol{w}$
f	f	f	$\boldsymbol{w}$	w	w	$\boldsymbol{w}$

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1_14

A.1.5

(a) Wahrheitswertetafel:

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
w	w	w	w	$\boldsymbol{w}$	w	w	$\boldsymbol{w}$
w	w	f	f	$\boldsymbol{w}$	w	w	$\boldsymbol{w}$
w	f	w	f	$\boldsymbol{w}$	w	w	$\boldsymbol{w}$
w	f	f	f	$\boldsymbol{w}$	w	w	$\boldsymbol{w}$
f	w	w	w	$\boldsymbol{w}$	w	w	$\boldsymbol{w}$
f	w	f	f	$\boldsymbol{f}$	w	f	$\boldsymbol{f}$
f	f	w	f	$\boldsymbol{f}$	f	w	$\boldsymbol{f}$
f	f	f	f	$\boldsymbol{f}$	f	f	$\boldsymbol{f}$

(b) Wahrheitswertetafel:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	$\boldsymbol{w}$	w	w	$\boldsymbol{w}$
w	w	f	w	$\boldsymbol{w}$	w	f	$\boldsymbol{w}$
w	f	w	w	$\boldsymbol{w}$	f	w	$\boldsymbol{w}$
w	f	f	f	$\boldsymbol{f}$	f	f	$\boldsymbol{f}$
f	w	w	w	$\boldsymbol{f}$	f	f	$\boldsymbol{f}$
f	w	f	w	$\boldsymbol{f}$	f	f	$\boldsymbol{f}$
f	f	w	w	$\boldsymbol{f}$	f	f	$\boldsymbol{f}$
f	f	f	f	$\boldsymbol{f}$	f	f	$\boldsymbol{f}$

A.1.6

(a) $\exists q \in \mathbb{Q} : q^2 = -q$. Das erfüllen $q = 0$ und $q = -1$.

(b) $\exists_1 n \in \mathbb{N} : -n \in \mathbb{N}$. Das erfüllt $n = 0$.

(c) $\forall z \in \mathbb{Z} : \sin(z) \neq 0$.

A.1.7

(a) $A \subseteq B$ ist falsch, $D \subseteq A$ ist wahr, $D \subseteq B$ ist wahr, $B \subseteq A$ ist falsch, $E \subseteq B$ ist wahr, $E \subset B$ ist falsch, $D \subset B$ ist wahr.

(b) $A \setminus B = \{1, 3\}$, $A \setminus C = \{2, 3, 7\}$, $B \setminus A = \{8\}$,
$B \setminus C = \{2, 7\}$, $C \setminus A = \{8, 10\}$, $C \setminus B = \{1, 10\}$.

(c) $A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$, $B \cup C = \{1, 2, 7, 8, 10\}$,
$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 7, 8\} \cup \{1, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$,
$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 7\} \cup \{1, 2, 7, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$.

(d) $A \cap B = \{2, 7\}$, $A \cap C = \{1\}$, $B \cap C = \{8\}$,
$(A \cap B) \cap C = \{2, 7\} \cap \{1, 8, 10\} = \emptyset$,
$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 7\} \cap \{8\} = \emptyset$.

(e) $(A \cap B) \cup C = \{2, 7\} \cup \{1, 8, 10\} = \{1, 2, 7, 8, 10\}$,
$(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\} \cap \{1, 2, 7, 8, 10\} = \{1, 2, 7, 8, 10\}$,
$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 7, 8\} \cap \{1, 8, 10\} = \{1, 8\}$,
$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{1\} \cup \{8\} = \{1, 8\}$.

A.1.8

(a) Mit dem Distributivgesetz 1.5 gilt

$$\begin{aligned} & (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in C) \\ \Longleftrightarrow\ & (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \cup \{x \mid x \in C\} \\ &= \{x \mid\ (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in C)\} \\ &= \{x \mid\ (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \vee x \in C\} \cap \{x \mid x \in B \vee x \in C\} \\ &= (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

(b) Analog mit Distributivgesetz 1.6.

(c) Es ist

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \cap \{x \mid x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A\} \cap \{x \mid x \in B \wedge x \in C\} \\ &= A \cap (B \cap C)\,. \end{aligned}$$

(d) Analog zu (c).

A.1.9 Für $p \in \mathbb{Z}$ beweise man:

$$p^3 \text{ gerade } \iff p \text{ gerade}$$

Die Aussage besteht aus zwei Teilen:

$$\begin{aligned} &(1) \quad p \text{ gerade } \implies p^3 \text{ gerade} \\ &(2) \quad p^3 \text{ gerade } \implies p \text{ gerade} \end{aligned}$$

Für (1) verfahren wir wie in Lemma 1.2.13 und beweisen direkt:

$$\begin{aligned} p \text{ gerade } &\implies \exists m \in \mathbb{Z} : p = 2m \\ &\implies p^3 = 2\underbrace{\left(4m^3\right)}_{=:\ell \in \mathbb{Z}} = 2l \\ &\implies p^3 \text{ gerade} \end{aligned}$$

Für (2) verfahren wir hingegen wie in Lemma 1.2.12 und beweisen indirekt, d. h. durch Kontraposition:

$$\begin{aligned} p \text{ ungerade } &\implies \exists m \in \mathbb{Z} : p = 2m + 1 \\ &\implies p^3 = 2\underbrace{\left(4m^3 + 6m^2 + 3m\right)}_{=:\ell \in \mathbb{Z}} + 1 = 2l + 1 \\ &\implies p^3 \text{ ungerade} \end{aligned}$$

A.1.10 Das Vorgehen ist analog zu dem in Satz 1.1.21 ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Wir führen also einen indirekten Beweis und wollen die Annahme, dass $\sqrt[3]{2}$ eine rationale Zahl ist, zu einem Widerspruch führen: Angenommen $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$, dann gibt es teilerfremde ganze Zahlen p, q mit $q \neq 0$ so, dass

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}.$$

Dann folgern wir weiter:

$$\begin{aligned}
2 = \frac{p^3}{q^3} &\implies p^3 = 2q^3 \\
&\implies p^3 \text{ gerade} \\
&\implies p \text{ gerade} \\
&\implies \exists m \in \mathbb{Z} : p = 2m \\
&\implies 8m^3 = 2q^3 \\
&\implies q^3 = 4m^3 = 2\underbrace{(2m^3)}_{=:\ell \in \mathbb{Z}} = 2l \\
&\implies q^3 \text{ gerade} \\
&\implies q \text{ gerade}
\end{aligned}$$

Damit sind p und q beide gerade Zahlen und somit nicht teilerfremd. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme!

14.2 Lösungen zu Kapitel 2

A.2.1 Induktionsanfang, $n_0 = 0$:

$$\sum_{k=1}^{0} (2k-1) = 0 = 0^2$$

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2n+1) \overset{\text{IA}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

A.2.2 Induktionsanfang, $n_0 = 0$:

$$\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot (0+1)(2 \cdot 0 + 1)$$

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{IA}}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] = \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6\right] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)\end{aligned}$$

A.2.3 Induktionsanfang, $n_0 = 0$:

$$\sum_{k=1}^{0} k^3 = 0 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 \cdot (0+1)^2$$

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{IA}}{=} \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2\left[n^2 + 4n + 4\right] = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2\end{aligned}$$

A.2.4 In einigen Fällen ist vollständige Induktion nicht sinnvoll, so hier. Stattdessen benutzen wir den binomischen Lehrsatz 2.1.15: Wir sortieren die linke Seite der Behauptung nach den Potenzen um und erhalten:

$$\begin{aligned}&(p+1)S_n^p + \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \binom{p+1}{3} S_n^{p-2} + \cdots + S_n^0 \\ &= (p+1)\left[1^p + 2^p + \cdots + n^p\right] \\ &\quad + \binom{p+1}{2}\left[1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}\right] \\ &\quad + \cdots + 1 \cdot \left[1^0 + 2^0 + \cdots + n^0\right] \\ &= \sum_{k=0}^{p} 1^k \binom{p+1}{k} + \sum_{k=0}^{p} 2^k \binom{p+1}{k} + \cdots + \sum_{k=0}^{p} n^k \binom{p+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} 1^k 1^{p+1-k} \binom{p+1}{k} - 1^{p+1} + \sum_{k=0}^{p+1} 2^k 1^{p+1-k} \binom{p+1}{k} - 2^{p+1} \\ &\quad + \cdots + \sum_{k=0}^{p+1} n^k 1^{p+1-k} \binom{p+1}{k} - n^{p+1} \\ &= (1+1)^{p+1} - 1^{p+1} + (2+1)^{p+1} - 2^{p+1} + \cdots + (n+1)^{p+1} - n^{p+1} \\ &= (n+1)^{p+1} - 1\end{aligned}$$

A.2.5 Nach der Pascal'schen Identität aus A.2.4 gilt:

$$\begin{aligned} 5S_n^4 + \binom{5}{2} S_n^3 + \binom{5}{3} S_n^2 + \binom{5}{4} S_n^1 + S_n^0 &= (n+1)^5 - 1 \\ \Longrightarrow 5S_n^4 &= (n+1)^5 - 1 - 10S_n^3 - 10S_n^2 - 5S_n^1 - S_n^0 \end{aligned}$$

Nach Gauß'scher Summenformel 2.1.3, A.2.2 und A.2.3 ist weiter

$$\begin{aligned} 5S_n^4 &= (n+1)^5 - 1 - \frac{5}{2} n^2 (n+1)^2 - \frac{5}{3} n(n+1)(2n+1) \\ &\quad - \frac{5}{2} n(n+1) - n \\ \Longrightarrow \quad 5S_n^4 &= \frac{1}{6} \big[6(n+1)^5 - 6 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) \\ &\quad - 15n(n+1) - 6n \big] \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \\ \Longrightarrow \quad S_n^4 &= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1). \end{aligned}$$

A.2.6 Die Aussage folgt direkt aus dem binomischen Lehrsatz 2.1.15:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$$

A.2.7 Analog.

A.2.8 Nach Lemma 2.1.13 ist

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \iff \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^{l} \binom{m}{k} &= \sum_{m=k}^{l} \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1} \\ &= \binom{l+1}{k+1} - \binom{k}{k+1} \\ &= \binom{l+1}{k+1}. \end{aligned}$$

A.2.9 Induktionsanfang, $n_0 = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \frac{1-x}{1-x}$$

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{\text{IA}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}\\ &= \frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}\end{aligned}$$

A.2.10 Es sind

$$(a)\quad \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{3^k} = \frac{40}{27}, \qquad (b)\quad \sum_{k=0}^{4} \frac{2^k}{3^k} = \frac{211}{81},$$

$$(c)\quad \sum_{k=2}^{5} 2^k = 60, \qquad (d)\quad \sum_{k=1}^{4} (-3)^k = 60.$$

14.3 Lösungen zu Kapitel 3

A.3.1 Induktionsanfang, $k_0 = 4$:

$$4! = 24 \geq 16 = 2^4$$

Induktionsschritt, $k \mapsto k+1$:

$$(k+1)! = (k+1)(k!) \overset{\text{IA}}{\geq} \underbrace{(k+1)}_{\geq 2} 2^k \geq 2^{k+1}$$

A.3.2 Induktionsanfang, $n_0 = 0$:

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot x$$

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \overset{\text{IA}}{\geq} (1+nx)(1+x)\\ &= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

A.3.3 Die Aussage in

(a) ist falsch, denn für $n = 1$ gilt $1 + x_1 = 1 + x_1$ und damit (Trichotomie) $1 + x_1 \not> 1 + x_1$.

(b) ist wahr, was mit vollständiger Induktion bewiesen werden kann. Induktionsanfang, $n_0 = 2$:

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + \underbrace{x_1 x_2}_{>0} > 1 + x_1 + x_2$$

Induktionsschritt, $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) &= \left[\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right](1+x_{n+1}) \\
&\overset{\text{IA}}{>} \left[1+\sum_{k=1}^{n}x_k\right](1+x_{n+1}) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}x_k + x_{n+1} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)x_{n+1}}_{>0} \\
&> 1+\sum_{k=1}^{n+1}x_k
\end{aligned}$$

A.3.4 Die erste Ungleichung folgt aus der (verallgemeinerten) Bernoulli'sche Ungleichung:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = 2$$

Die zweite Ungleichung folgt aus dem binomischen Lehrsatz, A.3.1 und der geometrischen Summenformel. Aus dem binomischen Lehrsatz folgt zunächst einmal:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

Für $k \geq 4$ gilt nun nach A.3.1 weiter:

$$k! \geq 2^k \implies \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^k} \implies \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^k}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\
&\leq 1+1+\frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3} + \sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{19}{24}.
\end{aligned}$$

Schließlich bringen wir die geometrische Summenformel ins Spiel,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2,$$

und erhalten insgesamt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \frac{19}{24} < 3.$$

A.3.5

(a) Mit der Abgeschlossenheit bzgl. + (O.2) ist

$$\begin{aligned} x < y,\ a < b &\Longrightarrow y - x > 0,\ b - a > 0 \\ &\Longrightarrow (y + b) - (x + a) = (y - x) + (b - a) > 0 \\ &\Longrightarrow x + a < y + b. \end{aligned}$$

(b) Analog zu (a) mit Abgeschlossenheit bzgl. · (O.3).

(c) Zunächst einmal ist wegen der Abgeschlossenheit bzgl. · (O.3)

$$\begin{aligned} x < y,\ a < b &\Longrightarrow y - x > 0,\ b - a > 0 \\ &\Longrightarrow by - bx - ay + ax = (b - a)(y - x) > 0. \end{aligned}$$

Weiter gelten

$$\begin{aligned} x \geq 0, b - a > 0 &\overset{(O.3)}{\Longrightarrow} bx - ax = (b - a)x \geq 0, \\ a \geq 0, y - x > 0 &\overset{(O.3)}{\Longrightarrow} ay - ax = a(y - x) \geq 0 \end{aligned}$$

und damit

$$bx - ax \geq 0,\ ay - ax \geq 0 \overset{(O.2)}{\Longrightarrow} bx + ay - 2ax \geq 0.$$

Schließlich erhält man insgesamt:

$$\begin{aligned} &by - bx - ay + ax > 0,\ bx + ay - 2ax \geq 0 \\ \overset{(O.2)}{\Longrightarrow}\ & by - ax = (by - bx - ay + ax) + (bx + ay - 2ax) > 0 \\ \Longrightarrow\ & ax < by \end{aligned}$$

(d) Mit Teil (b) und der Spiegelungseigenschaft (3.2) ist

$$\begin{aligned} a < 0 &\overset{(3.2)}{\Longrightarrow} -a > 0 &&\overset{\text{b)}}{\Longrightarrow} -ax < -ay \\ &\overset{(3.2)}{\Longrightarrow} -(-ax) > -(-ay) &&\Longrightarrow ax > ay. \end{aligned}$$

(e) Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Sei $x > 0$, dann
$$x > 0 \overset{(O.3)}{\Longrightarrow} x^2 = x \cdot x > 0.$$

2. Sei $x < 0$, dann
$$x < 0 \overset{(3.2)}{\Longrightarrow} -x > 0 \overset{(O.3)}{\Longrightarrow} x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0.$$

(f) Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen $x > 0$ aber $x^{-1} \not> 0$. $x^{-1} = 0$ kann ausgeschlossen werden, da sonst $0 = x \cdot x^{-1} = 1$ wäre. Also ist
$$\begin{aligned} x^{-1} < 0 &\overset{(3.2)}{\Longrightarrow} -x^{-1} > 0 \overset{(\mathrm{O.3})}{\Longrightarrow} -xx^{-1} > 0 \\ &\overset{(\mathrm{M.4})}{\Longrightarrow} -1 > 0 \overset{(\mathrm{e})\ \&\ (\mathrm{O.3})}{\Longrightarrow} -x^2 > 0 \\ &\overset{(3.2)}{\Longrightarrow} x^2 < 0, \end{aligned}$$
was Teil (e) widerspricht!

(g) Mit Teil (f) folgt
$$x, y > 0 \implies x^{-1}, y^{-1} > 0$$
und mit Teil (b) weiter
$$yx^{-1} > xx^{-1} = 1 \implies x^{-1} = y^{-1} \underbrace{yx^{-1}}_{>1} > y^{-1}.$$

A.3.6

(a) $-a \leq a$ ist nicht immer wahr: Gegenbeispiel ist $a = -1$.

(b) $\frac{1}{a} \leq a$ ist nicht immer wahr: Gegenbeispiel ist $a = \frac{1}{2}$.

(c) $a \leq 2a$ ist nicht immer wahr: Gegenbeispiel ist $a = -1$.

(d) $a \leq a^2$ ist nicht immer wahr: Gegenbeispiel ist $a = \frac{1}{2}$.

(e) $a \leq |a|$ ist immer wahr, denn $a \leq \max\{a, -a\} = |a|$.

(f) $-a \leq |a|$ ist immer wahr, denn $a \leq \max\{a, -a\} = |a|$.

(g) $-|a| \leq a$ ist immer wahr, denn $-a \leq |a| \implies -|a| \leq a$.

(h) $|-a| \leq a$ ist nicht immer wahr: Gegenbeispiel ist $a = -1$.

(i) $a < b \implies a^2 < b^2$ ist nicht immer wahr: Gegenbeispiel ist $a = -1$ und $b = 0$.

(j) $a^2 < b^2 \implies a < b$ ist nicht immer wahr: Gegenbeispiel ist $a = -1 \not< -2 = b$ mit $a^2 = 1 < 4 = b^2$.

A.3.7

(a) Sei $x \in \mathbb{Q}_+$, dann gibt es $p, q \in \mathbb{N}$, so dass $x = \frac{p}{q}$ und damit $x^{-1} = \frac{q}{p}$. Dann ist

$$x + x^{-1} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2 + q^2}{pq}.$$

Angenommen $x + x^{-1} < 2$ würde gelten, dann folgt auch

$$\begin{aligned} \frac{p^2+q^2}{pq} < 2 &\implies p^2 + q^2 < 2pq \\ &\implies (p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2 < 0, \end{aligned}$$

was einen Widerspruch zu $a^2 \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ liefert.

(b) Gleichheit kann nur im ersten Fall und dort für $p = q$ eintreten, was $x = 1$ entspricht.

A.3.8 Die Behauptung ist wahr. Im Folgenden seien

$$x = r_1 + s_1\sqrt{2} \in K, \quad y = r_2 + s_2\sqrt{2} \in K, \quad z = r_3 + s_3\sqrt{2} \in K.$$

Wir gehen nun die einzelnen Teile der Definition durch. Dabei werden wir immer wieder folgendes Resultat verwenden:

(Q) $\mathbb{Q}$ ist ein Körper.

(A.1) Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} (x+y)+z &= \left[(r_1+r_2)+(s_1+s_2)\sqrt{2}\right] + \left[r_3 + s_3\sqrt{2}\right] \\ &= \left[(r_1+r_2)+r_3\right] + \left[(s_1+s_2)+s_3\right]\sqrt{2} \\ &\overset{(Q)}{=} \left[r_1+(r_2+r_3)\right] + \left[s_1+(s_2+s_3)\right]\sqrt{2} \\ &= \left[r_1 + s_1\sqrt{2}\right] + \left[(r_2+r_3)+(s_2+s_3)\sqrt{2}\right] \\ &= x + (y+z). \end{aligned}$$

(A.2) Kommutativgesetz: Analog zu (A.1) *(Nachrechnen).*

(A.3) Neutrales Element bezüglich der Addition ist

$$0_K := 0 + 0 \cdot \sqrt{2},$$

denn

$$\begin{aligned} x + 0_K &= \left(r + s\sqrt{2}\right) + \left(0 + 0 \cdot \sqrt{2}\right) \\ &= (r+0) + (s+0)\sqrt{2} \\ &\overset{(Q)}{=} r + s\sqrt{2} \\ &= x. \end{aligned}$$

(A.4) Sei $x = r + s\sqrt{2} \in K$. Inverses Element ist dann

$$-x := (-r) + (-s)\sqrt{2},$$

denn

$$\begin{aligned} x + (-x) &= \left(r + s\sqrt{2}\right) + \left((-r) + (-s) \cdot \sqrt{2}\right) \\ &= (r + (-r)) + (s + (-s))\sqrt{2} \\ &\overset{(Q)}{=} 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \\ &= 0_K. \end{aligned}$$

(M.1) Assoziativgesetz: Analog zu (A.1) *(Nachrechnen).*

(M.2) Kommutativgesetz: Analog zu (A.2) *(Nachrechnen).*

(M.3) Neutrales Element bezüglich der Multiplikation ist

$$1_K := 1 + 0 \cdot \sqrt{2},$$

denn

$$\begin{aligned} x \cdot 1_K &= \left(r + s\sqrt{2}\right) \cdot \left(1 + 0 \cdot \sqrt{2}\right) \\ &= (r \cdot 1 + 2s \cdot 0) + (r \cdot 0 + 1 \cdot s)\sqrt{2} \\ &\overset{(Q)}{=} r + s\sqrt{2} \\ &= x. \end{aligned}$$

(M.4) *Zur Herleitung des inversen Elements löse man die zwei Gleichungen*

$$r\tilde{r} + 2s\tilde{s} = 1, \quad r\tilde{s} + \tilde{r}s = 0,$$

wobei $x^{-1} = \tilde{r} + \tilde{s}\sqrt{2}$.

Sei $x = r + s\sqrt{2} \in K$, wobei $x \neq 0_K$. Das inverses Element ist dann durch

$$x^{-1} := \begin{cases} r^{-1} + 0 \cdot \sqrt{2} & ; s = 0 \text{ (dann } r \neq 0) \\ \left(\frac{-r}{2s^2 - r^2}\right) + \left(\frac{s}{2s^2 - r^2}\right)\sqrt{2} & ; s \neq 0 \text{ (dann } 2s^2 - r^2 \neq 0) \end{cases}$$

gegeben. Um das einzusehen, macht man eine Fallunterscheidung:

1. $s = 0$, dann $r \neq 0$, sonst wäre $x = 0_K$. Damit weiter

$$\begin{aligned} x \cdot x^{-1} &= \left(r + 0\sqrt{2}\right) \cdot \left(r^{-1} + 0 \cdot \sqrt{2}\right) \\ &= \left(rr^{-1} + 2 \cdot 0 \cdot 0\right) + \left(r \cdot 0 + r^{-1} \cdot 0\right)\sqrt{2} \\ &\overset{(Q)}{=} 1 + 0\sqrt{2} \\ &= 1_K. \end{aligned}$$

2. $s \neq 0$, dann $2s^2 - r^2 \neq 0$, sonst wäre

$$\left(\frac{r}{s}\right)^2 = 2 \implies \sqrt{2} \in \mathbb{Q}.$$

Damit weiter

$$\begin{aligned}
x \cdot x^{-1} &= \left(r + s\sqrt{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{-r}{2s^2 - r^2}\right) + \left(\frac{s}{2s^2 - r^2}\right) \cdot \sqrt{2}\right) \\
&= \left(\frac{r(-r)}{2s^2 - r^2} + 2\frac{s^2}{2s^2 - r^2}\right) + \left(\frac{rs}{2s^2 - r^2} + \frac{(-r)s}{2s^2 - r^2}\right)\sqrt{2} \\
&\overset{(Q)}{=} 1 + 0\sqrt{2} \\
&= 1_K.
\end{aligned}$$

(D) Distributivitätsgesetz:

$$\begin{aligned}
x \cdot (y + z) &= \left[r_1 + s_1\sqrt{2}\right] \cdot \left[(r_2 + r_3) + (s_2 + s_3)\sqrt{2}\right] \\
&= [r_1(r_2 + r_3) + 2s_1(s_2 + s_3)] \\
&\quad + [r_1(s_2 + s_3) + (r_2 + r_3)s_1]\sqrt{2} \\
&\overset{(Q)}{=} [r_1r_2 + r_1r_3 + 2s_1s_2 + 2s_1s_3)] \\
&\quad + [r_1s_2 + r_1s_3 + r_2s_1 + r_3s_1]\sqrt{2} \\
&= [(r_1r_2 + 2s_1s_2) + (r_1r_3 + 2s_1s_3)] \\
&\quad + [(r_1s_2 + r_2s_1) + (r_1s_3 + r_3s_1)]\sqrt{2} \\
&= \left[(r_1r_2 + 2s_1s_2) + (r_1s_2 + r_2s_1)\sqrt{2}\right] \\
&\quad + \left[(r_1r_3 + 2s_1s_3) + (r_1s_3 + r_3s_1)\sqrt{2}\right] \\
&= x \cdot y + x \cdot z
\end{aligned}$$

A.3.9 $(K, +, *)$ ist kein Körper, da (M.4) verletzt ist: Nicht jedes Element $x \neq 0_K$ besitzt ein inverses Element. Betrachte dazu $x = 1 + 1\sqrt{2} \in K$. Das inverse Element $x^{-1} = \tilde{r} + \tilde{s}\sqrt{2}$ müsste folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
1_K &= x * x^{-1} \\
\iff 1 + 0 \cdot \sqrt{2} &= \left(1 + 1\sqrt{2}\right) * \left(\tilde{r} + \tilde{s}\sqrt{2}\right) \\
\iff 1 + 0 \cdot \sqrt{2} &= (\tilde{r} + \tilde{s}) + (\tilde{s} + \tilde{r})\sqrt{2} \\
\iff \tilde{r} + \tilde{s} &= 1 \ \wedge\ \tilde{r} + \tilde{s} = 0,
\end{aligned}$$

was nicht möglich ist.

A.3.10 Im Folgenden seien $x, y, a \in \mathbb{K}$.

(a) Wir zeigen, dass das neutrale Element bezüglich der Addition nicht nur existiert, sondern sogar eindeutig ist! Angenommen es gäbe ein zweites neutrales Element $\tilde{k} \in K$, so dass $x + \tilde{k} = x$ für alle $x \in K$. Dann gelten

$$\begin{aligned} & x + k = x, \quad y + \tilde{k} = y \quad \forall x, y \in \mathbb{K} \\ \stackrel{x=\tilde{k}, y=k}{\Longrightarrow} \quad & \tilde{k} + k = \tilde{k}, \quad k + \tilde{k} = k \\ \stackrel{(A.2)}{\Longrightarrow} \quad & k = k + \tilde{k} = \tilde{k} + k = \tilde{k}, \end{aligned}$$

also ist $\tilde{k} = k$ und die beiden Elemente sind gleich. Damit ist das neutrale Element eindeutig.

(b) Die Behauptung (Translationsinvarianz) folgt aus

$$\begin{aligned} x + a = y + a \implies & 0 = (x + a) - (y + a) = x - y \\ \implies & x = y. \end{aligned}$$

(c) Analog zu (a) argumentieren wir wie folgt: Angenommen es gäbe ein zweites inverses Element $\tilde{y} \in K$, so dass $x + \tilde{y} = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x + y = 0,\ x + \tilde{y} = 0 \implies & x + y = x + \tilde{y} \\ \stackrel{(b)}{\Longrightarrow} & y = \tilde{y}. \end{aligned}$$

(d) Nach (A.2) bis (A.4) ist

$$0 \stackrel{(A.4)}{=} 0 + (-0) \stackrel{(A.2)}{=} -0 + 0 \stackrel{(A.3)}{=} -0.$$

(e) Nach (A.1) bis (A.4) ist

$$\begin{aligned} x & \stackrel{(A.3)}{=} x + 0 \stackrel{(A.4)}{=} x + [(-x) + (-(-x))] \\ & \stackrel{(A.1)}{=} [x + (-x)] + (-(-x)) \stackrel{(A.4)}{=} 0 + (-(-x)) \\ & \stackrel{(A.2)}{=} -(-x) + 0 \stackrel{(A.3)}{=} -(-x). \end{aligned}$$

(f) Nach (A.1) bis (A.4) ist analog

$$\begin{aligned} -(x + y) & \stackrel{(A.3)}{=} - (x + y) + 0 \\ & \stackrel{(A.4)}{=} - (x + y) + [x + (-x) + y + (-y)] \\ & \stackrel{(A.1),(A.2)}{=} - (x + y) + [(x + y) + (-x - y)] \\ & \stackrel{(A.1),(A.2)}{=} [(x + y) - (x + y)] + (-x - y) \\ & \stackrel{(A.4)}{=} 0 + (-x - y) \\ & \stackrel{(A.2)}{=} (-x - y) + 0 \\ & \stackrel{(A.3)}{=} - x - y. \end{aligned}$$

A.3.11

(a) Analog zu A.3.10, (a): $k = \tilde{k} \cdot k = k \cdot \tilde{k} = \tilde{k}$

(b) Analog zu A.3.10, (b):

$$\begin{aligned} x \cdot a = y \cdot a &\implies 0 = x \cdot a - y \cdot a = a(x-y) \\ &\overset{a \neq 0}{\implies} x - y = 0 \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

(c) Analog zu A.3.10, (c):

$$x \cdot y = 1,\ x \cdot \tilde{y} = 1 \implies x \cdot y = x \cdot \tilde{y} \overset{\text{(b)}}{\implies} y = \tilde{y}$$

(d) Klar, denn nach (M.3) und (M.4) ist $1^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1$.

(e) Nach (M.1) bis (M.4) ist

$$\begin{aligned} x &\overset{\text{(M.3)}}{=} x \cdot 1 \overset{\text{(M.4)}}{=} x \cdot \left[x^{-1} \cdot \left(x^{-1}\right)^{-1}\right] \overset{\text{(M.1)}}{=} \left[x \cdot x^{-1}\right] \cdot \left(x^{-1}\right)^{-1} \\ &\overset{\text{(M.4)}}{=} 1 \cdot \left(x^{-1}\right)^{-1} \overset{\text{(M.2)}}{=} \left(x^{-1}\right)^{-1} \cdot 1 \overset{\text{(M.3)}}{=} \left(x^{-1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

(f) Mit analoger Argumentation über (M.1) bis (M.4) ist

$$\begin{aligned} (xy)^{-1} &= (xy)^{-1} \cdot \left[x \cdot x^{-1} \cdot y \cdot y^{-1}\right] \\ &= (xy)^{-1} \cdot (xy) \cdot (x^{-1}y^{-1}) \\ &= x^{-1}y^{-1}. \end{aligned}$$

A.3.12 In A.3.8 haben wir bereits gezeigt, dass K ein Körper ist. Fehlen noch zu zeigen:

(O.1) Trichotomie: Für alle $x \in K$ gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x \gg 0, \quad x = 0, \quad -x \gg 0$$

(O.2) Abgeschlossenheit bzgl. $+$: $x \gg 0 \wedge y \gg 0 \implies x + y \gg 0$.

(O.3) Abgeschlossenheit bzgl. $\cdot$: $x \gg 0 \wedge y \gg 0 \implies x \cdot y \gg 0$.

(A) Archimedizität: $\forall x, y \in K$ mit $x, y \gg 0\ \exists n \in \mathbb{N}:\ nx \gg y$.

Dazu bemerken wir vorab, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der üblichen Anordnung $>$ angeordnet und archimedisch sind. Auf diesen Umstand führen wir im Folgenden auch die obigen Behauptungen zurück. Also los:

(O.1) Da $r - s\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, folgt (O.1) aus der Trichotomie der reellen Zahlen.

(O.2) Es ist

$$\begin{aligned} & x = r + s\sqrt{2} \gg 0 \ \wedge \ y = \tilde{r} + \tilde{s}\sqrt{2} \gg 0 \\ \Longrightarrow\ & r - s\sqrt{2} > 0 \ \wedge \ \tilde{r} - \tilde{s}\sqrt{2} > 0 \\ \Longrightarrow\ & (r + \tilde{r}) - (s + \tilde{s})\sqrt{2} = \left(r - s\sqrt{2}\right) + \left(\tilde{r} - \tilde{s}\sqrt{2}\right) > 0 \\ \Longrightarrow\ & x + y \gg 0. \end{aligned}$$

(O.3) Es ist

$$\begin{aligned} & x = r + s\sqrt{2} \gg 0 \ \wedge \ y = \tilde{r} + \tilde{s}\sqrt{2} \gg 0 \\ \Longrightarrow\ & r - s\sqrt{2} > 0 \ \wedge \ \tilde{r} - \tilde{s}\sqrt{2} > 0 \\ \Longrightarrow\ & (r\tilde{r} + 2s\tilde{s}) - (r\tilde{s} + \tilde{r}s)\sqrt{2} = \left(r - s\sqrt{2}\right) \cdot \left(\tilde{r} - \tilde{s}\sqrt{2}\right) > 0 \\ \Longrightarrow\ & x \cdot y \gg 0. \end{aligned}$$

(A) Seien $x = r + s\sqrt{2}$ und $y = \tilde{r} + \tilde{s}\sqrt{2}$. Die Behauptung ist für $x \gg y$ und $x = y$ klar (wähle dann $n = 2$). Sei also $y \gg x \gg 0$, d. h.

$$0 < \underbrace{r - s\sqrt{2}}_{=:\alpha \in \mathbb{R}} < \underbrace{\tilde{r} - \tilde{s}\sqrt{2}}_{=:\beta \in \mathbb{R}}.$$

Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist , folgt

$$\begin{aligned} & \exists n \in \mathbb{N}: \ n\alpha > \beta \\ \Longrightarrow\ & (nr) - (ns)\sqrt{2} = n\left(r - s\sqrt{2}\right) > \tilde{r} - \tilde{s}\sqrt{2} \\ \Longrightarrow\ & nx \gg y. \end{aligned}$$

14.4 Lösungen zu Kapitel 4

A.4.1 Man geht am besten sukzessive vor: Sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige injektive Funktion, dann gibt es für das „erste“ Element aus X genau $|Y|$ verschiedene mögliche Funktionswerte, da ja jedes Element aus Y infrage kommt. Für das „zweite“ Element aus X bleiben wegen der Injektivität noch genau $|Y| - 1$ verschiedene mögliche Funktionswerte, für das „dritte“ Element aus X entsprechend noch $|Y| - 2$ verschiedene mögliche Funktionswerte usw. ... Schließlich bleiben für das „letzte“ Element aus X noch genau $|Y| - |X| + 1$ verschiedene mögliche Funktionswerte und man erhält somit, dass es insgesamt

$$|Y| \cdot (|Y| - 1) \cdot \ldots \cdot (|Y| - |X| + 1) = \frac{|Y|!}{(|Y| - |X|)!} = \binom{|Y|}{|X|} |X|!$$

verschiedene injektive Funktionen $f\colon X \to Y$ gibt.

A.4.2

(a) Wir unterscheiden zwischen Hin- und Rückrichtung.

$\Longrightarrow$: Sei f eine injektive Funktion und $A, B \subseteq X$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} z \in f(A) \cap f(B) &\iff \exists x \in A, y \in B \colon f(x) = z = f(y) \\ &\iff x = y \quad \text{(Injektivität)} \\ &\iff x \in A \cap B \\ &\iff z \in f(A \cap B), \end{aligned}$$

also ist $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.

$\Longleftarrow$: Es gelte $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \subseteq X$. Dann folgt für $x \neq y \in X$ insbesondere

$$f(x) \cap f(y) = f(x \cap y) = f(\emptyset) = \emptyset \implies f(x) \neq f(y),$$

also ist f eine injektive Funktion. $\square$

(b) Wir unterscheiden zwischen Hin- und Rückrichtung.

$\Longrightarrow$: Sei f eine injektive Funktion und $A \subseteq X$ beliebig. Dann gilt

$$z \in f^{-1}(f(A)) \iff f(z) \in f(A) \iff z \in A,$$

also ist $A = f^{-1}(f(A))$. Die erste Äquivalenz gilt offenbar für alle Funktionen $f \colon X \to Y$. Bei der zweiten Äquivalenz ist jedoch im Allgemeinen nur die Implikation $z \in A \implies f(z) \in f(A)$ richtig. Für die Rückrichtung benötigt man die Injektivität der Funktion: Angenommen $f(z) \in f(A)$, aber $z \notin A$, dann folgt nach Teil (a) aus der Injektivität

$$f(z) \cap f(A) = f(z \cap A) = f(\emptyset) = \emptyset \quad \implies \quad f(z) \notin f(A),$$

was offenbar ein Widerspruch zur Annahme ist. Daher gilt (nur!) für injektive Funktionen auch die Implikation $f(z) \in f(A) \implies z \in A$.

$\Longleftarrow$: Es gelte $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \subseteq X$. Wir zeigen die Injektivität von f über einen Widerspruch: Angenommen f ist nicht injektiv, dann existieren $x_1 \neq x_2 \in X$ und $y \in Y$, sodass $f(x_1) = y = f(x_2)$. Setzt man $A := \{x_1\}$, dann folgt

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2\} \neq A,$$

was offenbar ein Widerspruch zur Annahme ist. Also muss die Funktion f injektiv sein. $\square$

A.4.3

(a) Sei $z \in Z$, dann existiert aufgrund der Surjektivität von g ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$ und wiederum aufgrund der Surjektivität von f ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Also gilt insgesamt

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

und da $z \in Z$ beliebig gewählt wurde, folgt $W(g \circ f) = Z$.

(b) Offensichtlich muss g surjektiv sein, denn $Z = W(g \circ f) \subseteq W(g)$.

(c) Sei $X = \{x\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ und $Z = \{z\}$. Definiert man nun $f\colon X \to Y$ durch $f(x) = y_1$ und $g\colon Y \to Z$ durch $g(y_1) = z$, dann ist die Komposition $g \circ f$ zwar surjektiv, aber $W(f) = \{y_1\} \neq Y$, d. h., f ist nicht surjektiv.

A.4.4

(a) $f^{-1}(\{9, 49, 81\}) = \{3, -3, 7, -7, 9, -9\}$

(b) $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

(c) $f^{-1}(\{-16, -25\}) = \emptyset$

A.4.5

(a) $f^{-1}([0, 1]) = [-1/3, 1/3]$

(b) $f^{-1}(]-\infty, 0]) = \{0\}$

(c) $f^{-1}(]0, \infty]) = \mathbb{R}$

(d) $f^{-1}(\{9, -18, 30, -5, 0\}) = \{-3, 3, -10, 10, 0\}$

A.4.6

(a) Für $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ gilt

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1 \\ \Longleftrightarrow y + 1 &= \frac{1}{1-x} \\ \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{y+1} &= \frac{y}{y+1} = x \end{aligned}$$

und daher $f^{-1}\colon \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $y \mapsto y/(1+y)$.

(b) Für $x \in [0, \infty[$ gilt:

$$\begin{aligned}
&y = f(x) = ax^2 + bx + c \\
\iff &\frac{y-c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\iff &\frac{y-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \\
\iff &\frac{\sqrt{4a(y-c)+b^2}}{2a} = \left|x + \frac{b}{2a}\right| \\
\iff &\pm\frac{\sqrt{4a(y-c)+b^2}}{2a} = x + \frac{b}{2a} \\
\iff &\frac{-b \pm \sqrt{4a(y-c)+b^2}}{2a} = x \overset{!}{\geq} 0
\end{aligned}$$

Die Wahl des Vorzeichens vor der Wurzel ergibt sich wie folgt: Nach Voraussetzung ist $a > 0$, also muss $-b \pm \sqrt{4a(y-c)+b^2} \geq 0$ erfüllt sein. Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion gilt (man beachte $y \geq c$)

$$\sqrt{4a(y-c)+b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b|,$$

also ist $f^{-1}\colon [c, \infty[\to [0, \infty[$ definiert durch

$$f^{-1}(y) = \frac{-b + \sqrt{4a(y-c)+b^2}}{2a}.$$

(c) $f^{-1}\colon \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$, $m \to m-1$.

(d) $f^{-1}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $u \to u-k$.

(e) Offenbar gilt $f(x) = x$ für alle $x \in \{0,1\}$, also $f = \mathsf{id} = f^{-1}$.

A.4.7 Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx + d$ definiert, dann folgt

$$g \circ f(x) = g(ax+b) = cax + cb + d = ux + v, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit $u = ac$ und $v = bc + d$, d. h., $g \circ f$ ist affin-linear.

A.4.8 Seien $x_1 \neq x_2 \in X \subseteq \mathbb{R}$, dann ist $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$. Da f streng monoton wachsend ist, folgt daraus

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \vee \quad f(x_1) > f(x_2),$$

also $f(x_1) \neq f(x_2)$, mithin ist f injektiv.

A.4.9 Es gilt $f \circ g(x) = (\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}-2) = x - \sqrt{1+x} - 1$ mit Definitionsbereich

$$D(f \circ g) = g^{-1}(W(g) \cap D(f)) = g^{-1}([0, \infty[) = [-1, \infty[]$$

und Wertebereich

$$W(f \circ g) = f \circ g([-1, \infty[) = [-9/4, \infty[.$$

Dabei ergibt sich $W(f \circ g)$ durch Bestimmung des (globalen) Minimums von $f \circ g$. Die andere Komposition lautet

$$g \circ f(x) = \sqrt{1 + (x+1)(x-2)}$$

und für den Definitionsbereich folgt

$$D(g \circ f) = f^{-1}(W(f) \cap D(g)) = f^{-1}([-1, \infty[)$$

Um den Definitionsbereich zu bestimmen muss man also folgende Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} f(x) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2 &\overset{!}{\geq} -1 \\ \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 \overset{!}{\geq} 0 \end{aligned}$$

Mit quadratischer Ergänzung ergeben sich die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ zu $x_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ und $x_2 = (1 + \sqrt{5})/2$ (Goldener Schnitt!). Da $x^2 - x - 1$ eine nach oben offene Parabel beschreibt, gilt somit

$$f(x) \geq -1 \quad \text{für} \quad x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \ \vee \ x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

also

$$D(g \circ f) = f^{-1}([-1, \infty)) = \mathbb{R} \backslash \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Für den Wertebereich gilt $W(g \circ f) = [0, \infty)$, denn $g \circ f((1 + \sqrt{5})/2) = 0$ und die Wurzelfunktion ist streng monoton steigend.

14.5 Lösungen zu Kapitel 5

A.5.1

(a) Nach Definition 5.1.3 gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0 \colon \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Sei nun $\varepsilon = a > 0$, dann gibt es also ein $n_0(a) \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < a \iff -a < a_n - a < a \iff 0 < a_n < 2a,$$

für alle $n \geq n_0(a)$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann ist auch $\varepsilon\sqrt{a} > 0$, und nach Definition 5.1.3 gilt

$$\exists N_0 = N_0(\varepsilon\sqrt{a}) \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N_0\colon \quad |a_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}.$$

Sei $n_0(a) \in \mathbb{N}$ wie in (a). Für alle $n \geq \max\{N_0, n_0(a)\} =: n_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| &= \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \\ &< \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

also $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$, $n \to \infty$. □

A.5.2

(a) Hier ist:

$$a_n = \frac{6n^2 + 3n - 1}{9n^2 - 81} = \frac{6 + 3/n - 1/n^2}{9 - 81/n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}$$

(b) Nach A.5.1 gilt:

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n^2 + n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2(1 + 1/n)} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c) Hier ist:

$$a_n = \frac{7^n + (-13)^n}{(-7)^n + 13^n} = \frac{(-1)^n(-7)^n + (-1)^n 13^n}{(-7)^n + 13^n} = (-1)^n,$$

d. h., $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent nach Beispiel 5.1.7.

(d) Hier ist:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n-3)^3 - n^3 + 27}{4n^2 - 7n} = \frac{27n - 9n^2}{n^2(4 - 7/n)} \\ &= \frac{27}{n(1 - 7/n)} - \frac{9}{4 - 7/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{9}{4} \end{aligned}$$

(e) Hier ist:

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

(f) Es gilt $a_n = 0$ für $n \geq 101$, also $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

(g) Sei $n \geq 4$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n = \frac{n^3}{\binom{2n}{n}} &= \frac{n^3(n!)^2}{(2n)(2n-1)\cdot \ldots \cdot (n+1)n!} \\ &= \frac{n^2 n!}{2(2n-1)\cdot \ldots \cdot (n+1)} \leq \frac{(n+2)!}{2(2n-1)\cdot \ldots \cdot (n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{2n-1} \cdot \frac{n+1}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{n+2} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{n+1} \\ &\leq \frac{6}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

also $a_n \to 0$, $n \to \infty$ nach dem Einschießungssatz.

(h) Hier ist:

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(i) Wegen $(a^2 - b^2)/(a+b) = a - b$ gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2+5n+7} - \sqrt{n^2-2n} \\ &= \frac{(n^2+5n+7)-(n^2-2n)}{\sqrt{n^2+5n+7}+\sqrt{n^2-2n}} \\ &= \frac{7n+7}{\sqrt{n^2(1+5/n+7/n^2)}+\sqrt{n^2(1-2/n)}} \\ &= \frac{7+7/n}{\sqrt{1+5/n+7/n^2}+\sqrt{1-2/n}} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \frac{7}{2} \end{aligned}$$

(j) Es gilt $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, also

$$\underbrace{\frac{\pi n - 2}{2n+1}}_{\to \pi/2} \leq \frac{\pi n + 2\sin(n)}{2n+1} \leq \underbrace{\frac{\pi n + 2}{2n+1}}_{\to \pi/2}.$$

Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} c_n = \pi/2$ nach dem Einschließungssatz.

A.5.3 Die ersten Folgenglieder sind

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{25}, \\
a_1 &= \frac{2}{25} + \frac{12}{5^3}, \\
a_2 &= \frac{2}{25} + \frac{12}{5^3} + \frac{12}{5^4}, \\
a_3 &= \frac{2}{25} + \frac{12}{5^3} + \frac{12}{5^4} + \frac{12}{5^5} \\
&= \frac{2}{25} + 12\left(\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{1}{5}\right)^k - \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right)\right) \\
&= \frac{2}{25} + 12\left(\frac{1-(1/5)^6}{1-1/5} - \frac{31}{25}\right) \\
&= \frac{2}{25} + \frac{12}{25}\left(\frac{125}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^3 - \frac{124}{4}\right) \\
&= \frac{2}{25} + \frac{3}{25}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

und es lässt sich

$$a_n = \frac{2}{25} + \frac{3}{25}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

vermuten. In der Tat liefert der geschlossene Ausdruck $a_0 = 2/25$ und per Induktion folgt

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{25} + \frac{3}{25}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \\
&= \frac{2}{25} + \frac{3}{25}\left(1 - \left(1 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{2}{25} + \frac{3}{25}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) \\
&\overset{\text{IV}}{=} a_{n-1} + \frac{12}{5^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{25} + \frac{3}{25}\left(1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \frac{1}{5}.$$

A.5.4 Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (streng) monoton wachsend, denn $a_0 = 1 < \sqrt{2} = a_1$ und per Induktion folgt

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \overset{\text{IV}}{<} \sqrt{1 + a_n} = a_{n+1}.$$

Zudem ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben durch 2 beschränkt, denn $a_0 = 1 < 2$ und per Induktion folgt

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \overset{\text{IV}}{<} \sqrt{1+2} < 2.$$

Nach dem Monotoniekriterium (Satz 5.6.6) ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ daher konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n =: s = \sup\{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \in [1,2]$. Der Grenzwert s erfüllt insbesondere die Rekursionsvorschrift, d. h.

$$s^2 = 1 + s \iff s^2 - s - 1 = 0.$$

Lösen der quadratischen Gleichung (p-q-Formel) ergibt

$$s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

und da $s \geq 1$, folgt $s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

A.5.5 Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert nach Voraussetzung ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - s| < \varepsilon$ und $|c_n - s| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Anders ausgedrückt gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} & -\varepsilon < a_n - s < \varepsilon \quad \wedge \quad -\varepsilon < c_n - s < \varepsilon \\ \iff & s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon \quad \wedge \quad s - \varepsilon < c_n < s + \varepsilon \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$s - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < s + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

also $|b_n - s| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. □

A.5.6

$\Longrightarrow$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N_0$ gilt:

$$\begin{aligned} & |a_n - s| < \varepsilon \quad \wedge \quad |b_n - s| < \varepsilon \\ \iff & |c_{2n-1} - s| < \varepsilon \quad \wedge \quad |c_{2n} - s| < \varepsilon \end{aligned}$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2N_0$, dann ist $k = 2n$ oder $k = 2n - 1$ für ein $n \geq N_0$. Mit $n_0 := 2N_0$ folgt $|c_k - s| < \varepsilon$ für $k \geq n_0$.

$\Longleftarrow$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \geq 1$, sodass $|c_n - s| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Da $n_0 \geq 1$, folgt aus $n \geq n_0$ auch $2n \geq n_0$ und $2n - 1 = n + (n-1) \geq n_0$. Somit gilt

$$|c_{2n} - s| = |b_n - s| < \varepsilon \quad \wedge \quad |c_{2n-1} - s| = |a_n - s| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$, d. h. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = s$. □

A.5.7 Ausgedrückt in Quantoren gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \colon \quad |a_n| < \varepsilon, \\ &\exists M \in \mathbb{K} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \colon \quad |b_n| \leq M.\end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ folgt daraus unmittelbar die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| < \varepsilon/M$ für alle $n \geq n_0$. Daraus ergibt sich

$$\forall n \geq n_0 \colon \quad |a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

A.5.8 Für die Folgenglieder a_n gelten die Abschätzungen

$$\frac{1}{n^3 + 2n} \sum_{k=1}^{n} k^2 \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3 + 2k} \;\leq\; \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Nach A.2.2 gilt nun

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^3 + 2n} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{n^3 + 2n} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + 2/n^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{n + 2/n} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^2 + 2n} \\ &\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{3}\end{aligned}$$

und ebenso

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{3}.$$

Der Einschließungssatz liefert demnach $a_n \to 1/3$, $n \to \infty$.

A.5.9 Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gilt

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2},$$

also

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil \in \mathbb{N} \qquad n \geq n_0 \colon \quad \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon.$$

A.5.10

(a) Nach dem binomischen Lehrsatz gilt für $x \geq 0$ und $n \geq 2$ die (grobe) Abschätzung

$$\begin{aligned}(1 + x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq \binom{n}{2} x^2 = \frac{n(n-1)}{2} x^2 \\ &\geq \frac{n}{2} \frac{n}{2} x^2 = \frac{n^2}{4} x^2.\end{aligned}$$

(b) Für $n \geq 2$ gilt nach Teil (a)

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geq \frac{n^2}{4}\frac{4}{n} = n \iff 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \geq \sqrt[n]{n}.$$

(c) Da $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + 2/\sqrt{n}$, folgt die Behauptung aus dem Einschließungssatz, denn nach A.5.9 gilt $1/\sqrt{n} \to 0$.

A.5.11 Setzt man $p = \max\{x, y\} \geq 0$, dann gilt

$$p = \sqrt[n]{p^n} \leq \sqrt[n]{x^n + y^n} \leq \sqrt[n]{2p^n} = \sqrt[n]{2}\, p.$$

Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ für $n \to \infty$, folgt die Behauptung aus dem Einschließungssatz.

A.5.12 Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{n^n}{2n(2n-1)(2n-2)\cdot \ldots \cdot (n+1)n!} \\ &< \frac{n^n}{n^n \cdot n!} = \frac{1}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

also $a_n \to 0,\ n \to \infty$ nach dem Einschließungssatz. Statt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachte man die Folge der Kehrwerte $1/b_n = n!/n^n$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot \cdot \ldots \cdot n \cdot n} = \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

also $1/b_n \to 0,\ n \to \infty$ nach dem Einschließungssatz. Daraus folgt, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞ divergiert.

A.5.13

(a) Vorbetrachtung:

(i) Aus der Konvergenz $a_n \to a, n \to \infty$ folgt zum einen die Beschränktheit der Folge (Satz 5.2.3), d. h. es gibt ein $M \in \mathbb{K}$, sodass $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq 1$. Der Grenzwert erfüllt dann ebenfalls $|a| \leq M$ (Satz 5.3.3).

(ii) Zum anderen gibt es nach dem Konvergenzkriterium (5.1) zum jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Nun zum eigentlichen Beweis: Setzt man $N := \max\{n_0,\ 4Mn_0/\varepsilon\}$ (diese Wahl von N erklärt sich aus der nachstehenden Rechnung), dann gilt für $n > N$

$$\begin{aligned}
|s_n - a| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - a \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a) \right| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - a| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |a_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n} |a_k - a| \\
&\leq \frac{n_0 - 1}{n} 2M + \frac{n - n_0 + 1}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{N} 2M(n_0 - 1) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4Mn_0} 2M(n_0 - 1) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

also $s_n \to a,\ a \to \infty$.

(b) Es genügt ein Gegenbeispiel: Die alternierende Folge $a_n := (-1)^{n-1}$, $n \geq 1$, ist divergent (siehe Beispiel 5.1.7), doch für die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ gilt offenbar

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; n \text{ ungerade} \\ 0 & ; n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Also $s_n \to 0,\ n \to \infty$, d. h., $(s_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

A.5.14

(a) Es gilt

$$a_{n+1}^2 - A = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2A + \frac{A^2}{a_n^2}\right) - A = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{A}{a_n}\right)^2 \geq 0,$$

also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten durch $\sqrt{A}$ beschränkt. Daraus folgt weiterhin

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) - a_n = \frac{A}{2a_n} - \frac{a_n}{2} = \frac{A - a_n^2}{2a_n} \leq 0,$$

d. h., $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend ($a_{n+1} \leq a_n$). Nach dem Monotoniekriterium existiert somit der Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \geq \sqrt{A} > 0.$$

Da dieser insbesondere die Rekursionsgleichung erfüllen muss, folgt

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right) \iff a^2 = A \iff a = \sqrt{A}.$$

(b) Nach Teil (a) ist $a_n \geq a_{n+1} \geq \sqrt{A} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Entsprechend ist auch $b_n = A/a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} > 0, \quad n \geq 0,$$

also $0 < b_n < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt wiederum

$$b_n = \frac{2A}{2a_n} < \frac{2A}{a_n + b_n} = b_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

also insgesamt $b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $a_n \to \sqrt{A}$, $n \to \infty$ (siehe Teil (a)), gilt auch

$$b_n = A/a_n \to A/\sqrt{A} = \sqrt{A}, \quad n \to \infty.$$

A.5.15 Seien $(p,q),(t,s),(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$ beliebig. Trivialerweise gilt $pq = pq$, also $(p,q) \sim (p,q)$. Genauso einfach sieht man

$$(p,q) \sim (t,s) \iff ps = tq \iff tq = ps \iff (t,s) \sim (p,q).$$

Aus $(p,q) \sim (t,s)$ und $(t,s) \sim (k,l)$ folgt

$$ps = tq \ \wedge \ tl = ks \implies pstl = tqks.$$

Ist $t = 0$, so folgt aus der linken Seite wegen $s > 0$ bereits $p = k = 0$, mithin $pl = 0 = kq$, also $(p,q) \sim (k,l)$. Ist $t \neq 0$, dann lässt sich die rechte Seite zu $pl = kq$ kürzen, also $(p,q) \sim (k,l)$.

A.5.16

(a) Offenbar gilt $x^2 - 10x \leq 24$ für $-2 \leq x \leq 12$, also $A = [-2, 12]$. Daraus folgt unmittelbar, dass A beschränkt ist mit $\inf A = -2$ und $\sup A = 12$.

(b) Zunächst gilt

$$x \in B \iff x = \frac{1+t}{t} = 1 + \frac{1}{t} \geq 1 \quad \forall t > 0$$

und somit lässt sich vermuten, dass (i) $\inf B = 1$ und (ii) die Menge B nach oben unbeschränkt ist.

Zu (i): Sei $\varepsilon > 0$ und man wähle $t_0 > 1/\varepsilon > 0$, dann gilt

$$1 + \frac{1}{t_0} < 1 + \frac{1}{1/\varepsilon} = 1 + \varepsilon,$$

also ist $1 + \varepsilon$ keine untere Schranke von B, mithin $\inf B = 1$.

Zu (ii): Sei $M > 1$ und man wähle $0 < t_0 < 1/(M-1)$, dann gilt

$$1 + \frac{1}{t_0} > 1 + (M-1) = M,$$

also ist M keine obere Schranke von B. Da M beliebig war, folgt die Unbeschränktheit von B.

A.5.17

(a) Es gilt

$$a_n = \left(\frac{(n+1)n}{(n+2)2} - \frac{n}{2}\right)((-1)^n + 1) = \frac{-n}{2(n+2)}((-1)^n + 1).$$

Mit den Abbildungen $\sigma_k(n) := 2n - k$, $k = 0, 1$, folgt

$$\begin{aligned} a_{\sigma_0(n)} &= a_{2n} = \frac{-2n}{2(2n+2)} \cdot 2 = -\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} -1, \\ a_{\sigma_1(n)} &= a_{2n+1} = \frac{-(2n-1)}{2(2n+1)} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

also sind -1 und 0 die Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geq 1}$.

(b) Man beachte

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \quad b_1 = \frac{1}{j}, \ldots\ldots, b_{j-1} = \frac{j-1}{j}, \\ b_j &= 0, \quad b_{j+1} = \frac{1}{j}, \ldots\ldots, b_{2j-1} = \frac{j-1}{j}, \ldots \end{aligned}$$

Man kann $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vermöge der Abbildungen $\sigma_k(n) := nj + k$, $k = 0, \ldots, j-1$, also in j konstante Teilfolgen

$$b_{\sigma_k(n)} = b_{nj+k} = \frac{k}{j}, \quad k = 0, \ldots, j-1$$

zerlegen. Die Menge der Häufungspunkte von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist daher $\{k/j \mid k = 0, \ldots, j-1\}$.

(c) Es gilt

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{4n^2 + 4n\sqrt{n} + n} = \dfrac{1}{4 + 4/\sqrt{n} + 1/n} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{4} & ; n \text{ gerade} \\ -\dfrac{n^2}{4n^2 + 4n\sqrt{n} + n} \xrightarrow{n\to\infty} -\dfrac{1}{4} & ; n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

also besitzt die Folge die Häufungspunkte $\pm 1/4$.

A.5.18 Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \geq 1$ sowie $\varepsilon > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n+k}| &\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+(k-1)} - a_{n+k}| \\ &\leq 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \ldots + 2^{-(n+k-1)} = \sum_{j=n}^{n+k-1} 2^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-(j+n)} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - (1/2)^k}{1 - 1/2} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \underbrace{\left(1 - 2^{-k}\right)}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \overset{!}{<} \varepsilon \end{aligned}$$

Auslösen nach n ergibt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \qquad &\Longleftrightarrow\ 2^{n-1} = e^{\ln(2^{n-1})} = e^{(n-1)\ln(2)} > \frac{1}{\varepsilon}\\ &\Longleftrightarrow\ (n-1)\ln(2) > \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\\ &\Longleftrightarrow\ n > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(2)} + 1.\end{aligned}$$

Setzt man

$$n_0 = n_0(\varepsilon) = \max\left\{\left\lceil \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(2)} + 1\right\rceil, 0\right\} \in \mathbb{N},$$

dann folgt

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon,$$

also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. □

A.5.19 Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (streng) monoton wachsend und durch $1/x$ beschränkt. Das sieht man per Induktion:
Induktionsanfang ($n = 1$): Wegen $a_0 \in (0, 1/x)$ ist $2 - xa_0 > 1$ und somit $a_1 = a_0(2 - xa_0) > a_0$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}a_1 &= a_0(2 - xa_0) = 2a_0 - xa_0^2\\ &= -x\left(a_0^2 - \frac{2a_0}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)\\ &= \frac{1}{x} - x\left(a_0 - \frac{1}{x}\right)^2 < \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt $0 < a_n < 1/x$, also $2 - xa_n > 1$ und somit $a_{n+1} = a_n(2 - xa_n) > a_n$. Analog zum Induktionsanfang gilt auch wieder

$$a_{n+1} = 2a_n - xa_n^2 = \frac{1}{x} - x\left(a_n - \frac{1}{x}\right)^2 < \frac{1}{x}.$$

Nach dem Monotoniekriterium ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ daher konvergent mit Grenzwert $a > 0$ und aus der Rekursionsgleichung folgt

$$a = a(2 - ax) \iff ax = 1 \iff a = \frac{1}{x}.$$

A.5.20 Die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend und daher gilt $q_n = a_{n+1}/a_n \geq 1$, $n \geq 0$. Aus der Rekursionsvorschrift $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ folgt weiterhin

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{q_n}\\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{q_{n-1}}} = 1 + \frac{q_{n-1}}{1 + q_{n-1}},\end{aligned}$$

also insbesondere $1 \leq q_n \leq 2$ für $n \geq 0$. Zudem gilt $q_{2n} \leq q_{2(n+1)}$ für $n \geq 0$: Da $q_2 = 3/2 \geq 1 = q_0$, stimmt die Behauptung für $n = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} & \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \geq 0 \\ \iff & \frac{y}{1+y} \geq \frac{x}{1+x}, \end{aligned}$$

für $0 \leq x \leq y$ folgt per Induktion

$$q_{2(n+1)} = q_{2n+2} = 1 + \frac{q_{2n}}{1+q_{2n}} \overset{IV}{\geq} 1 + \frac{q_{2(n-1)}}{1+q_{2(n-1)}} = q_{2n}.$$

Die Teilfolge $(q_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist somit monoton wachsend und beschränkt, also nach dem Monotoniekriterium konvergent gegen ein $q \in [1,2]$. Der Grenzwert erfüllt

$$q = 1 + \frac{q}{1+q} \iff q^2 - q - 1 = 0$$

und Lösen der quadratischen Gleichung (quadratische Ergänzung) liefert (beachte $q \geq 1$)

$$q = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Für die Teilfolge $(q_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ergibt sich daraus

$$q_{2n+1} = 1 + \frac{1}{q_{2n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 + \frac{1}{q} = \frac{1+q}{q} = \frac{q^2}{q} = q.$$

Beide Folgen $(q_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(q_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergieren also gegen denselben Grenzwert q und daher gilt (siehe A.5.6)

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

A.5.21 Nach dem Hinweis gelten zunächst die Abschätzungen

$$\frac{(n+1)^n}{e^n} \cdot \frac{e^n}{n^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \iff \left(\frac{n+1}{e}\right)^n \leq e \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

sowie

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{e}\right)^n (n+1) - ne\left(\frac{n}{e}\right)^n &= \frac{1}{e^n}\left((n+1)^{n+1} - \frac{n^{n+1}}{e}\right) \\ &\geq \frac{1}{e^n}\left((n+1)^{n+1} - \frac{n^{n+1}n^n}{(n+1)^n}\right) \\ &= \frac{1}{e^n}\left(\frac{(n+1)^{2n+1} - n^{2n+1}}{(n+1)!}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n (n+1) \geq ne \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Die beiden Ungleichungen folgen daraus nun per vollständiger Induktion: Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Induktionsschritt ($n \to n+1$): Es gilt

$$\begin{aligned} e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} &= e\left(\frac{n+1}{e}\right)^n \frac{n+1}{e} = (n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^n \\ &\leq (n+1)e\left(\frac{n}{e}\right)^n \overset{\text{IV}}{\leq} (n+1)n! \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned} (n+1)e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} &= (n+1)^2\left(\frac{n+1}{e}\right)^n \geq (n+1)ne\left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &\overset{\text{IV}}{\geq} (n+1)n! = (n+1)!. \end{aligned}$$

Umformen der Ungleichung liefert nun

$$\begin{aligned} & e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n \\ \iff & \frac{1}{e}\left(\frac{e}{n}\right)^n \geq \frac{1}{n!} \geq \frac{1}{ne}\left(\frac{e}{n}\right)^n \\ \iff & \frac{e}{\sqrt[n]{e}} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{e}{\sqrt[n]{ne}}, \end{aligned}$$

und da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e}{\sqrt[n]{e}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{\sqrt[n]{ne}} = e,$$

folgt die Behauptung aus dem Einschließungssatz. Weiterhin gilt nach der Ungleichung

$$\sqrt[n]{e\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{\sqrt[n]{e}n}{e} \leq \sqrt[n]{n!}$$

und nach dem Vergleichskriterium folgt Divergenz.

14.6 Lösungen zu Kapitel 6

A.6.1 Die n-te Partialsumme ist durch $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ gegeben. Hier ist also:

(a) $$s_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \implies \sum_{k=0}^{\infty} k = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

(b) $$s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\implies \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

Die Reihe in (a) divergiert, die Reihe in (b) konvergiert gegen 1.

A.6.2 Es ergeben sich folgende Grenzwerte:

(a) $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{5}{3^{k+1}} = \frac{5}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^k = \frac{5}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

(b) $$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{4\cdot 2^{l+1}}{3^l} = 8\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^l = 8\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

(c) $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{2n-2}5^{-n+1}}{2^{n-2}} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n = 2\left(\frac{1}{1-\frac{9}{10}} - 1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{81}{5}$$

(d) $$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^j = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für} \quad |x| < 1$$

A.6.3 Die Grenzwerte lauten:

(a) $$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{m^2+1} = 0$$

(b) $$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\mu^3}{4\mu^3 - 2\mu + 8} = \frac{1}{4}$$

(c) $$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$$

(d) $$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[r]{r+1}} - 1\right) = 0$$

Reihe (b) und (c) divergieren. Für Reihe (a) und (d) macht das notwendige Kriterium keine Aussage. *Tatsächlich divergieren auch Reihe (a) und (d)!*

A.6.4

(a) Wir führen die Reihe mithilfe der 3. binomischen Formel auf eine geometrische Reihe zurück

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^{n+1}} - \sqrt{3^n}} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{3^{n+1}} + \sqrt{3^n}}{3^{n+1} - 3^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\sqrt{3}+1)\cdot\left(\sqrt{3}\right)^n}{(3-1)\cdot 3^n} \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^n \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

und sehen, dass diese gegen $\frac{\sqrt{3}}{2}$ konvergiert.

(b) Wir bemerken, dass für die Folge der Summanden

$$\lim_{l\to\infty} \frac{l^l}{(l+1)^l} = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{l}\right)^l} = \frac{1}{e}$$

gilt und die Reihe damit divergiert.

(c) Wegen $\lim_{\kappa\to\infty} \sqrt[\kappa]{\kappa}$ ist die Folge der Summanden $\left(\frac{1}{\kappa \sqrt[\kappa]{\kappa}}\right)_{\kappa=1}^{\infty}$ eine Nullfolge positiver Zahlen. Des Weiteren ist die Folge monoton fallend, was sich aus A.3.4 ($\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^\kappa < 3$) ergibt:

$$3 > \left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^\kappa = \frac{(\kappa+1)^\kappa}{\kappa^\kappa} \iff \kappa^{\kappa+1} > (\kappa+1)^\kappa$$
$$\iff \sqrt[\kappa(\kappa+1)]{\kappa^{\kappa+1}} > \sqrt[\kappa(\kappa+1)]{(\kappa+1)^\kappa} \iff \sqrt[\kappa]{\kappa} > \sqrt[\kappa+1]{\kappa+1}.$$

Damit ist der Satz von Olivier anwendbar,

$$\lim_{\kappa\to\infty} \kappa \frac{1}{\kappa \sqrt[\kappa]{\kappa}} = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\kappa}} = 1,$$

und wir folgern Divergenz der Reihe.

(d) Die Reihe konvergiert offensichtlich nach dem Majorantenkriterium, da

$$\sum_{a=1}^{\infty} \frac{3}{a^2+5a+4} \leq 3 \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} < \infty.$$

Da alle Summanden positiv sind, konvergiert die Reihe sogar absolut. Den Grenzwert liefert dieser Ansatz aber leider nicht. Der Grenzwert kann aber über eine Partialbruchzerlegung bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{\infty} \frac{3}{a^2+5a+4} &= 3 \sum_{a=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+4}\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{13}{4}\end{aligned}$$

Die Vertauschung der Summationsreihenfolge ist dabei durch die absolute Konvergenz legitimiert.

(e) Es gelten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{7^k} = \frac{7}{3} < \infty$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{2}{7^k}\right) = 2 + \frac{7}{3} = \frac{13}{3} < \infty.$$

(f) Mithilfe der 3. binomischen Formel ist

$$\lim_{j\to\infty}\left(\sqrt{j^2+j}-j\right)=\lim_{j\to\infty}\frac{j}{\sqrt{j^2+j}+j}=\frac{1}{2}$$

und damit divergiert die Reihe.

A.6.5

(a) Alle Voraussetzungen für das Leibniz-Kriterium sind offensichtlich erfüllt. Es folgt Konvergenz der Reihe.

(b) Alle Voraussetzungen für das Leibniz-Kriterium sind erfüllt. Dafür macht man sich klar, dass für $a_l := \frac{2^l}{l!}$ die Gleichung $a_{l+1} = \frac{2}{l+1}a_l$ gilt. Mit Blick auf (L.3) gilt insbesondere $a_l \le \left(\frac{2}{3}\right)^{l-2} a_2$. Es folgt Konvergenz der Reihe.

(c) Hier ist $a_m := \frac{m^2}{m(m+1)} = \frac{m}{m+1}$ und die Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}^+}$ ist weder monoton fallend noch eine Nullfolge, d. h., (L.2) und (L.3) sind verletzt. Das Leibniz-Kriterium macht keine Aussage! *Tatsächlich ist die Reihe divergent.*

(d) Die Reihe liegt in einer für das Leibniz-Kriterium ungeeigneten Form vor. Bringen wir die Reihe in eine geeignete Form,

$$\sum_{j=4}^{\infty}(-1)^{2j}\frac{1}{\sqrt{j}}=\sum_{j=4}^{\infty}(-1)^{j}\underbrace{\frac{(-1)^j}{\sqrt{j}}}_{=:a_j},$$

so ist die Folge der Summanden $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ nicht positiv, d. h., (L.1) ist verletzt. Das Leibniz-Kriterium macht keine Aussage! *Tatsächlich ist die Reihe divergent.*

A.6.6 Wähle

$$a_k=\begin{cases}\frac{1}{k} & ;\ k \text{ gerade}\\ \frac{1}{k^2} & ;\ k \text{ ungerade}\end{cases},$$

dann ist $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine positive Nullfolge und

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k \ge \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

wird durch ein Vielfaches der harmonischen Reihe minorisiert und divergiert damit. Das Beispiel widerspricht dem Leibniz-Kriterium nicht, da die Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ nicht monoton fallend ist und damit (L.2) verletzt ist.

A.6.7

(a) Wir minorisieren durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

d. h. durch die harmonische Reihe, und folgern Divergenz.

(b) Es ist $0 \leq \cos^2 l \leq 1$ und wir majorisieren durch

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{l}\cos^2 l}{l^2} \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{l}}{l^2} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{\frac{3}{2}}} < \infty,$$

d. h. durch die allgemeine harmonische Reihe mit Exponent $\frac{3}{2} > 1$, und folgern Konvergenz.

(c) Wir minorisieren durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n^2+4n-1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n(n+2)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

und folgern Divergenz.

(d) Wir majorisieren durch

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\sqrt{j^3+80j^2}}{j^3-1} \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\sqrt{81j^3}}{j^3-j^2} = 9\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{\frac{3}{2}}} < \infty,$$

und folgern Konvergenz.

A.6.8

(a) Es ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^m m}{m^3+1} \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty$$

und die Reihe konvergiert absolut und damit auch einfach.

(b) Es ist

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{\mu}\sqrt{\mu^3}}{(2\mu)^2} \right| = \frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} = \frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \infty$$

und die Reihe konvergiert nicht absolut. Allerdings gilt einfache Konvergenz für die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.

(c) Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{5}{3^{k+1}} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{3^{k+1}}$$

und absolute und damit auch einfache Konvergenz folgen aus der Konvergenz der geometrischen Reihe.

(d) Für $r \geq 3$ gilt $\left(\frac{r-3}{r}\right)^r \leq 1$ sowie $r \leq 2^r$ und damit

$$\begin{aligned}\sum_{r=2}^{\infty}\left|r\left(\frac{r-3}{7r}\right)^r\right| &\leq 2\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{r=4}^{\infty} r\left(\frac{1}{7}\right)^r\\ &\leq 2\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{r=4}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^r\end{aligned}$$

und die Reihe konvergiert absolut und damit auch einfach.

A.6.9

(a) Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \implies \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.$$

Damit folgt aus dem Quotientenkriterium absolute Konvergenz.

(b) Es gilt

$$\left|\frac{a_{l+1}}{a_l}\right| = \frac{l+2}{l+1} \implies \lim_{l\to\infty}\left|\frac{a_{l+1}}{a_l}\right| = 1.$$

Damit macht das Quotientenkriterium keine Aussage. Weiter gilt

$$\sqrt[l]{|a_l|} = \frac{1}{\sqrt[l]{l+1}} \implies \lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{|a_l|} = 1.$$

Damit macht auch das Wurzelkriterium keine Aussage. Keines der Kriterien greift.

Bemerkung: Als alternierende harmonische Reihe konvergiert die Reihe zwar, absolute Konvergenz gilt hier aber offensichtlich nicht.

(c) Es gilt

$$\left|\frac{a_{\kappa+1}}{a_\kappa}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^2 \implies \lim_{\kappa\to\infty}\left|\frac{a_{\kappa+1}}{a_\kappa}\right| = \frac{1}{2}.$$

Damit folgt aus dem Quotientenkriterium absolute Konvergenz.

(d) Es gilt

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{(2m-1)^2}{(2m+1)^2} \implies \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = 1.$$

Damit macht das Quotientenkriterium keine Aussage. Weiter gilt

$$\sqrt[m]{|a_m|} = \frac{1}{\left(\sqrt[m]{2m-1}\right)^2} \implies \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|} = 1.$$

Damit macht auch das Wurzelkriterium keine Aussage. Keines der Kriterien greift.

Bemerkung: Die Reihe entspricht im Wesentlichen einer alternierende allgemeinen harmonische Reihe mit Exponent 2. Damit konvergiert die Reihe absolut.

(e) Es gilt
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{(k+1)^2} \implies \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0.$$
Damit folgt aus dem Quotientenkriterium absolute Konvergenz.

(f) Es gilt
$$\sqrt[j]{|a_j|} = \frac{1}{2}\sqrt[j]{j-1} \implies \lim_{j\to\infty}\sqrt[j]{|a_j|} = \frac{1}{2}.$$
Damit folgt aus dem Wurzelkriterium absolute Konvergenz.

A.6.10

(a) Sei $\alpha := \liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Der Fall $\alpha = 0$ ist klar. Sei nun also $\alpha > 0$. Wähle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \beta < \alpha$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \beta \quad \forall n \geq N.$$
Für $n \geq N$ folgt
$$a_{n+1} \geq \beta a_n \implies a_n \geq \beta^{n-N} a_N \implies \sqrt[n]{a_n} \geq \beta\sqrt[n]{\beta^{-N} a_N}$$
und die Bildung des Limes inferior auf beiden Seiten liefert
$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \geq \liminf_{n\to\infty}\beta\sqrt[n]{\beta^{-N}a_N} = \beta\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\beta^{-N}a_N} = \beta.$$
Da dies für jedes $\beta < \alpha$ gilt, ergibt sich auch
$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \geq \alpha.$$

(b) Analog zu (a).

A.6.11

(a) Das Quotientenkriterium liefere absolute Konvergenz, d. h.
$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$
Dann gilt nach A.6.10
$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$
d. h., auch das Wurzelkriterium liefert absolute Konvergenz.

(b) Analog.

A.6.12

(a) Die Summanden bilden eine monoton fallende Folge positiver Zahlen. Damit ist das Cauchy'sche Verdichtungskriterium anwendbar. Die verdichtete Reihe lautet

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(2)}$$

und divergiert. Also divergiert auch die ursprüngliche Reihe. Damit gilt auch keine absolute Konvergenz.

(b) Hier ist das notwendige Kriterium verletzt, da

$$|a_k| = \left| \frac{(-2)^k}{2^k} \right| = 1 \not\to 0.$$

Damit ist die Reihe weder konvergent noch absolut konvergent.

(c) Die Summanden bilden eine monoton fallende Folge positiver Zahlen. Wir prüfen das notwendige Kriterium von Olivier:

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2}$$

Die Reihe ist also weder konvergent noch absolut konvergent.

(d) Hier ist

$$a_k = \left(\frac{k}{k+4}\right)^{2k} = \frac{1}{\left[\left(1+\frac{4}{k}\right)^k\right]^2} \implies \lim_{k\to\infty} a_k = \frac{1}{[e^4]^2} = \frac{1}{e^8}.$$

Damit ist das notwendige Kriterium verletzt und die Reihe ist weder konvergent noch absolut konvergent.

(e) Auch hier ist das notwendige Kriterium verletzt und die Reihe ist weder konvergent noch absolut konvergent.

(f) Mit $a_k = \frac{k}{(k+1)^2}$ ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen. Konvergenz der Reihe folgt daher aus dem Leibniz-Kriterium. Für absolute Konvergenz betrachte man die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^2}.$$

Diese divergiert allerdings nach dem Satz von Olivier, denn es gilt

$$\lim_{k\to\infty} k \frac{k}{(k+1)^2} = 1.$$

Damit konvergiert die Reihe nicht absolut.

(g) Wir majorisieren die Reihe durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k - k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2$$

und stellen sowohl Konvergenz als auch absolute Konvergenz fest.

(h) Auch hier lässt sich durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 1$$

majorisieren, woraus sowohl Konvergenz als auch absolute Konvergenz folgen.

A.6.13 Wir halten zunächst fest, dass $\left(\sqrt{a_k} - \frac{1}{k}\right)^2 \geq 0$ gilt und damit

$$\frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{k^2}\right).$$

Also wird $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ durch

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

majorisiert. Die erste Reihe konvergiert nach Voraussetzung und die zweite Reihe konvergiert als allgemeine harmonische Reihe mit Exponent 2. Die Behauptung folgt aus dem Majorantenkriterium.

A.6.14 Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt. Dann folgt $\frac{a_k}{1+a_k} \not\to 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ divergiert.
2. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d. h. $|a_k| \leq M \ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\frac{a_k}{1+a_k} \geq \frac{a_k}{1+M} \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k} \geq \frac{1}{1+M}\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

und Divergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ folgt aus dem Minorantenkriterium.

A.6.15 Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen $\tilde{s}_n := \frac{a_0}{s_0} + \cdots + \frac{a_n}{s_n}$ keine Cauchy-Folge bildet. Betrachte dazu

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{n+k} - \tilde{s}_n &= \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+k}}{s_{n+k}} \geq \frac{1}{s_{n+k}}\left(a_{n+1} + a_{n+k}\right) \\ &= \frac{1}{s_{n+k}}\left(s_{n+k} - s_n\right) = 1 - \frac{s_n}{s_{n+k}}.\end{aligned}$$

Sei nun etwa $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann wählen wir ein beliebiges $n \geq N$, und da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert, gibt es zudem ein $k \geq 1$ sodass $\frac{s_n}{s_{n+k}} \leq \frac{1}{2}$. Insgesamt gilt also

$$|\tilde{s}_{n+k} - \tilde{s}_n| \geq \frac{1}{2}$$

und die Reihe divergiert.

A.6.16 Das Cauchy-Produkt der beiden Reihen lautet

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} x^{n-j} x^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n.$$

Mit $a_n := nx^n$ ist weiter

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \begin{cases} < 1 & ;\ |x| < 1 \\ > 1 & ;\ |x| > 1 \end{cases}$$

und nach dem Quotientenkriterium konvergiert das Cauchy-Produkt für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Für $|x| = 1$ divergiert die Reihe ebenso, da das notwendige Kriterium verletzt ist.

A.6.17 Betrachte die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots \quad \text{mit} \quad a_k = \begin{cases} 2^k & ;\ k \geq 1 \\ 2 & ;\ k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = -1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \quad \text{mit} \quad b_k = \begin{cases} 1 & ;\ k \geq 1 \\ -1 & ;\ k = 0 \end{cases}.$$

Offensichtlich sind beide Reihen divergent. Das Cauchy-Produkt ist durch

$$\begin{aligned} &\left(2 + 2 + 2^2 + \ldots\right) \cdot (-1 + 1 + 1 + \ldots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots \\ &= -2 + \underbrace{(2-2)}_{=0} + \underbrace{\left(2 + 2 - 2^2\right)}_{=0} + \underbrace{\left(2 + 2 + 2^2 - 2^3\right)}_{=0} + \ldots \\ &= -2 \end{aligned}$$

gegeben und konvergiert als endliche Summe.

A.6.18 Wir betrachten die Menge $\{s_{0,n}, s_{1,n}, s_{2,n}, \ldots\}$ mit $s_{k,n} := \frac{1}{2^n \cdot n^{\frac{1}{k}}}$. Alle Elemente haben das gleiche Vorzeichen und es gilt

$$|s_{k+1,n}| = \frac{1}{2^n \cdot n^{\frac{1}{k+1}}} \geq \frac{1}{2^n \cdot n^{\frac{1}{k}}} = |s_{k,n}|$$

sowie

$$\sum_{n=0}^{k} |s_{k+1,n}| = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n \cdot n^{\frac{1}{k}}} \leq \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n}.$$

Nach Satz 6.6.2 können Grenzwert- und Reihenbildung vertauscht werden und wir erhalten

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^{\frac{1}{k}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^{\frac{1}{k}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

14.7 Lösungen zu Kapitel 7

A.7.1 Zunächst einmal beweisen wir, dass für $a, b \geq 0$ die Ungleichung

$$\sqrt{|a-b|} \geq \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right|$$

gilt: Dazu sei ohne Einschränkung $a \geq b$ und damit

$$\begin{aligned} ab \geq b^2 \implies 2\sqrt{ab} \geq 2b \implies -b \geq -2\sqrt{ab} + b \\ \implies |a-b| = a - b \geq a - 2\sqrt{ab} + b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \\ \implies \sqrt{|a-b|} \geq \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right|. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $|x_0 - x| < \delta$. Setzen wir $a = x_0$ und $b = x$, so folgt

$$\left|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}\right| \leq \sqrt{|x_0 - x|} < \sqrt{\delta}.$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Monotonie der Wurzelfunktion. Diese beweist man wie folgt: Sei $a \leq b$. Angenommen $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, dann folgt

$$a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} > \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b.$$

Widerspruch! Wählen wir schließlich $\delta < \varepsilon^2$, so gilt

$$\left|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}\right| < \sqrt{\delta} < \varepsilon.$$

A.7.2 Wir betrachten die Folge der Argumente $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $x_0 = 0$, die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(f(x_n))_{n\geq 1}$ lautet aber

$$f(x_n) = \frac{|x_n|}{x} = \begin{cases} -1 & ;\ n \text{ ungerade} \\ 1 & ;\ n \text{ gerade} \end{cases}$$

und divergiert. Nach dem Folgenkriterium ist f also unstetig in $x_0 = 0$.

A.7.3

1) Über die ε-δ-Formulierung: Sei $x_0 = -1$ und $|x+1| = |x - x_0| < \delta$. Dann gilt

$$|g(x) - g(x_0)| = \left| \frac{x-1}{x^2+1} + 1 \right| = \underbrace{\left| \frac{x}{x^2+1} \right|}_{\leq 1} \underbrace{|x+1|}_{<\delta} < \delta,$$

und wählen wir $\delta < \varepsilon$, so folgt $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$.

2) Über das Folgenkriterium: Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \to -1$, dann

$$f(x_n) = \frac{x_n - 1}{x_n^2 + 1} \to \frac{-1-1}{1+1} = f(-1).$$

A.7.4 h ist beschränkt, d. h., es gibt ein $M \geq 0$, so dass $|h(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei nun $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \to 0$. Dann gilt

$$|u(x_n)| \leq |x_n| M \to 0 \implies u(x_n) \to 0$$

und die Behauptung folgt aus dem Folgenkriterium.

A.7.5 Wir halten zunächst einmal fest, dass f eine gerade Funktion ist, da

$$f(-x) = f\left((-x)^2\right) = f\left(x^2\right) = f\left(x\right).$$

Es genügt also zu zeigen, dass f auf $[0, \infty)$ konstant ist. Hierbei unterscheiden wir drei Fälle:

1. Sei $x \in [0,1)$, dann ist $f(x) = f(0)$, denn

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(x^2\right) = f\left(x^4\right) = \cdots = f\left(x^{2n}\right) \\ \implies f(x) &= \lim_{n\to\infty} f\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(x^{2n}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} x^{2n}\right) = f(0). \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung folgt dabei aus dem Folgenkriterium für Stetigkeit.

2. Für $x = 1$ ist aufgrund der Stetigkeit auch $f(1) = f(0)$. Betrachte dazu etwa die Folge $x_n = 1 - \frac{1}{n}$!

3. Sei $x > 1$, dann ist $f(x) = f(1) = f(0)$, denn

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \cdots = f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right) \\ \implies f(x) &= \lim_{n\to\infty} f\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2n}}\right) = f(1). \end{aligned}$$

Wieder folgt die vorletzte Gleichung aus dem Folgenkriterium für Stetigkeit.

A.7.6 In $x_0 = 0$ ist f stetig, denn für $\delta < \varepsilon$ ist

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \delta < \varepsilon.$$

In allen anderen Punkten ist f unstetig (Unstetigkeitsstelle 2-ter Art).

A.7.7 Für $x \neq -2, 0$ ist f (abschnittsweise) ein Polynom und damit stetig. Für $x = -2$ ist

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0 = f(-2) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$$

und damit stetig. Für $x = 0$ ist

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -2 \neq 1 = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Damit liegt hier eine Unstetigkeitsstelle 1-ter Art (Sprungunstetigkeit) vor.

A.7.8 Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & ; \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in jedem Punkt unstetig (vgl. Dirichlet-Funktion). Ihr Betrag lautet aber $|f(x)| = 1$ und ist damit überall stetig.

A.7.9 Gesucht ist eine Nullstelle der stetigen Funktion $g(x) := f(x) - x$. Wegen $0 \leq f(x) \leq 1$ ist $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $\xi \in [0, 1]$, so dass $g(\xi) = 0$.

A.7.10 Sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Für $|x_0 - x| < \delta$ gilt dann

$$|f(x_0) - f(x)| \leq L|x_0 - x| < L\delta.$$

Wählen wir $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$, so folgt

$$|f(x_0) - f(x)| < L\delta < \varepsilon$$

und damit Stetigkeit im Punkt x_0. Also ist jede Lipschitz-stetige Funktion auch stetig.

Die Umkehrung gilt nicht, da etwa $f(x) = \sqrt{x}$ stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist. Zweites sieht man über einen Widerspruchsbeweis ein: Angenommen es gäbe ein $L > 0$, so dass $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \geq 0$. Dann gilt für $y = 0$ und $x > 0$ insbesondere

$$L \geq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

was für hinreichend kleines x (etwa $x = \frac{1}{(2L)^2}$) aber verletzt ist.

A.7.11 Nach Voraussetzung wissen wir, dass $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in A$:

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon \wedge |g(x) - z_0| < \varepsilon$$

(a) folgt dann aus der Dreiecksungleichung:

$$|(f(x) + g(x)) - (y_0 + z_0)| \leq |f(x) - y_0| + |g(x) - z_0| < 2\varepsilon$$

(b) folgt aus geschicktem Ergänzen:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - y_0 z_0| &= |f(x)g(x) - y_0 g(x) + y_0 g(x) - y_0 z_0| \\ &\leq |g(x)| \cdot |f(x) - y_0| + |y_0| \cdot |g(x) - z_0| \\ &\leq (|g(x) - z_0| + |z_0|) \cdot |f(x) - y_0| + |y_0| \cdot |g(x) - z_0| \\ &< (\varepsilon + |z_0|) \cdot \varepsilon + |y_0| \cdot \varepsilon \\ &= (\varepsilon + |y_0| + |z_0|)\, \varepsilon \end{aligned}$$

(c) Wir zeigen zuerst einmal, dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{z_0}.$$

Wir bemerken dazu, dass insbesondere ($\varepsilon = \frac{|z_0|}{2}$)

$$\frac{|z_0|}{2} > |g(x) - z_0| \geq |z_0| - |g(x)| \implies |g(x)| \geq \frac{|z_0|}{2}$$

gilt. Damit ist weiter

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{z_0} \right| = \frac{|z_0 - g(x)|}{|g(x) z_0|} < \frac{2\varepsilon}{|z_0|^2}.$$

Der allgemeine Fall folgt dann aus der obige Aussage und (b), denn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = y_0 \cdot \frac{1}{z_0} = \frac{y_0}{z_0}.$$

A.7.12 Wähle als Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ;\; x \neq 0 \\ 1 & ;\; x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = 0,$$

dann ist $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Gleichzeitig ist aber $f(g(x)) = f(0) = 1$ (insbesondere also stetig) und damit

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = 1 \neq 0.$$

A.7.13

(a) Hier ist
$$\frac{2x+3}{5x+1} = \frac{2+\frac{3}{x}}{5+\frac{1}{x}} \implies \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{5x+1} = \frac{2}{5}.$$

(b) Mit der 3. binomischen Formel ist
$$\sqrt{4x^2-2x+3}-2x = \frac{-2x+3}{\sqrt{4x^2-2x+3}+2x} = \frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+2}$$
$$\implies \lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-2x+3}-2x = -\frac{1}{2}.$$

(c) Hier ist
$$2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \implies \lim_{x\to\infty} 2^{-x} = 0.$$

(d) Da der Sinus beschränkt ist, gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ und damit
$$\frac{x+\sin x}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x} \implies \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1.$$

(e) Auch hier erweist sich die 3. binomische Formel als zielführend und liefert
$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}\end{aligned}$$
und damit
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} = 1.$$

(f) Auflösen der Ausdrücke in Linearfaktoren liefert
$$\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} \implies \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{1}{2}.$$

(g) Analoges Vorgehen liefert hier
$$\frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x}{x-1}.$$
Damit existiert der Grenzwert hier nicht, da $\frac{x}{x-1}$ unbeschränkt ist für $x \to 1^-$.

A.7.14 Nein, aus der Bedingung folgt im Allgemeinen noch keine Stetigkeit. Als Gegenbeispiel betrachte man die in $x_0 = 0$ unstetige Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}.$$

Um einzusehen, dass für diese Funktion immer

$$\lim_{h \to 0} \left[f(x+h) - f(x-h) \right] = 0$$

gilt, unterscheidet man zwei Fälle:

1. Sei $x = 0$, dann gilt für $0 < |h| < \delta$ mit δ beliebig:

$$\begin{aligned} x \pm h \neq 0 &\implies f(x+h) = f(x-h) = 1 \\ &\implies \qquad |f(x+h) - f(x-h)| = 0 < \varepsilon \\ &\implies \lim_{h \to 0} \left[f(x+h) - f(x-h) \right] = 0. \end{aligned}$$

2. Sei $x \neq 0$, dann gilt für $0 < |h| < \delta$ mit $\delta < |x|$, und analoges Vorgehen liefert auch hier

$$\lim_{h \to 0} \left[f(x+h) - f(x-h) \right] = 0.$$

A.7.15 Angenommen die Wurzelfunktion wäre nicht streng monoton. Dann ist diese nach Lemma 7.2.13 auch nicht injektiv, d. h., es gibt $x \neq y$ mit $\sqrt{x} = \sqrt{y}$. Quadrieren liefert nun aber $x = y$ und damit einen Widerspruch.

A.7.16 Da f monoton wachsend ist, ist die Menge $\{f(t) \mid a < t < x\}$ nach oben durch $f(x)$ beschränkt und besitzt damit ein Supremum

$$A := \sup_{a<t<x} f(t) \leq f(x).$$

Als Nächstes zeigen wir, dass dieses Supremum dem linksseitigen Grenzwert $f(x^-)$ entspricht. Sei $\varepsilon > 0$. Und weil A die kleinste obere Schranke ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$a < x - \delta < x \quad \text{und} \quad A - \varepsilon < f(x - \delta) \leq A.$$

Da f monoton wachsend ist, folgt für $x - \delta < t < x$ weiter

$$f(x-\delta) \leq f(t) \leq A \implies |f(t) - A| < \varepsilon.$$

$\varepsilon \to 0$ liefert damit

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f\left(x^-\right).$$

Analog zeigt man, dass $\inf_{x<t<b} f(t)$ existiert und

$$f\left(x^+\right) = \inf_{x<t<b} f(t) \geq f(x)$$

gilt. Kommen wir zum letzten Teil der Behauptung und sei dafür $x < t < y$. Aufgrund der Monotonie gelten

$$\begin{aligned} f\left(x^+\right) &= \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t), \\ f\left(y^-\right) &= \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t) \end{aligned}$$

und damit

$$f\left(x^+\right) \leq f\left(y^-\right).$$

A.7.17 Wesentliche Unstetigkeiten können nach A.7.16 nicht auftreten, da hier gezeigt wurde, dass bei einer monotonen Funktion sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert $f\left(x^-\right), f\left(x^+\right)$ immer existieren.

Auch hebbare Unstetigkeiten würden der Monotonie widersprechen. Ohne Einschränkung sei f monoton wachsend, x eine solche Unstetigkeit und es gelte ohne Einschränkung $f(x) > f\left(x^-\right) = f\left(x^+\right)$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$f(x) > f(x+\delta),$$

was der Monotonie widerspricht!

Damit können höchstens Sprungunstetigkeiten auftreten.

A.7.18 Ohne Einschränkung sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Da f weder wesentliche Unstetigkeiten noch hebbare Unstetigkeiten besitzt, hat f genau dann eine (Sprung-)Unstetigkeit in $x \in (a,b)$, wenn es ein $n \in \mathbb{N}^+$ gibt mit

$$\left|f\left(x^+\right) - f\left(x^-\right)\right| > \frac{1}{n}.$$

Wir führen den Beweis nun in zwei Schritten und zeigen:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren höchstens endlich viele $x \in (a,b)$ mit

$$\left|f\left(x^+\right) - f\left(x^-\right)\right| > \frac{1}{n}. \tag{14.1}$$

(ii) Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Sprungunstetigkeiten und $\mathbb{N}^+$.

Zu (i): Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}^+$ gäbe es unendlich (also mindestens abzählbar unendlich) viele Unstetigkeitsstellen $a < x_1 < x_2 < \cdots < b$ mit

$$\left|f\left(x_i^+\right) - f\left(x_i^-\right)\right| > \frac{1}{n} \quad \forall i \in \mathbb{N}^+.$$

Da es mindestens abzählbar viele gibt, gilt:

$$
\begin{aligned}
f(a) &\leq f\left(x_1^-\right) < f\left(x_1^+\right) - \frac{1}{n} \\
&\leq f\left(x_2^-\right) - \frac{1}{n} < f\left(x_2^+\right) - \frac{2}{n} \\
&\vdots \\
&\leq f\left(x_k^-\right) - \frac{k-1}{n} < f\left(x_k^+\right) - \frac{k}{n} \\
&\leq f(b) - \frac{k}{n}
\end{aligned}
$$

Das heißt, es gilt

$$f(a) \leq f(b) - \frac{k}{n} \to -\infty,\ k \to \infty.$$

Widerspruch!

Zu (ii): Wir suchen nun eine eindeutige Zuordnung zwischen der Menge der Sprungstellen und den positiven natürlichen Zahlen. Für $n = 1$ gibt es nach (i) nur endlich viele Sprungstellen, die (14.1) erfüllen:

$$x_1, \ldots, x_{i_1}$$

Für $n = 2$ kommen nun noch $i_2 - i_1$ Stück hinzu:

$$x_1, \ldots, x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2}$$

Und so weiter! Sei nun $x \in [a, b]$ eine Sprungstelle. Dann existiert ein $n \in N^+$, so dass (14.1) gilt, und damit gibt es eine eindeutige positive natürliche Zahl $j \in \{1, \ldots, i_n\}$ mit

$$x = x_j.$$

Das ist die gesuchte Bijektion! Die Zuordnung ist surjektiv, da es zu jeder beliebigen Sprungunstetigkeit x ein $n \in \mathbb{N}^+$ gibt, so dass (14.1) gilt, und die Zuordnung ist injektiv, da per Konstruktion keine Sprungstelle ein zweites Mal aufgelistet wird.

A.7.19 Ohne Einschränkung sei $f(0) \geq 0$, sonst betrachte $f(x) - f(0)$. Da $f(x) \to -\infty$ für $|x| \to \infty$, gibt es ein $M > 0$, so dass

$$f(x) \leq 0 \quad \forall |x| > M.$$

Auf $[-M, M]$ nimmt f als stetige Funktion nun ihr Maximum an, d. h., es gibt ein $U \in [-M, M]$, so dass

$$f(U) \geq f(x) \quad \forall |x| \leq M.$$

Insbesondere ist $f(U) \geq f(0) \geq 0$ und damit insgesamt

$$f(U) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A.7.20 Die Aussage ist wahr. Angenommen es wäre $f(a) = 0$ und $f(b) \geq 4$, so gäbe es (nach dem Zwischenwertsatz) ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 4$. Dies wäre aber ein Widerspruch zu den Voraussetzungen!

A.7.21 Betrachte die Funktion

$$h(x) := f(x) - g(x).$$

Die Voraussetzungen lauten dann

$$h(0) > 0 \quad \text{und} \quad h(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zu zeigen ist nun, dass

$$h(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Angenommen es gäbe ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $h(x) < 0$. Dann gäbe es nach dem Zwischenwertsatz auch ein ξ zwischen 0 und x mit

$$h(\xi) = 0.$$

Das widerspricht aber den Voraussetzungen!

A.7.22 Nach dem Satz vom Minimum und Maximum nimmt die Funktion f auf $[a, b]$ ihr Minimum an, d. h., es gibt ein $u \in [a, b]$, so dass

$$f(u) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Des Weiteren gilt nach Voraussetzung $f(u) > 0$. Damit liefert die Wahl $\delta = f(u)$ die Behauptung, denn es gilt

$$0 < \delta \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

A.7.23 Nein, die gibt es nicht, denn das würde dem Satz vom Minimum und Maximum widersprechen!

Bemerkung: Es gibt aber auf $(0, 1)$ *Funktionen, für die* $f((0, 1)) = \mathbb{R}$ *gilt, etwa*

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x(x-1)}.$$

14.8 Lösungen zu Kapitel 8

A.8.1 Unsere Vermutung ist, dass $f \equiv 0$ die Grenzfunktion ist. Um das zu prüfen, sei $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)|^2 &= \frac{x^2}{1 + 2nx^2 + n^2x^4} \leq \frac{x^2}{2nx^2} = \frac{1}{2n} \\ \implies |f(x) - f_n(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2n}}. \end{aligned}$$

Wählen wir nun N so, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2N}} < \varepsilon \iff N > \frac{1}{2\varepsilon^2}$$

gilt, dann folgt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2N}} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Damit konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f \equiv 0$.

A.8.2

1. Zur punktweisen Konvergenz: Sei $\varepsilon > 0$. Für $x = 0$ und $x = 1$ ist die Behauptung klar. Für $0 < x < 1$ gibt es ein $p > 0$, so dass $x = \frac{1}{1+p}$. Des Weiteren ist

$$(1+p)^n > \binom{n}{2} p^2 = n(n-1)p^2$$

und damit

$$|f(x) - f_n(x)| = nx^n(1-x) \leq nx^n < \frac{1}{(n-1)p^2}.$$

Wählen wir nun

$$\frac{1}{Np^2} < \varepsilon \iff N > \frac{1}{\varepsilon p^2}, \tag{14.2}$$

so gilt

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{(n-1)p^2} \leq \frac{1}{Np^2} < \varepsilon$$

für $n \geq N+1$.

2. Zur gleichmäßigen Konvergenz: Die Negation der gleichmäßigen Konvergenz lautet

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists x \in [0,1], n \geq N : \quad |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon.$$

Abschätzung (14.2) lässt bereits vermuten, dass die gleichmässige Konvergenz für $x \to 0$ zusammenbricht. Um das zu beweisen, wählen wir $\varepsilon = \frac{1}{2e}$. Für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ wählen wir dann weiter

$$x = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

und bemerken, dass

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= nx^n(1-x) = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \left(\frac{n}{n+1}\right) \to \frac{1}{e} \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Damit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2e} \quad \forall n \geq n_0.$$

Wählen wir nun also noch $n \geq \max\{N, n_0\}$, so gilt

$$|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2e} = \varepsilon.$$

Die Funktionenfolge konvergiert also nicht gleichmäßig (und das obwohl die Grenzfunktion stetig ist).

A.8.3 Als gleichmäßig konvergente Funktionenfolge ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine gleichmäßige Cauchy-Folge. Insbesondere gibt es damit ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f_m(x)| < 1 \quad \forall m, n \geq N,\ x \in A.$$

Damit gilt

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| < 1 + M_N$$

für alle $n \geq N$ und $x \in A$. Wählen wir nun

$$M = 1 + \max\{M_0, \ldots, M_N\},$$

so gilt

$$|f_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x \in A.$$

A.8.4 Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent, d. h., es gibt f und g, so dass

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon_1 > 0 \;\; \exists N_1 \;\; \forall n \geq N_1 \;\; \forall x \in A : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon_1, \\ &\forall \varepsilon_2 > 0 \;\; \exists N_2 \;\; \forall n \geq N_2 \;\; \forall x \in A : |g(x) - g_n(x)| < \varepsilon_2. \end{aligned}$$

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Für $N = \max\{N_1, N_2\}$ gilt

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f_n + g_n)(x)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |g(x) - g_n(x)| \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

für alle $n \geq N$ und $x \in A$. Wählen wir nun $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, so folgt die Behauptung.

(b) Sei wieder $\varepsilon > 0$. Des Weiteren seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach A.8.5 sind die beiden Folgen damit auch gleichmäßig beschränkt, d. h., es gibt ein $M > 0$, so dass

$$|f_n(x)| \leq M \quad \text{und} \quad |g_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in A.$$

Insbesondere gilt dann auch $|f(x)| \leq M$ und $|g(x)| \leq M$ für alle $x \in A$. Für $N = \max\{N_1, N_2\}$ gilt damit

$$\begin{aligned}
&|(f \cdot g)(x) - (f_n \cdot g_n)(x)| \\
&\quad \leq |f(x)g(x) - f_n(x)g(x)| + |f_n(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \\
&\quad \leq M\,|f(x) - f_n(x)| + M\,|g(x) - g_n(x)| \\
&\quad < M\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)
\end{aligned}$$

für alle $n \geq N$ und $x \in A$. Wählen wir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2M}$, so folgt die Behauptung.

A.8.5 Man wähle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ mit

$$f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x, \quad g_n(x) = \frac{1}{n}.$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ gleichmäßig gegen $f(x) = x$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ gleichmäßig gegen $g(x) = 0$. Die Produktfolge $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ mit

$$f_n \cdot g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f_n \cdot g_n)(x) = \frac{x}{n}$$

konvergiert auf $\mathbb{R}$, aber nur punktweise gegen $(f \cdot g)(x) = 0$.

A.8.6

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \;\; \forall y \in A.$$

Des Weiteren sind alle f_n stetig und damit auch die Grenzfunktion f. Da $x_n \to x$ für $n \to \infty$, gibt es somit auch ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f(x) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2.$$

Wählen wir $N = \max\{N_1, N_2\}$, so erhalten wir insgesamt

$$|f(x) - f_n(x_n)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

(b) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht! Betrachte dazu die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} \sin^2 \pi x & ;\ n \leq |x| \leq n+1 \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann zwar punktweise gegen $f \equiv 0$, aber nicht gleichmäßig, da

$$f_n\left(n + \frac{1}{2}\right) = 1 \quad \forall n \in N.$$

Gleichzeitig gilt aber für alle $x \in \mathbb{R}$ und jede Folge von Argumenten $x_n \to x$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0 = f(x).$$
Bemerkung: Die Umkehrung gilt aber auf abgeschlossenen beschränkten Intervallen $[a, b]$.

A.8.7

(a) Für $x = 0$ ist $f(x) = 0$ und damit absolut konvergent. Für $x \neq 0$ ist $\left|\frac{1}{1+x^2}\right| < 1$ und
$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$
konvergiert als geometrische Reihe absolut.

(b) Wie eben gesehen, entspricht $f(x)$ für $x \neq 0$ einer geometrischen Reihe mit Grenzwert
$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}}\right) = 1.$$
Insgesamt lautet die Grenzfunktion also
$$f(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x = 0 \\ 1 & ;\ x \neq 0 \end{cases}$$
und ist damit unstetig in $x = 0$ und stetig in jedem anderen Punkt $x \neq 0$.

(c) Die Folge der Partialsummen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist durch
$$s_k = \frac{x^2}{1+x^2} \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$
gegeben und besteht aus stetigen Funktionen. Würde diese auf $[-1, 1]$ gleichmäßig gegen f konvergieren, so wäre die Grenzfunktion nach dem Satz von Weierstraß stetig, was aber Teil b) widerspricht!

A.8.8

(a) Für $x = 0$ ist
$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$
und damit divergent. Für $x > 0$ ist hingegen
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x} \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
und damit konvergent.

(b) Die obige Funktionenreihe ist nach dem Weierstraß-Kriterium auf allen Intervallen
$$[a, \infty) \quad \text{mit} \quad a > 0$$
gleichmäßig konvergent. Auf $(0, \infty)$ ist sie dies aber nicht. Dazu bemerke man, dass die Abschätzung
$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{1+n^2x} \right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x} \geq \frac{1}{1+(k+1)^2x}$$
gilt. Wir wollen nun die Negation der gleichmäßigen Konvergenz,
$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists x \in (0, \infty], k \geq N : \quad \left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{1+n^2x} \right| \geq \varepsilon,$$
zeigen. Sei dazu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $N \in \mathbb{N}$ sowie $k \geq N$ beliebig. Wählen wir nun $x = \frac{1}{(N+1)^2} \in (0, \infty)$, so ist
$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{1+n^2x} \right| \geq \frac{1}{1+(k+1)^2x} \geq \frac{1}{1+(N+1)^2x} = \frac{1}{2},$$
und damit liegt keine gleichmäßige Konvergenz auf $(0, \infty)$ vor.

(c) Ja, die Reihe ist überall dort stetig, wo sie konvergiert, d. h. auf $(0, \infty)$. Sei dazu $x > 0$. Dann betrachten wir das Intervall $[a, \infty)$ mit $a = \frac{x}{2}$, auf dem die Reihe nach Teil (b) gleichmäßig konvergiert. Da zudem alle Partialsummen der Reihe auf $[a, \infty)$ stetig sind, ist nach dem Satz von Weierstraß auch f stetig auf $[a, \infty)$ und damit insbesondere im Punkt x.

(d) Die Reihe f ist auf $[a, \infty)$ mit $a > 0$ beschränkt, nämlich durch
$$|f(x)| \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{a} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}}_{<\infty}.$$
Auf $(0, \infty)$ ist f aber nicht beschränkt, was wir über einen Widerspruchsbeweis nachweisen: Angenommen es gäbe ein $M > 0$, so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in (0, \infty)$. Wählen wir $x = \frac{1}{(2M)^2}$, so folgt
$$\frac{1}{1+n^2x} > \frac{1}{2} \quad \forall n = 1, 2, \ldots, 2M$$
und damit
$$|f(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+nx^2} \geq \sum_{n=1}^{2M} \frac{1}{1+nx^2} > \sum_{n=1}^{2M} \frac{1}{2} = M.$$
Das liefert aber einen Widerspruch zu der Annahme, dass f auf $(0, \infty)$ beschränkt ist.

A.8.9

(a) Zur gleichmäßigen Konvergenz: Sei $|x| \leq M$ und damit $x^2 \leq M^2$. Wir bemerken zunächst einmal

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}}_{=:f(x)} = x^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}}_{=:g(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}}_{=:h(x)}.$$

Sowohl $g(x)$ als auch $h(x)$ konvergieren nach dem Leibniz-Kriterium. Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|g(x) - \sum_{n=1}^{k}(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| < \frac{\varepsilon}{2M^2}, \quad \left|h(x) - \sum_{n=1}^{k}(-1)^n \frac{1}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $k \geq N$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\left|g(x) - \sum_{n=1}^{k}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}\right| &\leq x^2 \left|g(x) - \sum_{n=1}^{k}(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| + \left|h(x) - \sum_{n=1}^{k}(-1)^n \frac{1}{n}\right| \\ &< M^2 \frac{\varepsilon}{2M^2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $k \geq N$.

(b) Zur absoluten Konvergenz: Für die Reihe der Beträge gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}\right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

und damit Divergenz.

A.8.10 Sei $\varepsilon > 0$, dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}|f(x_0) - f(x)| &\leq \left|\sqrt{x_0}\sin x_0 - \sqrt{x}\sin x_0\right| + \left|\sqrt{x}\sin x_0 - \sqrt{x}\sin x\right| \\ &\leq \left|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}\right| + |\sin x_0 - \sin x|\end{aligned}$$

Dabei sind weiter

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}\right| &\leq \sqrt{|x_0 - x|}, \\ |\sin x_0 - \sin x| &= 2 \cdot \left|\sin \frac{x_0 - x}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x_0 + x}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\sin \frac{x_0 - x}{2}\right| \\ &\leq |x_0 - x|.\end{aligned}$$

Sei nun $|x_0 - x| < \delta$, so folgt

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \sqrt{\delta} + \delta.$$

Wählen wir $\delta > 0$ nun so, dass

$$\sqrt{\delta} + \delta < \varepsilon$$

gilt, so folgt gleichmäßige Stetigkeit. Ein entsprechendes δ ist etwa durch

$$\delta = \frac{1}{4} \min\left\{\varepsilon, \varepsilon^2\right\}$$

gegeben.

Für $\varepsilon = 0.1$ wäre also $\delta = 0.0025$ eine geeignete Wahl.

A.8.11 Die Aussage ist falsch! Ein Gegenbeispiel ist durch die gleichmäßig stetigen Funktionen

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) = x$$

gegeben, deren Produkt $(f \cdot g)(x) = x^2$ nicht gleichmäßig stetig ist (siehe Beispiel 8.2.4).

A.8.12

(a) Die Aussage ist offensichtlich wahr. Gleichmäßige Stetigkeit folgt aus der Wahl $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.

(b) Die Aussage ist falsch. Wir haben in A.7.10 bereits eingesehen, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ zwar stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist. Gleichzeitig ist die Funktion aber auch gleichmäßig stetig, wenn wir sie etwa auf $[0, 1]$ einschränken.

14.9 Lösungen zu Kapitel 9

A.9.1 Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $a_0 > 0$, sodass $|f(x) - \eta| < \varepsilon/2$ für $x \geq a_0$. Da f integrierbar ist, ist auch $|f - \eta|$ integrierbar und es gibt daher ferner ein $a_1 > 0$ mit

$$\frac{1}{a} \int_0^{a_0} |f(x) - \eta| \,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}, \quad a \geq a_1.$$

Für $a \geq \max\{a_0, a_1\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \,\mathrm{d}x - \eta \right| &= \left| \frac{1}{a} \int_0^{a_0} f(x) - \eta \,\mathrm{d}x + \frac{1}{a} \int_{a_0}^a f(x) - \eta \,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \frac{1}{a} \int_0^{a_0} |f(x) - \eta| \,\mathrm{d}x + \frac{1}{a} \int_{a_0}^a |f(x) - \eta| \,\mathrm{d}x \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a - a_0}{a} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

A.9.2 Sei $x_i = ia/n$, $i = 0, \ldots, n$ eine äquidistante Zerlegung von $[0, a]$ und man setze $\xi_i := x_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt nach Korollar 9.2.3 für die Riemann'sche Summe (mit dem Hinweis)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \xi_i^m (x_i - x_{i-1}) &= \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ia}{n}\right)^m = \left(\frac{a}{n}\right)^{m+1} \sum_{i=1}^{n} i^m \\
&= \frac{a^{m+1}}{n^{m+1}} \left(\frac{n^{m+1}}{m+1} + q_m n^m + \ldots q_1 n \right) \\
&= a^{m+1} \left(\frac{1}{m+1} + q_m n^m \frac{1}{n} + \ldots q_1 n \frac{1}{n^m} \right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{a^{m+1}}{m+1} = \int_0^a x^m \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Zum Hinweis: Die Behauptung folgt per vollständiger Induktion. Für $m = 0$ stimmt die Behauptung offenbar, denn $\sum_{i=1}^{n} i^0 = n$.
Induktionsschritt, $m - 1 \mapsto m$: Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned}
(i-1)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} i^{m+1-k} (-1)^k \\
&= i^{m+1} - (m+1) i^m + \sum_{k=2}^{m+1} \binom{m+1}{k} i^{m+1-k} (-1)^k \\
&= i^{m+1} - (m+1) i^m - \sum_{k=2}^{m+1} \binom{m+1}{m+1-k} i^{m+1-k} (-1)^{k-1} \\
&= i^{m+1} - (m+1) i^m - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} i^k (-1)^k,
\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
(m+1) \sum_{i=1}^{n} i^m + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} (-1)^k \sum_{i=0}^{n} i^k &= \sum_{i=1}^{n} (i^{m+1} - (i-1)^{m+1}) \\
&= n^{m+1}.
\end{aligned}$$

Für $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{=: q_{k+1}^{(k)}} n^{k+1} + q_k^{(k)} n^k + \ldots + q_1^{(k)} n = \sum_{u=1}^{k+1} q_u^{(k)} n^u,$$

also

$$\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}(-1)^k\sum_{i=0}^{n} i^k = \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}(-1)^k\left(\sum_{u=1}^{k+1} q_u^{(k)} n^u\right)$$
$$= \sum_{u=1}^{m}\left(\sum_{k=u-1}^{m-1}\binom{m+1}{k}(-1)^{m-k} q_u^{(k)}\right) n^u.$$

Einsetzen in die vorherige Gleichung liefert schließlich

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + \sum_{u=1}^{m}\underbrace{\left(-\frac{1}{m+1}\sum_{k=u-1}^{m-1}\binom{m+1}{k}(-1)^{m-k} q_u^{(k)}\right)}_{=:q_u^{(m)}} n^u.$$

A.9.3 Es gilt $0 \le x^{19}\cos^3(x) \le x^{19}$ für $x \in [0,1]$. Mit A.9.2 folgt aufgrund der Monotonie des Integrals

$$0 \le \int_0^1 x^{19}\cos^3(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^{19}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}.$$

A.9.4 Für $\varepsilon > 0$ existiert nach Satz 9.2.2 ein $\delta > 0$, sodass

$$\left| R_D(f,\xi) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \quad \forall D \in \mathcal{D}_\delta$$

bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte ξ. Wegen $\delta(D^{(n)}) \to 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\delta(D^{(n)}) < \delta$ für alle $n \ge n_0$ und somit

$$\left| R_{D^{(n)}}(f,\xi^{(n)}) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \quad \forall n \ge n_0.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

A.9.5 Sei $\varepsilon > 0$. Da f auf $[a,b]$ integrierbar ist, existiert nach Satz 9.1.7 ein Zerlegung D von $[a,b]$, sodass $S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon$. Für die Verfeinerung $D' = D \cup \{c,d\}$ gilt nach Lemma 9.1.4 dann ebenfalls $S_{D'}(f) - s_{D'}(f) < \varepsilon$ und für die Zerlegung $D'' = D' \cap [c,d]$ von $[c,d]$ folgt daher

$$S_{D''}(f) - s_{D''}(f) = \sum_{D''}(F_i - f_i)\delta_i \le \sum_{D'}(F_i - f_i)\delta_i < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist f nach Satz 9.1.7 auf $[c,d]$ integrierbar.

A.9.6

$\Longrightarrow$: Ist f auf $[a,c]$ integrierbar, dann auch auf $[a,b]$ und $[b,c]$ nach A.9.12.

$\Longleftarrow$: Sei $\varepsilon > 0$. Ist f auf $[a,b]$ und $[b,c]$ integrierbar, dann existieren nach Satz 9.1.7 Zerlegungen D_1, D_2 von $[a,b]$ bzw. $[b,c]$, sodass $S_{D_k}(f) - s_{D_k}(f) < \varepsilon/2$, $k = 1,2$. Für die Zerlegung $D = D_1 \cup D_2$ von $[a,c]$ gilt daher

$$S_D(f) - s_D(f) = \sum_{D_1}(F_i - f_i)\delta_i + \sum_{D_2}(F_i - f_i)\delta_i < \varepsilon,$$

also ist f nach Satz 9.1.7 auf $[a,c]$ integrierbar.

Sind ξ, η beliebige Zwischenpunkte von D_1 bzw. D_2 und $\zeta = \xi \cup \eta$, dann gilt für die Riemann'sche Summen

$$\begin{aligned} R_D(f,\zeta) &= \sum_D f(\zeta_i)\delta_i = \sum_{D_1} f(\xi_i)\delta_i + \sum_{D_2} f(\eta_i)\delta_i \\ &= R_{D_1}(f,\xi) + R_{D_2}(f,\eta). \end{aligned}$$

und mit Korollar 9.2.3 folgt

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A.9.7 Als integrierbare Funktion ist f insbesondere beschränkt auf $[a,b]$, also

$$|f(x)| < M \quad \forall x \in [a,b]$$

für ein $M > 0$. Da $a < b$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n < b_n$ für alle $n \geq n_0$. Nach A.9.6 gilt dann

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad n \geq n_0,$$

also

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{b_n}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|, \quad n \geq n_0.$$

Die Dreiecksungleichung für Integrale liefert

$$\left|\int_a^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^{a_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq M(a_n - a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

und analog

$$\left|\int_{b_n}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

mithin die Behauptung.

A.9.8 Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Als stetige Funktion ist g auf dem abgeschlossenen Intervall $[c, d]$ gleichmäßig stetig, also

$$\exists \delta > 0 \;\; \forall x_0, x \in [c, d]: \quad |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon,$$

wobei man ohne Einschränkung $\delta \leq \varepsilon$ annehmen kann. Nach Satz 9.1.7 gibt es eine Zerlegung $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a, b]$, sodass

$$S_D(f) - s_D(f) = \sum_{i=1}^{n} (F_i - f_i)(x_{i-1} - x_i) < \delta^2.$$

Der zentrale Schritt des Beweises ist die nun folgende Aufspaltung der Indexmenge $\{1, \ldots, n\}$ in

$$I = \{i \mid F_i - f_i < \delta\} \quad \text{und} \quad J = \{i \mid F_i - f_i \geq \delta\}.$$

Für $i \in I$ gilt dann:

$$\begin{aligned} F_i - f_i < \delta &\iff |f(x) - f(y)| < \delta \quad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i] \\ &\iff |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon \quad \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i] \\ &\iff \underbrace{\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(f(x))}_{=:H_i} - \underbrace{\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(f(x))}_{=:h_i} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Für die Indices aus J gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} \delta(x_{i-1} - x_i) &\leq \sum_{i \in J} (F_i - f_i)(x_{i-1} - x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (F_i - f_i)(x_{i-1} - x_i) \\ &< \delta^2 \\ \iff \quad \sum_{i \in J} (x_{i-1} - x_i) &< \delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung

$$H_i - h_i \leq 2 \sup_{x \in [a, b]} |h(x)| =: C, \quad i = 1, \ldots, n$$

ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} S_D(h) - s_D(h) &= \sum_{i=1}^{n} (H_i - h_i)(x_{i-1} - x_i) \\ &= \sum_{i \in I} (H_i - h_i)(x_{i-1} - x_i) + \sum_{i \in J} (H_i - h_i)(x_{i-1} - x_i) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i \in I} (x_{i-1} - x_i) + C \sum_{i \in J} (x_{i-1} - x_i) \\ &\leq (b - a + C)\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Integrierbarkeit von $h = g \circ f$.

A.9.9 Da $f/g = f \cdot 1/g$, reicht es nach Satz 9.2.4, die Integrierbarkeit von $1/g$ zu zeigen. Setze dazu $c := \inf_{x\in[a,b]} g(x)$ und $d := \sup_{x\in[a,b]} g(x)$, also $g([a,b]) \subset [c,d]$. Nach Voraussetzung gilt $0 \notin [c,d]$, und daher ist die Abbildung $\varphi(y) = 1/y$ für $y \in [c,d]$ wohldefiniert und stetig. Nach A.9.8 ist dann $\varphi \circ g = 1/g$ integrierbar.

A.9.10 Binomischer Lehrsatz, Satz 9.2.4 und A.9.2 liefern

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^p(1-x)^q \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k x^{p+k}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} \\ &= \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt per vollständiger Induktion über $q \in \mathbb{N}$ bei beliebigem $p \in \mathbb{N}$. Der Induktionsanfang $q = 0$ ist trivial, denn

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{1}{p+1} = \frac{p!0!}{(p+0+1)!}.$$

Induktionsschritt ($q \mapsto q+1$):

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{q+1} \binom{q+1}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{q+1} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} + \sum_{k=0}^{q+1} \binom{q}{k-1} \frac{(-1)^k}{p+k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} - \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{(p+1)+k+1} \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{p!q!}{(p+q+1)!} - \frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!} \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!}\end{aligned}$$

A.9.11

$\Longleftarrow$: Die Integrierbarkeit von f^+ und f^- impliziert wegen $f = f^+ - f^-$ und Satz 9.2.4 unmittelbar die Integrierbarkeit von f.

$\Longrightarrow$: Es wird nur die Integrierbarkeit von f^+ gezeigt, da der Beweis für f^- analog verläuft. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig und $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit

$$S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon.$$

Setzt man

$$f_i^+ = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f^+(x), \qquad F_i^+ = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f^+(x)$$

für $i = 1, \ldots, n$, dann gibt es die drei Möglichkeiten

(i) $F_i \geq 0$ und $f_i \geq 0$: Dann ist $F_i^+ = F_i$ und $f_i^+ = f_i$

(ii) $F_i \geq 0$ und $f_i < 0$: Dann ist $F_i^+ = F_i$ und $f_i^+ = 0$

(ii) $F_i < 0$ und $f_i < 0$: Dann ist $F_i^+ = 0$ und $f_i^+ = 0$.

In jedem der Fälle gilt $F_i^+ - f_i^+ \leq F_i - f_i$ und damit

$$\begin{aligned} S_D(f^+) - s_D(f^+) &= \sum_{i=1}^n (F_i^+ - f_i^+)(x_{i-1} - x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (F_i - f_i)(x_{i-1} - x_i) \\ &= S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung aus Satz 9.1.7.

A.9.12

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Als stetige Funktion ist f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig, also gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\forall x_0, x \in [a, b]: \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wähle nun eine Zerlegung $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a, b]$ mit $\max_i \delta_i < \delta$. Für $a \leq x < b$ gibt es dann ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in [x_{i-1}, x_i)$. Wegen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt $|x - \xi_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$ und daher

$$|f(x) - f(\xi_i)| = |f(x) - R_n(x)| < \varepsilon.$$

Für $x = b$ ist per Definition $R_n(b) = f(b)$ und damit $|f(b) - R_n(b)| = 0$. Insgesamt gilt also:

$$|f(x) - R_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \implies \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - R_n(x)| < \varepsilon$$

(b) Sei $x_i = a + i(b - a)/n$, $i = 0, \ldots, n$ eine äquidistante Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi_i = x_i$. Nach Teil (a) gilt zunächst

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x) - R_n(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon(b - a)$$

für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \sum_{i=1}^n f(x_i)\mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i)}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\underbrace{\int_a^b \mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i)}(x)\,\mathrm{d}x}_{\frac{b-a}{n}}.\end{aligned}$$

A.9.13 Aus $x_i/x_{i-1} = q_n$, $i = 1, \ldots, n$, ergibt sich durch rekursives Einsetzen

$$x_i = q_n x_{i-1} = q_n^2 x_{n-2} = \ldots = q_n^i x_0,\ i = 0, \ldots, n.$$

(a) Es folgt $1 = x_n = q_n^n a$, also $q_n = 1/\sqrt[n]{a}$. Mit $\xi_i = f(x_i)$ gilt für die Riemann'sche Summe (laut Hinweis)

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 1 - q_n^{-1} = n\left(1 - \sqrt[n]{a}\right) = -n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$$

und damit

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}(x_i - x_{i-1}) \xrightarrow{n\to\infty} -\ln(a) = \int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Für die Wahl $\xi_i = f(x_{i-1})$ ergibt sich analog

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = -\frac{1}{\sqrt[n]{a}}n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \xrightarrow{n\to\infty} -\ln(a).$$

(b) Es folgt $b = x_n = q_n^n$, also $q_n = \sqrt[n]{b}$. Mit $\xi_i = f(x_{i-1})$ gilt wie in (a) für die Riemann'sche Summe (laut Hinweis)

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right) \xrightarrow{n\to\infty} \ln(b) = \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Für $0 < a < b$ folgt daraus

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} \int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & ;\ a < 1 < b\\ \int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_b^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & ;\ a < b < 1\\ \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & ;\ 1 < a < b \end{array}\right\} = \ln(b) - \ln(a).$$

Zum Hinweis: Im Vorgriff auf die Differentialrechnung ergibt sich der Grenzwert aus

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}} - a^0}{1/n} = \lim_{h\to 0}\frac{a^h - a^0}{h} = \frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x}(0) = \ln(a).$$

A.9.14 Nach Beispiel 9.1.8 (a), (b) gilt

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 - 2x + 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{3}$$

und nach dem Mittelwertsatz (Satz 9.4.1) existiert ein $\xi \in [0,1]$, sodass

$$f(\xi) = \frac{1}{3} \quad\Longleftrightarrow\quad \xi^2 - 2\xi + \frac{2}{3} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \xi = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Da $1 + 1/\sqrt{3} \notin [0,1]$, folgt $\xi = 1 - 1/\sqrt{3}$.

A.9.15 Die Funktion $f(x) = 1/(1+\sqrt{x})$ ist stetig und $g(x) = e^x \geq 0$ ist integrierbar. Mit Beispiel 9.5.2 folgt daher aus dem erweiterten Mittelwertsatz (Satz 9.4.2), dass ein $\xi \in [0,1]$ existiert mit

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\sqrt{\xi}}\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = \frac{e-1}{1+\sqrt{\xi}}.$$

14.10 Lösungen zu Kapitel 10

A.10.1 Die Assoziativität und Kommutativität von Addition und Multiplikation (Axiome A1, A2, M1, M2) sowie die Distributivität (Axiom D) lassen sich durch direkte Rechnung verifizieren. Für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt beispielsweise:

$$\begin{aligned}
&z_1 \cdot (z_2 + z_3)\\
=&(x_1 + iy_1)\cdot((x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3))\\
=&(x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3)) + i(x_1(y_2 + y_3) + (x_2 + x_3)y_1)\\
=&(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1x_3 - y_1y_3) + i(x_1y_3 + x_3y_1)\\
=&z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3
\end{aligned}$$

Das neutrale Element der Addition ist offenbar $0 := 0 + i\cdot 0 \in \mathbb{C}$, das der Multiplikation $1 := 1 + i\cdot 0 \in \mathbb{C}$, denn $z + 0 = z$ und $z \cdot 1 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus $z + (-z) \overset{!}{=} 0$, folgt unmittelbar $-z := -x - iy$ für das additive Inverse. Sei $0 \neq z_1 \in \mathbb{C}$, dann ergibt sich das multiplikative Inverse aus

$$\begin{aligned}
&z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \overset{!}{=} 1 = 1 + i\cdot 0\\
\Longleftrightarrow\quad &x_1x_2 - y_1y_2 = 0 \quad\wedge\quad x_1y_2 + x_2y_1 = 1.
\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x_2 = (1 + y_2y_2)/x_1$ und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert (beachte $|z|^2 = x_1^2 + y_1^2 \neq 0$)

$$x_1y_2 + \frac{y_1 + y_1^2y_2}{x_1} = 0 \iff y_2 = -\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \implies x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Also ist

$$z^{-1} := \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

für $z = x + iy \neq 0$. Damit sind auch A3, A4, M3 und M4 erfüllt und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

A.10.2 Es gilt:

(a) $|w| = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

(b) $\overline{w} = -5 - 10i$

(c) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{1-2i}{1+2^2} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

(d) $z \cdot w = (1+2i)(-5+10i) = (-5-2\cdot 10) + (10 - 2\cdot 5)i = -25$

(e) $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = (-5+10i)\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i\right) = (-1+4) + (2+2)i = 3 + 4i$

(f) $z - w = (1+2i) - (-5+10i) = 6 - 8i$

A.10.3

(a) Es gilt $i^0 = 1$, $(i)^2 = -1$ und $i^3 = -i$ sowie $i^4 = 1$. Also ist $(-i)^n \in \{1, i, -1, -i\}$, je nachdem, ob $n = 4k, 2k+1, 4k+2, 4k+3$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Sei $z = (1 + i\sqrt{3})/2$, dann gilt $|z| = 1$ und

$$\arctan\left(\frac{\Im z}{\Re z}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Daraus folgt $z = e^{i\pi/3} = e^{i2\pi/6}$, d. h., z ist eine 6-te Einheitswurzel. Wegen $z^n = z^6 z^n = z^{6+n}$, $n \in \mathbb{Z}$, muss z^n nur für $n = 0, \ldots, 5$ bestimmt werden: $z^0 = 1$ und $z^1 = z$ sowie

$$\begin{aligned}
z^2 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\\
z^3 &= e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1,\\
z^4 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\\
z^5 &= e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.
\end{aligned}$$

(c) Sei $z = (1 - i)/\sqrt{2}$, dann gilt $|z| = 1$ und

$$\arctan\left(\frac{\Im z}{\Re z}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Daraus folgt (beachte $\Re z > 0$ und $\Im z < 0$)

$$e^{i(2\pi-\pi/4)} = e^{i2\pi}e^{-\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{2\pi}{8}},$$

also ist z eine 8-te Einheitswurzel. Für $S = \sum_{k=0}^{7} z^k$ folgt daher

$$(1-z)S = (1-z)\sum_{k=0}^{7} z^k = 1 - z^8 = 0 \implies S = 0.$$

(d) Wegen $(1+i)^2 = 2i$ und $(1-i)^2 = -2i$ ist

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3} &= \frac{(1+i)^7 + (1-i)^7}{((1+i)(1-i))^3} \\ &= \frac{(2i)^3(1+i) + (-2i)^3(1-i)}{8} \\ &= \frac{(-8i)(1+i) + (8i)(1-i)}{8} \\ &= \frac{8 - 8i + 8 + 8i}{8} \\ &= 2.\end{aligned}$$

A.10.4 Die Aussage lässt sich per vollständiger Induktion beweisen: Der Fall $n = 1$ entspricht der gewöhnlichen Produktregel für Ableitungen. Per Induktion ($n \mapsto n+1$) folgt

$$\begin{aligned}&(f \cdot g)^{(n+1)}(x) \\ &\overset{\text{IV}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)\right) \\ &= \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) \\ &= \binom{n+1}{0} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{=\binom{n+1}{k}} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\ &\quad + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x).\end{aligned}$$

Setzt man $f(x) = e^{ax}$ und $g(x) = e^{bx}$ für $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{a^k e^{ax}}_{f^{(k)}(x)} \underbrace{b^{n-k} e^{bx}}_{g^{(n-k)}(x)} = (e^{ax} e^{bx})^{(n)} = (e^{(a+b)x})^{(n)} = (a+b)^n e^{(a+b)x}.$$

Für $x = 0$ folgt der binomische Lehrsatz.

A.10.5

(a) Setzt man $g(x) = x^x$, dann ist

$$(x^x)^x = g(x)^x = \exp\{\ln(g(x)^x)\} = \exp\{x \ln(g(x))\}$$

und nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} g'(x) = (x^x)' &= \exp\{x \ln(x)\}' \\ &= (x \ln(x))' \exp\{x \ln(x)\} = (\ln(x) + 1) x^x. \end{aligned}$$

Daraus folgt (wieder mit der Kettenregel)

$$\begin{aligned} ((x^x)^x)' &= \exp\{x \ln(g(x))\}' = \exp\{x \ln(g(x))\} \cdot (x \ln(g(x)))' \\ &= (x^x)^x \left(\ln(g(x)) + x \frac{g'(x)}{g(x)} \right) = (x^x)^x (2x \ln(x) + x). \end{aligned}$$

(b) Wegen $(1/x)' = -1/x^2$ (Quotientenregel), gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 &= 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2 \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^3} \\ &= 2x - \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

(c) Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x)^x = \exp\{x \ln(\ln(x))\}' = \ln(x)^x \left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)} \right).$$

(d) Nach der Quotientenregel gilt

$$\left(\frac{x^4 + 2x^3 - 1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 1}{(x^2+1)^2}.$$

(e) Nach der Produktregel gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) + (\sqrt{x} + 1) \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) \\ &= -\frac{x+1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

(f) Nach der Quotientenregel gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln(x)}{1+x^2} = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2\ln(x)x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2\ln(x)x^2}{x(1+x^2)^2}.$$

(g) Mit den Ableitungsregeln gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(x))^{\cos(x)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\{\cos(x)\ln(\sin(x))\}\\ &= \left(\frac{\cos(x)}{\tan(x)} - \sin(x)\ln(\sin(x))\right)(\sin(x))^{\cos(x)}.\end{aligned}$$

(h) Man beachte $\tan'(x) = 1/\cos^2(x)$, dann folgt mit (10.15) und den Ableitungsregeln

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(\tan(x)) - \frac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)}\\ =&\frac{1}{\sin(x)\cos(x)} + \frac{2\sin^3(2x)+4\sin(2x)\cos^2(2x)}{\sin^4(2x)}\\ =&\frac{4}{\sin(2x)} + \frac{4\cos^2(2x)}{\sin^3(2x)}.\end{aligned}$$

A.10.6 Man fügt im Zähler eine „Null“ ein und erhält direkt

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}\\ =\;& \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\\ \overset{l=-h}{=}\;& \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{1}{2}\lim_{l\to 0}\frac{f(x_0+l)-f(x_0)}{l}\\ =\;& \frac{f'(x_0)}{2} + \frac{f'(x_0)}{2}\\ =\;& f'(x_0).\end{aligned}$$

A.10.7 Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 10.3.4) existiert ein $\xi \in]x,y[$, sodass

$$\arctan(y) - \arctan(x) = \arctan'(\xi)(y-x) = \frac{y-x}{1+\xi^2}.$$

Wegen $1+x^2 < 1+\xi^2 < 1+y^2$ folgt die Behauptung.

A.10.8 Man bezeichne die Seiten eines Rechtecks mit $a, b > 0$, dann ist nach Voraussetzung $L = 2(a+b)$ und für den Flächeninhalt gilt $F = ab$. Aus der ersten Bedingung folgt $b = L/2 - a$ und Einsetzen in die zweite ergibt

$$F = a\left(\frac{L}{2} - a\right).$$

Als Funktion von a wird F nun maximal für

$$\frac{dF}{da} = \frac{L}{2} - 2a \overset{!}{=} 0 \implies a = \frac{L}{4} \implies b = \frac{L}{4}.$$

A.10.9 Nach dem Additionstheorem (10.15) gilt

$$\sin((n-1)x) = \sin(nx - x) = \sin(nx)\cos(x) - \cos(nx)\sin(x)$$

und somit

$$\begin{aligned} A(n-1) &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(x)\sin((n-1)x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n}(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(x)\cos(nx)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= A(n) - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(x)\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert weiterhin

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}_{f'}\underbrace{\cos(nx)}_{g}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n}\cos^n(x)\cos(nx)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)n\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n}(0-1) - A(n) \\ &= \frac{1}{n} - A(n). \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$A(n-1) = A(n) - \left(\frac{1}{n} - A(n)\right) = 2A(n) - \frac{1}{n}, \quad n \geq 2.$$

Per vollständiger Induktion lässt sich nun

$$A(n) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}, \quad n \in \mathbb{N}_{>0}$$

zeigen. Induktionsanfang ($n = 1$):

$$A(1) = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2(x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{1+1}} \cdot \frac{2^1}{1}.$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned} A(n+1) &= \frac{1}{2}\left(A(n) + \frac{1}{n+1}\right) \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+1}}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}. \end{aligned}$$

A.10.10

(a) Es gilt

$$f_n'(x) = \frac{n^2 - 3n^4x^2}{(1+n^2x^2)^3}, \qquad f_n''(x) = \frac{12(n^6x^3 - n^4x)}{(1+n^2x^2)^4}$$

und

$$f_n'(x) = 0 \iff n^2 = 3n^4x^2 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}n}.$$

Wegen

$$f_n''\left(\frac{1}{\sqrt{3}n}\right) = -\frac{8n^3/\sqrt{3}}{(4/3)^4} < 0,$$

wird f_n an der Stelle $x = 1/(\sqrt{3}n)$ maximal mit

$$f_n\left(1/(\sqrt{3}n)\right) = \frac{n/\sqrt{3}}{(4/3)^2} = \frac{3\sqrt{3}n}{16}.$$

(b) Man setze $s(x) = 1 + n^2x^2$, dann gilt $s'(x) = 2n^2x$ und die Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{n^2x}{(1+n^2x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{s'(x)}{s(x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{1+n^2}\frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s}\bigg|_1^{1+n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + 2n^2x^2 + n^4x^4} = \frac{x}{\frac{1}{n^2} + 2x^2 + n^2x^4} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

also

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies widerspricht nicht dem Satz 9.5.1, denn $(f_n)_n$ konvergiert auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Für $\varepsilon > 0$ und $n \geq \lceil 4\varepsilon \rceil$ gilt nach Teil (a) beispielsweise

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}n}\right) - 0 \right| = \frac{3\sqrt{3}n}{16} \geq \frac{3\sqrt{3}}{16} 4\varepsilon = \sqrt{\frac{27}{16}}\varepsilon \geq \varepsilon,$$

also ist (8.1) nicht erfüllt (man beachte $1/(\sqrt{3}n) \in [0,1]$ für alle $n \geq 1$).

A.10.11 Definiert man $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x),$$

dann ist φ nach Voraussetzung stetig auf $[a,b]$ sowie differenzierbar auf $]a,b[$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \\
&= f(b)g(a) - g(b)f(a) + f(b)g(b) - f(b)g(b) \\
&= \big(f(b) - f(a)\big)g(b) - \big(g(b) - g(a)\big)f(b) \\
&= \varphi(b).
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle (Satz 10.3.3) existiert somit ein $\xi \in]a,b[$ mit $\varphi'(\xi) = 0$. Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung. Ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann folgt aus dem Mittelwertsatz (Satz 10.3.4) $g(b) - g(a) \neq 0$ und die Gleichung kann entsprechend umgeformt werden.

A.10.12 Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin^{n-1}(x)\Big|_{x=0}^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x))\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,
\end{aligned}$$

also $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. Weiterhin ist $I_0 = \pi/2$ und $I_1 = 1$ und die Rekursionsgleichung liefert daher

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \ldots$$
$$\Longrightarrow I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

sowie

$$I_3 = \frac{2}{3} \cdot 1, \quad I_5 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \quad I_7 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \ldots$$
$$\Longrightarrow I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2n \cdot 2n}{(2n+1)(2n+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 1}.$$

Nun gilt $0 \leq \sin(x) \leq 1$ für $x \in [0, \pi/2]$ und daher ist

$$\sin^{2n+2}(x) \leq \sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x).$$

Aufgrund der Monotonie des Integrals folgt $I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$ und damit

$$1 \geq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \geq \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Mit dem Einschließungssatz erhält man also

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 3} \cdot \ldots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n+1)(2n+1)}.$$

A.10.13

(a) Mit der Substitution $s(x) = x^2$ ist

$$e^{x^2} x^3 = \frac{1}{2} e^{s(x)} s(x) s'(x)$$

und partielle Integration liefert

$$\frac{1}{2} \int e^s s \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \left(e^s s - \int e^s \, \mathrm{d}s \right) = \frac{1}{2} e^s (s-1).$$

Also folgt durch Rücksubstitution

$$\int e^{x^2} x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^{s(x)} (s(x) - 1) = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1).$$

(b) Man bemerke zunächst, dass

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x(1+e^{-x})}.$$

Mit der Substitution $s(x)=1+e^{-x}$, $s'(x)=-e^{-x}$ folgt

$$\frac{-2}{e^x(1+e^{-x})}=\frac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{2s'(x)}{s(x)}.$$

Da $\int 2/s\,\mathrm{d}s=2\ln|s|$, folgt durch Rücksubstitution

$$\int\frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x=x+2\ln|1+e^{-x}|=2\ln|1+e^x|-x.$$

(c) Mit der Substitution $s(x)=\ln(x)$, $s'(x)=1/x$ ist

$$\frac{2}{x\ln^2(x)+x}=\frac{2}{x(\ln^2(x)+1)}=\frac{2s'(x)}{s(x)^2+1}$$

und es gilt

$$\int\frac{2}{s^2+1}\,\mathrm{d}s=2\int\frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s=2\arctan(s).$$

Also folgt durch Rücksubstitution

$$\int\frac{2}{x\ln^2(x)+x}\,\mathrm{d}x=2\arctan(\ln(x)).$$

(d) Mit der Substitution $s(x)=\sin(x)$, $s'(x)=\cos(x)$ ist

$$\frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\sin(x)}=\frac{s(x)}{1-s(x)}s'(x)$$

und es gilt

$$\int\frac{s}{1-s}\,\mathrm{d}s=\int\frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}s-\int 1\,\mathrm{d}s=-\ln|1-s|-s.$$

Also folgt durch Rücksubstitution

$$\int\frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x=-\ln|1-\sin(x)|-\sin(x).$$

(e) Mit der Substitution $s(x)=\cos(x)$, $s'(x)=-\sin(x)$ ist

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^3(x)}}=\frac{-s'(x)}{\sqrt{s(x)^3}}$$

und es gilt

$$\int -\frac{1}{\sqrt{s^3}}\,\mathrm{d}s = \int -s^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}s = 2s^{-\frac{1}{2}}.$$

Also folgt durch Rücksubstitution

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^3(x)}}\,\mathrm{d}x = 2\cos^{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\sqrt{\cos(x)}}.$$

(f) Mit der Substitution $s(x) = a^x$, $s'(x) = \ln(a)a^x$ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^x + a^{-x}} &= \frac{1}{a^x\left(1 + \frac{1}{a^2x}\right)} = \frac{1}{a^x} \cdot \frac{(a^x)^2}{1 + (a^x)^2}\\ &= \frac{a^x}{1 + (a^x)^2}\\ &= \frac{s'(x)}{\ln(a)(1 + s(x)^2)}.\end{aligned}$$

Aus

$$\int \frac{1}{\ln(a)(1 + s^2)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\ln(a)}\arctan(s)$$

folgt durch Rücksubstitution

$$\int \frac{1}{a^x + a^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\arctan(a^x)}{\ln(a)}.$$

(g) Mit partieller Integration gilt

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = x\tan(x) - \int \tan(x)\,\mathrm{d}x$$

und die Substitution $s(x) = \cos(x)$, $s'(x) = -\sin(x)$ liefert

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)}.$$

Aus $-\int 1/s\,\mathrm{d}s = -\ln|s|$, folgt dann durch Rücksubstitution

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = x\tan(x) + \ln|\cos(x)|.$$

(h) Mit der Substitution $s(x) = \sqrt{2/3}x$, $s'(x) = \sqrt{2/3}$ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3 - 2x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1 - (2/3)x^2}}\\ &= \frac{\sqrt{3/2}s'(x)}{\sqrt{3}\sqrt{1 - s(x)^2}}\\ &= \frac{s'(x)}{\sqrt{2}\sqrt{1 - s(x)^2}}.\end{aligned}$$

Aus

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-s(x)^2}}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(s)$$

folgt durch Rücksubstitution

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right).$$

(i) Mit der Substitution $s(x) = x+1$, $s'(x) = 1$ ist

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{x^2+2x+1+1} = \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{s(x)^2+1}{s'(x)}$$

und wegen $\int 1/(s^2+1)\,\mathrm{d}s = \arctan(x)$ folgt durch Rücksubstitution

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \arctan(1+x).$$

(j) Mit der Substitution $s(x) = 2x^5-5x^3+20x-1$, $s'(x) = 10x^4-15x^2+20$ ist

$$\frac{2x^4-3x^2+4}{2x^5-5x^3+20x-1} = \frac{s'(x)}{5s(x)}$$

und wegen $\int 1/(5s)\,\mathrm{d}s = \ln|s|/5$, folgt durch Rücksubstitution

$$\int \frac{2x^4-3x^2+4}{2x^5-5x^3+20x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|2x^5-5x^3+20x-1|.$$

A.10.14 Sei $s(x) = \tan(x/2)$.

(a) Mithilfe der Additionstheoreme gilt:

$$\text{(i)} \qquad s'(x) = \frac{1}{2\cos^2(x/2)} = \frac{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}$$
$$= \frac{1+\tan^2(x/2)}{2} = \frac{1+s(x)^2}{2}$$

$$\text{(ii)} \qquad \sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}$$
$$= \frac{2\cos^2(x/2)\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{\cos^2(x/2)\left(1+\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right)} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$$
$$= \frac{2s(x)}{1+s(x)^2}$$

$$\text{(iii)} \qquad \cos(x) = \cos^2(x/2)-\sin^2(x/2) = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}$$
$$= \frac{\cos^2(x/2)\left(1-\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right)}{\cos^2(x/2)\left(1+\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right)} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$$
$$= \frac{1-s(x)^2}{1+s(x)^2}$$

(b) (i) Nach Teil (a) ist

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1+s(x)^2}{2s(x)} = \frac{s'(x)}{s(x)}$$

und wegen $\int 1/s \, \mathrm{d}s = \ln|s|$ folgt durch Rücksubstitution (und wegen der Additionstheoreme)

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\tan(x/2)| = \ln\left|\frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2\cos^2(x/2)}\right|$$
$$= \ln\left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)}\right| = \ln\left|\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right|.$$

(ii) Nach Teil (a) ist

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1+s(x)^2}{1-s(x)^2} = \frac{2s'(x)}{1-s(x)^2}.$$

Mit der 3. binomischen Formel erählt man als Ansatz für eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{2}{1-s^2} = \frac{2}{(1+s)(1-s)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{1+s} + \frac{B}{1-2}$$
$$\Longleftrightarrow 2 \stackrel{!}{=} A(1-s)+B(1+s) = A+B+(B-A)s,$$

also $A = B = 1$ und somit

$$\int \frac{2}{1-s^2}\,\mathrm{d}s = \int \frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}s + \int \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}s = \ln|1+s| - \ln|1-s|.$$

Rücksubstitution liefert (mit den Additionstheoremen)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|1+\tan(x/2)| - \ln|1-\tan(x/2)| \\
&= \ln\left|\frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\right| - \ln\left|\frac{\cos(x/2)-\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\right| \\
&= \ln\left|\frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}\right| = \ln\left|\frac{(\cos(x/2)+\sin(x/2))^2}{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}\right| \\
&= \ln\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right| = \ln\left|\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right|.
\end{aligned}$$

A.10.15 Aus $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ folgt für $y \geq 0$, dass

$$\begin{aligned}
& y^2 = b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & y = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2} = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = f(x), \quad x \in [-a,a].
\end{aligned}$$

Die von f und der Abszisse eingeschlossene Fläche ist gerade die Fläche einer halben Ellipse. Mit der Substitution $s(x) = x/a$ gilt nun für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{a} ab\sqrt{1-s(x)^2}\,s'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{ab}{2}\left(s\sqrt{1-s^2} + \arcsin(s)\Big|_{-1}^{1}\right) \\
&= \frac{ab}{2}\left(\arcsin(1) - \arcsin(-1)\right) \\
&= ab\arcsin(1) \\
&= \frac{ab\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Also ist der Flächeninhalt der Ellipse $ab\pi$ und als Spezialfall ist für $a = b$ die Flächenformel für den Kreis mit Radius a enthalten.

A.10.16

(a) $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ hat eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ und mit Polynomdivision folgt

$$\left(x^3 - 5x^2 + 8x - 4\right) : (x-1) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Der Ansatz für Partialbruchzerlegung ist somit:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 9x + 8}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \\ \iff \quad 3x^2 - 9x + 8 &= A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1) \\ &= (A+B)x^2 + (-4A - 3B + C)x + (4A + 2B - C) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf die Gleichungen

$$A + B = 3, \quad -4A - 3B + C = -9, \quad 4A + 2B - C = 8,$$

also $A = 2$, $B = 1$ und $C = 2$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 9x + 8}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln|x-1| + \ln|x-2| - \frac{2}{x-2}. \end{aligned}$$

(b) Zunächst liefert Polynomdivision

$$\begin{array}{l} 3x^5 - 8x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 1 : 3x^3 - 8x^2 + 3x + 2 = x^2 + 1, \\ \underline{-3x^5 + 8x^4 - 3x^3 - 2x^2} \\ \qquad\qquad\quad 3x^3 - 8x^2 + 4x - 1 \\ \qquad\qquad\quad \underline{-3x^3 + 8x^2 - 3x - 2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x - 3 \end{array}$$

also ist

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{3x^5 - 8x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 1}{3x^3 - 8x^2 + 3x + 2} \\ &= x^2 + 1 + \frac{x-3}{3x^3 - 8x^2 + 3x + 2}. \end{aligned}$$

Nun hat $Q(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x + 2$ eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ und

$$\left(3x^3 - 8x^2 + 3x + 2\right) : (x-1) = 3x^2 - 5x - 2.$$

Das Polynom $S(x) = 3x^2 - 5x - 2$ hat eine Nullstelle bei $x_0 = 2$ und somit

$$\left(3x^2 - 5x - 2\right) : (x-2) = 3x + 1 = 3(x + 1/3),$$

also gilt die Faktorisierung

$$Q(x) = 3(x-1)(x-2)(x+1/3).$$

Die letzten beiden Nullstellen hätte man auch durch Lösen der quadratischen Gleichung $S(x) = 0$ bestimmen können. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $(x-3)/Q(x)$ lautet somit

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{3x^3 - 8x^2 + 3x + 2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1/3} \\ \iff \quad x - 3 &= 3(A+B+C)x^2 + (-5A - 2B - 9C)x \\ &\quad + (-2A - B + 6C) \end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich liefert $A = 1/2$, $B = -1/7$ und $C = -5/14$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int R(x)\,\mathrm{d}x &= \int x^2 + 1\,\mathrm{d}x + \int \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/7}{x-2} - \frac{5/14}{x+1/3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{7}\ln|x-2| - \frac{5}{14}\ln|x+1/3| \end{aligned}$$

(c) Die Nullstellen von $Q(x) = 1 + x^3$ sind die 3-ten Einheitswurzeln von $-1 = e^{i\pi}$, also

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= e^{i\pi} = -1, \\ z_3 &= e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Nach Satz 10.5.4 gilt also

$$Q(x) = \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)(x+1)$$

und der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x^3} &= \frac{A + Bx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{C}{x+1} \\ \iff \qquad x &= (A + Bx)(x+1) + C\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \\ &= (B + C)x^2 + (A + B - C)x + (A + C) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $A = B = 1/3$ und $C = -1/3$ und mit (10.26) folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/3 + x/3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{6}\ln|(x-1/2)^2 + 3/4| + \frac{1/3+1/6}{\sqrt{3}/2}\arctan\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right) \\ &-\frac{1}{3}\ln|1+x| \\ =& \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{3}\ln|1+x| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

A.10.17

(a) Zunächst folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \ln(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= x\ln(2-x^2) + \int \frac{2x^2}{2-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln(2-x^2) - 2\int \frac{x^2-2+2}{x^2-2}\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln(2-x^2) - 2\int 1 + \frac{2}{x^2-2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Das Polynom $x^2 - 2$ besitzt Nullstellen $\pm\sqrt{2}$ und der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung ist somit

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2-2} &= \frac{A}{x-\sqrt{2}} + \frac{B}{x+\sqrt{2}} \\ \iff \qquad 2 &= A(x+\sqrt{2}) + B(x-\sqrt{2}) \\ &= (A+B)x + (A-B)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert sofort $A = \sqrt{2}/2$ und $B = -\sqrt{2}/2$, also

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2-2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{x-\sqrt{2}} - \frac{1}{x+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln|x-\sqrt{2}| - \ln|x+\sqrt{2}|\right)\end{aligned}$$

und daher insgesamt

$$\int \ln(2-x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(2-x^2) - 2x - \sqrt{2}\ln|x-\sqrt{2}| + \sqrt{2}\ln|x+\sqrt{2}|.$$

(b) Für $a = 0$ ist $\int x^n\,\mathrm{d}x = x^{n+1}/n$. Für $a \neq 0$ liefert wiederholte partielle Integration

$$\begin{aligned}
&\int x^n e^{ax}\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{x^n}{a}e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{x^n}{a}e^{ax}-\frac{nx^{n-1}}{a^2}e^{ax}+\frac{n(n-1)}{a^2}\int x^{n-2}e^{ax}\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{x^n}{a}e^{ax}-\frac{nx^{n-1}}{a^2}e^{ax}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3}e^{ax}-\frac{n(n-1)(n-2)}{a^3}\int x^{n-3}e^{ax}\,\mathrm{d}x\\
&\vdots\\
=&\frac{x^n}{a}e^{ax}-\frac{nx^{n-1}}{a^2}e^{ax}\pm\ldots(-1)^n\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{a^n}\int e^{ax}\,\mathrm{d}x\\
=&\left(\frac{x^n}{a}-\frac{nx^{n-1}}{a^2}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3}\pm\ldots\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{a^{n+1}}\right)e^{ax}\\
=&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!x^{n-k}}{(n-k)!a^{k+1}}e^{ax}.
\end{aligned}$$

(c) Mit der Substitution $s(x)=\sqrt{x}$, $s'(x)=1/(2\sqrt{x})$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}&=\frac{\sqrt{x}-1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\\
&=\frac{\sqrt{x}-1}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=2\frac{s(x)-1}{1+\frac{1}{s(x)}}\cdot s'(x)\\
&=2\frac{s(x)^2-s(x)}{s(x)+1}\cdot s'(x).
\end{aligned}$$

Polynomdivision oder geschicktes Erweitern liefert

$$\begin{aligned}
\frac{s^2-s}{s+1}=\frac{s(s+1)-2s}{s+1}&=s-\frac{2s}{s+1}\\
&=s-2\frac{s+1-1}{s+1}=s-2+\frac{2}{1+s}
\end{aligned}$$

und somit

$$\int 2\frac{s^2-s}{s+1}\,\mathrm{d}s=2\int s-2+\frac{2}{1+s}\,\mathrm{d}s=s^2-4s+4\ln|1+s|.$$

Also folgt nach Rücksubstitution

$$\int\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=x-4\sqrt{x}+4\ln|1+\sqrt{x}|.$$

(d) Es gilt

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \left(x\left(x \cdot x^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} = x^{7/8}$$

und somit

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}x^{15/8} = \frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7}.$$

(e) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int e^x(1-x+x^2)\,\mathrm{d}x &= e^x - \left(e^x x - \int e^x\,\mathrm{d}x\right) + \left(e^x x^2 - 2\int e^x x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= e^x - (e^x x - e^x) + e^x x^2 - 2(e^x x - e^x)\\ &= (4 - 3x + x^2)e^x.\end{aligned}$$

(f) Zunächst gilt mit partieller Integration

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $s(x) = 1 - x^2$, $s(x) = -2x$ ist nun

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{s'(x)}{2\sqrt{s(x)}}$$

und wegen $\int 1/(2\sqrt{s})\,\mathrm{d}s = \sqrt{s}$ folgt nach Rücksubstitution

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin(x) + \sqrt{1+x^2}.$$

A.10.18 Sei $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$. Dann gilt mit Satz 10.3.1 und der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(\psi(x)) - F(\varphi(x))\right)\\ &= f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).\end{aligned}$$

A.10.19

(a) Sei $G(x) := \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$. Dann gilt $G(a) = 0$ und $G'(x) = |f'(x)|$ sowie

$$|f(x)| = \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t = G(x).$$

Daraus folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}
2\int_a^b |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x &\leq \int_a^b 2G(x)G'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= G(b)^2 - G(a)^2 = G(b)^2 = \left(\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leq (b-a)\int_a^b f'(x)^2\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

mithin die Behauptung.

(b) Wegen $(f(x)^2)' = 2f(x)f'(x)$ und $f(a) = f(b) = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
2\int_a^x f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t &= f(x)^2, \\
2\int_x^b f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t &= -f(x)^2
\end{aligned}$$

für $x \in [a,b]$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
2f(x)^2 &\leq |f(x)^2| + |f(x)^2| \\
&= 2\left(\left|\int_a^x f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_x^a f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\right) \\
&\leq 2\int_a^b |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq (b-a)\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

und somit

$$|f(x)| \leq \sqrt{\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

Da x beliebig war, folgt die Behauptung.

A.10.20

(a) Es gilt

$$\left(e^{3x} - 5x\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x} - 5x\right)\right),$$

und da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(e^{3x}-5x\right)^{1/x} &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right)\right)\\ &\overset{0/0}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}\right)\\ &= \exp\left(\frac{-2}{1}\right)=\frac{1}{e^2}.\end{aligned}$$

(b) Analog zu (a) gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{1/x} &= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right)\right)\\ &\overset{\infty/\infty}{=} \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{3-5/e^{3x}}{1-5x/e^{3x}}\right)\\ &= e^3.\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-2^x}{x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\ln(5)5^x-\ln(2)2^x=\ln(5)-\ln(2)=\ln(5/2).$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sin(x)}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^2}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{2x}\\ &\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2}=0.\end{aligned}$$

14.11 Lösungen zu Kapitel 11

A.11.1

(a) Quotientenkriterium (für Potenzreihen):

$$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}1,$$

also ist $\rho=1$ der Konvergenzradius.

(b) Quotientenkriterium (für Potenzreihen):

$$\begin{aligned}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| &= \frac{(3n)!}{n!(2n)!}\cdot\frac{(n+1)!((3n+3)-(n+1))!}{(3n+3)!}\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\\ &= \frac{n^3(1+1/n)(2+1/n)(2+2/n)}{n^3(3+1/n)(3+2/n)(3+3/n)}\\ &\xrightarrow{n\to\infty} \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27},\end{aligned}$$

also ist $\rho = 4/27$ der Konvergenzradius.

(c) Nach A.5.21 gilt

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e},$$

also ist $\rho = e$ der Konvergenzradius nach dem Satz von Cauchy-Hadamard. Quotientenkriterium (für Potenzreihen) geht auch:

$$\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e.$$

(d) Es gilt

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{ne^n}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}e} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{e},$$

also ist $\rho = e/2$ der Konvergenzradius nach dem Satz von Cauchy-Hadamard.

A.11.2 Sei $0 < x \le 2x_0$, dann gilt

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(x_0 + (x-x_0))\\ &= \ln\left(x_0\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)\right)\\ &= \ln(x_0) + \ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)\\ &= \ln(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n\\ &= \ln(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nx_0^n}(x-x_0)^n.\end{aligned}$$

Da bei gleichem Entwicklungspunkt die Potenzreihendarstellung einer Funktion mit ihrer Taylor-Reihe übereinstimmt, ist das die Taylor-Reihe von $\ln(x)$ um x_0. Der Konvergenzbereich ist offenbar $]0, 2x_0]$.

A.11.3 Sei $0 < x < 2x_0$, dann gilt mit Newtons Binomialtheorem

$$\begin{aligned} x^a &= (x_0 + (x - x_0))^a = \left(x_0\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)\right)^a \\ &= x_0^a \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x_0^{a-k}(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Da bei gleichem Entwicklungspunkt die Potenzreihendarstellung einer Funktion mit ihrer Taylor-Reihe übereinstimmt, ist das die Taylor-Reihe von x^a um x_0. Der Konvergenzbereich ist offenbar $]0, 2x_0[$.

A.11.4 Ohne Einschränkung sei $x_0 < x$. Für $l \in \{1, \ldots, k+1\}$ gilt

$$R_k(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{f^{k+1}(t)}{k!}(x - t)^{k-l+1}}_{=:h(t)} \underbrace{(x - t)^{l-1}}_{=:g(t)} \,\mathrm{d}t.$$

Nach Voraussetzung ist h stetig und $g \geq 0$ auf $[x_0, x]$ (bzw. $g \leq 0$ im Fall $x < x_0$) und daher existiert nach Satz 9.4.2 ein $\xi \in [x_0, x]$ (bzw. $\xi \in [x, x_0]$), sodass

$$\begin{aligned} R_k(x, x_0) &= h(\xi) \int_{x_0}^{x} (x - t)^{l-1} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{k+1}(\xi)}{k!}(x - \xi)^{k-l+1} \cdot \left(- \frac{(x - t)^l}{l} \Bigg|_{t=x_0}^{t=x} \right) \\ &= \frac{f^{k+1}(\xi)}{k! \cdot l}(x - \xi)^{k-l+1}(x - x_0)^l. \end{aligned}$$

A.11.5

(a) Mit Beispiel 11.3.5 (a) und Satz 11.3.3 gilt

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$$

für $|x| < 1$. Es folgt

$$\frac{x^2}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2} x^n, \quad |x| < 1.$$

(b) Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung ist

$$\begin{aligned} \frac{10x - 4}{x^2 - 1} &= \frac{10x - 4}{(x+1)(x-1)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \\ \iff 10x - 4 &= A(x-1) + B(x+1) = (A+B)x + (B-A) \end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich liefert $A = 7$, $B = 3$. Für $|x| < 1$ gilt daher

$$\begin{aligned}\frac{10x-4}{x^2-1} &= \frac{7}{x+1} + \frac{3}{x-1} = 7\frac{1}{1-(-x)} - 3\frac{1}{1-x} \\ &= 7\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n 7 - 3)x^n.\end{aligned}$$

(c) Scharfes Hinsehen zeigt, dass $x^2 + x - 12$ die Nullstellen $x = 3$ und $x = -4$ hat. Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung ist daher

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+x-12} &= \frac{1}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} \\ \Longleftrightarrow \qquad 1 &= A(x+4) + B(x-3) = (A+B)x + (4A-3B)\end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich liefert $A = 1/7$, $B = -1/7$. Für $|x| < 3$ gilt daher

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+x-12} &= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+4}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(x/3)} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-x/4)}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7}\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^n.\end{aligned}$$

(d) Für $|x| < 1$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-1} &= \frac{x-1+2}{x-1} = 1 - \frac{2}{1-x} \\ &= 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n.\end{aligned}$$

A.11.6 Sei $|x| < 1$, dann gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Nach Satz 11.3.3 folgt somit

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

für $|x| < 1$. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe auch für $|x| = 1$, ist also nach dem Satz von Abel in diesen Punkten stetig, und daher gilt insbesondere

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$$

A.11.7 Es reicht die Behauptung für ein lokales Maximum zu zeigen, da der Beweis für ein lokales Minimum vollständig analog verläuft. Man geht genau wie beim Beweis von Satz 11.5.1 vor: Sei $x \in]a, b[$ und ohne Einschränkung $x_0 < x$, dann gilt mit Satz 11.4.9 nach Voraussetzung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n}, \quad \xi \in]x_0, x[.$$

Da $f^{(2n)}$ stetig ist, gilt noch in einer Umgebung $U(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\delta > 0$, dass $f^{(2n)}(x) < 0$ für $x \in U(x_0)$. Für $x \in U(x_0)$ ist auch $\xi \in U(x_0)$ und daher $f^{(2n)}(\xi) < 0$. Somit ist $f(x) - f(x_0) < 0$, also $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in U(x_0)$, $x_0 < x$.

A.11.8 Die Aussagen lassen sich einfach nachrechnen, indem man mit der rechten Seite anfängt:

$$\begin{aligned}
&\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)\\
=&\frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)}\right)\\
&+ \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)}\right)\\
=&\frac{1}{4}\left(2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}\right)\\
=&\sinh(x+y)
\end{aligned}$$

und analog für $\cosh(x+y)$.

A.11.9

(a) Zunächst ist

$$\begin{aligned}
\tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\\
&= \frac{e^x + e^{-x} - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + e^x}\\
&= 1 - \frac{2}{1 + e^{2x}} \in] - 1, 1[, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

und für $x < y$ folgt aus der Monotonie der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}\tanh(y)-\tanh(x) &= 2\left(\frac{1}{1+e^{2x}}-\frac{1}{1+e^{2y}}\right)\\ &= 2\frac{e^{2y}-e^{2x}}{(1+e^{2x})(1+e^{2y})}\\ &> 0.\end{aligned}$$

Also ist tanh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und somit bijektiv. Sei nun $x\in\mathbb{R}$ und $y=\tanh(x)\in(-1,1)$, dann gilt

$$\begin{aligned} && \tanh(x) = 1-\frac{2}{1+e^{2x}} &= y\\ \Longleftrightarrow && 1-y &= \frac{2}{1+e^{2x}}\\ \Longleftrightarrow && e^{2x} &= \frac{2}{1-y}-1\\ \Longleftrightarrow && u^2 &= \frac{2}{1-y}-1=\frac{1+y}{1-y}, \quad u:=e^x\geq 0\\ \Longleftrightarrow && u &= \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\geq 0,\end{aligned}$$

also

$$\tanh^{-1}(y)=x=\ln(e^x)=\ln(u)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

(b) Nach Beispiel 11.3.5 (b) gilt

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n},\\ \ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

für $|x|<1$. Damit folgt aus (a):

$$\begin{aligned}\operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\frac{x^n}{n}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}\end{aligned}$$

A.11.10 Sei $x \in]a,b[$ und ohne Einschränkung $x > x_0$. Nach Satz 11.4.9 existieren $\xi, \eta \in]x_0, x[\subset]a,b[$, sodass

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^n(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

und

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(\eta)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Da $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ und $g^{(n)}$ stetig ist, existiert eine Umgebung $U =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset]a,b[, \varepsilon > 0$, von x_0, sodass $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ für alle $x \in U$. Für $x \in U$, $x > x_0$, folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{(f^{(n)}(\xi)/n!)(x-x_0)^n}{(g^{(n)}(\eta)/n!)(x-x_0)^n} \\ &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\eta)} \xrightarrow{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}, \end{aligned}$$

denn $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ sind stetig und wegen $\xi, \eta \in]x_0, x[$ gilt $\xi, \eta \to x_0$, $x \to x_0$.

A.11.11 Für $n = 1$ ist die Behauptung klar,

$$\left| \binom{-1/2}{1} \right| = \frac{1}{2} < 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{1}}.$$

Induktionsschritt $(n \to n+1)$: Wegen

$$\begin{aligned} \binom{x}{n}(x-n) &= \frac{x(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-n+1)(x-(n+1)+1)}{(n+1)!}(n+1) \\ &= \binom{x}{n+1}(n+1) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} (n+1)\left|\binom{-1/2}{n+1}\right| &= \left(\frac{1}{2}+n\right)\left|\binom{-1/2}{n}\right| \\ &\overset{\text{IV}}{\leq} \left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt[3]{n}} + n^{2/3}, \end{aligned}$$

also

$$\left|\binom{-1/2}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{n}} + n^{2/3}\right) \le \frac{(n+1)^{2/3}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Die Gültigkeit der zweiten Abschätzung folgt aus

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt[3]{n}} + n^{2/3} \le (n+1)^{2/3} \\
\iff &\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{n}} + n^{2/3}\right)^3 = n^2 + \frac{3n}{2} + \frac{1}{8n} + \frac{3}{4} \qquad \le (n+1)^2 \\
\iff &\frac{3}{2}n + \frac{1}{8n} \qquad \le 2n + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

und die letzte Aussage ist sicherlich richtig für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

A.11.12

(a) Nach A.5.20 gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \Phi^{-1},$$

also $\rho = \Phi^{-1}$ nach Satz 11.2.1.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
(x^2+x-1)f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= -a_0 + (\underbrace{a_0 - a_1}_{=0})x + \sum_{n=2}^{\infty}(\underbrace{a_{n-2} + a_{n-1} - a_n}_{=0})x^n \\
&= -1 \\
\iff f(x) &= -\frac{1}{x^2+x-1} = \frac{1}{1-x-x^2}.
\end{aligned}$$

(c) Man beachte, dass $x^2 + x - 1$ die Nullstellen

$$x_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

hat und somit

$$x^2 + x - 1 = (x - x_1)(x - x_2).$$

Da $x_1 - x_2 = -\sqrt{5}$, gilt

$$f(x) = \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{-1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right).$$

Beachtet man noch $\varphi^{-1} = \min\{|x_1|, |x_2|\} = |x_2|$, dann folgt für $|x| < \varphi^{-1}$ mit der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{\frac{x}{x_1}-1} - \frac{1}{x_2}\frac{1}{\frac{x}{x_2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_2}\frac{1}{\frac{x}{x_2}-1} - \frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n - \frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{(x_1x_2)^{n+1}}\right)x^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)x^n
\end{aligned}$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert nun die geschlossene Darstellung der Fibonacci-Zahlen.

A.11.13 Differentiation der Ausdrücke aus Lemma 11.6.7 bzw. A.11.9 liefert die Behauptung. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

A.11.14 Da $\varepsilon^2\sin^2(x) \in]0,1[$, folgt aus dem Binomialtheorem (Satz 11.4.7) zunächst

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-1)^k\varepsilon^{2k}\sin^{2k}(x).$$

Nach A.10.12 ist weiterhin

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2k}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{(2k)\cdot 2(k-1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)(2k-1)}{2^k k!}\cdot\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

und für die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten gilt

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{k} &= \frac{1/2\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)\cdot\ldots\cdot(-(2k-3)/2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}\\ &= (-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)(2k-1)}{2^k k!(2k-1)}\\ &= \frac{(-1)^k}{1-2k}\cdot\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}.\end{aligned}$$

Mit Satz 11.3.3 folgt nun

$$\begin{aligned}4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x &= 4a\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-1)^k\varepsilon^{2k}\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\pi a\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\right)\frac{\varepsilon^{2k}}{1-2k}.\end{aligned}$$

14.12 Lösungen zu Kapitel 12

A.12.1

(a) Der Integrand ist offenbar an der Stelle $x_0 = -1$ unbeschränkt, man betrachte also

$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{\sqrt{|1+x|}}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1}\frac{1}{\sqrt{|1+x|}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{|1+x|}}\,\mathrm{d}x.$$

Für die uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite gilt nun

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to-1^-}\int_{-2}^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{-(1+x)}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to-1^-} -2(-1-x)^{1/2}\Big|_{x=-2}^{\varepsilon}\\ &= 2-\lim_{\varepsilon\to-1^-}2(-1-x)^{1/2}\\ &= 2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to -1^+}\int_\varepsilon^0 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to -1^+} 2(1+x)^{1/2}\Big|_{x=\varepsilon}^0\\ &= 2-\lim_{\varepsilon\to -1^+} 2(1+x)^{1/2}\\ &= 2.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{|1+x|}}\,\mathrm{d}x = 2+2=4.$$

(b) Partielle Integration liefert zunächst

$$\begin{aligned}\int \ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= x\ln(x)^2 - 2\int \ln(x)\,\mathrm{d}x\\ &= x\ln(x)^2 - 2(x\ln(x)-x)\\ &= x\left(\ln(x)^2 - 2\ln(x)+2\right).\end{aligned}$$

Der Integrand ist bei $x_0 = 0$ unbeschränkt, also

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} x\left(\ln(x)^2-2\ln(x)+2\right)\Big|_{x=0}^1\\ &= 2-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln(\varepsilon)^2 - 2\varepsilon\ln(\varepsilon)+2\varepsilon\\ &= 2,\end{aligned}$$

da mit der Regel von Bernoulli-de L'Hospital

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln(\varepsilon)^2}{\varepsilon^{-1}} = -2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln(\varepsilon) = 0.$$

(c) Mit der Substitution $s(x)=\sqrt{x}$, $s'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ gilt zunächst

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \frac{2s'(x)}{1+s(x)^2}$$

und wegen $\int 2/(1+s^2)\,\mathrm{d}s = 2\arctan(s)$ liefert Rücksubstitution

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\arctan(\sqrt{x}).$$

Der Integrand ist bei $x_0 = 0$ unbeschränkt, also ist das Integral aufzuspalten. Wegen $\arctan(1) = \pi/4$, bietet sich 1 als Teilungspunkt an:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\arctan(\sqrt{x})\big|_{x=\varepsilon}^1 + \lim_{b\to\infty} 2\arctan(\sqrt{x})\big|_{x=1}^b \\
&= \frac{\pi}{2} - \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\arctan(\sqrt{\varepsilon}) + \lim_{b\to\infty} 2\arctan(\sqrt{b}) - \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

(d) Der Integrand ist bei $x_0 = \pm 1$ unbeschränkt, also ist das Integral aufzuspalten:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to -1^+}\int_\varepsilon^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 1^-}\int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to -1^+} \arcsin(x)\big|_{x=\varepsilon}^0 + \lim_{\varepsilon\to 1^-} \arcsin(x)\big|_{x=0}^\varepsilon \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1^-} \arcsin(\varepsilon) - \lim_{\varepsilon\to -1^+} \arcsin(\varepsilon) \\
&= \arcsin(1) - \arcsin(-1) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

(e) Man bemerke zunächst

$$\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^4-x} = \frac{x^2-\sqrt{x}}{(x^2+\sqrt{x})(x^2-\sqrt{x})} = \frac{1}{x^2+\sqrt{x}},$$

also ist der Integrand bei $x_0 = 0$ unbeschränkt. Mit der Substitution $s(x) = \sqrt{x}$, $s'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ ist

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{2s(x)}{s(x)^4+s(x)}s'(x) = \frac{2s'(x)}{s(x)^3+1}.$$

Das Integral

$$2\int \frac{1}{s^3+1}\,\mathrm{d}s,$$

bestimmt man mit Partialbruchzerlegung: Die Nullstellen von $Q(s) = s^3+1$ sind die 3-ten Einheitswurzeln von $-1 = e^{-\pi}$ und ein analoges Vorgehen wie bei A.10.16 (c) führt auf den Ansatz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^3} &= \frac{A+Bx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{C}{x+1} \\
\iff \qquad 1 &= (B+C)x^2 + (A+B-C)x + (A+C).
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $A = 2/3$, $B = -1/3$ und $C = 1/3$ und mit (10.26) folgt

$$2\int \frac{1}{s^3+1}\,\mathrm{d}s = 2\int \frac{2/3 - s/3}{(s-1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}s + \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}s$$
$$= -\frac{1}{3}\ln|s^2-s+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2s-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3}\ln|1+s|.$$

Rücksubstitutieren ergibt nun

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{2}{3}\ln|1+\sqrt{x}| - \frac{1}{3}\ln|x-\sqrt{x}+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{x=\varepsilon}^1$$
$$+ \lim_{b\to\infty} \frac{2}{3}\ln|1+\sqrt{x}| - \frac{1}{3}\ln|x-\sqrt{x}+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{x=1}^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3}\Big(2\ln(1+\sqrt{b}) - \ln(b-\sqrt{b}+1)\Big) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{b}-1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$+ \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{3}\Big(\ln(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon}+1) - 2\ln(1+\sqrt{\varepsilon})\Big) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3}\ln\left(\frac{(1+\sqrt{b})^2}{b-\sqrt{b}+1}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{b}-1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$

wobei man $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ sowie

$$\lim_{b\to\infty}\frac{(1+\sqrt{b})^2}{b-\sqrt{b}+1} = 1$$

beachte.

(f) Mit der Substitution $s(x) = \arctan(x)$, $s'(x) = 1/(1+x^2)$ gilt

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{s'(x)}{1+\tan(s(x))^2} = \cos(s(x))^2 s'(x).$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\int \cos(s)^2 \,\mathrm{d}s &= \sin(s)\cos(s) + \int \sin(s)^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \sin(s)\cos(s) + s - \int \cos(s)^2 \,\mathrm{d}s \\
\iff \int \cos(s)^2 \,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\left(s + \sin(s)\cos(s)\right)
\end{aligned}$$

und Rücksubstitution liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\Big(\arctan(x) + \sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x))\Big)\Big|_{x=0}^{b} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\cos(0)\right) \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Da der Integrand gerade ist, folgt daraus

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

A.12.2

(a) Für $x \geq 1$ gelten $e^{-x} < x$ sowie $x^2 + 3x + 5 < 9x^2$ und daher

$$\frac{2x - e^{-x}}{x^2+3x+5} \geq \frac{2x - x}{9x^2} = \frac{1}{9x} \geq 0, \quad x \geq 1.$$

Nach Beispiel 12.1.2 (b) ist $\int_1^\infty 1/(9x)\,\mathrm{d}x$ divergent und somit ist nach Lemma 12.1.8 (b) auch

$$\int_0^\infty \frac{2x-e^{-x}}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2x-e^{-x}}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{2x-e^{-x}}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x$$

divergent.

(b) Der Integrand ist bei $x_0 = 0$ unbeschränkt. Mit der Substitution $s(x) = 1/x$, $s'(x) = -1/x^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin(1/x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^\pi -\frac{\sin(s(x))}{s(x)} s'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\int_{1/\varepsilon}^{1/\pi} \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s \\
&= \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{1/\pi}^{\varepsilon} \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{1/\pi}^\infty \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

also existiert das Integral nach Beispiel 12.1.4.

(c) Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{x-1/2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x-1/2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{x-1/2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

und das erste Integral auf der rechten Seite existiert, da der Integrand stetig auf $[0,1]$ ist. Weiterhin gilt $x - 1/2 < x$ sowie $1 + x^3 > x$ für $x \geq 0$ und daher

$$\left|\frac{x-1/2}{1+x^3}\right| = \frac{x-1/2}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 1.$$

Nach Beispiel 12.1.2 (b) ist $\int_1^\infty 1/x^2\,\mathrm{d}x = 1$, also konvergiert das Integral nach Lemma 12.1.8.

(d) Für $\alpha < 1$ gilt $|\cos(x)/x^\alpha| \leq 1/x^\alpha$, und da $\int_0^1 1/x^\alpha\,\mathrm{d}x$ in diesem Fall konvergiert (Beispiel 12.2.3), folgt die Konvergenz von $\int_0^1 \cos(x)/x^\alpha\,\mathrm{d}x$ nach Lemma 12.1.8. Für $\alpha \geq 1$ gilt andererseits $\cos(x)/x^\alpha \geq \cos(1)/x^\alpha$, $x \in]0,1]$. Aus der Divergenz von $\int_0^1 1/x^\alpha\,\mathrm{d}x$ folgt dann auch die Divergenz von $\int_0^1 \cos(x)/x^\alpha\,\mathrm{d}x$ für $\alpha \geq 1$.

A.12.3 Die Funktion $\sin(x^2)$ ist als stetige Funktion auf $[0,b[$, $b > 0$ integrierbar. Für $0 < r \leq r'$ folgt mit der Substitution $s(x) = x^2$ und partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_r^{r'} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_r^{r'} \frac{\sin(s(x))}{2\sqrt{s(x)}} s'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{r^2}^{r'^2} \frac{\sin(s)}{2\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s \\
&= -\left.\frac{\cos(s)}{2\sqrt{s}}\right|_{r^2}^{r'^2} - \int_{r^2}^{r'^2} \frac{\cos(s)}{4s^{3/2}}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{\cos(r^2)}{2r} - \frac{\cos(r'^2)}{2r'} - \frac{1}{4}\int_{r^2}^{r'^2} \frac{\cos(s)}{s^{3/2}}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $c = 1 + 1/\varepsilon$, dann gilt für alle $r' \geq r \geq c$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left|\int_r^{r'} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r'} + \frac{1}{2}\int_{r^2}^{r'^2} \frac{1}{2s^{3/2}}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r'} - \left.\frac{1}{2\sqrt{s}}\right|_{s=r^2}^{r'^2} \\
&= \frac{1}{r} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

also ist das Integral nach Satz 12.1.3 konvergent.

A.12.4 Aus $\sqrt[n]{e^x} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt direkt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{e^x}} = 0, \quad x \geq 0,$$

also konvergiert die Funktionenfolge punktweise gegen die Grenzfunktion $f(x) = 0$, $x \geq 0$. Wegen $e^x \geq 1$ auf $[0, \infty[$, gilt weiterhin

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{e^x}} \leq \frac{1}{n}, \quad x \geq 0$$

und somit

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \forall x \geq 0\colon \quad |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Also ist die Konvergenz gegen die Nullfunktion f auch gleichmäßig. Es gilt aber

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{n}{n} e^{-x/n}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} -e^{-x/n}\Big|_{x=0}^{b} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b/n}\right) = 1 \\
&\neq 0 = \int_0^\infty 0\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

A.12.5 Für $\alpha \leq 0$ ist

$$\frac{1}{k\ln(k)^\alpha} = \frac{\ln(k)^{|\alpha|}}{k} \geq \frac{1}{k} \quad \forall k \geq 3,$$

also folgt die Divergenz der Reihe nach dem Minorantenkriterium. Für $\alpha > 0$ ist die Funktion $f(x) = 1/(x\ln(x)^\alpha)$ offenbar monoton fallend auf $[2, \infty[$ und mit der Substitution $s(x) = \ln(x)$ folgt

$$\int_2^b \frac{1}{x\ln(x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_2^b \frac{s'(x)}{s(x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{s^\alpha}\,\mathrm{d}s.$$

Ist $\alpha \neq 1$, gilt daher

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{\ln(2)}^{\ln(b)} = \lim_{b\to\infty} \frac{\ln(b)^{1-\alpha} - \ln(b)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\ln(2)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & ;\; \alpha > 1 \\ \infty & ;\; 0 < \alpha < 1 \end{cases},
\end{aligned}$$

und im Fall $\alpha = 1$ ergibt sich

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \ln(s)\Big|_{\ln(2)}^{\ln(b)} = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2)) = \infty,$$

also insgesamt

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k\ln(k)^\alpha} \quad \text{konvergent} \iff \alpha > 1.$$

A.12.6

(a) Sei $b > 0$, dann gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
&\int_0^b e^{-sx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{s}e^{-sx}\sin(x)\Big|_{x=0}^{b} + \frac{1}{s}\int_0^b e^{-sx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{s}e^{-sb}\sin(b) + \frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\cos(x)\Big|_{x=0}^{b} - \frac{1}{s}\int_0^b e^{-sx}\sin(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{s}e^{-sb}\sin(b) + \frac{1}{s^2}\big(1 - e^{-sb}\cos(b)\big) - \frac{1}{s^2}\int_0^b e^{-sx}\sin(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\int_0^b e^{-sx}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{s^2}\big(1 - e^{-sb}\cos(b)\big) - \frac{1}{s}e^{-sb}\sin(b) \\
&\xrightarrow{b\to\infty} \frac{1}{s^2}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_0^\infty e^{-sx}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-sx}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+s^2}.$$

(b) Eine analoge Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\int_0^b e^{-sx}\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{s}\big(1 - e^{-sb}\cos(b)\big) + \frac{1}{s^2}e^{-sb}\sin(b) \\
&\xrightarrow{b\to\infty} \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

und somit

$$\int_0^\infty e^{-sx}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-sx}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{s}{1+s^2}.$$

A.12.7 Mit der Substitution $s(x) = x^2$, $s'(x) = 2x$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^{-s(x)}}{2\sqrt{s(x)}}s'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{b^2} s^{-1/2}e^{-s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^\infty s^{1/2-1}e^{-s}\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{2}\Gamma(1/2).$$

Da e^{-x^2} eine gerade Funktion ist, folgt somit

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

A.12.8 Quadratische Ergänzung liefert

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(4b - a^2),$$

und da nach Voraussetzung $\Delta = 4b - a^2 > 0$, folgt

$$\frac{1}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{\frac{\Delta}{4}\left(1 + \left(\frac{x+a/2}{1/2\sqrt{\Delta}}\right)^2\right)} = \frac{4}{\Delta\left(1 + \left(\frac{2x+a}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right)}.$$

Mit der Substitution $s(x) = (2x + a)/\sqrt{\Delta}$, $s'(x) = 2/\sqrt{\Delta}$ gilt somit

$$\frac{1}{x^2 + ax + b} = \frac{2s'(x)}{\sqrt{\Delta}(1 + s(x)^2)},$$

und wegen

$$\int \frac{2}{\sqrt{\Delta}(1 + s^2)}\,\mathrm{d}s = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan(s)$$

liefert Rücksubstitution

$$\int \frac{1}{x^2 + ax + b}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\left(\frac{2x + a}{\sqrt{\Delta}}\right).$$

Daraus folgt nun

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + ax + b}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\left(\frac{2x + a}{\sqrt{\Delta}}\right)\bigg|_{x=0}^{\varepsilon}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)\right)$$

und analog

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)\right),$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

14.13 Lösungen zu Kapitel 13

A.13.1 Zu zeigen sind die drei Axiome einer Metrik

(M1) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (Positive Definitheit)
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)
(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung)

Zu (M1): $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,x) = 0$ sind klar. Sei nun $d(x,y) = 0$, dann

$$|x_1 - y_1| = 0, |x_2 - y_2| = 0 \implies x_1 = y_1, x_2 = y_2 \implies x = y.$$

Zu (M2): Folgt aus der Symmetrie des Betrags $|a-b| = |b-a|$.

Zu (M3): Folgt aus der Dreiecksungleichung für den Betrag:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \frac{1}{3}\left(|x_1-y_1| + |x_2-y_2|\right) + \frac{2}{3}\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \\ &\leq \frac{1}{3}\left(|x_1-z_1| + |z_1-y_1| + |x_2-z_2| + |z_2-y_2|\right) \\ &\quad + \frac{2}{3}\underbrace{\max\{|x_1-z_1| + |z_1-y_1|, |x_2-z_2| + |z_2-y_2|\}}_{\leq \max\{|x_1-z_1|,|x_2-z_2|\} + \max\{|z_1-y_1|,|z_2-y_2|\}} \\ &\leq d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

A.13.2

(a) d_1 ist keine Metrik, da die Dreiecksungleichung verletzt ist: Für $x = 1$, $y = -1$ und $z = 0$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} d(x,y) &= (1-(-1))^2 = 4 \\ &\not\leq 2 = (1-0)^2 + (0-(-1))^2 = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

(b) d_2 ist eine Metrik. (M1) und (M2) sind klar. (M3) folgt aus der folgenden Beobachtung:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}\right)^2 &= |x-z| + 2\sqrt{|x-z| \cdot |z-y|} + |z-y| \\ &\geq |x-z| + |z-y| \\ &\geq |x-y| \end{aligned}$$

(c) d_3 ist keine Metrik, denn (M1) ist verletzt. Für $x = 1$ und $y = -1$ gilt offensichtlich $x \neq y$, aber dennoch $d(x, y) = 0$.

(d) Auch d_4 ist keine Metrik, denn (M2) ist verletzt. Wählen wir etwa $x = 0$ und $y = 1$, so ist

$$d_4(x, y) = |0 - 2 \cdot 1| = 2 \neq 1 = |1 - 2 \cdot 0| = d_4(y, x).$$

(e) d_5 ist eine Metrik. (M1) und (M2) sind wieder klar. (M3) folgt daraus, dass die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton steigend ist (dazu betrachte man die Ableitung):

$$\begin{aligned} & |x-y| \leq |x-z| + |z-y| \\ \Longrightarrow \frac{|x-y|}{1+|x-y|} &\leq \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \\ &\leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|} \end{aligned}$$

A.13.3 Wir zeigen die drei Axiome einer Norm:

(N1)	$\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$	(Positive Definitheit)
(N2)	$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$	(Homogenität)
(N3)	$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$	(Dreiecksungleichung)

Zu (N1): Die Positivität $\delta_0(x) = d(x, 0) \geq 0$ ist klar. Zudem gilt

$$\delta_0(x) = 0 \iff d(x, 0) = 0 \iff x = 0.$$

Zu (N2): Folgt aus (E2), denn

$$\delta_0(\lambda x) = d(\lambda x, 0) \overset{(E2)}{=} |\lambda| \cdot d(x, 0) = |\lambda| \cdot \delta_0(x).$$

Zu (N3): Mit (E1),(E2) und der Dreiecksungleichung für Metriken folgt

$$\begin{aligned} \delta_0(x + y) = d(y - (-x), 0) & \overset{(E1)}{=} d(-x, y) \\ \leq d(-x, 0) + d(0, y) & \overset{(E2)}{=} d(x, 0) + d(0, y) \\ \overset{(E1)}{=} d(x, 0) + (y - 0, 0) & = \delta_0(x) + \delta_0(y). \end{aligned}$$

A.13.4 Ohne Einschränkung sei $\|x\| \geq \|y\|$ (sonst vertausche die Rollen von x und y). Dann folgt die Behauptung aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} & \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\ \Longrightarrow\ & |\|x\| - \|y\|| = \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

A.13.5 Die erste Ungleichung folgt aus der einfachen Abschätzung

$$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |x_i x_j| \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|x\|_2^2.$$

Die zweite Ungleichung folgt aus der Hölder-Ungleichung (A.13.7) mit der Wahl $p = q = 2$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |1 \cdot x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$$

A.13.6 (M1) und (M2) sind offensichtlich erfüllt. Von Interesse ist also (M3). Um eine Vermutung zu gewinnen, betrachte man den Fall $n = 2$! Hier lautet die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
& \|x+y\|_{1/2} \leq \|x\|_{1/2} + \|y\|_{1/2} \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\sqrt{x_1+y_1} + \sqrt{x_2+y_2}\right)^2 \leq \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 + \left(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & x_1 + y_1 + 2\sqrt{x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2} + x_2 + y_2 \\
& \quad \leq x_1 + 2\sqrt{x_1x_2} + x_2 + y_1 + 2\sqrt{y_1y_2} + y_2 \\
\Longleftrightarrow\ & \sqrt{x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2} \leq \sqrt{x_1x_2} + \sqrt{y_1y_2}.
\end{aligned}$$

Es erscheint unglaubwürdig, dass diese Ungleichung für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt! Und tatsächlich: Wählen wir

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\sqrt{x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2} = 1 > 0 = \sqrt{x_1x_2} + \sqrt{y_1y_2}$$

und damit

$$\|x+y\|_{1/2} > \|x\|_{1/2} + \|y\|_{1/2}.$$

A.13.7

– Wir zeigen zunächst für $a, b \geq 0$ die Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ohne Einschränkung seien dazu $a, b > 0$. Wegen

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} e^x = e^x > 0$$

ist die Exponentialfunktion (strikt) konvex. Da für $p, q > 1$ des Weiteren $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \in (0,1)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt, folgt damit

$$\begin{aligned} ab = e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(b)} &= e^{\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)} \\ &\leq \frac{1}{p} e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(b^q)} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

– Kommen wir nun zu der eigentlichen Behauptung: Ohne Einschränkung seien $\|a\|_p, \|b\|_q > 0$. Dann folgt mit der obigen Ungleichung

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \frac{|a_i|}{\|a\|_p} \cdot \frac{|b_i|}{\|b\|_q} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p p} + \sum_{i=1}^n \frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \Longrightarrow &\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_q \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

A.13.8

(a) Wir schlüsseln die einzelnen Teile der Behauptung auf:

– $\overset{\circ}{A} \subset A$ ist klar.

– $\overset{\circ}{A}$ offen: Sei $x \in \overset{\circ}{A}$. Dann gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset A$. Für $\tilde{r} = \frac{r}{2} > 0$ gilt dann sogar $B_{\tilde{r}}(x) \subset \overset{\circ}{A}$, denn für $y \in B_{\tilde{r}}(x)$ ist

$$B_{\tilde{r}}(y) \subset B_r(x) \subset A.$$

– Größte Teilmenge: Angenommen es gäbe ein $x \in A \setminus \overset{\circ}{A}$ und ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset A$. Dann wäre aber doch $x \in \overset{\circ}{A}$!

(b) Wir unterscheiden zwischen Hin- und Rückrichtung:

$\Longleftarrow$: Folgt daraus, dass $\overset{\circ}{A}$ offen ist.

$\Longrightarrow$: Sei A offen und $x \in A$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subset A$. Damit folgt $A \subset \overset{\circ}{A}$. Umgekehrt gilt nach a) auch $\overset{\circ}{A} \subset A$ und damit insgesamt $A = \overset{\circ}{A}$.

(c) Seien G_i die offenen Teilmengen von A. Wir zeigen die zwei Inklusionen $\overset{\circ}{A} \subset \bigcup_i G_i$ und $\overset{\circ}{A} \supset \bigcup_i G_i$.

$\subset$: Sei $x \in \overset{\circ}{A}$. Dann gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset A$. Insbesondere ist dann $G_i = B_r(x)$ eine offene Teilmenge von A und damit ist $xB_r(x) \subset \bigcup_i G_i$.

$\supset$: Sei $x \in \bigcup_i G_i$. Das heißt, es gibt einen Index i, so dass $x \in G_i$. Da G_i offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subset G_i \subset A$ und damit $x \in \overset{\circ}{A}$.

A.13.9

(a) Wir betrachten eine abgeschlossene Kugel

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}.$$

Um zu beweisen, dass $\overline{B}_r(x_0)$ abgeschlossen ist, müssen wir zeigen, dass jeder Häufungspunkt von $\overline{B}_r(x_0)$ auch ein Element von $\overline{B}_r(x_0)$ ist. Sei also x ein Häufungspunkt von $\overline{B}_r(x_0)$, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists y \in B_\varepsilon(x) \text{ mit } y \neq x : \quad y \in \overline{B}_r(x_0).$$

Damit gilt

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) < \varepsilon + r$$

und aus $\varepsilon \to 0$ folgt $d(x, x_0) \leq r$, d. h. $x \in \overline{B}_r(x_0)$. Also ist $\overline{B}_r(x_0)$ abgeschlossen.

(b) Seien $F_i, i \in I$, abgeschlossene Mengen und sei x ein Häufungspunkt des beliebigen Durchschnitts $\bigcap_{i \in I} F_i$, d. h.

$$\forall r > 0 \;\; \exists y \in B_r(x) \text{ mit } y \neq x : \quad y \in \bigcap_i F_i$$

beziehungsweise

$$\forall r > 0 \;\; \exists y \in B_r(x) \text{ mit } y \neq x : \quad y \in F_i \;\; \forall i \in I.$$

Damit ist x ein Häufungspunkt von F_i für alle i. Da die F_i abgeschlossen sind, ist dann $x \in F_i$ und damit $x \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

(c) Es genügt zu zeigen, dass die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen auch abgeschlossen ist. Seien dazu F_1, F_2 abgeschlossene Mengen und x ein Häufungspunkt der Vereinigung $F_1 \cup F_2$, d. h.

$$\forall r > 0 \;\; \exists y \in B_r(x) \text{ mit } y \neq x : \quad y \in F_1 \cup F_2.$$

Dann ist x ein Häufungspunkt von F_1 oder ein Häufungspunkt von F_2 und damit $x \in F_1$ beziehungsweise $x \in F_2$, da F_1 und F_2 abgeschlossen sind. Schließlich folgt $x \in F_1 \cup F_2$.

A.13.10 Wir betrachten die Mengen

$$M_1 := \left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{und} \quad M_2 := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Die Vereinigung $M = M_1 \cup M_2$ besitzt genau die drei Häufungspunkte $x_1 = 1, x_2 = -1$ und $x_3 = 0$.

A.13.11 Der Grenzwert lautet

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn es gilt

$$\|x - x_n\|_2^2 = \left(2 - \frac{2n+1}{n}\right)^2 + \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4^n} \to 0$$

für $n \to \infty$.

Literatur

[Boole 1958] Boole, G.: *An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* Dover Publ., 1958. Nachdruck der Erstausgabe von 1854.

[Deiser 2010] Deiser, O.: *Einführung in die Mengenlehre.* Springer Verlag, 3. Auflage, 2010.

[Endl/Luh 1989] Endl, K.; Luh, W.: *Analysis I. Eine integrierte Darstellung.* Aula Verlag, korrigierter Nachdruck der 9. Auflage, 1989.

[Gerver 1970] Gerver, J.: *The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of* π. American journal of mathematics 92.1 (1970): 33-55.

[Hairer/Wanner 2000] Hairer, E.; Wanner, G.: *Analysis by Its History.* Springer Verlag, korrigierter Nachdruck der 3. Auflage, 2000.

[Hairer/Wanner 2011] Hairer, E.; Wanner, G.: *Analysis in historischer Entwicklung.* Springer Verlag, 2011.

[Knoche/Wippermann 1986] Knoche, E.; Wippermann, H.: *Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis.* Bibliographisches Institut Mannheim, 1986.

[Landau 1965] Landau, E.: *Grundlagen der Analysis.* Chelsea Publ. Comp., 1965. (Erstveröffentlichung 1930.)

[Sonar 1999] Sonar, Th.: *Einführung in die Analysis. Unter besonderer Berücksichtigung ihrer historischen Entwicklung für Studierende des Lehramtes.* Vieweg Verlag, 1999.

[Viertel 2014] Viertel, K.: *Geschichte der gleichmäßigen Konvergenz.* Springer Spektrum, 2014.

[Weber 1893] Weber, H..: *Leopold Kronecker.* In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Band 2, Reimer, 1893.

Empfehlenswerte Literatur zur Analysis (mit Kommentaren)

- Apostol, T.: *Mathematical Analysis.* Pearson, 1974.

  Ein fast idealer Kurs; das Buch ist sehr empfehlenswert, da auch meisterlich geschrieben.

- Tretter C.: *Analysis I/II.* Birkhäuser Verlag, 2013.

  Sehr knapp und kondensiert, aber alles drin. Sehr empfehlenswert.

- Hairer, E.; Wanner G.: *Analysis by Its History.* Springer Verlag, 2008.

  Wohl der beste "genetische" Zugang zur Analysis, der die Marschrichtung durch das Bergland der Analysis vorgeben kann. Enthält viele Abbildungen von mathematischen Originalschriften und Porträts der Mathematiker, die die Analysis geschaffen haben.

- Toeplitz, O.: *The Calculus – A Genetic Approach.* University of Chicago Press, 2007.

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1

Die Übersetzung des 1949 erschienenen ersten Bandes des Werkes „Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung“. Zu einem zweiten Band kam es nicht, denn Toeplitz starb schon 1940 und der erste Band wurde nach seinen Vorarbeiten herausgegeben. Historisch äußerst bedeutsam.

- Deiser, O.: *Analysis 1/2.* Springer Spektrum, 2018.

  Sehr empfehlenswerte Bücher, die speziell (aber nicht nur) für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten interessant sind. Die Bände sind nicht mehr im Druck, aber Oliver Deiser stellt sie auf seiner Homepage

  `http://www.aleph1.info/?call=Home`

  kostenlos zur Verfügung.

- Ross, K.A.: *Elementary Analysis: The Theory of Calculus.* Springer Verlag, 2013.

  Ein schönes Buch. Ross bleibt ganz elementar, aber immer rigoros und der Strenge verpflichtet. Enthält sehr schöne Aufgaben, an denen man seinen analytischen Geist schärfen kann.

- Bressoud, D.: *A Radical Approach to Real Analysis.* The Mathematical Association of America, 2007.

  Amerikanische Autoren (und nicht nur die) neigen ein wenig zur Gigantomanie. So „radikal“, wie es der Titel verspricht, ist dieser Zugang zur Analysis nicht. Es handelt sich vielmehr auch um einen gelungenen Versuch der genetischen Methode, bei der man auf den Spuren der geschichtlichen Entwicklung wandelt und so die Analysis (kennen-)lernt.

- Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis 1/2.* Teubner Verlag, 2009/2008.

  Sehr ausführliches und schönes Buch. Gute Erklärungen und historische Bezüge.

- Wendland, W.; Steinbach, O.: *Analysis.* Teubner Verlag, 2005.

  Hervorragende Darstellung der Analysis mit Differentialgleichungen und Funktionentheorie in einem Band.

- Köhler, G.: *Analysis.* Heldermann Verlag, 2006.

  Ein grundsolider Analysis-Kurs, der seit vielen Jahren im Hörsaal erprobt ist.

- Königsberger, K.: *Analysis 1/2.* Springer Verlag, 2004.

  Ein ebenfalls sehr schönes Buch.

- Blatter, C.: *Analysis 1,2.* Springer Verlag, 1991/1992.

  Kurz und knapp, aber alles da!

- Forster, O.: *Analysis 1/2/3.* Vieweg Verlag, 2015/2017/2017.

  Ebenfalls kurz und in Form eines Skripts geschrieben. Sehr empfehlenswert.

- Courant, R.: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 1/2.* Springer Verlag, 1971/2013.

  Ein Klassiker aus den Zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts. Wunderbar lesbar und von einem der Großmeister der Mathematik geschrieben.

- Courant, R.; John, F.: *Introduction to Calculus and Analysis 1/2.* Springer Verlag, 1999/2000.

  Der Versuch, die klassischen Bücher von Courant zu modernisieren. Obwohl der Versuch als gelungen betrachtet werden kann, ist ein wenig vom Charme verloren gegangen.

- Walter, W.: *Analysis 1/2.* Springer Verlag, 2009/2013.

  Hervorragendes Buch mit vielen historischen Bezügen.

- Endl, K.; Luh, W.: *Analysis 1/2/3.* Akademische Verlagsanstalt, 1973/1974/1974.

  Ohne Schnörkel, ein sehr klar und knapp geschriebener Analysis-Kurs.

- Apostol, T.: *Calculus 1/2.* Wiley & Sons, 1991/2007.

  Klassischer amerikanischer Analysis-Kurs. Obwohl etwas anders aufgebaut als bei uns, ist ein Leseausflug in die Bücher von Tom Apostol stets eine Freude.

- von Mangoldt, H.; Knopp, K.: *Einführung in die Höhere Mathematik 1/2/3/4.* S. Hirzel Verlag, 1990.

  Ein wundervoller Klassiker. Nicht mehr ganz up to date (wie auch der Courant), aber hervorragend lesbar und verständlich.

- Fichtenholz, G.M.: *Differential- und Integralrechnung 1/2/3.* Verlag Harri Deutsch, 1997/1990/2011.

  Ebenfalls ein wundervoller Klassiker, diesmal aus der russischen Schule. Sehr gut lesbar und verständlich und eine Fundgrube für Aufgaben, Aufgaben, Aufgaben...

- Erwe, F.: *Differential- und Integralrechnung 1/2.* BI Hochschultaschenbuch, 1962.

  Gut lesbarer Klassiker.

- Grauert, H.; Lieb I.: *Differential- und Integralrechnung 1/2/3.* Springer Verlag, 1989/1978/1977.

  Ein sehr empfehlenswertes Buch in einer Reihe von drei Bänden, die stufenweise immer abstrakter werden.

- Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis.* MacGraw Hill, 2013.

  Eine moderne Darstellung der abstrakten Inhalte der Analysis. Schön geschrieben und ein Genuss. Leider strotzt die „Student Edition“ vor Druckfehlern.

- Dieudonné, J.: *Foundations of Modern Analysis 1.* Academic Press, 2008.

Eine hervorragende Lektüre für alle, die nach einer gut verstandenen Analysis-Vorlesung über den Tellerrand schauen wollen.

- Spivak, M.: *Calculus.* Addison Wesley, 2008.

  Ein amerikanischer Analysis-Kurs, der von der Stoffauswahl und -abfolge sehr europäisch ist.

- Chapman Pugh, C.: *Real Mathematical Analysis.* Springer Verlag, 2017.

  Ein sehr schöner Analysiskurs, der geometrische und topologische Aspekte betont.

- Kaballo, W.: *Einführung in die Analysis 1/2/3.* Spektrum Akademischer Verlag, 2000/1997/1999.

  Ein durch und durch verlässliches Buch, das im Hörsaal getestet ist.

- Whittaker, E.T.; Watson, G.N.: *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press, 2012.

  Die vierte Auflage stammt von 1927 und wird immer noch nachgedruckt! Eine heute etwas ungewohnte Darstellung, aber gerade für Physiker nach wie vor eine Fundgrube.

- Aubin, J.-P.: *Applied Abstract Analysis.* John Wiley & Sons, 1977.

  Exzellentes Buch zu den Verallgemeinerungen der Analysis in metrischen Räumen. Etwas für „später“.

- D. Estep: *Practical Analysis in One Variable.* Springer Verlag, 2002.

  Eine schöne Einführung, die mit der Modellierung realer Probleme arbeitet und damit viele Fragen nach dem Warum der Analysis beantwortet.

- Amann, H.; Escher, J.: *Analysis 1/2/3.* Birkhäuser Verlag, 2006/2008/2008.

  Durchweg gelungene „moderne“ Einführung in die Analysis.

- Fritzsche, K.: *Grundkurs Analysis 1/2.* Spektrum Akademischer Verlag, 2008/2013.

  Wunderbarer Kurs eines Altmeisters, geschrieben speziell im Hinblick auf Verständnis.

- Behrends, E.: *Analysis Band 1. Ein Lehrbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni.* Vieweg+Teubner Verlag, 2014.

  Empfehlenswertes Buch, an dem Studierende aktiv mitgearbeitet haben.

- Arens, T.; Busam, R.; Hettlich, F.; Karpfinger, C.; Stachel, H.: *Grundwissen Mathematikstudium. Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen.* Springer Spektrum, 2013.

  Empfehlenswertes Buch, in dem man neben der Analysis auch die Lineare Algebra finden kann. Sehr gute didaktische Aufbereitung des Stoffes.

- Neunzert, H.; Eschmann, W.G.; Blickensdörfer-Ehlers, A.; Schelkes, K.: *Analysis 1 – Ein Lehr- und Arbeitsbuch für Studienanfänger.* Springer Verlag, 2008.

Groß und unhandlich wie ein Telefonbuch, aber man soll ja auch darin arbeiten, und dafür eignet es sich hervorragend.

- Hildebrand, S.: *Analysis 1/2.* Springer Verlag, 2005/2007.

  Sehr empfehlenswert und von einem Altmeister verfasst.

- Zorich, V.A.: *Mathematical Analysis 1/2.* Springer Verlag, 2015/2016.

  Sehr schönes Buch der modernen russischen Schule.

- Gelbaum, B.R.; Olmsted, J.M.H.: *Counterexamples in Analysis.* Dover Publication, 2003.

  Eine unverzichtbare Quelle über das, was in der Analysis schiefgehen kann.

- Hardy, G.H.: *A Course of Pure Mathematics.* Cambridge University Press, 2018.

  Die erste Auflage stammt aus dem Jahr 1908, aber Hardys Werk wird nach wie vor gedruckt und gehört immer noch zur ersten Klasse der Einführungen in die Analysis.

Weitere Literatur aus dem Umfeld

- Sonar, T.: *Einführung in die Analysis: Unter besonderer Berücksichtigung ihrer historischen Entwicklung für Studierende des Lehramtes.* Vieweg Verlag, 1999.
- Abbott, S.: *Understanding Analysis.* Springer Verlag, 2001.
- Edwards, C.H.: *The Historical Development of the Calculus.* Springer Verlag, 1979.
- Hijab, O.: *Introduction to Calculus and Classical Analysis.* Springer Verlag, 1997.
- Hischer, H.; Scheid, H.: *Grundbegriffe der Analysis.* Spektrum Akademischer Verlag, 1994.
- Knoche, N.; Wippermann, H.: *Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis.* BI Wissenschaftsverlag, 1986.
- Landau, E.: *Grundlagen der Analysis.* Chelsea Publication Company, 1951. (Erstveröffentlichung 1930)
- Landau, E.: *Differential and Integral Calculus.* AMS Chelsea Publishing, 2001. (Erstveröffentlichung der deutschen Ausgabe 1934)
- Schröder, H.: *Wege zur Analysis.* Springer Verlag, 2001.
- Abbott, S.: *Understanding Analysis.* Springer Verlag, 2001.
- Sonar, T.: *3000 Jahre Analysis.* Springer Verlag, 2011. (Zweite Auflage 2016)

- Sonar, T.: *Zur Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton.* Springer Verlag, 2016.
- Spalt, D.: *Die Analysis im Wandel und im Widerstreit.* Verlag Karl Alber, 2015.

Übungs- und Aufgabenbücher; Repetitorien

Das Angebot an Übungs- und Aufgabenbüchern zur Analysis ist inzwischen unüberschaubar und es findet sich dort auch viel Unbrauchbares. Uneingeschränkt empfehlen können wir:

- Pólya, G.; Szegö, G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 1/2.* Springer Verlag, ?.

Auch die drei Bände

- Ostrowski, A.: *Aufgabensammlung zur Infinitesimalrechnung 1/2/3.* Springer Verlag, ?.

sind sehr empfehlenswert. In der Schaum-Reihe gibt es den Band

- Ayres, F.: *Differential- und Integralrechnung.* McGraw-Hill Book Company, ?.

der eine Unmenge von Übungsaufgaben enthält, sich aber wesentlich auf das Rechnen beschränkt. Hervorragend ist auch das Buch

- de Souza, P.N.; Silva, J.-N.: *Berkeley Problems in Mathematics.* Springer Verlag, ?.

das ein Begleiter durch weite Teile des Studiums sein kann.

Warnen möchten wir vor den zahlreichen Repetitorien, die den Markt geradezu überschwemmt haben, und zwar nicht so sehr wegen mangelnden oder fehlerhaften Inhalts, sondern wegen der falschen Wirkung auf den „User“. Analysis kann man nur dann lernen, wenn man *Verständnis* entwickelt, nicht dadurch, dass man Kochrezepte auswendig lernt! Wenn man das beherzigt, dann ist z.B.

- Timmann, S.: *Repetitorium der Analysis 1/2.* Binomi Verlag, ?.

durchaus empfehlenswert. Hoffnungen, man käme mit Repetitorien oder Lehrbüchern zur Ingenieurmathematik oder gar mit „Analysis für Dummys“ durch ein Mathematikstudium, sind schon allzuoft enttäuscht worden!

Index

J. Glaubitz et al., *Lernbuch Analysis 1*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1