

2 Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen, Eindeutigkeit

a) Fortsetzungssatz, Eindeutigkeit

Es wird gezeigt, dass jedes Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden kann, d.h. $\tilde{\mu}$ kann als Maß auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ -Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ so definiert werden, dass seine Einschränkung $\tilde{\mu}|_{\mathcal{R}}$ dem Prämaß μ entspricht.

Die Fortsetzung ist nicht notwendigerweise eindeutig, vgl. jedoch den Eindeutigkeitssatz. Nach einer Idee von Caratheodory erfolgt die Fortsetzung über ein äußeres Maß μ^* und die (so genannten) μ^* -messbaren Mengen.

Definition 2.1.

a) Eine Mengenfunktion $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt äußeres Maß (auf $\mathcal{P}(\Omega)$), falls

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) $Q_1 \subset Q_2 \subset \Omega \implies \mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$ „Monotonie“;

(iii) $Q_1, Q_2, \dots \subset \Omega \implies \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q_i)$ „ σ -Subadditivität“.

b) Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt μ^* -messbar, wenn sie die folgende Spaltungseigenschaft (bzgl. μ^*) besitzt:

(i*) $\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \quad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega).$

[Wegen (ii) und der Zerlegung $Q = (Q \cap A) \cup (Q \cap A^c)$ genügt es, in (i*) nur „ $\geq$ “ zu fordern.]

Satz 2.1. (Fortsetzungssatz) Sei μ Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ (in Ω). Dann existiert eine Fortsetzung $\tilde{\mu}$ von μ zu einem Maß auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.

Der Beweis von Satz 2.1 basiert auf dem folgenden

Satz 2.2. Sei μ^* äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{A}^* = \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$
 $\implies$

- a) $\mathcal{A}^*$ ist eine σ -Algebra (in Ω).
- b) $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ (Restriktion) ist ein Maß auf $\mathcal{A}^*$.

Bemerkung 2.1. Die Fortsetzung eines Prämaßes μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ -Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ ist i.A. nicht eindeutig.

Beispiel 2.1. $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{R} = \{\emptyset\}$, $\mu(\emptyset) = 0$.

Durch $\tilde{\mu}_1(\Omega) := 1$ bzw. $\tilde{\mu}_2(\Omega) := +\infty$ werden zwei verschiedene Fortsetzungen von μ zu Maßen $\tilde{\mu}_1$ bzw. $\tilde{\mu}_2$ auf $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \{\emptyset, \Omega\}$ definiert.

Unter bestimmten Voraussetzungen ist die Fortsetzung $\tilde{\mu}$ aus Satz 2.1 allerdings eindeutig (und dann wie im Beweis von Satz 2.1 gegeben):

Satz 2.3. (Eindeutigkeitsatz) Sei $\mathcal{E}$ ein $\cap$ -stabiler Erzeuger einer σ -Algebra $\mathcal{A}$, in dem eine Folge $\{E_n\}$ von Mengen existiert mit $E_n \uparrow \Omega$ ($n \rightarrow \infty$). Sind dann μ_1 und μ_2 Maße auf $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{E})$ mit

- (i) $\mu_1(E) = \mu_2(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$,
- (ii) $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

so gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf ganz $\mathcal{A}$.

Bemerkung 2.2. Ein Maß μ auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ ist also bereits durch seine Werte auf $\mathcal{E}$ festgelegt, wenn $\mathcal{E}$ folgende Eigenschaften besitzt:

- (i') $\mathcal{E}$ ist $\cap$ -stabil;
- (ii') $\exists \{E_n\} \subset \mathcal{E} : \mu(E_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } E_n \uparrow \Omega \quad (n \rightarrow \infty)$.

$\mathcal{E}$ heißt dann „bestimmende Klasse“ für das Maß μ .

Definition 2.2. Ein Inhalt (Prämaß, Maß) μ auf $\mathcal{R}$ heißt σ -endlich, wenn eine Folge $\{A_n\} \subset \mathcal{R}$ existiert mit $A_n \uparrow \Omega$ ($n \rightarrow \infty$) und $\mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.3.

- a) μ σ -endlich auf $\mathcal{R}$
 $\iff \exists B_1, B_2, \dots \in \mathcal{R}, \text{ p.d. : } \Omega = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \text{ und } \mu(B_i) < \infty \quad \forall i;$
b) $\mu(\Omega) < \infty \implies \mu$ σ -endlich auf jeder Algebra $\mathcal{R}_0$ (in Ω).

Beispiel 2.2.

- a) μ W-Maß auf $\mathcal{A} \implies \mu$ σ -endlich;
b) Zählmaß ν auf $\mathcal{P}(\Omega)$ σ -endlich $\iff \Omega$ abzählbar;
c) Das Lebesgue'sche Prämaß λ^k auf $\mathcal{F}^k$ ist σ -endlich.

Satz 2.4. Zu jedem σ -endlichen Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ existiert genau eine Fortsetzung zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.

Bemerkung 2.4.

- a) Sei μ Inhalt bzw. Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$. Wird der Ring von einem Semiring $\mathcal{S}$ erzeugt, also $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{S})$, so ist μ bereits durch seine Werte auf $\mathcal{S}$ festgelegt, denn es gilt:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{R}(\mathcal{S}) &\implies A = \sum_{i=1}^n B_i \quad (\exists B_i \in \mathcal{S}, \text{ p.d., } n \in \mathbb{N}) \\ &\implies \mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i). \end{aligned}$$

- b) Ferner genügt es, Additivität bzw. σ -Additivität von μ auf $\mathcal{S}$ nachzuweisen, denn es gilt:

- 1) μ additiv auf $\mathcal{S} \implies \mu$ additiv auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$;
2) μ σ -additiv auf $\mathcal{S} \implies \mu$ σ -additiv auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$
(vgl. Dudley (2002)).

Für endliche Maße ergibt sich noch die folgende Approximationseigenschaft:

Satz 2.5. Sei μ ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{R}_0$ eine Algebra mit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R}_0)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathcal{A}$ ein $B \in \mathcal{R}_0$ mit $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$.

Bemerkung 2.5. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.5 gibt es zu jedem $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R}_0)$ eine Folge $\{B_n\} \subset \mathcal{R}_0$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \Delta B_n) = 0 \quad [\implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(A)] .$$

Man beachte: $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$.

b) Lebesgue-Borel-Maß, Lebesgue-Stieltjes-Maße

Wir betrachten wieder:

- $\mathbb{R}^k$ – k -dimensionaler euklidischer Raum,
- $\mathcal{I}^k$ – Semiring der Intervalle $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^k$,
- $\mathcal{F}^k$ – Ring der k -dimensionalen Figuren $[= \mathcal{R}(\mathcal{I}^k)]$,
- $\mathcal{B}^k$ – σ -Algebra der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^k$ $[= \mathcal{A}(\mathcal{F}^k) = \mathcal{A}(\mathcal{I}^k)]$,
- λ^k – Lebesgue'sches Prämaß auf $\mathcal{F}^k$.

Satz 2.6. Es gibt genau ein Maß λ^k auf $\mathcal{B}^k$ mit

$$\lambda^k((a, b]) = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i) \quad \forall (a, b] \in \mathcal{I}^k .$$

Definition 2.3.

- a) Das Maß λ^k aus Satz 2.6 heißt (k -dim.) Lebesgue-Borel-Maß (auf $\mathcal{B}^k$).
- b) Für $B \in \mathcal{B}^k$ betrachte man die Spur- σ -Algebra $B \cap \mathcal{B}^k (= \{C \in \mathcal{B}^k \mid C \subset B\})$ und $\lambda_B^k := \lambda^k|_{B \cap \mathcal{B}^k}$. λ_B^k heißt Lebesgue-Borel-Maß auf B .

Bemerkung 2.6. (Lebesgue-Maß, Vervollständigung) Sei λ_k^* das gemäß Satz 2.2 aus dem Lebesgue'schen Prämaß λ^k konstruierte äußere Maß und $\mathcal{B}_k^*$ die σ -Algebra der λ_k^* -messbaren Mengen in $\mathbb{R}^k$. Dann heißt $\bar{\lambda}_k := \lambda_k^*|_{\mathcal{B}_k^*}$ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}_k^*$. Es gilt:

$$\mathcal{B}_k^* = \{B \cup N \mid B \in \mathcal{B}^k, N \subset M \in \mathcal{B}^k \text{ mit } \lambda^k(M) = 0\}$$

$$\text{und } \mathcal{B}_k^* \supsetneq \mathcal{B}^k; \quad \text{Bezeichnung: } \bar{\mathcal{B}}^k := \mathcal{B}_k^*.$$

Die Mengen $B \in \bar{\mathcal{B}}^k$ heißen Lebesgue-messbare Mengen im $\mathbb{R}^k$.

Das Lebesgue-Maß $\bar{\lambda}^k$ ist die Vervollständigung des Lebesgue-Borel-Maßes λ^k .

Dabei heißt ein Maß $\bar{\mu}$ auf einer σ -Algebra $\bar{\mathcal{A}}$ vollständig, wenn jede Teilmenge einer $\bar{\mu}$ -Nullmenge auch zu $\bar{\mathcal{A}}$ gehört (und damit selbst $\bar{\mu}$ -Nullmenge ist). $\bar{\mu}$ (auf $\bar{\mathcal{A}}$) heißt Vervollständigung von μ (auf $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$), wenn $\bar{\mu}$ vollständig ist, $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ und jedes vollständige Maß μ_0 (auf $\mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}$), welches μ fortsetzt, bereits eine Fortsetzung von $\bar{\mu}$ ist.

Bemerkung 2.7. (Lebesgue-Stieltjes-Maße) Analog zur Konstruktion des Lebesgue-Borel-Maßes λ^1 lassen sich mit Hilfe „maßerzeugender Funktionen“ $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die (so genannten) Lebesgue-Stieltjes-Maße auf $\mathcal{B}^1$ konstruieren. Dabei heißt $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ maßerzeugende Funktion, wenn gilt:

(i) F ist monoton wachsend;

(ii) F ist rechtsstetig.

F heißt Verteilungsfunktion, wenn zusätzlich noch gilt:

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Satz 2.7. (Lebesgue-Stieltjes-Maße) Zu jeder maßerzeugenden Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert genau ein Maß μ auf $\mathcal{B}^1$ mit

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a) \quad \forall (a, b] \in \mathcal{I}^1.$$

Korollar 2.1. (Verteilungsfunktionen und W-Maße). Zu jeder Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert genau ein W-Maß P auf $\mathcal{B}^1$ mit

$$P((-\infty, x]) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 2.3.

- a) Die Funktion $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $x \mapsto x$ ist maßerzeugende Funktion zum Lebesgue-Borel-Maß λ^1 .
- b) Sei $f \geq 0$, stückweise stetig, mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Durch

$$P((a, b]) := \int_a^b f(x) dx \quad \forall (a, b] \in \mathcal{I}^1$$

ist in eindeutiger Weise ein W-Maß P auf $\mathcal{B}^1$ festgelegt. P heißt absolut-stetig mit „Dichte“ f .

- c) Seien $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Teilmenge der reellen Zahlen und $p_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Dann definiert

$$F(x) := \sum_{i: x_i \leq x} p_i, \quad x \in \mathbb{R},$$

die Verteilungsfunktion eines (eindeutig bestimmten) W-Maßes P auf $\mathcal{B}^1$. Die „Wahrscheinlichkeiten“ p_i sind die Sprunghöhen der stückweise konstanten Funktion F , d.h.

$$p_i = F(x_i) - F(x_i -), \quad x_i \in \mathcal{X}.$$

P heißt diskret mit „W-Dichte“ $\{p_i\}$ und „Träger“ $\mathcal{X}$, d.h. $P(\mathcal{X}) = 1$.