

WINTERSEMESTER 2017/18

MAß- UND INTEGRATIONSTHEORIE

SKRIPT¹ ZUR ÜBUNG BEI DIPL. WIRTSCH.-MATH. MARCEL MAROHN
UNIVERSITÄT LEIPZIG

¹Stand: 08.03.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Wiederholung	1
1.1	Wichtige Werkzeuge aus der Analysis	1
1.2	Kurvenintegrale	1
1.2.1	Kurvenlänge	1
1.2.2	Natürliche Parametrisierung	2
1.2.3	Kurvenintegrale 1. Art (Skalar)	3
1.2.4	Kurvenintegrale 2. Art (Vektorwertig)	3
2	Mengensysteme und Maße	4
2.1	σ -Algebren	8
2.1.1	Exkurs: Ringe und Algebren	8
2.1.2	σ -Algebren	10
2.1.3	Borelmengen	12
2.1.4	Urbild- σ -Algebra	16
2.2	Lebesgue-Maß und Lebesgue-messbare Mengen	19
2.2.1	Maße	19
2.2.2	Eindeutigkeit von Maßen und Dynkin-Systeme	25
2.2.3	Fortsetzungssatz von Carathéodory	27
2.2.4	Äußere Maße	29
2.2.5	Borel-Maße und topologische Eigenschaften	30
2.2.6	Lebesgue-Maß	31
2.2.7	Approximationssätze	32
2.2.8	Exkurs: Jordan-Messbarkeit	33
2.3	Messbare Abbildungen	34
2.4	Messbare Funktionen	36
2.4.1	Messbarkeitskriterien	36
2.4.2	Erweiterte Reelle Achse	37
2.4.3	Einfache Funktionen	37
2.4.4	Grundlegende Eigenschaften	39
2.4.5	Aufgaben	40
3	Lebesgue-Integral	42
3.1	Konstruktion und Eigenschaften	42
3.1.1	Integral nichtnegativer Treppenfunktionen	42
3.1.2	Integral nichtnegativer messbarer Funktionen	43
3.1.3	Integral messbarer Funktionen	46
3.2	Nullmengen und fast überall geltende Eigenschaften	51
3.3	Integration bezüglich des Bildmaßes	52
3.4	Konvergenzsätze und Parameterintegrale	53
3.5	Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgueintegrierbarkeit	58
3.6	Produktmaße	60
3.7	Doppelintegrale und Sätze von Fubini-Tonelli	62
3.8	Normalbereiche	63
3.9	Nachträge zur Analysis II	65
3.9.1	Implizite Funktionen und Auflösbarkeit	65
3.9.2	Satz von Umkehrfunktion	69

3.9.3	Untermannigfaltigkeiten und Extrema unter Nebenbedingungen	70
3.10	Prinzip von Cavalieri	78
3.11	Rotationssymmetrische Funktionen	82
3.12	Transformationssatz	84
4	Integration auf Untermannigfaltigkeiten und Vektoranalysis	87
4.1	Dreidimensionale Vektorfelder	87
4.2	Oberflächenintegrale im $\mathbb{R}^3$	90
4.3	Integralbegriff für Untermannigfaltigkeiten	93
4.4	Integralsatz von Gauß	94
5	Konvergenzbegriffe	99
5.1	$\mathcal{L}^p$ -Räume und wichtige Ungleichungen	99
5.2	Konvergenz im Maß	102

Vorwort

In diesem Skript finden sich die wesentlichen Inhalte aus den Übungen zur MASS- UND INTEGRATIONSTHEORIE aus dem WS 2017/18 sowie Ausarbeitungen zum Vorlesungsstoff wieder. Es stellt daher keinen Anspruch auf eine vollständige Niederschrift der Veranstaltungsinhalte, sondern soll lediglich unterstützend (im Sinne einer Nachbereitung) dienen. Daher sind einige Aufgaben, die ausführlicher besprochen worden sind, eventuell nur mit verkürzten Lösungswegen oder ohne die zusätzlich in der Übung erbrachten Kommentare aufgeführt. Das Skript ersetzt somit nicht den Besuch der Veranstaltung.

Viele Beweise zum Vorlesungsstoff sind weggelassen worden. Die Theorie wird nur in soweit nochmal aufgeführt, insofern sie zum Verständnis der allgemeinen Zusammenhänge, Begriffe und Beispiele nützen. Daher ersetzt das Skript auch nicht die Vorlesung oder das Studieren vorlesungsbegleitender Literatur.

Ich wünsche allen Teilnehmern ein gutes Gelingen für diese Veranstaltung! Ich hoffe, dass ich mit diesem Skript und den Übungen eine nützliche Hilfe und Ergänzung der Vorlesung bieten kann. Fragen und Hinweise auf Fehler können gerne jederzeit an mich per Mail oder vor/nach den Veranstaltungen gerichtet werden.

MARCEL MAROHN

Literatur

- 1 Schilling, R. L.: Mass und Integral. De Gruyter Studium, 2015.
- 2 Elstrodt, J.: Maß- und Integrationstheorie. Springer Verlag, 2005.
- 3 Küchler, U.: Maßtheorie für Statistiker. Springer Spektrum Verlag, 2016.
- 4 Kirchheim, B.: Maß- und Integrationstheorie. Vorlesungsskript Universität Leipzig, 2014.
- 5 Günther, M.: Maß- und Integrationstheorie. Vorlesungsskript Universität Leipzig, 2011.
- 6 Meintrup, D.; Schäffler, S.: Stochastik. Springer Verlag, 2005.
- 7 Forster, O.: Analysis 3. Vieweg und Teubner Verlag, 2011.

Wiederholung

1.1 Wichtige Werkzeuge aus der Analysis

Wir wiederholten zunächst zum Warmwerden wichtige Begriffe und Zusammenhänge die aus den bisherigen Vorlesungen zur Analysis bekannt sein durften. Dazu gehörten:

- (a) Topologie, Metriken und Normen (insbesondere p -Norm)
- (b) Wichtige Ungleichungen, wie Hölder'sche und Minkowski-Ungleichung
- (c) Funktionenfolgen, Cauchy-Folgen, absolut konvergente Reihen und Banachraum (am Beispiel des (Funktionen-) Raums der absolut summierbaren Folgen

$$\ell^1 := \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ absolut konvergent} \right\}$$

- dabei wiederholten wir auch den Begriff des linearen (Unter-)Raums und Konvergenzarten

- (d) Teilfolgen, Häufungspunkte, Limes Superior und Inferior für Folgen und führten diesen auch für Mengen ein (siehe auch Vorlesung)

1.2 Kurvenintegrale

In den Übungen haben wir die wichtigsten Themen über Kurvenintegrale im Überblick wiederholt:

- (a) Definition einer (regulären) C^1 -Kurve und Veranschaulichung als Bewegung eines Punktes im Raum)
- (b) Parametrisierung von Kurven und Beispiele (Streckenstück, Kreislinie, Kleeblatt, Spirale, ...)
- (c) Unterschied zwischen Kurve und Spur
- (d) Tangential(-einheits-)Vektor und Geschwindigkeit
- (e) Schnittwinkel zweier regulärer Kurven
- (f) Kurvenlänge und Rektifizierbarkeit (Beispiel: Standardzykloidenbogen sowie Schraubenkurve und Kettenlinie)
- (g) Parametertransformation und Orientierungstreue (insbes. Natürliche Parametrisierung nach der Bogenlänge)
- (h) Vektorfelder (Gradientenfeld und Potential sowie Beispiele aus der Physik, Satz von Schwarz)
- (i) Kurvenintegral 1. und 2. Art

Dazu haben wir uns einigen Beispielen gewidmet. Hier werden einige dieser Rechenbeispiele aufgeführt.

1.2.1 Kurvenlänge

Wir veranschaulichten uns grafisch den Standardzykloidenbogen in der Übung und berechneten seine Länge. Außerdem betrachteten wir Graphenlängen von Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$

(stetig diff'bar) und haben gesehen, dass für die Länge L des Graphen von f gilt:

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

Als Beispiel betrachteten wir $f(x) := \sqrt{1 - x^2}$ mit $x \in [-1, 1]$, dessen Graph einem Halbkreis vom Radius 1 um 0 entspricht. Das lieferte (erwartungsgemäß)

$$L(f) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{(\sqrt{1 - x^2})^2}} \, dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi.$$

An dieser Stelle bietet sich Interessenten auch an, sich die Definition des Bogenmaßes über die Kurvenlänge anzusehen.

1.2.2 Natürliche Parametrisierung

Wir betrachten den Astroidenteil im 1. Quadranten, der parametrisiert wird durch

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Damit ergibt sich der Tangentenvektor

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} -3 \cos^2 t \cdot \sin t \\ 3 \sin^2 t \cdot \cos t \end{pmatrix}.$$

Die Norm dieses Vektors (die *Geschwindigkeit*) in t ist

$$\|\varphi'(t)\| = 3\sqrt{\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \cos^2 t + \sin^4 t} = 3 \sin t \cos t.$$

Daraus ergibt sich für die Parametrisierung $s: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, l]$:

$$s(t) = \int_0^t 3 \sin u \cos u \, du = \frac{3}{2} \sin^2 t.$$

Nun benötigen wir die Umkehrfunktion s^{-1} , die wir durch Umstellen nach t aus dem letzten Ausdruck erhalten:

$$t = \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}s}.$$

Setzen wir das in die Ausgangsparametrisierung ein, so erhalten wir die gesuchte Parametrisierung nach der Bogenlänge:

$$\psi(s) := \begin{pmatrix} \cos^3 t(s) \\ \sin^3 t(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{2}{3}s)^{\frac{3}{2}} \\ (\frac{2}{3}s)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq \frac{3}{2},$$

wobei $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ mit $y = \arcsin x$ sowie der Bezug von $\sin$ zur Umkehrfunktion $\arcsin$ benutzt worden ist.

1.2.3 Kurvenintegrale 1. Art (Skalar)

Betrachte $f(x, y) \equiv h = \text{const.}$ und bestimme das Kurvenintegral über die Kreislinie C mit Radius r um den Ursprung. (Das Integral liefert die Mantelfläche eines Kreiszylinders mit Radius r und Höhe h .) Als Parameterdarstellung für die Kurve C wählen wir $\varphi(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$ für Punkte $(x, y) \in C$. Dann ist

$$\varphi'(t) = (-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t) \quad \text{und} \quad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r.$$

Folglich ist

$$\int_C f(x) \, ds = \int_0^{2\pi} f \cdot \|t\| \, dt = \int_0^{2\pi} h \cdot r \, dt = 2\pi hr.$$

Anschließend hatten wir die Aufgabe abgeändert und die Funktion $\tilde{f}(x, y) = x + 1$ betrachtet, was im Kurvenintegral die Fläche vom Mantel des abgeschnittenen Zylinders zwischen der durch f beschriebenen Ebene und der xy -Ebene liefert. (Wir erhalten sogar, dass die Ebene einen Zylinder mit Höhe zwei halbiert und daher die halbe Mantelfläche dieses Zylinders.)

$$\int_C \tilde{f}(x, y) \, ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{(r \cdot \cos t + 1)}_{=x} \cdot r \, dt = 2\pi r.$$

1.2.4 Kurvenintegrale 2. Art (Vektorwertig)

Wir berechneten die Zirkulation (das Kurvenintegral 2. Art über eine geschlossene Kurve) des Vektorfeldes $f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ längs der Randkurve C des durch $y = x^2$ und $y = x$ begrenzten Gebietes im Einheitsquadrat $0 \leq x, y \leq 1$. Dabei parametrisierten und berechneten wir die beiden Teil-Randkurvenintegrale separat - in der Summe ergeben diese das Gesamt-Kurvenintegral.

Das Integral über die Kurve C_1 bzgl. $y = x^2$ parametrisieren wir über $\varphi(t) := (t, t^2) = (x(t), y(t)), 0 \leq t \leq 1$ und erhalten $\varphi'(t) = (1, 2t)$ sowie

$$\int_{C_1} f \circ d(x, y) = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 -t^2 \, dt = -\frac{1}{3}.$$

Analog erhalten wir für die Kurve C_2 bzgl. $y = x$ mit der Parametrisierung $\psi(t) = (1-t, 1-t) = (x(t), y(t)), 0 \leq t \leq 1$ aus $\psi'(t) = (-1, -1)$:

$$\int_{C_2} f \circ d(x, y) = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ -(1-t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = 0.$$

In Summe ist also

$$\int_C f \circ d(x, y) = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}.$$

Mengensysteme und Maße

Ziel der Maßtheorie ist es, Begriffen wie *Länge*, *Fläche*, *Volumen* eine exakte mathematische Bedeutung zu geben. Mit Hilfe von *Maßen* soll uns jedoch nicht nur das gelingen: mit Maßen wollen wir

- Längen, Flächen, Volumen berechnen,
- Zählen,
- Integrieren (auch mehrdimensional),
- Wahrscheinlichkeiten berechnen,
- ...

An einem Beispiel wollen wir uns ansehen, was für grundlegende Eigenschaften wir von *Maßen* fordern wollen: Betrachten wir ein Intervall $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Bezeichne $\lambda[a, b]$ die Länge des Intervalls und $\nu[a, b]$ die Anzahl der ganzen Zahlen in I . Dann können wir offensichtlich diese beiden Größen wie folgt definieren:

$$\lambda[a, b] := b - a, \quad \nu[a, b] := \#([a, b] \cap \mathbb{Z}).$$

Damit schlussfolgern wir schnell:

- (i) $\nu(\emptyset) = 0$ und wir setzen $\lambda(\emptyset) = 0$.
- (ii) Wir können $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ mit $a \leq c \leq b$ setzen. Dann ist $[a, c] \cap [c, b] = \emptyset$, also disjunkt und es gilt (wie für die Vereinigung zweier beliebiger disjunkter Intervalle)

$$\begin{aligned} \lambda[a, b] &= b - a = (b - c) + (c - a) = \lambda[a, c] + \lambda[c, b] \\ \nu[a, b] &= \nu[a, c] + \nu[c, b]. \end{aligned}$$

- (iii) Verlassen wir Intervalle in $\mathbb{R}$ und widmen uns komplexeren Formen im $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Berechnung von Flächen wesentlich schwieriger, denn nur wenige Flächen (Dreiecke, Rechtecke, usw.) sind elementar berechenbar. Komplizierter wird es beispielsweise bei krummlinig berandeten Gebieten F : diese können durch abzählbar viele Dreiecke Δ_n ausgeschöpft werden, d.h.

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n.$$

Man spricht auch von Triangulierung oder Parkettierungen. Dann erfordert eine Flächenbestimmung eine weitere Rechenregel, die σ -Additivität:

$$\text{Fläche}(F) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Fläche}(\Delta_n).$$

Die Frage ist jedoch, ob es immer *abzählbare* Triangulierungen gibt und warum die Fläche unabhängig von der speziellen Triangulierung ist (HA).

Als Fazit halten wir fest:

- i.A. können Maße nicht auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, sondern nur auf einer Teilfamilie $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiert werden.

- Ein Maß μ sollte folgende Eigenschaften haben:

- (i) $\mu: \mathfrak{F} \rightarrow [0, \infty] = \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ mit $\mathfrak{F}$ Teilfamilie von $\mathcal{P}(E) := \{A | A \subseteq E\}$
- (ii) $\mu(\emptyset) = 0$
- (iii) μ ist additiv, d.h. für $I \cap J = \emptyset$ gilt $\mu(I \dot{\cup} J) = \mu(I) + \mu(J)$
- (iv) μ ist σ -additiv, also gilt für abzählbar viele I_n , paarweise disjunkt, dass $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(I_n)$.

Beispiel (Konstruktion des Cantor'schen Diskontinuums): GEORG CANTOR verstand das Kontinuum, womit er die reellen Zahlen bezeichnete, als eine *perfekte* Menge. Er ermittelte eine ebenfalls *perfekte* Menge, die aber nicht ebenfalls überall dicht ist, mit Hilfe eines Verfahrens, das wir nun studieren wollen. Wir wollen diese CANTOR-Menge C auf $I_1 := [0, 1]$ konstruieren. Dazu führen wir folgende Schritte durch:

1. Entferne aus $I_1 = [0, 1]$ das mittlere offene Drittel $I_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Wir erhalten $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
2. Entferne aus den beiden verbliebenen abgeschlossenen Intervallen jeweils das mittlere offene Drittel, also aus dem linken I_{02} bzw. aus dem rechten I_{22} . Wir erhalten C_2 .
3. Entferne aus den vier verbliebenen abgeschlossenen Intervallen jeweils das mittlere offene Drittel, also $I_{002}, I_{022}, I_{202}$ und I_{222} .
4. ... Es entsteht nach unendlichem Fortführen dieser Schritte das *Cantor'sche Diskontinuum*.

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Dabei kodierten wir die relative Position der entnommenen Intervalle in der Nummerierung beim $(n+1)$ -ten Schritt

$$I_{t_1 t_2 t_3 \dots t_{n-1} t_n} \quad t_i \in \{0, 2\}, \quad i = 1, \dots, n$$

über

$$t_n = \begin{cases} 0, & \text{Intervall ist links von } I_{t_1 t_2 \dots t_{n-1} 2}, \\ 1, & \text{Intervall ist rechts von } I_{t_1 t_2 \dots t_{n-1} 2} \end{cases}$$

Die folgende Grafik verdeutlicht noch einmal die induktive Konstruktion, bei der C_{n+1} aus C_n durch die Darstellung von C_n als disjunkte Vereinigung von 2^n abgeschlossenen Intervallen und dem Entfernen des mittleren offenen Drittels jedes dieser Intervalle entsteht. (Natürlich ist eigentlich ein sauberer mathematischer (Induktions-)Beweis nötig, auf den wir hier verzichten - siehe Vorlesungsunterlagen.)

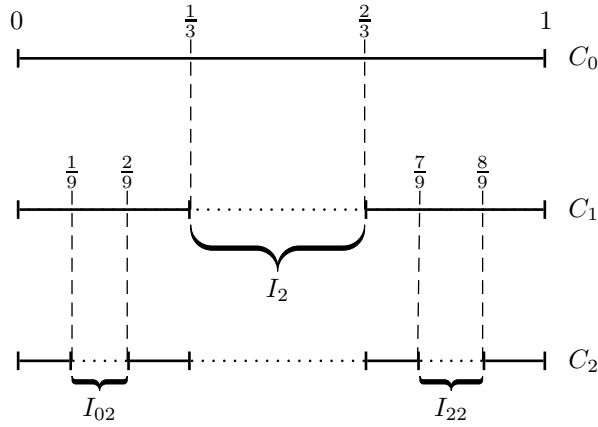


Abbildung 1: Konstruktionsverfahren

Die Endpunkte des entnommenen Intervalls sind als triadische Zahlen² mit $t_i \in \{0, 2\}$ geschrieben.

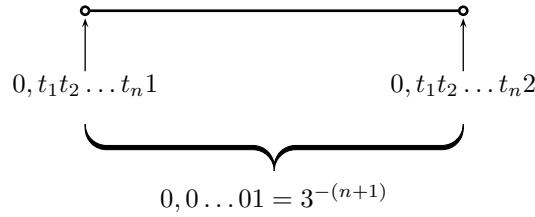


Abbildung 2: Endpunkte in triadischer Darstellung

So kann man beispielsweise den rechten Endpunkt durch Interpretation als triadische Zahl im Ternärsystem schreiben als

$$(t_1, t_2, \dots, t_n, 2) \mapsto 0, t_1 t_2 \dots t_n 2 = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}}, \quad t_i \in \{0, 2\}.$$

Zum Beispiel ist der Endpunkt von I_{02} bzw. I_{22}

$$0, 02 = \frac{0}{3} + \frac{2}{9} = \frac{2}{9} \quad \text{bzw.} \quad 0, 22 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}.$$

Das Diskontinuum kann daher auch geschrieben werden als

$$\begin{aligned} C &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x | x_i \in \{0, 2\} \text{ für } i \leq n \text{ in triad. Darstellung}\} \\ &= \{x | x_i \in \{0, 2\} \text{ in triad. Entwicklung}\} \\ &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n} | t_n \in \{0, 2\} \right\}. \end{aligned}$$

²Triadische Darstellung: Jede Zahl in $[0, 1]$ ist darstellbar als $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ mit $x_i \in \{0, 1, 2\}$.

Die saubere Herleitung dieser Darstellung ist allerdings aufwendig.

Frage: Besteht C demnach *nur* aus Intervallendpunkten?

In $[0, \frac{1}{3}]$ sind nur triadische Zahlen der Form $(0, 00\dots)_3$, außer $(0, 1)_3 = \frac{1}{3}$. Das kann aber geschrieben werden als $(0, 0\overline{2})_3 = \frac{1}{3}$. Wegen der Mehrdeutigkeit der Ternärdarstellung (analog zur Dezimaldarstellung) ist somit beispielsweise $\frac{1}{4} = (0, 0\overline{20})_3 \in C$, was keinen Intervallendpunkt darstellt.

Frage: Was ist die Länge (das *Maß*) $\lambda(C)$ der Menge C ? Wir sehen intuitiv:

1. $\lambda(C_0) = \lambda([0, 1]) = 1 - 0 = 1.$
2. $\lambda(C_1) = \lambda([0, 1]) - \lambda(I_2) = 1 - 1 \cdot \frac{1}{3}.$
3. $\lambda(C_2) = \lambda([0, 1]) - \lambda(I_2) - \lambda(I_{02}) - \lambda(I_{22}) = 1 - 1 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9}.$
4. $\lambda(C_3) = \lambda(C_2) - \lambda(I_{002}) - \lambda(I_{022}) - \lambda(I_{202}) - \lambda(I_{222}) = 1 - 1 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}$ (siehe ³)
- $\vdots$
- n. $\lambda(C_{n+1}) = \lambda([0, 1]) - 2^0 \cdot \frac{1}{3^1} - 2^1 \cdot \frac{1}{3^2} - \dots - 2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}}.$

Also erhalten wir im Grenzprozess

$$\lambda(C) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0.$$

Fazit: Für das Cantor'sche Diskontinuum C gilt:

- (a) C ist nicht leer.
- (b) C hat keine Länge im traditionellen Sinn (hat *Maß* Null).

Das erscheint zunächst merkwürdig. Etwas, was nicht leer ist, soll verschwindendes Maß, hier: eine Länge Null haben. Wir werden das in dieser Veranstaltung spezifizieren und untersuchen.

Einige weitere Bemerkungen zur Darstellung als p -adischer Bruch:

Jede (nichtnegative) reelle Zahl a lässt sich als p -adischer Bruch darstellen:

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{p^i}, \quad a_0 \in \mathbb{N}_0, a_i \in \{0, \dots, p-1\}.$$

Es gilt $a_0 = \lfloor a \rfloor$. Es lässt sich zeigen, dass jede Zahl höchstens zwei solche Darstellungen besitzt:

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots$$

$$\text{und} \quad a = a_0, a_1 a_2 \dots (a_n - 1)(p-1)(p-1)(p-1) \dots \quad \text{mit } a_n \in \{1, \dots, p-1\}. \quad \blacklozenge$$

Aufgabe 2.1.

Zeigen Sie, dass das Cantor'sche Diskontinuum C überabzählbar ist. (Die Unendlichkeit ist bereits gezeigt.)

³Die Länge der entnommenen Intervalle ergibt sich als Anzahl der zu entnehmenden Intervalle mal einem Drittel der Länge jedes der (verbliebenen) Intervalle aus dem vorigen Schritt.

2.1 σ -Algebren

2.1.1 Exkurs: Ringe und Algebren

Sei $E \neq \emptyset$ eine beliebige Grundmenge. Wie wir oben gesehen haben, soll ein Maß eine Abbildung auf einem Mengensystem mit gewissen Stabilitätseigenschaften sein. Betrachten wir daher zunächst Quader, speziell das System $\mathcal{S}_2$ aller Rechtecke $(a, b] := (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$. Sind A, B zwei solche Rechtecke, ist $A \cap B$ wieder ein Rechteck aus $\mathcal{S}_2$. Weiter lässt sich stets $B \setminus A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit gewissen Rechtecken A_1, A_2, A_3 schreiben (Skizze). Das motiviert zu folgender Definition:

Definition 2.1.

Das Mengensystem $\mathcal{S}$ heißt Semialgebra auf E , falls gilt:

- (i) $E \in \mathcal{S}, \emptyset \in \mathcal{S}$
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{S} : A \cap B \in \mathcal{S}$
- (iii) $\forall A, B \in \mathcal{S} \exists n \geq 1$ und paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{S}, i = 1, \dots, n :$

$$B \setminus A = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

(ii) gilt demnach auch für endlich viele Durchschnittsbildung.

Beispiel:

$$\mathcal{S} := \{(a, b] \subseteq \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\} \quad (\text{links halboffene Intervalle})$$

$$\mathcal{S}' := \{[a, b) \subseteq \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\} \quad (\text{rechts halboffene Intervalle})$$

$$\mathcal{S}_n := \left\{ \prod_{k=1}^n (a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^n \mid -\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty, k = 1, \dots, n \right\} \quad (\text{links halboffene Quader}) \blacklozenge$$

Warum ist aber beispielsweise $\mathcal{S}^o := \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ keine Semialgebra? Weil zwar (i), (ii) erfüllt sind, aber (iii) nicht, denn es ist beispielsweise $(-1, 1) \setminus (0, 1)$ nicht als Vereinigung endlich vieler offener Intervalle darstellbar.

Bemerkung: Lässt man $E \in \mathcal{S}$ in der Definition oben fallen, spricht man von einem Semiring aus E . ◆

Beispiel:

$$\tilde{\mathcal{S}}_n := \left\{ \prod_{k=1}^n (a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^n \mid -\infty < a_k \leq b_k < \infty, k = 1, \dots, n \right\}$$

Wegen der Endlichkeit der Randpunkte der links halboffenen Quader ist $\mathbb{R}^n \notin \tilde{\mathcal{S}}_n$. ◆

Problem: In der Stochastik interessiert man sich für Ereignisse $C :=$ „Es tritt das zufällige Ergebnis A oder B ein.“ Dann ist C offensichtlich wieder zufällig. Das führt auf größere Mengensysteme mit der Abgeschlossenheit bzgl. $\cup$:

Definition 2.2.

Für $E \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}^0$ Mengensystem aus E heißt $\mathcal{A}^0$ Algebra aus E , falls

- (i) $E \in \mathcal{A}^0$
- (ii) $A \in \mathcal{A}^0 \implies A^c \in \mathcal{A}^0$
- (iii) $A, B \in \mathcal{A}^0 \implies A \cup B \in \mathcal{A}^0$.

Die Definition impliziert auch die Abgeschlossenheit bzgl. endlicher Vereinigungs- und Durchschnittsbildung. Ferner ist jede Algebra auch eine Semialgebra und umgekehrt ist jede Semialgebra, für die zusätzlich (ii) aus der eben aufgeführten Definition erfüllt ist eine Algebra. Weiter ist der Durchschnitt abzählbar vieler Algebren $\mathcal{A}_i$ aus E

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{A \subseteq E \mid A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I\}$$

wieder eine Algebra.

Beispiel: Das Mengensystem

$$\mathcal{A}^0 := \{A \subseteq E \mid A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$$

ist die kleinste Algebra aus E , die alle einelementrigen Mengen $\{x\} \subseteq E$ umfasst, also

$$\mathcal{A} \text{ Algebra aus } E : \{x\} \in \mathcal{A} \ \forall x \in E \implies \mathcal{A}^0 \subseteq \mathcal{A}.$$

Ist E selbst endlich, dann gilt: $\mathcal{A}^0 = \mathcal{P}(E)$. Ferner gilt für das Mengensystem

$$\mathcal{R} := \{A \subseteq E \mid A \text{ endlich}\}$$

und $E \neq \emptyset$ beliebige Menge, dass $\mathcal{R}$ ein Ring ist, d.h. $\emptyset \in \mathcal{R}$ sowie für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt: $A \cup B \in \mathcal{R}, A \setminus B \in \mathcal{R}$. Also gilt: Ein beliebiger Ring $\mathcal{R}$ mit $E \in \mathcal{R}$ ist eine Algebra. ♦

Obiges Beispiel motiviert die folgende Begriffsbildung: die kleinste $\mathcal{S}$ umfassende Algebra $\mathcal{A}^0$ aus E heißt die von $\mathcal{S}$ erzeugte Algebra sowie $\mathcal{S}$ der Erzeuger von $\mathcal{A}^0$, wenn für alle Algebren $\mathcal{A}$ aus E mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}^0 \subseteq \mathcal{A}$. Wir können für die erzeugte Algebra setzen:

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}^0(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ Algebra aus } E : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Die erzeugte Algebra ist von einfacher Struktur, wenn $\mathcal{S}$ eine Semialgebra ist, denn dann gilt

$$\mathcal{A}^0(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcup_{k=1}^n A_k \mid A_k \in \mathcal{S}, \text{ paarweise diskunkt}, n \geq 1 \right\},$$

d.h. es müssen nur alle endlichen disjunkten Vereinigungen von Elementen aus der Semialgebra gebildet werden. So ist beispielsweise für $\mathcal{S}_n$ die erzeugte Algebra die Menge aller Vereinigungen endlich vieler, paarweise disjunkter n -dimensionaler, links halboffener Quader, also

$$\mathcal{A}^0(\mathcal{S}_n) = \left\{ \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k] \mid (a_k, b_k] \in \mathcal{S}_n, (a_k, b_k] \cap (a_l, b_l] = \emptyset, k \neq l, n \geq 1 \right\}.$$

2.1.2 σ -Algebren

Problem: Die Vereinigung bei Algebren ist nur abgeschlossen für endlich viele Elemente, so dass bereits im $\mathbb{R}^2$, beispielsweise ausgehend von Rechtecken, nur Gebilde wie die obigen dargestellt werden können und keine Kreise, Ellipsen, etc. Auch in der Stochastik stoßen wir schnell an die Grenzen, da das Ereignis „Bei unendlich vielen Würfeln tritt irgendwann die 6 auf.“ nicht als endliche Vereinigung der Einzelereignisse „Im k -ten Wurf erscheint die 6.“ darstellbar ist.

Definition 2.3.

Das Mengensystem $\mathcal{A}$ aus einer nichtleeren Menge E heißt σ -Algebra aus E , falls $\mathcal{A}$ eine Algebra aus E ist und zusätzlich gilt:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}, \text{ falls } A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}.$$

Also: $\mathcal{A}$ heißt σ -Algebra, wenn gelten:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
- (iii) $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$

Aufgabe 2.2.

Welche der folgenden Mengensysteme sind σ -Algebren über $\{a, b, c, d\}$?

- (a) $\{a, b, c, d\}$
- (b) $\{\emptyset, \{a, b, c, d\}\}$
- (c) $\{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$
- (d) $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$

Beispiel: Sei $E \neq \emptyset$.

- (a) $\mathcal{P}(E)$ ist die größte σ -Algebra, die E umfasst, während die triviale σ -Algebra $\{\emptyset, E\}$ die kleinste ist.
- (b) Eine Algebra mit endlich vielen Elementen ist auch eine σ -Algebra.
- (c) $\mathcal{A} := \{A \subseteq E \mid A \text{ oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\}$ ist die kleinste σ -Algebra aus E , die alle einelementrigen Elemente $\{x\}$ aus E umfasst. Falls E selbst höchstens abzählbar ist, ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$. ♦

Aufgabe 2.3.

- (a) Was ist die kleinste σ -Algebra über E , die $\{A\}$ mit $A \subseteq E$ enthält?
- (b) Ist $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$ eine σ -Algebra?
- (c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} := \{A \subseteq E \mid A \text{ oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\}$ eine σ -Algebra ist.

Lösung: (a) $\{\emptyset, E, A, A^c\}$.

- (b) Wir unterscheiden nach Mächtigkeit von E und zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist, wenn $|E| < \infty$ gilt. In diesem Fall ist $E \in \mathcal{A}$ und für $A \in \mathcal{A}$ gilt $A \subseteq E$ und somit $|A| \leq |E| < \infty$, also $E \setminus A = A^c \in \mathcal{A}$. Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, dann ist $A_n \subseteq E$ und daher $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq E$ und

$$\text{somit } \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right| < \infty, \text{ also } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Damit ist $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra. Genauer ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$.

Im Fall $|E| = \infty$ ist $\mathcal{A}$ jedoch keine σ -Algebra, denn wir finden eine Menge, so dass sowohl die abzählbare Vereinigung als auch deren Komplement unendlich sind: Es gibt dann eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ mit x_k paarweise verschieden und wir setzen $A_k := x_{2k}$. Dann gilt $A_k \in \mathcal{A}$, aber sowohl $\{x_2, x_4, \dots\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ als auch $\{x_1, x_3, \dots\} = E \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ sind nicht endlich. Also ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{A}$.

- (c) $E^c = \emptyset$ ist endlich, also höchstens abzählbar und in $\mathcal{A}$. Ferner ist für $A \in \mathcal{A}$ entweder $A = E \setminus (E \setminus A) = E \setminus A^c$ oder $A^c = E \setminus A$ höchstens abzählbar, also $A^c \in \mathcal{A}$. Seien $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$. Falls alle A_n höchstens abzählbar sind, so ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ höchstens abzählbar (Satz aus Analysis 2). Falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit A_k überabzählbar und o.B.d.A. restliche $A_n, n \neq k$ höchstens abzählbar, so muss A_k^c wegen Eigenschaft von $\mathcal{A}$ höchstens abzählbar sein und damit

$$E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (E \setminus A_k) \cap \left(E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{k\}} A_n \right) \subseteq E \setminus A_k$$

und die Teilmenge einer höchstens abzählbaren Menge ist selbst höchstens abzählbar (Satz aus Analysis 2). ♦

Der abzählbare Schnitt von σ -Algebren

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{B \subseteq E \mid B \in \mathcal{A}_i \forall i \in I\}, \quad \mathcal{A}_i \text{ } \sigma\text{-Algebra}$$

ist eine σ -Algebra. Wir bezeichnen daher mit

$$\sigma(\mathcal{S}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra aus } E : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \}$$

die kleinste σ -Algebra aus E , die das Mengensystem $\mathcal{S}$ umfasst und nennen sie die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ -Algebra. Ist $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra, so ist $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A})$.

Lemma (Charakterisierung der erzeugten σ -Algebra): Sei $\mathcal{S}$ ein Mengensystem aus $E \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ und für alle σ -Algebren $\mathcal{A}'$ aus E mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}'$ gelte: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$. Dann ist $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$. ♦

Bemerkung (Hilfreiches Beweisprinzip): Es gilt also insbesondere: sind $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$ zwei Mengensysteme, dann gilt $\sigma(\mathcal{S}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{S}_2)$. Insbesondere kann das für Beweise von Erzeugern ausgenutzt werden: ist $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra und kann man $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ zeigen, so folgt $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Dann braucht man nur noch $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$ oder, falls $\tilde{\mathcal{S}}$ ein anderer Erzeuger von $\mathcal{A}$ ist für beliebiges $S \in \tilde{\mathcal{S}}$ die Beziehung $S \in \mathcal{S}$ zeigen. Dann gilt nämlich $\tilde{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$ und somit $\mathcal{A} = \sigma(\tilde{\mathcal{S}}) \subseteq \sigma(\mathcal{S})$. ♦

Beispiel: Ein weiteres sehr wichtiges Beispiel ist die von einer disjunkten Zerlegung erzeugte σ -Algebra. Sei $Z := \{Z_k \mid k \in K\}$ mit $K \subseteq \mathbb{N}$ eine Zerlegung der Menge E in höchstens abzählbar

viele Teilmengen Z_k . Dann ist

$$\mathcal{Z} := \sigma(Z) = \left\{ \bigcup_{k \in I} Z_k \mid I \subseteq K \right\}$$

kleinste σ -Algebra aus E , die alle $Z_k, k \in K$ als Elemente enthält. Dabei ist mit $I_k = \emptyset$:
 $\bigcup_{k \in I} Z_k := \emptyset$. $\blacklozenge$

Aufgabe 2.4.

- (a) Finden Sie ein Beispiel das zeigt, dass die Vereinigung zweier σ -Algebren i.A. keine σ -Algebra mehr ist.
- (b) Folgt für σ -Algebren $\mathcal{A}$ und Mengen $A_n \subseteq E$ aus $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ stets $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Lösung: Über $M = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir $\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, M, \{1\}, \{2, 3\}\}$ und $\mathcal{A}_2 := \{\emptyset, M, \{2\}, \{1, 3\}\}$. Das sind offensichtlich σ -Algebren. Die Vereinigung hingegen ist keine σ -Algebra mehr, da $\{1, 2\}$ zwar dann enthalten ist, aber nicht dessen Komplement $\{3\}$. Das zeigt (a). Für (b) können wir das gleiche Beispiel betrachten und sehen, dass zwar $\{2, 3\} \in \mathcal{A}_1$ gilt, aber $\{2\}, \{3\} \notin \mathcal{A}_1$. $\blacklozenge$

Während die Konstruktion von Algebren aus Semialgebren über endliche Vereinigungsbildungen einfach war, ist hier nur die Existenz einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ klar, jedoch wird keine Aussage über die Art und Weise getroffen, wie $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$ aus $\mathcal{S}$ gewonnen werden kann (Welche konkreten Eigenschaften müssen $B \subseteq E$ für $B \in \sigma(\mathcal{S})$ haben?). Das gelingt nur in Spezialfällen, siehe frühere Beispiele. Im Fazit können wir also i.d.R. nur die Erzeuger, jedoch selten die σ -Algebra selbst konkret angeben.

Definition 2.4.

Sei $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra aus der nichtleeren Menge E . Dann heißt $(E, \mathcal{A})$ messbarer Raum und jedes $A \in \mathcal{A}$ eine $(\mathcal{A})$ -messbare Menge.

2.1.3 Borelmengen

Jetzt: $E = \mathbb{R}^n$.

Definition 2.5.

Die von der Semialgebra $\mathcal{S}_n$ der links-halboffenen Quader erzeugte σ -Algebra $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \sigma(\mathcal{S}_n)$ heißt Borel'sche σ -Algebra und setzen $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}$ manchmal. Die Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ heißen Borelmengen.

Diese σ -Algebra wird auch von anderen Systemen erzeugt, beispielsweise den (rechts-halb-) offenen und abgeschlossenen Quadern. Es ist die kleinste σ -Algebra, die alle Quader enthält. Daher sind alle Aussagen über Quader auch auf alle Borelmengen $B \in \mathcal{B}^n$ übertragbar.

Durch die Eigenschaften der σ -Algebra ist sichergestellt, dass Komplemente sowie höchstens abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte von Quadern aus $\mathcal{S}_n$ zu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gehören. Damit sind praktisch alle in Anwendungen vorkommende Mengen aus dem $\mathbb{R}^n$ (Kugeln, viele

krummlinig berandete Mengen, ...) als Borelmengen darstellbar. Man erfasst aber nicht alle Borelmengen durch höchsten abzählbar (∞) malige Durchführung der Operationen.⁴ Jedoch gehören nicht alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu der Borel'schen σ -Algebra. Es lässt sich zeigen, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}^n$ ist, aber $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ wesentlich größer ist.⁵

Die messbaren Räume $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ spielen eine sehr große Rolle in der Maß- und Integrationstheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie sowie Statistik. Daher widmen wir dem System der Borelmengen in diesem eigenen Abschnitt besondere Aufmerksamkeit.

Satz 2.6.

Die Borel'sche σ -Algebra wird auch von dem System $\mathcal{S}_n^o$ der offenen Quader und dem System der rechts-halboffenen Quader S'_n erzeugt, also

$$\sigma(\mathcal{S}_n^o) = \sigma(S'_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis: Da die andere Behauptung analog gezeigt wird, beweisen wir nur $\sigma(\mathcal{S}_n^o) = \sigma(S_n)$.

($\subseteq$): Sei $(a, b) = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k) \in \mathcal{S}_n^o$ beliebiger offener Quader im $\mathbb{R}^n$. Betrachte dann

$$(a, b]_l := \prod_{k=1}^n (a_k, b_{kl}], \quad b_{kl} := \begin{cases} b_k - \frac{1}{l}, & \text{falls } b_k < \infty \\ l, & \text{falls } b_k = \infty \end{cases}, l \geq 1.$$

Dann gilt

$$(a, b]_l \in \mathcal{S}_n \quad \text{und} \quad (a, b) = \bigcup_{l=1}^{\infty} (a, b]_l \in \sigma(S_n).$$

Daraus folgt $\mathcal{S}_n^o \subseteq \sigma(S_n)$ und damit nach Rechenregeln für erzeugte σ -Algebren (siehe frühere Bemerkung über hilfreiches Beweisprinzip)

$$\sigma(\mathcal{S}_n^o) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{S}_n)) = \sigma(\mathcal{S}_n).$$

($\supseteq$): Analog erhält man

$$(a_k, b_k] = \bigcap_{l=1}^{\infty} (a_k, b_{kl}] \in \mathcal{S}_n^o, \quad b_{kl} = b_k + \frac{1}{l}, l \geq 1$$

unter Beachtung von $(a_k, \infty] = (a_k, \infty)$ und damit $S_n \subseteq \sigma(\mathcal{S}_n^o)$, woraus folgt $\sigma(\mathcal{S}_n) \subseteq \sigma(\mathcal{S}_n^o)$. $\square$

Beispiel: Jede einelementrige Menge $\{x\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Borelsch, denn es ist

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(x - \frac{1}{n}, x \right],$$

wobei $x - \frac{1}{n} = (x_1 - \frac{1}{n}, \dots, x_n - \frac{1}{n})$ ist. (Wie wir später sehen werden, folgt die Behauptung bereits daraus, dass $\{x\}$ abgeschlossen ist.)

Wir erhalten, dass jede Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit höchstens abzählbar vielen Elementen ist Borelsch, also $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist insbesondere $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (rationale Koordinaten). $\blacklozenge$

Nächstes Ziel: Wir zeigen, dass die Borel'sche σ -Algebra von allen offenen Mengen erzeugt wird. Genauer sogar auch von allen abgeschlossenen sowie allen kompakten Mengen.

⁴Vgl. BILLINGSLEY: Measure and Probability. 1995, S.30.

⁵Vgl. ELSTRODT: Maß- und Integrationstheorie. Abschnitt III, § 3.

Definition 2.7.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt genau dann offen, wenn gilt: $\forall x \in U \exists \epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Das ist äquivalent dazu, dass zu jedem $x \in U$ ein nichtleerer offener Quader $Q \in \mathcal{S}_n^o$ existiert mit $x \in Q \subseteq U$.

Wir nennen daher $V \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus V = V^c$ offen ist.

Aufgabe 2.5.

Beweisen Sie:

- (a) Offene Quader des $\mathbb{R}^n$ der Form $(a, b) = \prod (a_k, b_k), k = 1, \dots, n$ sind offen und abgeschlossene Quader der Form $[a, b] = \prod [a_k, b_k], k = 1, \dots, n$ sind abgeschlossen.
- (b) Offene sowie abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind Borelsch.

Lösung: (a) offene Quader: klar, da für $x \in Q = (a, b)$ bereits ein offener Quader (nämlich Q selbst) existiert, der die Bedingung der Offenheit erfüllt.

abgeschlossene Quader: Wir gehen sukzessive vor und betrachten nach Definition der Abgeschlossenheit Komplemente (Skizze für $n = 2$ hilfreich!):

($n = 1$): $[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, also offen.

($n = 2$):

$$[a, b]^c = \underbrace{((-\infty, a_1) \times \mathbb{R}) \cup ((b_1, \infty) \times \mathbb{R})}_{\text{beschränke } x_1} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \times (-\infty, a_2)) \cup (\mathbb{R} \times (b_2, \infty))}_{\text{beschränke } x_2},$$

also offen.⁶ Das lässt sich auch über die j -te Koordinatenabbildung π_j schreiben als

$$[a, b]^c = \pi_1^{-1}((-\infty, a_1) \cup (b_1, \infty)) \cup \pi_2^{-1}((-\infty, a_2) \cup (b_2, \infty)).$$

($n \geq 2$): Das führt induktiv auf

$$[a, b]^c = \bigcup_{k=1}^n \underbrace{\pi_k^{-1}((-\infty, a_k) \cup (b_k, \infty))}_{\in \mathcal{S}_n^o},$$

wobei die Zugehörigkeit zu $\mathcal{S}_n^o$ aus $\pi_k^{-1}((-\infty, a_k) \cup (b_k, \infty)) = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times ((-\infty, a_k) \cup (b_k, \infty)) \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ folgt. Da offene Quader offen sind, folgt die Offenheit von $[a, b]^c$ und somit die Abgeschlossenheit von $[a, b]$.

- (b) Wenn wir die Aussage für offene Mengen gezeigt haben, folgt die Behauptung für abgeschlossene Mengen aus der Komplementeigenschaft der Borel'schen σ -Algebra (Komplement ist offen). Wir betrachten also eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ex. für beliebiges $x \in U$ ein nichtleerer offener Quader $(a, b) =: Q \in \mathcal{S}_n^o$ mit $x \in Q \subseteq U$. Nach Dichtigkeit von $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ existiert ein rationaler Quader $Q' = (a', b') = \prod_{k=1}^n (a'_k, b'_k) \in \mathcal{S}_n^o$ mit $a'_k, b'_k \in \mathbb{Q}, a'_k < b'_k, k = 1, \dots, n$ und $x \in Q' \subseteq Q \subseteq U$. Dann ist U als höchstens abzählbare

⁶Es gilt allgemein: $(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$, was eine schnittfreie Darstellung ist. Man verdeutliche sich das an einer Skizze und zeige dies zur Übung! Hier bringt diese Darstellung jedoch wenig, da wir eine Darstellung ausschließlich aus offenen Mengen benötigen.

(!) Vereinigung

$$U = \bigcup_{\substack{Q' \in \mathcal{S}_n^o \\ Q' \subseteq U \text{ rat.}}} Q'$$

eine Borelmenge (genauer: siehe nächste Aufgabe). ◆

Manchmal wird die Borel'sche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ als von dem System der offenen Mengen erzeugte σ -Algebra eingeführt. Dass das auch für unsere Definition noch richtig ist, zeigt folgender Satz, den wir zur Übung zeigen wollen:

Satz 2.8.

Folgende Mengensysteme sind ebenfalls Erzeuger der Borel'schen σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$\mathcal{U}_n$: System der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{V}_n$: System der abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{K}_n$: System der kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{B}_n := \{\overline{B}_r(q) | r \in \mathbb{Q}_+, q \in \mathbb{Q}^n\}$ mit $\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}$,

also ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die kleinste σ -Algebra die all diese Mengentypen enthält, es gilt also

$$\sigma(\mathcal{U}_n) = \sigma(\mathcal{V}_n) = \sigma(\mathcal{K}_n) = \sigma(\mathbb{B}_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis: Zunächst ist, wie oben gezeigt, jede offene Menge Borelsch und jeder offene Quader offen, also gilt $\mathcal{S}_n^o \subseteq \mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und daher

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{S}_n^o) \subseteq \sigma(\mathcal{U}_n) \subseteq \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

also gilt $\sigma(\mathcal{U}_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (Aussage für offene Mengen gezeigt).

Offensichtlich gilt $\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{V}_n$, da kompakte Mengen beschränkt und abgeschlossen sind, und damit

$$\sigma(\mathbb{B}_n) \subseteq \sigma(\mathcal{K}_n) \subseteq \sigma(\mathcal{V}_n). \quad (*)$$

Für abgeschlossene Mengen V gilt $V^c \in \mathcal{U}_n$, also offen. Daher muss nach Eigenschaft (ii) für σ -Algebren mit V^c auch $V \in \sigma(\mathcal{U}_n)$ gelten. Folglich ist $\mathcal{V} \subseteq \sigma(\mathcal{U}_n)$ und daher

$$\sigma(\mathcal{V}_n) \subseteq \sigma(\mathcal{U}_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Bleibt wegen (*) zu zeigen:

$$\sigma(\mathcal{U}_n) \subseteq \sigma(\mathbb{B}_n) \quad \left(\stackrel{(*)}{\subseteq} \sigma(\mathcal{K}_n) \subseteq \sigma(\mathcal{V}_n) \subseteq \sigma(\mathcal{U}_n) \right).$$

Das folgt aber aus der Identität

$$U = \bigcup_{\substack{B \in \mathbb{B}_n \\ B \subseteq U}} B,$$

die wie folgt gezeigt wird:

($\supseteq$): klar wegen $B \subseteq U$ für alle B

($\subseteq$): Für $x \in U$ beliebig existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$, da U offen. Wähle $q \in B_{\frac{\epsilon}{4}}(x) \cap \mathbb{Q}^n$ und $r \in (\frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{2}) \cap \mathbb{Q}$ mit (Skizze!)

$$B := \overline{B_r}(q) \subseteq B_\epsilon(x) \subseteq U.$$

Da also $x \in B \in \mathbb{B}_n$ für beliebiges x gilt folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 2.6.

Zeigen Sie, dass als Erzeuger auch die Betrachtung rationaler Quader genügt, d.h. zeigen Sie, dass für die Systeme der (rechts-halb-) offenen Quader mit rationalen Eckpunkten gilt:

$$\sigma(\mathcal{S}_{n, \text{rat}}^o) = \sigma(\mathcal{S}_{n, \text{rat}}') = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Lösung: Beweisidee: Für offene Quader läuft der Beweis wie in der Aufgabe, dass offene Mengen Borelsch sind. Dass die Vereinigung höchstens abzählbar ist, folgt aus der Analysis 1 - Kenntnis

$$(\#\mathcal{S}_{n, \text{rat}}^o =) \#\mathbb{Q}^n \times \#\mathbb{Q}^n = \#\mathbb{N},$$

da jeder Quader $Q' \in \mathcal{S}_{n, \text{rat}}^o$ eindeutig durch zwei Eckpunkte auf der Hauptdiagonalen bestimmt ist.

Für rechts-halboffene Quader folgt die Behauptung aus der Darstellung mittels Schnitten offener rationaler Quader und umgekehrt (als Vereinigung). $\blacklozenge$

2.1.4 Urbild- σ -Algebra

Vor allem in der Wahrscheinlichkeitstheorie ist der Zusammenhang zwischen σ -Algebren und Abbildungen wichtig, den wir hier beleuchten möchten. Die Frage ist, wie (und ob) man von einer im Bildraum bekannten σ -Algebra auf eine im Urbildraum schließen kann.

Definition 2.9.

Sei $f: E \rightarrow F$ eine Abbildung von einer nichtleeren Menge E in einen messbaren Raum $(F, \mathfrak{F})$. Dann heißt

$$\mathcal{E}^f = f^{-1}(\mathfrak{F}) := \{f^{-1}(M) | M \in \mathfrak{F}\}$$

von der Abbildung f in E erzeugte σ -Algebra oder auch kurz Urbild- σ -Algebra unter f .

In einer Übungsserie wurde gezeigt, dass $f^{-1}(\mathfrak{F})$ tatsächlich eine σ -Algebra ist. Dabei benutzt man die Operationstreu von f^{-1} .

Aufgabe 2.7.

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Operationstreue von $f^{-1}: \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$:

- (a) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$
- (b) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
- (c) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
- (d) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

Zeigen Sie ferner anhand eines einfachen Beispiels, dass (außer (ii)) die Eigenschaften nur für

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

gelten, also nicht einfach übertragen werden können auf die Bildmenge

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Beispielsweise ist also i.A.

$$f(A^c) \neq f(A)^c \qquad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

(Erinnern Sie sich insbesondere an: $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ und $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$! - Es findet also ggf. eine Vergrößerung der Menge statt beim Anwenden einer Funktion und der anschließenden Urbildbildung bzw. eine Verkleinerung im umgekehrten Fall. Wann kann man aber jeweils Gleichheit sicherstellen?)

Lösung: Vgl. Literatur oder Unterlagen zur linearen Algebra 1. Als Gegenbeispiel betrachte man beispielsweise $f(x) = x^2, x \in [-1, 1]$. ♦

Beispiel: Für die Indikatorfunktion $f(x) := \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ mit festem $A \subseteq E \neq \emptyset$ gilt $f^{-1}(1) = A$ und $f^{-1}(0) = A^c = E \setminus A$. Da eine σ -Algebra alle Vereinigungen und Komplemente enthält, erhalten wir für jede beliebige σ -Algebra $\mathfrak{F}$ aus F :

$$f^{-1}(\mathfrak{F}) = \{\emptyset, A, A^c, E\}.$$

Wir verallgemeinern das: Sei $F = \{y_1, y_2, \dots\}$ eine höchstens abzählbare Menge paarweise verschiedener $y_k, k = 1, 2, \dots$ und $f: E \rightarrow F$. Dann definiert

$$Z = (Z_k)_{k \in \mathbb{N}} := \{f^{-1}(\{y_k\})\} = \{\{x \in E \mid f(x) = y_k\}\}$$

eine Zerlegung von E . Dann bildet die Menge aller möglichen Vereinigungen vom Elementen dieser Zerlegung die Urbild- σ -Algebra zur Potenzmengen- σ -Algebra:

$$f^{-1}(\mathcal{P}(F)) = \left\{ \bigcup_{k \in I} Z_k \mid I \subseteq \mathbb{N} \text{ beliebig} \right\}. \quad \blacklozenge$$

Oft benutzt man den folgenden Satz, den wir zur Übung zeigen wollen:

Satz 2.10 (Operationstreue).

Seien $E, F \neq \emptyset$ Mengen, $f: E \rightarrow F$ eine Abbildung und $\mathcal{S}$ ein Mengensystem aus F . Dann gilt:

$$\sigma\left(\underbrace{f^{-1}(\mathcal{S})}_{\text{in } E}\right) = f^{-1}\left(\underbrace{\sigma(\mathcal{S})}_{\text{in } F}\right).$$

Beweis: ($\subseteq$): Wegen $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$ gilt $f^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{S}))$. Da die rechte Seite eine σ -Algebra ist, folgt

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{S})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{S})).$$

($\supseteq$): Setze

$$\mathcal{C} := \{C \subseteq F \mid f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{S}))\}.$$

Dann ist $\mathcal{C}$ eine σ -Algebra (zeigt man über Operationstreue von f^{-1}) mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$, woraus wie oben $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{C}$ folgt und somit:

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{S})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) \stackrel{\text{Def.}}{\subseteq} \sigma(f^{-1}(\mathcal{S})). \quad \square$$

Beispiel: (a) Betrachte Spiegelung bzgl. Null: $S(x) := -x, x \in \mathbb{R}$. Für alle $B \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$-B := S^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in B\}.$$

Die Mengen B mit $-B = B$ nennen wir symmetrisch bzgl. dem Nullpunkt. Wir zeigen:

$$-\mathcal{B} := S^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}.$$

Es ist $S^{-1}((a, b]) = [-b, -a)$ für alle $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Also ist $S^{-1}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$ (mit unseren Bezeichnungen von früher für die Mengensysteme der links- bzw. rechts-halboffenen Intervalle). Daher gilt

$$-\mathcal{B} := S^{-1}(\mathcal{B}) = S^{-1}(\sigma(\mathcal{S})) \stackrel{\text{Satz}}{=} \sigma(S^{-1}(\mathcal{S})) = \sigma(\mathcal{S}') = \mathcal{B}.$$

Also: Spiegelung einer Borelmenge aus $\mathbb{R}$ am Nullpunkt ist wieder eine Borelmenge. Wir bezeichnen die Menge der zum Nullpunkt symmetrischen Borelmengen mit $\mathcal{B}_S$.

(b) Sei $f(x) := |x|, x \in \mathbb{R}$. Gesucht ist $f^{-1}(\mathcal{B})$.

Sei $B \in \mathcal{B}$ beliebig. Dann ist

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in B\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in B \vee -x \in B\} = \underbrace{B}_{\in \mathcal{B}} \cup \underbrace{(-B)}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}.$$

Also ist das Urbild eine symmetrische Menge ($S^{-1}(f^{-1}(B)) = -(B \cup (-B)) = f^{-1}(B)$). Es gilt daher

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_S \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad \implies \quad f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}_S.$$

(Beachte: bisher wissen wir nicht, ob $\mathcal{B}_S$ eine σ -Algebra ist. Das folgt aber im folgenden

automatisch.) Andererseits gilt für jede symmetrische Menge $B \in \mathcal{B}_S$: $f^{-1}(B) = B \cup (-B) = B$, sind also Elemente aus $f^{-1}(\mathcal{B})$. Somit gilt auch $\mathcal{B}_S \subseteq f^{-1}(\mathcal{B})$. Wir haben also gezeigt:

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_S.$$

Somit ist insbesondere $\mathcal{B}_S$ eine σ -Algebra. ◆

Aufgabe 2.8.

Sei $f(x) := \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimme $f^{-1}(\mathcal{B})$!

Lösung: Es folgt leicht aus obigem Satz, dass $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ ist durch Betrachtung von beliebigen links-halboffenen Intervallen aus $\mathcal{S}$. Dann ist nämlich

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{S})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{S})) = \sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}. \quad \blacklozenge$$

2.2 Lebesgue-Maß und Lebesgue-messbare Mengen

In diesem Abschnitt wollen wir auf die zu Beginn gestellten Fragen und Probleme weiter eingehen: wie lässt sich ein Volumen sinnvoll definieren? Das führt auf die Definition von Maßen, deren allgemeine Eigenschaften zunächst untersucht werden. Anschließend widmen wir uns u.a. der Konstruktion des für unsere Zwecke wichtigsten Maßes, dem Lebesgue-Maß als Fortsetzung des (elementaren) Lebesgue-Borel-Prämaßes. Dabei steht auch die Charakterisierung von (Lebesgue- bzw. Borel-) messbaren Mengen im Vordergrund sowie die Behandlung sogenannter äußerer Maße.

2.2.1 Maße

Wie in der Einleitung gesehen, sollten Maße ganz bestimmte Eigenschaften haben und auf gewissen Mengensystemen definiert sein. Das wollen wir hier konkretisieren.

Definition 2.11.

Sei $E \neq \emptyset$ beliebige Grundmenge. Dann heißt eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf $(E, \mathcal{A})$, falls gilt:

- (i) $\mathcal{A}$ ist eine σ -Algebra,
- (ii) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (iii) Sind $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, so ist $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Ist die Abbildung μ nicht auf einer σ -Algebra definiert, erfüllt aber (ii) und (iii), so nennen wir μ ein Prämaß.

Wir benutzen wie üblich für auf- und absteigende Folgen von Mengen

$$\begin{aligned} A_n \uparrow A &\iff A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \text{ und } A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \\ B_n \uparrow B &\iff B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots \text{ und } B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n. \end{aligned}$$

Definition 2.12.

Sei $\mathcal{A}$ σ -Algebra auf E und μ ein Maß auf $(E, \mathcal{A})$. Dann heißt $(E, \mathcal{A})$ messbarer Raum und $(E, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

Gilt $\mu(E) < \infty$, so heißt μ endliches Maß und $(E, \mathcal{A}, \mu)$ endlicher Maßraum. Gilt speziell $\mu(E) = 1$, so sprechen wir von einem Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und einem Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum).

Gibt es eine Folge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow E$, $\mu(A_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$, dann heißen das Maß und der Maßraum σ -endlich.

Satz 2.13 (Wichtige Eigenschaften von Maßen).

Sei μ ein Maß auf $(E, \mathcal{A})$ sowie $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- (a) (additiv) Sind A, B disjunkt, dann gilt: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (b) (monoton) Aus $A \subseteq B$ folgt: $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (c) Gilt $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$, so ist $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- (d) (stark additiv) Es gilt: $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (e) (subadditiv) Es gilt: $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
- (f) (stetig von unten) Aus $A_n \uparrow A$ folgt: $\mu(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.
- (g) (stetig von oben) Aus $B_n \downarrow B$ und $\mu(B_1) < \infty$ folgt: $\mu(B) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$.
- (h) (σ -subadditiv) Es gilt: $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Beweis: Die Beweise sind kurz (und einprägsam):

(a) Ersetze fehlende Mengen mit $\emptyset$ zur Nutzung der σ -Additivität (iii) in der Definition oben; dann gilt, da $A, B, \emptyset$ paarweise disjunkt sind:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) \stackrel{(iii)}{=} \mu(A) + \mu(B) + \mu(\emptyset) + \dots \stackrel{(ii)}{=} \mu(A) + \mu(B).$$

(b) Wegen $A \subseteq B$ ist $B = A \cup (B \setminus A)$ eine Darstellung als disjunkte Vereinigung und somit

$$\mu(A) \stackrel{\mu \geq 0}{\leq} \mu(A) + \mu(B \setminus A) \stackrel{(a)}{=} \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(B). \quad (1)$$

(c) Erhält man aus der letzten Gleichung (1) im Beweis zu (b), wenn man $\mu(A) < \infty$ auf beiden Seiten subtrahiert.

(d) Schreibt man $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$, so erhalten wir wieder mit der Gleichung (1) und

aus (a):

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \cup (B \setminus (A \cap B))) + \mu(A \cap B) \\ &\stackrel{(a)}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &\stackrel{(1)}{=} \mu(A) + \mu(B).\end{aligned}$$

(e) Wegen $\mu(A \cap B) \geq 0$ folgt das aus (d).

(f) Setze $F_1 := A_1$ sowie $F_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$. Dann sind die F_n paarweise disjunkt, so dass für $m \rightarrow \infty$ gilt:

$$A_m = \bigcup_{n=1}^m F_n \quad \implies \quad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

und daher

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mu(F_n) \stackrel{(a)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^m F_n\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m).$$

(g) Wir benutzen, dass aus $B_n \downarrow B$ folgt: $B_1 \setminus B_n \uparrow B_1 \setminus B$. Da $\mu(B_1) < \infty$ ist, gilt nach (f) und (c) wegen $B \subseteq B_1$:

$$\mu(B_1) - \mu(B) = \mu(B_1 \setminus B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_1 \setminus B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

(h) Die Behauptung folgt aus (e) und (f) mittels

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{(f)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^n A_m\right) \stackrel{(e)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \mu(A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad \square$$

Beispiel: Wir halten einige wichtige repräsentative Beispiele von Maßen fest:

(a) Sei $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $x \in E$ fest. Dann ist

$$\delta_x: \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \delta_x(A) := \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

ein W-Maß, das sogenannte Dirac-Maß.

(b) Sei $E = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ die σ -Algebra, für die gilt: $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ oder A^c höchstens abzählbar. Dann ist

$$\gamma(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ höchstens abzählbar,} \\ 1, & A^c \text{ höchstens abzählbar} \end{cases}$$

ein W-Maß.

(c) Für einen beliebigen messbaren Raum $(E, \mathcal{A})$ wird das Zählmaß für $A \in \mathcal{A}$ definiert durch

$$|A| := \begin{cases} \#A, & A \text{ endlich,} \\ +\infty, & A \text{ unendlich} \end{cases}.$$

(d) Sei $E = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} = \Omega$ eine höchstens abzählbare Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq$

$[0, 1]$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} = 1$. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{n: \omega_n \in A} p_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \cdot \delta_{\omega_n}(A), \quad A \subseteq \Omega$$

ein diskretes W-Maß und $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W-Raum. Durch $\mathbb{P}$ wird bereits das allgemeinste diskrete W-Maß definiert.

- (e) Triviale Maße auf beliebigen Messräumen sind derart, dass $\mu(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt oder $\mu(A) = \infty$ falls $A \neq \emptyset$ gilt, $\mu(\emptyset) = 0$. $\blacklozenge$

Unser Problem ist, dass wir bisher nur wenige, einfache Beispiele von Maßen angeben können, was teilweise daran liegt, dass die σ -Algebren nur relativ schwer explizit beschrieben werden können und μ für alle $A \in \mathcal{A}$ definiert sein muss. Eine sehr wichtige σ -Algebra, nämlich $\mathcal{B}^d$, haben wir uns aber bereits detailliert angesehen haben, weshalb wir folgende wichtige Definition festhalten möchten:

Definition 2.14.

Die Mengenfunktion $\lambda^d: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, die jedem halboffenen Rechteck $[a, b) = \prod_{n=1}^d [a_n, b_n) \in \mathcal{S}$ mit $a_n \leq b_n$ den elementargeometrischen Inhalt

$$\lambda^d([a, b)) = \prod_{n=1}^d (b_n - a_n) = EI([a, b))$$

zuordnet, heißt (d-dimensionales) Lebesgue-(Borel-)Maß.

Man beachte, dass λ^d bisher nur auf $\mathcal{S}$, nicht auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definiert ist! Es handelt sich dabei genauer gesagt um ein Lebesgue'sches Prema, was im folgenden Abschnitt (nicht nur auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) fortgesetzt wird.

Satz 2.15 (Existenz und Invarianz des Lebesgue-Maßes).

Das Lebesgue-Maß λ^d existiert als Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ und ist durch die Werte auf $\mathcal{S}$ eindeutig bestimmt. Weiterhin gilt für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

- a) λ^d ist translationsinvariant, also $\lambda^d(x + B) = \lambda^d(B)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.
- b) λ^d ist bewegungsinvariant, also $\lambda^d(R^{-1}(B)) = \lambda^d(B)$ für alle Bewegungen R auf $\mathbb{R}^d$.
- c) Es gilt für alle invertierbaren linearen Abbildungen $M \in GL(d, \mathbb{R})$ die spezielle Transformationsformel: $\lambda^d(M^{-1}(B)) = |\det M|^{-1} \lambda^d(B)$.

Beispiel: (a) Verhalten bei Homothetien : Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ borelsch und $r > 0$. Sei rB das Bild von B unter der Homothetie $x \mapsto r \cdot x$. Dann gilt

$$\lambda^n(rB) = Vol_n(rB) = r^n Vol_n(B) = r^n \cdot \lambda^n(B),$$

da die Determinante der Homothetie (die eine lineare Abbildung ist) gleich r^n ist.

(b) Das von den linear unabhängigen Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte *Parallelotop*

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i a_i \mid 0 \leq t_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}$$

hat das Volumen

$$\lambda^n(P) = \text{Vol}_n(P) = |\det(a_1, \dots, a_n)|,$$

da P das Bild von $[0, 1]^n$ unter der linearen Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $A = (a_1, \dots, a_n)$ ist und der Einheitswürfel Volumen 1 hat. ♦

Wir wollen uns nun einigen Übungsaufgaben widmen.

Aufgabe 2.9.

Welche der folgenden Mengenfunktionen definiert kein Maß auf $\mathcal{P}(E)$, wobei E eine nicht-leere Menge und $Y \subseteq E$ eine mindestens zweielementige Menge bezeichnet?

$$\mu_1 : A \mapsto \begin{cases} 1, & A \cap Y \neq \emptyset, \\ 0, & A \cap Y = \emptyset \end{cases} \quad \mu_2 : A \mapsto \begin{cases} \infty, & A \cap Y \neq \emptyset, \\ 0, & A \cap Y = \emptyset \end{cases} \quad \mu_3 : A \mapsto \begin{cases} \infty, & Y \subseteq A \\ 0, & Y \not\subseteq A \end{cases}$$

Lösung: μ_1, μ_3 sind keine Maße. Dazu betrachte man $\mu(\{a\} \cup \{b\})$ mit $a, b \in Y$. Für μ_2 muss der Beweis geführt werden, dass es ein Maß ist. Da $\mathcal{P}(E)$ bekannterweise σ -Algebra ist und $\mu(\emptyset) = 0$ offensichtlich gilt, bleibt nur noch zu untersuchen: Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(E)$ Folge paarweise disjunkter Mengen. Gilt für alle $j \in \mathbb{N}$, dass $A_j \cap Y = \emptyset$ gilt, so ist auch $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \cap Y = \emptyset$ und damit offensichtlich (iii) erfüllt. Existiert nun andererseits ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass $A_{j_0} \cap Y \neq \emptyset$. Dann ist wieder $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \cap Y \neq \emptyset$, also $\mu_2 \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \infty$. Andererseits ist

Also gilt wieder (iii). ♦

Aufgabe 2.10.

Warum kann in (g) (Stetigkeit des Maßes von oben) die Bedingung $\mu(B_1) < \infty$ nicht weggelassen werden?

Lösung: Betrachte entweder $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ und $B_n = [n, \infty)$ oder $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mit dem Zählmaß

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(A), \quad A \subseteq \mathbb{N}$$

sowie $B_n = \{n, n+1, \dots\}$. Dann folgt der Widerspruch wegen $\mu \left(\bigcap_n B_n \right) = 0$ und $\mu(B_n) = \infty$. ♦

Aufgabe 2.11.

Sei $(E, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $A \in \mathcal{A}$ eine μ -Nullmenge, d.h. $\mu(A) = 0$. Zeigen Sie:

- (a) $\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A}, N \text{ Teilmenge einer } \mu\text{-Nullmenge aus } \mathcal{A}\}$ ist eine σ -Algebra mit $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$.
- (b) $\bar{\mu}(A^*) := \mu(A)$ für $A^* = A \cup N \in \overline{\mathcal{A}}$ ist wohldefiniert (d.h. unabhängig von der Darstellung von A^* als $A \cup M$).
- (c) $\bar{\mu}$ ist ein Maß auf $\overline{\mathcal{A}}$ und $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
- (d) Es gilt: $\overline{\mathcal{A}} = \{A^* \subseteq E \mid \text{es existieren } A, B \in \mathcal{A} : A \subseteq A^* \subseteq B \text{ und } \mu(B \setminus A) = 0\}$.

Lösung: (a) Bezeichne die Familie aller Teilmengen von μ -Nullmengen mit

$$\mathcal{N} = \{N \subseteq E \mid \exists A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0, N \subseteq A\}$$

Offensichtlich ist $\emptyset \in \mathcal{N}$, da $\emptyset \in \mathcal{A} : \mu(\emptyset) = 0$. Daher ist für $A \in \mathcal{A}$ auch $A = A \cup \emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$. Nun zeigen wir: $\overline{\mathcal{A}}$ ist σ -Algebra.

- (1) Wegen $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\emptyset \in \mathcal{N}$ ist $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$.
- (2) Sei $A^* = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}$. Nach Voraussetzung ex. ein $M \in \mathcal{A} : \mu(M) = 0, N \subseteq M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (A^*)^c &= (A \cup N)^c = A^c \cap N^c = (A^c \cap N^c) \cap (M^c \cup M) \\ &= \underbrace{(A^c \cap M^c)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(A^c \cap N^c \cap M)}_{\subseteq M} \end{aligned}$$

wegen $M^c \subseteq N^c$ und damit wegen $\mu(M) = 0$, dass $(A^*)^c \in \overline{\mathcal{A}}$.

- (3) Sei $(A_j^*) \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. Ferner sei $A_j^* = A_j \cup N_j$ mit $A_j \in \mathcal{A}, N_j \in \mathcal{N}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j^* = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{A_j}_{\in \mathcal{A}} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{N_j}_{\in \mathcal{N}},$$

da die abzählbare Vereinigung von (Teilmengen von) Nullmengen wieder (Teilmenge von) Nullmenge ist (Nachprüfen!).

- (b) Sei $A^* \in \overline{\mathcal{A}}$. Zeige, dass $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ für zwei verschiedene Darstellungen $A^* = A_1 \cup N_1$ und $A^* = A_2 \cup N_2$ mit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ und $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ gilt. Es existieren dann $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M_1) = \mu(M_2) = 0$ und $N_1 \subseteq M_1$ sowie $N_2 \subseteq M_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A_1 &\subseteq A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subseteq A_2 \cup M_2 \\ A_2 &\subseteq A_2 \cup N_2 = A_1 \cup N_1 \subseteq A_1 \cup M_1. \end{aligned}$$

Wegen Monotonie und Subadditivität des Maßes folgt

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup M_2) \leq \mu(A_2) + \mu(M_2) = \mu(A_2) \quad \text{und analog} \quad \mu(A_2) \leq \mu(A_1).$$

Das zeigt $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

- (c) Wir haben bereits gesehen: für $A \in \mathcal{A}$ ist $A \cup \emptyset$ zulässig und $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$. Wir wissen daher wegen $\emptyset \in \mathcal{A} : \bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Betrachte daher noch $(A_j^*)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ Folge disjunkter Mengen. Schreibe: $A_j^* = A_j \cup N_j$ mit $A_j \in \mathcal{A}, N_j \in \mathcal{N}$. In (a) haben wir gesehen:

$$A^* = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j^* = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{A_j}_{=: A \in \mathcal{A}} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{N_j}_{=: N \in \mathcal{N}}.$$

Gemäß (b) gilt daher

$$\bar{\mu}(A^*) = \mu(A) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_j^*).$$

(d) Sei $\mathcal{B}$ die in der Behauptung benannte Menge und zeige $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$. Sei daher $A^* \in \overline{\mathcal{A}}$. Dann ist $A^* = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{N}$. Dann existiert ein $M \in \mathcal{A} : N \subseteq M, \mu(M) = 0$. Nun behaupten wir, dass $B := A \cup M$ alle Voraussetzungen erfüllt. Dann gilt

- $B \in \mathcal{A}$ wegen $A, M \in \mathcal{A}$
- $A \subseteq A^* \subseteq A \cup M = B$
- $\mu(B \setminus A) = \mu(M) = 0$.

Sei nun $A^* \in \mathcal{B}$ beliebig und A, B wie in der Definition von $\mathcal{B}$. Dann gilt für $N := A^* \setminus A$ und $M := B \setminus A$ offenbar

- $N \in \mathcal{N}$ wegen $N \subseteq M$ und $\mu(M) = \mu(B \setminus A) = 0$.
- $A^* = A \cup (A^* \setminus A) = A \cup N$.

Folglich ist $A^* \in \overline{\mathcal{A}}$. ♦

2.2.2 Eindeutigkeit von Maßen und Dynkin-Systeme

Zunächst widmen wir uns aber folgender

Frage: Reicht die Vorgabe von Maßen auf Erzeugern einer σ -Algebra?

Problem: Erzeuger können nur selten konstruktiv zur erzeugten σ -Algebra erweitert werden.

Ausweg bietet das Hilfsmittel der Dynkin-Systeme: das sind Familien $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(E)$ mit

- (a) $E \in \mathcal{D}$
- (b) $D^c \in \mathcal{D}$ für alle $D \in \mathcal{D}$
- (c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$ für alle $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ disjunkt.

In der Übung haben wir den Zusammenhang zu σ -Algebren und das Dynkin-System-Beweisargument besprochen. Diese Vorbereitungen dienen insbesondere dem Beweis des folgenden Satzes:

Satz 2.16 (Eindeutigkeitssatz für Maße).

Sei $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und μ, ν Maße auf $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S}), \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Es gelte:

- (a) $\mathcal{S}$ ist $\cap$ -stabil,
- (b) Es gibt eine Folge $(G_n)_n \subseteq \mathcal{S}$ mit $G_n \uparrow E$ und $\mu(G_n), \nu(G_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: Ist $\mu(G) = \nu(G)$ für alle $G \in \mathcal{S}$, also $\mu|_{\mathcal{S}} = \nu|_{\mathcal{S}}$, so gilt $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, also $\mu = \nu$.

Für W-Maße kann Bedingung (b) weggelassen werden.

Als Anwendung dieses Satzes und der Dynkin-Systeme zeigt man für das Lebesgue-Maß (falls es denn existiert), dass es ein ganz besonderes Maß ist:

Satz 2.17 (Translationsinvarianz).

Das d -dimensionale Lebesgue-Maß ist translationsinvariant, d.h.

$$\lambda^d(x + B) = \lambda^d(B) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

wobei $x + B := \{x + b \mid b \in B\}$ die um $x \in \mathbb{R}^d$ verschobene Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ist.

Ist μ ein beliebiges translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit $\alpha := \mu([0, 1]^d) < \infty$, dann gilt

$$\mu(B) = \alpha \cdot \lambda^d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Beweis: Wir zeigen nur den letzten Teil des Satzes. Dazu parkettieren wir $I \in \mathcal{S}_{rat}$ (also rechtshalboffener Quader mit rationalen Eckpunkten) mit Rechtecken $x^{(k)} + [0, \frac{1}{M}]^d$, die also Seitenlänge $\frac{1}{M}$, beispielsweise mit $M = kgV\{\text{Nenner der } a_1, b_1, \dots\} \in \mathbb{N}$, und linke untere Ecke $x^{(k)} \in \mathbb{R}^d$ haben (Skizze!). Dann ist also

$$I = \bigcup_{k=1}^{N(I)} \left(x^{(k)} + \left[0, \frac{1}{M} \right]^d \right)$$

mit $N(I) \in \mathbb{N}$. Wegen Translationsinvarianz von λ^d und μ folgt

$$\lambda^d(I) = N(I) \cdot \lambda^d\left(\left[0, \frac{1}{M}\right]^d\right) \quad \text{sowie} \quad \mu(I) = N(I) \cdot \mu\left(\left[0, \frac{1}{M}\right]^d\right)$$

sowie speziell

$$\underbrace{\lambda^d([0, 1]^d)}_{=1} = M^d \cdot \lambda^d\left(\left[0, \frac{1}{M}\right]^d\right) \quad \text{sowie} \quad \underbrace{\mu([0, 1]^d)}_{=\alpha} = M^d \cdot \mu\left(\left[0, \frac{1}{M}\right]^d\right).$$

Aus den beiden Gleichungen für λ^d ergibt sich

$$\lambda^d(I) = \frac{N(I)}{M^d}$$

und aus den beiden Gleichungen für μ erhalten wir

$$\mu(I) = \frac{N(I)}{M^d} \cdot \mu([0, 1]^d) = \frac{N(I)}{M^d} \cdot \alpha.$$

Beides zusammen liefert

$$\mu(I) = \alpha \cdot \lambda^d(I) \quad \forall I \in \mathcal{S}_{rat}.$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt dann aber $\mu = \alpha \cdot \lambda^d$. □

Aufgabe 2.12 (Nullmengen).

Betrachte das Lebesgue-Maß λ^d auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Zeigen Sie, dass

(a) für alle Mengenfolgen $(N_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ Lebesgue'scher Nullmengen, also $\lambda^d(N_j) = 0 \forall j \in \mathbb{N}$, gilt: $\lambda^d\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j\right) = 0$.

(b) für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $\{r\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda^1(\{r\}) = 0$ (Hinweis: Stetigkeit von oben).

Man zeige weiterhin: Ebenen $E \subseteq \mathbb{R}^3$ sind Borel-messbar (also aus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$) und Lebesgue-Nullmengen. Muss für eine λ^d -Nullmenge N auch stets $M \subseteq N$ eine λ^d -Nullmenge sein?

Aufgabe 2.13 (Stochastische Unabhängigkeit).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ seien σ -Algebren. Dann heißen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ (stochastisch) unabhängig, falls für alle $B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}$ gilt:

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Seien nun $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{H}$ durchschnittstabile Erzeugerfamilien von $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ genau dann stoch. unabhängig sind, wenn gilt

$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G) \cdot \mathbb{P}(H) \quad \forall G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}.$$

Anleitung: Für die Richtung $(\Leftarrow)$ bietet sich das Dynkin-System-Argument an, wobei man

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \mid \forall G \in \mathcal{G} : \mathbb{P}(A \cap G) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(G)\}$$

betrachtet, woraus

$$\mathbb{P}(C \cap G) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(G) \quad \forall C \in \mathcal{C}, G \in \mathcal{G}$$

folgt. Dann betrachtet man analog

$$\mathcal{D}' := \{A \in \mathcal{A} \mid \forall C \in \mathcal{C} : \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)\}.$$

2.2.3 Fortsetzungssatz von Carathéodory

Unser eingeführtes Lebesgue-Borel-Prämaß λ^d auf rechtshalboffenen Quadern aus $\mathcal{S}$, dass wir bereits (tollkühnerweise) Lebesgue-Maß getauft hatten, führt zu folgender

Frage 1: Wie kann ein Prämaß (als Maß mit zu kleinem Definitionsbereich) zu einem Maß fortgesetzt werden und wann ist diese Fortsetzung eindeutig?

Was die Eindeutigkeit betrifft, so können wir auf den entsprechenden Satz aus dem vorigen Abschnitt zurückgreifen. Eine weitere Problematik wird aber durch folgende Frage gegeben:

Frage 2: Welche Erzeuger sind für eine Fortsetzung geeignet?

Die Antwort auf diese Frage sind Halbringe auf E: Mengensysteme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(E)$ mit

- (a) $\emptyset \in \mathcal{S}$
- (b) $S \cap T \in \mathcal{S} \forall S, T \in \mathcal{S}$,
- (c) Für alle $S, T \in \mathcal{S}$ existieren $m \in \mathbb{N}, S_1, \dots, S_m \in \mathcal{S}$ disjunkt mit

$$S \setminus T = \bigcup_{n=1}^m S_n.$$

So bilden beispielsweise die halboffenen Rechtecke einen Halbring. Damit können wir den *zentralen Satz* der Maßtheorie formulieren:

Satz 2.18 (Fortsetzungssatz von Carathéodory).

Sei $\mu: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf einem Halbring $\mathcal{S}$ aus E . Dann existiert eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$. Diese ist eindeutig, falls eine Folge S_n in $\mathcal{S}$ existiert mit $S_n \uparrow E$ und $\mu(S_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Der Satz sagt also insbesondere aus, dass es genügt, ein Maß nur auf einem Halbring zu kennen und dass dieses auch nur dort die Maß-Eigenschaften (also σ -Additivität) besitzen muss. Alle Eigenschaften für Maße vererben sich also damit von $\mathcal{S}$ auf $\sigma(\mathcal{S})$!

Die Beweisidee des Satzes sollte man sich unbedingt vor Augen führen. Die dafür notwendigen Hilfsmittel, die in der Vorlesung bereits wesentlich eher erbracht worden sind, sind noch einmal im folgenden Abschnitt dargelegt.

Beweis (Beweisidee des Fortsetzungssatzes): Zu $A \subseteq E$ betrachtet man die Überdeckung durch Mengen aus $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{C}(A) := \left\{ (S_n)_n \subseteq \mathcal{S} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \supseteq A \right\},$$

wobei für $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *nicht notwendig* die Disjunktheit oder die Zugehörigkeit zu $\mathcal{S}$ gefordert wird. Weiter definiert man die Mengenfunktion $\mu^*: \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, \infty]$ als

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \right\},$$

wobei im Falle der Nicht-Existenz einer $\mathcal{S}$ -Überdeckung $\mathcal{C}(A) = \emptyset$ ist und somit $\mu^*(A) = \inf \emptyset = \infty$.

Als ersten Schritt zeigt man, dass μ^* ein äußeres Maß auf E (!) ist und μ fortsetzt i.d.S., dass $\mu^*|_{\mathcal{S}} = \mu$ gilt.

Als zweiten Schritt weist man nach, dass die μ^* -messbaren Mengen

$$\mathcal{A}^* := \{ A \subseteq E \mid \mu^*(M) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(M \setminus A) \forall M \subseteq E \}$$

eine σ -Algebra bilden, die $\mathcal{S}$ (und somit $\sigma(\mathcal{S})$) enthalten. Weiterhin ist zu zeigen, dass $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ ein Maß ist und somit insbesondere dann auch $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ ein Maß ist, dass μ fortsetzt.

Als dritten und letzten Schritt begründet man die Eindeutigkeit der Fortsetzung mittels des Eindeutigkeitssatzes für Maße. $\square$

Bemerkung: Im allgemeinen gilt: $\sigma(\mathcal{S}) \subsetneq \mathcal{A}^*$. Es ist i.d.R. nicht möglich, ein nicht-triviales Maß auf der gesamten Potenzmenge von E zu definieren, wie in der Vorlesung gezeigt worden ist⁷. $\blacklozenge$

Korollar: λ^1 ist ein Prämaß auf der Menge der rechts-halboffenen Intervalle $\mathcal{S}$ und daher ein Maß auf $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Es ist das einzige Maß mit $\lambda^1([a, b)) = b - a$. $\blacklozenge$

Mit Induktion o.ä. kann man dies auf höhere Dimensionen übertragen.

2.2.4 Äußere Maße

In der Vorlesung wurde bereits sehr zeitig der Begriff des äußeren Maßes eingeführt, das für *alle* Teilmengen aus E erklärt ist. Das ist ein deutlicher Unterschied zu Maßen, denn es gibt kein Maß, das auf ganz $\mathcal{P}(E)$ definiert ist, beispielsweise $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Mit dieser Problematik sind wir in die Vorlesung dieses Semester gestartet (siehe Konstruktion der Vitali-Menge in der Vorlesung). Es gibt jedoch *äußere* Maße, die jeder beliebigen Teilmenge von E eine Zahl als äußeres Maß zuordnen. Mit dem folgenden Nachtrag kann man die nötige Verknüpfung des Vorlesungsstoffs mit (ggf.) hier in der Übung weiter oben vorgegriffenen und für (Prä-)Maße formulierten Ergebnissen herstellen.

Zunächst wurde das äußere Lebesgue-Maß von $A \subseteq E$ über die abzählbare Überdeckung durch beschränkte Quader Q_n definiert als

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} EI(Q_n) : A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n, Q_n \text{ beschränkter Quader} \right\},$$

wobei EI den Elementarinhalt eines Quaders mit Eckpunkten a, b bezeichnet, also

$$EI(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i),$$

wobei in der Maßtheorie $0 \cdot \infty := 0$ und $c \cdot \infty = \infty$ für alle $c > 0$ gesetzt wird. So kann man beispielsweise das äußere Maß von

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} [0, 1)^d + k$$

bestimmen. Das äußere Lebesgue-Maß ändert sich nicht, wenn man beispielsweise nur abgeschlossene oder halboffene Quader betrachtet.

Korollar: Es gilt $\lambda^*(\emptyset) = 0$ und

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(A_n) \quad \text{für beliebige Mengen } A_n \subseteq E : A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \quad \blacklozenge$$

⁷Für das Lebesgue-Maß kann man sich beispielsweise das *Banach-Tarski-Paradox* ansehen, bei dem zwei Kugeln mit Radius 1 und 2 um Null im $\mathbb{R}^d$ für $d \geq 3$ in endlich viele diskunkte Mengen zerlegt werden, die kongruent sind. Der Widerspruch im Bezug auf die sich daraus ergebende Maßgleichheit der Kugeln zeigt, dass nicht alle Teilmengen Borelmengen sein können

Ganz allgemein definiert man:

Definition 2.19 (äußeres Maß und messbare Mengen).

Wir nennen eine auf der Potenzmenge (!) von E definierte Abbildung $\mu: \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß, falls gilt:

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ für $A \subseteq B$,
- (c) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Die Familie der bzgl. des äußeren Maßes μ messbaren Mengen (nach Carathéodory) werden mit $\mathfrak{M}_\mu$ bezeichnet und sind jene Mengen $A \subseteq E$, so dass gilt:

$$\forall M \subseteq E : \mu(M) = \mu(M \cap A) + \mu(M \setminus A).$$

Aus der σ -Subadditivität des äußeren Maßes μ folgt:

$$A \in \mathfrak{M}_\mu \iff \forall M \subseteq E : \mu(M) \geq \mu(M \cap A) + \mu(M \setminus A).$$

Satz 2.20.

Sei $\mu: \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, \infty]$ äußeres Maß auf E . Dann ist das System der μ -messbaren Mengen $\mathfrak{M}_\mu$ eine σ -Algebra aus E und $\mu|_{\mathfrak{M}_\mu}$ ein Maß.

In diesem Sinne wurden in der Vorlesung abgeschlossene und offene Halbräume des $\mathbb{R}^d$ und schließlich ganz allgemein Borelsche-Mengen als λ^* -messbar identifiziert. Außerdem wurde gezeigt: Ist μ äußeres Maß auf E und $N \subseteq E$ eine μ -Nullmenge, d.h. $\mu(N) = 0$, so ist N λ -messbar, also $N \in \mathfrak{M}_\mu$.

2.2.5 Borel-Maße und topologische Eigenschaften

Es lässt sich zeigen (und oft auch nützlich verwenden), dass der $\mathbb{R}^d$ die Lindelöf-Eigenschaft hat: für jede Familie $(G_i)_{i \in I}$ offener Mengen aus $\mathbb{R}^d$ mit *beliebiger* Indexmenge I existiert eine höchstens abzählbare Folge $(i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$ mit

$$\bigcup_{i \in I} G_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{i_n}.$$

Dabei reicht für die Lindelöf-Eigenschaft die Forderung, dass für jedes offene $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine höchstens abzählbare Familie von Mengen $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, so dass gilt

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n.$$

In einem metrischen Raum (X, ρ) ist das genau dann der Fall, wenn eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge M von X existiert, d.h. $\overline{M} = X$. Der metrische Raum heißt in diesem Fall separabel. Im $\mathbb{R}^d$ ist dies beispielsweise durch $M = \mathbb{Q}^d$ erfüllt. Ferner ist ein metrischer Raum genau dann kompakt, wenn zu jeder Überdeckung aus offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung existiert. Man spricht auch von Überdeckungskompaktheit.⁸

⁸Näheres dazu in der Vorlesung Funktionalanalysis 1.

Definition 2.21.

^a Sei μ ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^d$. Dann heißt μ

- (a) Borel-Maß, wenn alle Borelmengen bzgl. μ messbar sind, also $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathfrak{M}_\mu$. Das ist genau dann der Fall, wenn alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar sind.
- (b) Borel-reguläres Maß, falls μ Borel-Maß ist und für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Borel-menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ existiert mit $A \subseteq B$ und $\mu(A) = \mu(B)$.
- (c) Radon-Maß, falls μ Borel-reguläres Maß ist und für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt: $\mu(K) < \infty$.

^aAnaloge Definition ist in allgemeinen metrischen Räumen (X, ρ) möglich.

In der Vorlesung wurde gezeigt:

Satz 2.22.

Für alle $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda^*(U) \mid A \subseteq U, U \text{ offen}\}.$$

Daher ist das (äußere) Lebesgue-Maß λ^* ein Radon-Maß.

2.2.6 Lebesgue-Maß

Das LEBESGUE-Maß ist *das* Maß im euklidischen Raum, das geometrischen Objekten ihren elementargeometrischen Inhalt zuordnet, also Länge einer Strecke, Fläche eines Kreises, Volumen eines Würfels, etc. Es ist ein Spezialfall des Lebesgue-Stieltjes-Maßes ⁹.

Das Lebesgue-Maß entsteht durch Vervollständigung des (bisher) betrachteten Lebesgue-Borel-Maß. Es entsteht durch Hinzunahme aller Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$, die zwischen zwei Borel-Mengen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ liegen, also $\mathcal{B}_1 \subseteq A \subseteq B_2$, und deren Differenzmenge eine Lebesgue-Nullmenge¹⁰ ist, also $\lambda(B_2 \setminus B_1) = 0$. Dann setzt man für solche Mengen $\lambda(A) = \lambda(B_1) = \lambda(B_2)$. Die Mengen, für die dieses Maß definiert ist, heißen Lebesgue-messbar und bilden die Lebesgue- σ -Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^d$. Aus der Definition des Lebesgue-Maßes folgt $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{L}^d$, aber die Lebesgue-messbaren Mengen $\mathcal{L}^d$ sind wesentlich größer als die Borel-messbaren Mengen $\mathcal{B}^d$ denn es lässt sich zeigen:

$$2^{\#\mathbb{R}^d} = \#(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)) = \#\mathcal{L}^d > \#\mathcal{B}^d = \#(\mathbb{R}^d).$$

Es sind daher nicht alle Lebesgue-messbaren Mengen (auch nicht bzgl. des äußeren Maßes λ^*) borelsch, d.h. $\mathfrak{M}_\lambda \not\subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Abzählbare Mengen (wie $\mathbb{Q}$) sind Lebesgue-Nullmengen. Es gibt aber auch überabzählbare Lebesgue-Nullmengen, wie das Cantor'sche Diskontinuum. Genaueres zu Nullmengen und Aussagen, die überall bis höchstens auf eine Lebesgue-Nullmenge

⁹Betrachte den messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und eine rechtsseitig stetige, monoton wachsende Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt das über $\lambda_F((a, b]) := F(b) - F(a)$ eindeutig bestimmte Maß das Lebesgue-Stieltjes-Maß. Als Spezialfall erhalten wir das Lebesguemaß über $F(x) := x$. Fordert man zusätzlich $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, so ist λ_F ein W-Maß und F heißt Verteilungsfunktion.

¹⁰Lebesgue-Nullmengen sind Lebesgue-messbare Mengen mit Lebesgue-Maß null.

gelten werden wir später beim Lebesgue-Integral untersuchen. Wir wissen auch, dass es nicht-Lebesgue-messbare Mengen gibt (Vitali-Menge). Daher ist folgende Charakterisierung hilfreich:

Satz 2.23 (Charakterisierung der Lebesgue-Messbarkeit).

$A \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ existieren, so dass gilt

$$F \subseteq A \subseteq U \quad \text{mit} \quad \lambda^d(U \setminus F) < \epsilon.$$

2.2.7 Approximationssätze

Lebesgue-messbare Mengen lassen sich hinsichtlich ihrer Maße beliebig genau durch offene und abgeschlossene Mengen approximieren. Daher lässt sich auch das entsprechende Maß über Suprema bzw. Infima erfassen. Grundlage bildet der folgende Satz:

Satz 2.24.

^a Sei $A \in \mathcal{L}^d$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene (Ober-)Menge $U \supseteq A$ und eine abgeschlossene (Teil-)Menge $F \subseteq A$ mit

$$\lambda^d(U \setminus A) < \epsilon \quad \text{und} \quad \lambda(A \setminus F) < \epsilon.$$

^aEin analoger Satz mit gleicher Folgerung für die Bestimmung des Maßes von A gilt für das Lebesgue-Stieltjes-Maß λ_F .

Der Satz sagt also grob aus, dass jede Lebesgue-messbare Menge des $\mathbb{R}^d$ näherungsweise gleich einer offenen Menge ist. Aus dem Satz schlussfolgert man, dass für jedes $A \in \mathcal{L}^d$ gilt:

$$\begin{aligned} \lambda^d(A) &= \inf\{\lambda^d(U) : A \subseteq U, U \text{ offen}\} \\ &= \sup\{\lambda^d(F) : F \subseteq A, F \text{ abgeschlossen}\} \\ &= \sup\{\lambda^d(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\} \end{aligned}$$

Hierbei sei der Beweis der dritten Gleichung erwähnt: denn während die ersten beiden aus dem vorigen Satz schnell ersichtlich sind, muss man bei der letzten zeigen, dass eine kompakte, also abgeschlossen und beschränkte Menge K gefunden werden kann, die beliebig gut $\lambda^d(A)$ approximiert. Sei dazu $C \in \mathbb{R}$ mit $C < \lambda^d(A)$. Dann existiert eine abgeschlossene Menge $F \subseteq A$ mit $\lambda^d(F) > C$. Nun gilt aber

$$K_n := F \cap [-n, n]^d \uparrow F \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \text{ also} \quad \lambda^d(K_n) \uparrow \lambda^d(F)$$

wegen Stetigkeit des Maßes. Dann existiert aber ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\lambda^d(K_N) > C$.

Im Folgenden halten wir noch eine besondere, messbare Menge fest. $A \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt konvex, falls

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A \quad \forall x, y \in A, \lambda \in [0, 1].$$

Konvexe Mengen beinhalten also auch immer alle Verbindungsstrecken zwischen Punkten aus sich.

Satz 2.25.

Der Rand ∂A einer konvexen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine Lebesgue-Nullmenge. Folglich ist jede konvexe Menge aus $\mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar.

Beachte: Konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^d, d \geq 2$ brauchen *nicht* Borelsch zu sein! Betrachte dazu eine offene Kugel $B \subseteq \mathbb{R}^d, d \geq 2$. Dann existiert eine nicht-Borelsche Teilmenge $M \subseteq \partial B$ auf dem Rand der Kugel (warum?) und $M \cup B$ ist konvex, aber nicht Borelsch.

Aufgabe 2.14.

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\}$. Dann ist $f(A)$ eine Lebesgue-Nullmenge.

Hinweis: Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist disjunkte Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle. Unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung zeigt man die Behauptung unter Betrachtung der Mengen (mit $\epsilon > 0, n \in \mathbb{N}$):

$$A_n(\epsilon) = \{x \in (-n, n) : |f'(x)| < \epsilon \cdot 2^{-n}\}.$$

2.2.8 Exkurs: Jordan-Messbarkeit

Ein alternativer Zugang zur Maß- und Integrationstheorie wurde um 1890 von JORDAN unabhängig von PEANO entwickelt, nämlich eine Inhaltslehre für Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ und ein Integralbegriff, der dem Riemann'schen Integralbegriff analog ist. Als Exkurs soll dieser Zugang kurz skizziert werden:

Definition 2.26.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt Jordan-messbar, falls A beschränkt ist und falls gilt

$$\mathcal{J}^d(A) := \sup\{\lambda^d(M) : M \in \mathcal{S}^d, M \subseteq A\} = \inf\{\lambda^d(N) : N \in \mathcal{S}^d, N \supseteq A\}$$

mit $\mathcal{S}^d := \{\bigcup_{k=1}^n I_k : I_k = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i], a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, I_k \text{ disjunkt}\}$. Dann heißt $\mathcal{J}^d(A)$ Jordan-Maß von A . Das System der Jordan-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $\mathcal{J}^d$.

Man kann (als Übung) zeigen, dass für eine Jordan-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt: $A \in \mathcal{L}^d$, also auch Lebesgue-messbar, und $\lambda^d(A) = \mathcal{J}^d(A)$. Ferner ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ genau dann Jordan-messbar, wenn A beschränkt und der Rand ∂A eine Jordan-Nullmenge ist. Das System der Jordan-messbaren Mengen $\mathcal{J}^d$ bildet einen Ring und für jedes $A \in \mathcal{J}^d$ gilt, dass auch das Innere $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{J}^d$ und der Abschluss $\overline{A} \in \mathcal{J}^d$ Jordan-messbar sind mit

$$\mathcal{J}^d(A) = \mathcal{J}^d(\overset{\circ}{A}) = \mathcal{J}^d(\overline{A}).$$

Eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann Lebesgue-Nullmenge, wenn K Jordan-Nullmenge ist. Dass nicht jede beschränkte Lebesgue-Nullmenge eine Jordan-Nullmenge ist, sieht man beispielsweise an $\mathbb{Q}^d \cap [0, 1]^d$. Allerdings ist jede (offene oder abgeschlossene) Kugel und jede beschränkte, konvexe Teilmenge in $\mathbb{R}^d$ Jordan-messbar.

2.3 Messbare Abbildungen

Seien $(E, \mathcal{A}), (E', \mathcal{A}')$ zwei messbare Räume und $T: E \rightarrow E'$ eine Abbildung. Wir fragen uns, wann T mit den σ -Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ verträglich ist i.d.S., wie eine stetige Abbildung mit den Topologien verträglich ist.

Definition 2.27.

Eine Abbildung $T: E \rightarrow E'$ heißt $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -messbar, falls

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'.$$

Alternativ schreibt man auch $T^{-1}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{A}$, wobei $T^{-1}(\mathcal{A}') := \{T^{-1}(A') | A' \in \mathcal{A}'\}$. Manchmal schreibt man auch für die Messbarkeitsannahme einer Abbildung, dass $T: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (E', \mathcal{A}')$ ist.

Es reicht beim Nachweis der Messbarkeit einer Abbildung, die Bedingung für ein Erzeugendensystem zu prüfen:

Satz 2.28.

Sei $\mathcal{A}' = \sigma(S)$. Dann ist $T: E \rightarrow E'$ genau dann $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -messbar, falls gilt:

$$T^{-1}(S) \subseteq \mathcal{A}.$$

Messbare Abbildungen ähneln den stetigen Abbildungen (siehe Definition und Charakterisierungen in Analysis 1 bzw. 2).

Beispiel: Jede stetige Abbildung $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist Borel-messbar, d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -messbar, denn $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$, also wird diese von den offenen Mengen erzeugt, und somit folgt nach letztem Satz die Messbarkeit aus

$$\forall U' \in \mathcal{O}^n : \quad f^{-1}(U') \stackrel{\text{stetig}}{\in} \mathcal{O}^d \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad \blacklozenge$$

Die Umkehrung gilt nicht, also folgt nicht aus der Messbarkeit die Stetigkeit! Betrachte beispielsweise $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \mathbb{1}_{[-2,2]}(x)$. Dann ist f nicht stetig, aber messbar, weil

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset, & 0, 1 \notin B \\ [-2, 2], & 1 \in B, 0 \notin B \\ [-2, 2]^c, & 1 \notin B, 0 \in B \\ \mathbb{R}, & 1, 0 \in B. \end{cases}$$

Satz 2.29.

Seien $(E_n, \mathcal{A}_n)$, $n = 1, 2, 3$ messbare Räume und T messbare Abbildung zwischen E_1 und E_2 sowie S messbare Abbildung zwischen E_2 und E_3 . Dann ist auch $S \circ T: (E_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (E_3, \mathcal{A}_3)$ messbar.

Beweis: Für alle $A \in \mathcal{A}_3$ gilt $(S \circ T)^{-1}(A) = T^{-1} \circ S^{-1}(A) \in T^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$. □

Oftmals kennen wir zwar für die Abbildung $T: E \rightarrow E'$ die σ -Algebra $\mathcal{A}'$ in E' , suchen aber eine σ -Algebra $\mathcal{A}$ in E , sodass T messbar wird (siehe Vorlesungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie).

Beispiel: $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$: Raum der Beobachtungen (real existierend) mit einer (wenigstens theoretisch) beobachtbaren W-Verteilung μ . Dann ist der W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein mathematisches Modell und $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Abbildung zwischen Modell und Realität. Um mit X und dem W-Raum arbeiten zu können, ist zu klären, mit welchem $\mathcal{A}$ X messbar wird und wie X die Maße $\mathcal{P}$ und μ ineinander abbildet. ♦

Satz 2.30.

Seien $(T_i)_{i \in I}$ höchstens abzählbar viele Abbildungen $T_i: E \rightarrow E_i$ und $(E_i, \mathcal{A}_i)$ messbare Räume für alle $i \in I$. Dann ist

$$\sigma((T_i)_{i \in I}) := \sigma(\{A : \exists i \in I \text{ mit } A \in T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\}) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right)$$

die kleinste σ -Algebra in E , die alle T_i gleichzeitig messbar macht und wir nennen diese die von den $(T_i)_{i \in I}$ erzeugte σ -Algebra.

Messbare Abbildungen transportieren Maße von $(E, \mathcal{A})$ nach $(E', \mathcal{A}')$.

Satz 2.31.

Sei $T: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (E', \mathcal{A}')$ messbar und ν ein Maß auf $(E, \mathcal{A})$. Dann definiert

$$\nu'(A') = T(\nu)(A') = \nu \circ T^{-1}(A') := \underbrace{\nu(T^{-1}(A'))}_{\in \mathcal{A}}, \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

ein Maß auf $(E', \mathcal{A}')$, das sogenannte Bildmaß von ν unter T .

Beispiel: (a) Für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\lambda^d(x+B) = \lambda^d(\tau_x^{-1}(B)) = \tau_x(\lambda^d)(B)$, wobei $\tau_x: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $y \mapsto y - x$ und $\tau_x^{-1} = \tau_{-x}$ ist.

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, dann heißt

$X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ messbare Abbildung

eine Zufallsvariable (ZV) und

$$X(\mathbb{P})(B) = \mathbb{P} \circ X^{-1}(B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Verteilung von X , wobei die in der WTheorie üblichen Bezeichnungen $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$ und $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{X \in B\})$ verwendet wurden.

(c) konkretes Beispiel: Zweimaliges Würfeln beim Monopoly:

$$\Omega = \{(n, m) | 1 \leq n, m \leq 6\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}((n, m)) = \frac{1}{36}$$

sowie $X: \Omega \rightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$ mit $X((n, m)) := n + m$. Als Übung stellen wir in der Veranstaltung die Verteilung von X (Bildmaß unter X) auf. ♦

Beachte, dass bezüglich $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ jede Abbildung $X: (\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) \rightarrow (.,.)$ messbar ist, da $X^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\Omega)$ stets erfüllt ist.

Abschließend nennen wir:

Satz 2.32.

- (a) Sei $T \in O(d)$ orthogonale Matrix, d.h. $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $T^T T = id_{\mathbb{R}^d}$. Dann gilt $T(\lambda^d) = \lambda^d$.
- (b) Für $S \in GL(d, \mathbb{R})$ gilt $S(\lambda^d) = |\det S^{-1}| \cdot \lambda^d = |\det S|^{-1} \lambda^d$.
- (c) (Folgerung) Das Lebesguemaß λ^d ist invariant unter Bewegungen.

2.4 Messbare Funktionen

2.4.1 Messbarkeitskriterien

Eine messbare Abbildung $f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ heißt messbare (reelle) Funktion. Die Klasse der messbaren Funktionen ist von großer Bedeutung für die sich an diesen Abschnitt anschließende Integrationstheorie. Wir bezeichnen daher mit $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ die Menge aller messbaren Funktionen $f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zur Erinnerung:

$$f \text{ messbar} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \iff f^{-1}(G) \in \mathcal{A} \quad \forall G \in \mathcal{S} \text{ mit } \sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Dabei kann insbesondere $\mathcal{S} = \{[a, \infty) | a \in \mathbb{Q}\}$ wie früher gesehen gewählt werden, aber auch andere Intervallformen wie (b, ∞) , $(-\infty, c)$, $(-\infty, d]$, $b, c, d \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$.

Ein großer Vorteil von messbaren Funktionen im Vergleich zu allgemeinen messbaren Abbildungen liegt in der Formulierung einfacher zu handhabender Messbarkeitskriterien, was der folgende Satz spezifiziert:

Satz 2.33 (Messbarkeitskriterien).

Eine Funktion $f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist genau dann $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

- (a) $\{f \geq a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$
- (b) $\{f > a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$
- (c) $\{f \leq a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$
- (d) $\{f < a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$

Dabei verwenden wir die Schreibweise $\{f \geq a\} = \{f \in [a, \infty) = f^{-1}([a, \infty))$ bzw. ganz allgemein

$$\{f \in B\} := \{x \in E | f(x) \in B\} = f^{-1}(B).$$

Für Funktionen f, g schreiben wir

$$\{f \geq g\} := \{x \in E | f(x) \geq g(x)\}.$$

2.4.2 Erweiterte Reelle Achse

Oft werden wir statt $\mathbb{R}$ die erweiterte reelle Achse betrachten, also $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Die Rechenregeln für $\pm\infty$ können der Standardliteratur entnommen werden (siehe auch Quellen im Anhang). Hervorzuheben ist allerdings, dass $\pm\infty \mp \infty$ und $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ nicht definiert sind! In der Maßtheorie verwendet man weiterhin die übliche Konvention $1/\pm\infty = 0$ sowie die *unübliche* Konvention $0 \cdot (\pm\infty) = 0$. Insbesondere ist also $\overline{\mathbb{R}}$ kein Körper!

Definition 2.34.

Die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ besteht aus allen Mengen

$$B^* = B \cup S \quad \text{mit } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), S \in \{\emptyset, \{+\infty\}, \{-\infty\}, \{+\infty, -\infty\}\}.$$

Die Verträglichkeit dieser Definition mit den Borelmengen aus $\mathbb{R}$ ergibt sich aus dem Zusammenhang, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Spur- σ -Algebra bzgl. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist, d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ (siehe auch früheren Abschnitt). Zur Übung weise man das selbst nach!

Aufgabe 2.15.

Es sind $[-\infty, a)$ und $(b, \infty]$ offene Umgebungen von $\pm\infty$ bzgl. der Zweipunktkompaktifizierung $[-\infty, \infty]$ von $\mathbb{R}$. Daher gilt

$$\mathcal{B}([-\infty, \infty]) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}).$$

Zeigen Sie, dass die Borelmengen $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ von allen Intervallen $[a, \infty], (a, \infty], [-\infty, a], [-\infty, a)$ mit $a \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ erzeugt werden.

Lösung: Betrachte $\mathcal{A} := \sigma\{[a, \infty] : a \in \mathbb{Q}\}$ und seien $a, b \in \mathbb{Q}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann liefert

$$\begin{aligned} [a, \infty] &= [a, \infty) \cup \{\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) & \implies & \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \\ [a, b] &= [a, \infty] \setminus (b, \infty] \in \mathcal{A} & \implies & \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A} \\ \{+\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty] \in \mathcal{A}, \quad \{-\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n, \infty]^c \in \mathcal{A} & \implies & \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{A}. \end{aligned}$$

die Behauptung: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Die anderen Fälle laufen analog. ♦

In Analogie zur Einführung des Abschnitts bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$ die Menge aller messbaren Funktionen $f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

2.4.3 Einfache Funktionen

Beispiel: Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A(x)$ ist genau dann messbar, wenn A messbar ist (also $A \in \mathcal{A}$ gilt). Betrachte dazu $\{\mathbb{1}_A > a\}$ mit Fallunterscheidung $a \geq 1$ (liefert $\emptyset$), $a \in [0, 1)$ (liefert A), $a < 0$ (liefert E).

Weiterhin sind alle auf disjunkten, messbaren Mengen $A_1, \dots, A_M \in \mathcal{A}$ definierten Treppenfunktionen

$$t(x) := \sum_{n=1}^M y_n \mathbb{1}_{A_n}(x), \quad y_n \in \mathbb{R}, A_n \in \mathcal{A}.$$

messbar. Wir nennen diese Funktionen auch einfache Funktionen auf $(E, \mathcal{A})$ und bezeichnen mit $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{A})$ die Familie der einfachen Funktionen. Bilden die A_n sogar eine *disjunkte, endliche Zerlegung* von E mit

$$t(x) := \sum_{n=0}^N z_n \mathbb{1}_{A_n}(x), \quad z_n \in \mathbb{R}, A_n \in \mathcal{A},$$

so spricht man von einer Standarddarstellung. In beiden Fällen ist die Darstellung i.A. nicht eindeutig.

Die Messbarkeit einer einfachen Funktion folgt daraus, dass $g(x) = 0$ für $x \in A_0 := E \setminus (\bigcup_{n=1}^M A_n)$ gilt und wir somit $y_0 := 0$ setzen können, wodurch

$$g(x) = \sum_{n=0}^M y_n \mathbb{1}_{A_n}(x)$$

gilt und somit $\{g > a\} = \bigcup_{n: y_n > a} A_n \in \mathcal{A}$ ist (Skizze!).

Man kann zeigen: Jede messbare Funktion $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ mit endlicher Wertemenge $h(E) = \{y_1, \dots, y_m\}$ ist eine einfache Funktion. Dann ist außerdem

$$\sum_{a \in h(E)} a \cdot \mathbb{1}_{\{h=a\}}(x)$$

eine Standarddarstellung. Insbesondere gilt: Jedes $h \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ besitzt eine Standarddarstellung. ◆

In der Vorlesung wurde gezeigt, warum die einfachen Funktion von so großer Bedeutung sind: Jede messbare Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ kann durch einfache $\mathcal{A}$ -messbare Funktionen approximiert werden.

Satz 2.35 (Sombreiro-Lemma).

Ist $f : E \rightarrow [0, \infty]$ eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbare Funktion, so ist f aufsteigender Limes einer Folge $f_n \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ mit $f_n \geq 0$:

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Folglich existiert für jede $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbare Funktion $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge $(g_n)_n \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{A})$ mit $|g_n| \leq |g|$ und $g = \lim_n g_n$.

Für den letzten Teil (der oft als Folgerung aus dem ersten Teil, dem eigentlichen Sombreiro-Lemma, benannt wird) benutzt man für Funktionen $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die Aufspaltung der Funktion in den Positivteil

$$f^+(x) := \max(f(x), 0)$$

und Negativteil

$$f^-(x) := -\min(f(x), 0),$$

denn dann gilt $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. Außerdem ist für messbare Funktion f auch f^+, f^- messbar wegen $\{f^+ > a\} = \{f > a\}$ für $a \geq 0$ und E für $a < 0$ (analog f^-). Dann folgt

die Behauptung der Folgerung im Sombbrero-Lemma aus Anwendung des ersten Teils auf $f^\pm$.

Bemerkung: Die Konvergenz im Sombbrero-Lemma ist sogar gleichmäßig, wenn die Funktion f beschränkt ist.

2.4.4 Grundlegende Eigenschaften

Es gibt wichtige Funktionen, über deren Messbarkeit sofort entschieden werden kann. Diese sollen hier kurz vorgestellt werden.

Satz 2.36.

(a) Sei $(f_n)_n \subseteq \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$ Folge messbarer Funktionen. Dann sind auch

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_n f_n, \quad \liminf_n f_n$$

messbar, also in $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$, sowie, falls existent, auch $\lim_n f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$.

(b) Seien $f, g \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$ messbare Funktionen. Dann sind, insofern die Ausdrücke definiert sind (beachte Kommentare zu Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$), auch

$$u \pm v, \quad u \cdot v, \quad \max(u, v), \quad \min(u, v)$$

messbar.

(c) Es ist $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$ genau dann, wenn $|f|, f^+, f^- \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$.

(d) Sind $f, g \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$ messbare Funktionen, dann sind folgende Mengen messbar:

$$\{f < g\}, \quad \{f \leq g\}, \quad \{f = g\}, \quad \{f \neq g\} \in \mathcal{A}.$$

(e) Jede stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

(f) Jede links- oder rechtsseitig stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

(g) Jede unter- oder oberhalbstetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

(h) Jede monotone Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

Als Übung und zur Festigung der Inhalte dieses Abschnitts beschäftige man sich mit den Beweisen der im Satz genannten Aussagen (ggf. unter Zuhilfenahme von Literatur), da hierbei einige typische Beweisstrategien genutzt werden! Dabei ist insbesondere die Aussage (c) interessant: Für Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar ist auch $f^+, f^-, |f|$ messbar. Gilt auch die Umkehrung? *Hinweis:* Die Analyse führt darauf, dass sich aus der Messbarkeit von nur einer der drei Größen $f^+, f^-, |f|$ nicht auf die Messbarkeit von f schließen lässt, jedoch im Falle der Messbarkeit zwei der genannten Größen!

2.4.5 Aufgaben

Aufgabe 2.16 (Nicht-messbare Funktion).

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht Lebesgue-messbar. Dann definiere

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f nicht messbar ist.

Lösung: Angenommen, f wäre messbar. Dann ist $B := \{x | f(x) > 0\}$ messbar. Ferner ist $f(x) > 0 \iff x \in A, x \neq 0$. Also: $B = A \setminus \{0\}$.

Falls $0 \notin A$ folgt aus $A = B$ messbar der Widerspruch, Falls $0 \in A$, so ist $A = B \cup \{0\}$ messbar, was ebenfalls zum Widerspruch führt. Also Annahme falsch und f nicht messbar. ♦

Aufgabe 2.17 (Kein Messbarkeitskriterium).

Sei $f: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $\{f = a\}$ messbar für alle $a \in \mathbb{R}$. Folgt daraus die Messbarkeit von f ? (Verwenden Sie dabei ohne Beweis, dass es auf $\mathbb{R}$ nicht Borel-messbare Mengen gibt.)

Lösung: Nein. Betrachte beispielsweise mit einer nicht-messbaren Menge $E \subseteq \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in E \\ -x, & x \in E^c. \end{cases}$$

Ferner bezeichne $B := f^{-1}(\{a\})$. Dann ist $B \in \{\emptyset, \{c\}, \{-c\}, \{c, -c\}\}$, also in jedem Fall messbar.

f ist genau dann messbar, wenn $f^{-1}((-\infty, b])$ für alle $b \in \mathbb{R}$ messbar ist. Wähle speziell $b = 0$. Dann ist nach Definition von f

$$f^{-1}((-\infty, 0]) = ((-\infty, 0] \cap E) \cup ([0, \infty) \cap E^c) =: A$$

und wir zeigen, dass A nicht messbar ist. Nehmen wir an, dass A messbar ist, dann ist

$$[0, \infty) \cap A = [0, \infty) \cap E^c \quad (*)$$

messbar und die Menge

$$(\mathbb{R} \setminus \underbrace{([0, \infty) \cap E^c)}_{(*)}) \setminus (0, \infty) = (E \cup (-\infty, 0)) \setminus (-\infty, 0) = E \cap [0, \infty)$$

ebenfalls messbar. Das führt aber auf die Messbarkeit von

$$((-\infty, 0] \cap E) \cup (E \cap (0, \infty)) = E$$

und damit den Widerspruch, da E nicht messbar ist. ♦

Aufgabe 2.18.

Sei $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und das Lebesguemaß $\lambda_E := \lambda(E \cap \cdot)$ gegeben. Betrachte

$$Q: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) := x^2.$$

Zeigen Sie, dass $Q: \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist und bestimmen Sie das Bildmaß $\nu \circ Q^{-1}$ für $E_1 = [0, 1], \nu_1 = \lambda_{E_1}$ sowie $E_2 = [-1, 1], \nu_2 = \frac{1}{2}\lambda_{E_2}$.

Hinweis: Verwenden Sie für den Nachweis der Messbarkeit: $\mathcal{B}(E) = \{E \cap A \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ (Als weitere Übung beweise man diesen Zusammenhang).

Aufgabe 2.19.

Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Borel-messbar ist. (Gilt das auch, wenn wir die Vervollständigungen von $\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ betrachten?)

Hinweis: Betrachte beispielsweise $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (x, 0)^T$.

Aufgabe 2.20.

Beweisen Sie, dass jede monotone Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar ist. Wann gilt $\sigma(f) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2.21.

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist dann f bzw. f' messbar?

Diese Aufgaben wurden in den Übungen nur umrissen und dienen der Festigung des Vorlesungsstoffs sowie der Klausurvorbereitung!

Lebesgue-Integral

3.1 Konstruktion und Eigenschaften

Wir wollen nun erklären, wie wir die Fläche (das *Maß*) unter einer Kurve mit Integralen beschreiben können. Daher sei im folgenden $(E, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Wir nutzen aus dem vorigen Abschnitt die Bezeichnungen $\mathcal{E}(\mathcal{A})$, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ für die Familie der einfachen bzw. messbaren Funktionen. Für die nichtnegativen Funktionen schreiben wir $\mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$.

3.1.1 Integral nichtnegativer Treppenfunktionen

Zunächst betrachten wir die besonders einfache Situation von nichtnegativen Treppenfunktionen $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$. Da jede nichtnegative Treppenfunktion eine Standarddarstellung besitzt, können wir f schreiben als

$$0 \leq \sum_{n=0}^N y_n \mathbb{1}_{A_n}.$$

Ein Integral sollte dieser Funktion dann naheliegenderweise den Wert

$$\text{Integral} = \sum_{n=0}^N y_n \mu(A_n)$$

zuordnen, wobei wir die Konvention $0 \cdot \infty = 0$ wählen. Das so definierte Integral ist *wohldefiniert*, denn sind

$$f = \sum_{n=0}^N y_n \mathbb{1}_{A_n} = \sum_{m=0}^M z_m \mathbb{1}_{B_m}$$

zwei Standarddarstellungen von $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, so gilt

$$\sum_{n=0}^N y_n \mu(A_n) = \sum_{m=0}^M z_m \mu(B_m).$$

Das kann man leicht verifizieren, wenn man beachtet, das E disjunkte Vereinigung der A_n bzw. B_m ist und somit sich die A_n, B_m als folgende disjunkte Vereinigungen schreiben lassen:

$$A_n = \bigcup_{m=0}^M (A_n \cap B_m) \quad \text{bzw.} \quad B_m = \bigcup_{n=0}^N (A_n \cap B_m).$$

Dann braucht man nur noch $y_n = z_m$ für $A_n \cap B_m \neq \emptyset$ benutzen und die über obige disjunkte Vereinigung im Integral entstehenden Doppelsummen vertauschen.

Definition 3.1.

Sei $f = \sum_{n=0}^N y_n \mathbb{1}_{A_n} \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ in Standarddarstellung. Dann ist das (μ) -Integral von f

definiert als

$$I_\mu(f) := \sum_{n=0}^N y_n \mu(A_n) \in [0, \infty].$$

Tatsächlich liefert das bereits die von einem Integral gewünschten Eigenschaften, denn sind $f, g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, so gilt

- (a) $I_\mu(\mathbb{1}_A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- (b) positiv homogen: $I_\mu(\lambda f) = \lambda I_\mu(f) \quad \forall \lambda \geq 0$
- (c) additiv: $I_\mu(f + g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$
- (d) monoton: Ist $f \leq g$, so gilt $I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$.

3.1.2 Integral nichtnegativer messbarer Funktionen

Mit Hilfe des Sombbrero-Lemmas lassen sich allgemeine Funktionen $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$ durch aufsteigende Folgen von $\mathcal{E}^+$ -Funktionen approximieren. Also gibt es insbesondere unter jeder nichtnegativen messbaren Funktion f einfache Funktionen g . Daher ist es naheliegend, die Integraldefinition auf einfache Funktionen zurückzuführen.

Definition 3.2.

Sei $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$. Dann definiert

$$\int f \, d\mu := \sup \{I_\mu(g) \mid g \in \mathcal{E}(\mathcal{A}), 0 \leq g \leq f\} \in [0, \infty]$$

das (μ) -Integral von f . Wir schreiben auch, falls die Integrationsvariable hervorgehoben werden soll:

$$\int f(x) \, \mu(dx) \quad \text{oder} \quad \int f(x) \, d\mu(x).$$

Das Integral ist wiederum wohldefiniert, da Werte in $[0, \infty]$ zugelassen werden. Außerdem setzt das Integral aus dieser Definition das Integral $I_\mu(\cdot)$ fort, d.h. für alle $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ gilt

$$\int f \, d\mu = I_\mu(f).$$

Das zeigt man leicht mittels Monotonie von $I_\mu(\cdot)$ bzw. der Definition des sup in der Integral-Definition.

Wir halten an dieser Stelle einen ersten der sogenannten *Konvergenzsätze* fest, die sich mit der Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung befassen:

Satz 3.3 (Satz von Beppo Levi (BL)).

- (a) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$ aufsteigende Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen, also $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$. Dann ist auch

$$f := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$$

eine nichtnegative, messbare Funktion und es gilt

$$\int \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu.$$

(b) Sei $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$ fallende Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen, also $g_1 \geq g_2 \geq \dots$, mit

$$\int g_1 \, d\mu < \infty.$$

Dann ist auch

$$g := \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$$

eine nichtnegative, messbare Funktion und es gilt

$$\int \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n \, d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu.$$

Bemerkung: Die Konvergenz der Funktionenfolgen ist *fast überall* zu verstehen, also bis auf eine Nullmenge (siehe späteren Abschnitt über Nullmengen und fast überall geltende Eigenschaften). ♦

Für den aufsteigenden Limes schreiben wir auch oft $f_n \uparrow f$, also $f_n \leq f_{n+1} \, \forall n$ und $\lim_n f_n = f$, wobei $f_n \leq f_{n+1}$ bedeutet, dass $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \, \forall x \in E$ ist. Ferner gilt dann $f = \lim_n f_n = \sup_n f_n$.

Ein wichtiger Spezialfall wird als Folgerung festgehalten:

Folgerung: Sei $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$. Dann gilt für jede Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ mit $f_n \uparrow f$:

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu. \quad \blacklozenge$$

Beachte: Oft wird dieser letzte Zusammenhang aus der Folgerung als Definition von $\int f \, d\mu$ verwendet, was aber das Problem der Wohldefiniertheit aufwirft, nämlich die Unabhängigkeit von der approximierenden Folge $(f_n)_n$. Das Problem haben wir in unserer Definition nicht. Die Folgerung begründet aber, warum das Supremum ein Limes ist und somit insbesondere die Abbildung $f \mapsto \int f \, d\mu$ linear ist.

Es gelten für das Integral die selben Eigenschaften wie oben für einfache Funktionen erwähnt - also insbesondere positive Homogenität, Additivität und Monotonie.

Beachtet man, dass

$$\sum_{n=1}^N f_n \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

für nichtnegative messbare Funktionen f_n gilt, so kann man folgenden (wichtigen) Satz als Übung zeigen:

Satz 3.4 (Weitere Version des Satzes von Beppo Levi).

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$$

und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu \in [0, \infty].$$

Als Übung zeige man, dass dieser Version äquivalent zum Satz von Beppo Levi in der ersten Formulierung ist!

Ein weiterer wichtiger Konvergenzsatz für nichtnegative messbare Funktionen ist besonders nützlich, um die Endlichkeit von bestimmten Integralausdrücken zu zeigen:

Satz 3.5 (Lemma von Fatou).

Sei $(f_n)_n \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$ Folge nichtnegativer messbarer Funktionen. Dann ist $f := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$ und es gilt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Existiert eine (integrierbare) Majorante $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$ für alle f_n , d.h. $|f_n| = f_n < g$ und $\int g d\mu < \infty$, so gilt

$$\int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Die Nichtnegativität in den Voraussetzungen vom Lemma von Fatou sichert, dass

$$\int \inf_{n \geq m} f_n d\mu > -\infty$$

im Beweis gilt. Abschließend halten wir ein paar Beispiele fest:

Beispiel: (a) Betrachte auf einem beliebigen messbaren Raum $(E, \mathcal{A})$ das Dirac-Maß δ_y für festes $y \in E$. Dann gilt für $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$: (Übung!)

$$\int u d\delta_y = \int u(x) \delta_y(dx) = u(y).$$

(b) Betrachte $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und $\mu := \sum_{l=1}^{\infty} a_l \delta_l$, $a_l \geq 0$. Dann ist μ ein Maß auf $\mathbb{N}$, jede Funktion $f: (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \rightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}))$ messbar und

$$f(m) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \mathbf{1}_n(m) \quad \text{für geeignete Folge } (f_n)_n \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Daraus folgt

$$\int f \, d\mu = \int \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \mathbb{1}_n \, d\mu \stackrel{(BL)}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \int \mathbb{1}_n \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \underbrace{\mu(n)}_{=a_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n a_n.$$

Das Beispiel zeigt insbesondere auch die Berechnung einer Reihe mittels Integralen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int f \, d\nu \quad \text{mit Zählmaß } \nu = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l. \quad \blacklozenge$$

Aufgabe 3.1 (Markov'sche Ungleichung).

Sei $(E, \mathcal{A}, \mu)$ σ -endlicher Maßraum.

- (a) Zeigen Sie, dass dann positive, messbare Funktion $f > 0$, $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ existiert mit $\int f \, d\mu < \infty$.
- (b) Zeigen Sie die Markov'sche Ungleichung: Für $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ gilt

$$\mu(\{f \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int f \, d\mu.$$

- (c) Zeigen Sie mit der Markov'schen Ungleichung die Umkehrung von (a), d.h. das sich aus der Existenz eines solchen f die σ -Endlichkeit des Maßraumes schlussfolgern lässt. Nutzen Sie dazu $f := \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit $A_i = \{f \geq \frac{1}{i}\}$.

3.1.3 Integral messbarer Funktionen

Sei $(E, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir wollen nun das Integral von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$ nach $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ durch die Linearität (des Integrals) fortsetzen.

Definition 3.6.

$f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt (μ) -integrierbar, wenn $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ und

$$\int f^+ \, d\mu < \infty, \quad \int f^- \, d\mu < \infty$$

gelten. Dann definieren wir das (μ) -Integral von f als

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Weiter bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ die Familie der μ -integrierbaren Funktionen und mit $\mathcal{L}^1(\mu)$ die reellwertigen μ -integrierbaren Funktionen.

Bemerkung: Beachte, dass die Forderung $\int f^{\pm} \, d\mu < \infty$ die Situation $\infty - \infty$ ausschließt, wir aber im Falle $f \geq 0$ auch $\int f \, d\mu = \infty$ zugelassen haben. Es gilt daher aber $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ nur, wenn $\int f \, d\mu < \infty$ ist.

Wie früher zeigt man die Wohldefiniertheit der Definition, in dem für weitere Darstellungen $f = u - v$ als Differenz nichtnegativer messbarer Funktionen $\int f \, d\mu = \int u \, d\mu - \int v \, d\mu$ (falls

Differenz definiert) durch Ausnutzen von $f = f^+ - f^-$ nachgewiesen wird.

Beachte weiterhin, dass oftmals für das Integral von $f: X \rightarrow \mathbb{R}(\overline{\mathbb{R}})$ auch

$$\int_X f \, d\mu$$

geschrieben wird. Wir nutzen hier die Kurzschreibweise und verzichten auf die Angabe des X unter dem Integral, falls die Grundmenge klar ist. Wir geben nur explizit die Menge unter dem Integral an, falls eine Teilmenge von X als Integrationsbereich herangezogen werden soll (siehe unten).

Das Integral kann auch für komplexwertige Funktionen eingeführt werden. In diesem Fall heißt $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -integrierbar, falls f messbar ist und die vier Integrale

$$\int_X (\operatorname{Re} f)^\pm \, d\mu, \quad \int_X \operatorname{Im} f^\pm \, d\mu$$

endlich sind und setzt

$$\int_X f \, d\mu := \int_X (\operatorname{Re} f)^+ \, d\mu - \int_X (\operatorname{Re} f)^- \, d\mu + i \int_X (\operatorname{Im} f)^+ \, d\mu - i \int_X (\operatorname{Im} f)^- \, d\mu.$$

Man kann auch Integrale für $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ derart definieren, dass für einen der Fälle $f^\pm$ die Unendlichkeit des Integrals zugelassen wird, sprich mindestens eines der beiden endlich ist. Man erhält dann einen Integralwert in $\overline{\mathbb{R}}$ und spricht von quasi-integrierbaren Funktionen. ♦

In einer Abbildung (siehe Übung) kann man schön übersichtlich darstellen, wie die einzelnen Integral-Konstruktionsschritte ausgehend vom Maß μ aussehen und wie man wieder anschließend das Maß rekonstruieren kann, denn es gilt

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

Wie früher bereits erwähnt schreiben wir auch

$$\int f \, d\mu = \int f(x) \, \mu(dx) = \int f(x) \, d\mu(x).$$

Für $\mu = \lambda^d$ nennen wir f Lebesgue-integrierbar oder integrierbar bzgl. des Lebesgue-Maßes und schreiben oft dx statt $\lambda^d(dx)$, also $\int f \, dx$.

Satz 3.7 (Integrabilitätskriterium).

Für eine messbare Funktion $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$ sind äquivalent:

- (a) $f \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu)$
- (b) $f^+, f^- \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu)$
- (c) $|f| \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu)$
- (d) es gibt ein $g \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu)$ mit $g \geq 0$ und $|f| \leq g$.

Beweis: Zu zeigen ist, dass die jeweiligen Integrale endlich sind. Verwende:

(a) $\Leftrightarrow$ (b): Definition

(b) $\Rightarrow$ (c): $|f| = f^+ + f^-$.

(c) $\Leftrightarrow$ (d): Wähle $g := |f|$

(d) $\Rightarrow$ (b): $f^\pm \leq |f| < g$. □

Weitere Äquivalenzen zu f integrierbar sind:

(e) $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind integrierbar.

(f) Es gibt integrierbare Funktionen $p, q, r, s \in \mathcal{M}^+$ mit $f = p - q + i(r - s)$.

Durch die Definition des Integrals übertragen sich die Eigenschaften des Integrals von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$ aus dem vorigen Abschnitt, die wir hier zusammenfassen wollen:

Satz 3.8 (Eigenschaften des Integrals).

Seien $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt

(a) (Homogenität) $\alpha f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ und

$$\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu.$$

(b) (Additivität) $f + g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$, falls dies definiert ist, und

$$\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

(c) (Verband) $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$.

(d) (Monotonie) Aus $f \leq g$ folgt

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

(e) (Dreiecksungleichung:)

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Bemerkung: Der Satz besagt insbesondere, dass das Integral linear ist, falls $\alpha f + \beta g$ in $\overline{\mathcal{L}}$ definiert ist. Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ gilt das natürlich immer! ◆

Es ist $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ ein Vektorraum (abgeschlossen bzgl. Addition und skalarer Multiplikation) und

$$\mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int f \, d\mu$$

ein positives lineares Funktional, d.h. es gilt Linearität und $\int f \, d\mu \geq 0$ für $f \geq 0$.

Satz 3.9 (fast-überall Beschränktheit).

Für jede integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ ist $\{|f| = \infty\}$ eine μ -Nullmenge.

Satz 3.10 (Integrierbarkeit beschränkter Funktionen).

Sei $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ beschränkte, messbare Funktion mit $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$. Dann gilt: $f \in \mathcal{L}^1$.

Beweis: Für $|f| \leq C \in \mathbb{R}_+$ ist $g := C \cdot \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}}$ integrierbare Majorante. $\square$

Satz 3.11 (Reihenvergleichskriterium).

Sei $(E, \mathcal{A}, \mu)$ endlicher Maßraum. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu\{|f| \geq n\} < \infty.$$

Ferner gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|f| \geq n\} \leq \int |f| \, d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu\{|f| \geq n\}.$$

Beweis: Beweis als Übung zur Klausurvorbereitung. $\square$

Beispiel: Wir setzen die früheren Beispiele fort.

- (a) Für einen beliebigen messbaren Raum $(E, \mathcal{A})$ und $y \in E$ fest gilt, analog zum vorigen Abschnitt:

$$\int f(x) \, \delta_y(dx) = f(y).$$

Ferner ist $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\delta_y)$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ und $|f(y)| < \infty$ gelten.

- (b) Betrachte den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n$ sind alle $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Es gilt nach Beispiel aus dem vorigen Abschnitt daher $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n |f(n)| = \int |f| \, d\mu < \infty.$$

Spezialfall: Raum der absolut-summierbaren Folgen

$$\ell^1(\mathbb{N}) := \mathcal{L}^1\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n\right) = \left\{ (f_n)_n : \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n| < \infty \right\}.$$

- (c) Wir betrachten ein Beispiel aus der W-Theorie: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, also messbare Funktion. Dann heißt

$$\mathbb{E}(X) := \int X \, d\mathbb{P}$$

Erwartungswert von X , falls das Integral existiert (endlich) ist, also $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Das ist insbesondere für jede beschränkte Zufallsvariable der Fall, d.h. $\sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| < \infty$, da gilt:

$$\int \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{P}(\Omega) = 1. \quad \blacklozenge$$

Aufgabe 3.2.

Gegeben sei ein W -Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass eine $\mathbb{P}$ -integrierbare Zufallsvariable X nicht beschränkt sein muss!

Lösung: Betrachte beispielsweise $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_0)$ die Funktion $f(x) = x$. Dann ist f unbeschränkt und

$$\int |f(x)| \delta_0(dx) = |f(0)| = 0 < \infty \quad \text{also } f \in \mathcal{L}^1(\delta_0).$$

Eine anspruchsvollere Lösung ist über $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ mit $f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{\frac{i}{2}} \mathbb{1}_{[2^{-i}, 2^{-i+1})}(x)$ durch Anwendung des Satzes von Beppo Levi gegeben. $\blacklozenge$

Abschließend erklären wir, wie wir (sinnvollerweise) auch Integrale auf anderen Mengen als E aus der gegebenen σ -Algebra berechnen können:

Definition 3.12.

Sei $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ bzw. $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$. Dann definieren wir das (μ) -Integral von f über $A \in \mathcal{A}$ als

$$\int_A f \, d\mu := \int f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu = \int f(x) \cdot \mathbb{1}_A(x) \, \mu(dx).$$

Bemerkung: Das Integral ist definiert, da $f \cdot \mathbb{1}_A$ nach früherem Satz messbar ist. Weiter haben wir

$$\int_E f \, d\mu = \int f \, d\mu \quad \text{wegen } \mathbb{1}_E \equiv 1.$$

Nun kann das Integral auch als Abbildung $A \mapsto \int_A (\cdot)$ verstanden werden: beispielsweise ist für $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A})$

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu \quad A \in \mathcal{A}$$

ein Maß auf $(E, \mathcal{A})$, das wir Maß mit Dichte(funktion) f bzgl. μ nennen. Man schreibt üblicherweise $d\nu = f \cdot d\mu$ bzw. $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. $\blacklozenge$

Beispiel: Nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt: Aus

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(y) \, dy$$

folgt $\frac{dF}{dx} = f$. Mit dem Lebesguemaß λ^1 und $\lambda(dx) = dx$ impliziert die nichtnegative Dichte $f \geq 0$ das Maß

$$\nu(a, b] = F(b) - F(a) = \int_{(a, b]} f \, d\lambda. \quad \blacklozenge$$

3.2 Nullmengen und fast überall geltende Eigenschaften

Jetzt: Welche Stellung nehmen messbare Mengen in einem beliebigen Maßraum $(E, \mathcal{A}, \mu)$ ein, die man als Ausnahmemengen i.d.S. bezeichnen kann, dass sie vom Maß μ *nicht gesehen* werden?

Wir bezeichnen dazu mit

$$\mathcal{N}_\mu := \{N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0\}$$

die (messbaren) Nullmengen und sagen, eine Aussage oder Eigenschaft α gilt μ - fast überall (f.ü.) bzw. für μ - fast alle x , wenn

$$A(\alpha) := \{x \in E : \alpha \text{ gilt nicht für } x\} \subseteq N \in \mathcal{N}_\mu.$$

Wenn klar ist, welches Maß μ gemeint ist, sagt man auch nur *fast überall* bzw. *fast alle*.

Beachte: Die Ausnahmemenge $A(\alpha)$ *muss nicht* messbar sein! I.d.S. ist $f = g$ f.ü. genau dann, wenn $\{f \neq g\} \subseteq N \in \mathcal{N}_\mu$ gilt. Sind f, g messbar, dann ist $f = g$ f.ü. sogar äquivalent zu $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$. Daher erlaubt die Aussage $f = g$ f.ü., dass beispielsweise nur eine der beiden Funktionen messbar ist und somit $\{f \neq g\} \notin \mathcal{A}$ auftreten kann.

Satz 3.13.

Sei $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) $\int |f| d\mu = 0$
- (b) $|f| = 0$ f.ü.
- (c) $u = 0$ f.ü.
- (d) $\mu\{f \neq 0\} = 0$.

Ferner gilt: Ist $N \in \mathcal{N}_\mu$, so ist $\int_N f d\mu = 0$.

Beweis: In der Übung - Wir zeigen u.a. die Markov-Ungleichung, d.h. für alle $A \in \mathcal{A}$ und $c > 0$ gilt, insbesondere für $A = E$:

$$\mu(\{|f| \geq c\} \cap A) \leq \frac{1}{c} \int_A |f| d\mu. \quad \square$$

Mit diesem Satz lassen sich als Folgerung Zusammenhänge zwischen zwei fast überall identischen, messbaren Funktionen festhalten:

Korollar: Seien $f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ und gelte $f = g$ f.ü. Dann gilt:

- (a) Sind $f, g \geq 0$, so ist $\int f d\mu = \int g d\mu \in [0, \infty]$.
- (b) Ist $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$, so ist auch $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ und $\int f d\mu = \int g d\mu$. ◆

Beweis: In der Übung! □

Korollar: Seien $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ und $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$. Gilt $|f| \leq g$ f.ü., so ist auch $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$. ◆

Die früher bereits benannte Markov-Ungleichung gilt auch in beliebigen Maßräumen (wird in der Übung gezeigt):

Satz 3.14 (Markov-Ungleichung).

Sei $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$. Dann gilt für alle $c > 0$ und alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(\{|f| \geq c\} \cap A) \leq \frac{1}{c} \int_A |f| \, d\mu$$

bzw. für alle $c > 0$

$$\mu(\{|f| \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int |f| \, d\mu.$$

Korollar: Mit der Markov'schen Ungleichung zeigt man auch, dass jede Funktion $f \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu)$ fast überall reellwertig ist! Insbesondere existiert also eine Funktion $\hat{f} \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu)$ mit $f = \hat{f}$ fast überall (Beweis in der Übung). ♦

Wichtiges Fazit: Wir können $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu)$ durch $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1$ ersetzen und dürfen so das Definitions-Problem für die Rechenregeln mit ∞ bei abzählbaren Operationen vernachlässigen: $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu)$ ist bis auf Nullmengen ein Vektorraum.

3.3 Integration bezüglich des Bildmaßes

Für eine messbare Abbildung $T: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ von einem Maßraum mit Maß μ in einen messbaren Raum hatten wir früher im Abschnitt über messbare Abbildungen bereits das Bildmaß unter T eingeführt als $\nu: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\nu(B) := \mu \circ T^{-1}(B) = \mu(T^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Beispiel: Sei $\Phi(x) := Ax + b$ eine affin-lineare Abbildung $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit $A \in GL(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann erhält man wegen translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes und wegen $\Phi^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$, dass für das Bildmaß gilt:

$$\nu(B) := \lambda(\Phi^{-1}(B)) = \frac{1}{|\det A|} \cdot \lambda(B). \quad \blacklozenge$$

Mit dem Bildmaß erhält man eine nützliche Transformationsformel:

Satz 3.15 (Integration bzgl. des Bildmaßes).

Seien $T: X \rightarrow Y$ eine messbare Abbildung zwischen dem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und dem messbaren Raum $(Y, \mathcal{B})$. Ferner sei $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann ist f genau dann integrierbar bzgl. des Bildmaßes $\nu = \mu \circ T^{-1}$, wenn $f \circ T: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μ -integrierbar ist und dann gilt

$$\int_X (f \circ T) \, d\mu = \int_Y f \, d\nu.$$

Anwenden dieses Satzes auf das Bildmaß des Lebesguemaßes unter affin-linearen Abbildungen (siehe Beispiel oben) liefert

Satz 3.16 (Spezielle Transformationsformel für affin-lineare Abbildungen).

Sei $A \in GL(n)$ über $\mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $x \mapsto f(Ax + b)$ Lebesgue-integrierbar ist und dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b) \lambda^n(dx) = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lambda^n(dx).$$

Beachte insbesondere, dass wegen $\det A = \pm 1$ für eine Permutationsmatrix A für jede Permutation π von $\{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \lambda^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \lambda^n(dx).$$

3.4 Konvergenzsätze und Parameterintegrale

Das Integral wurde selbst als Grenzprozess definiert.

Fragestellung: Kann man unter gewissen Voraussetzungen Integral und Grenzwert vertauschen?

Wir haben bereits im Abschnitt über die Definition des Integrals für nichtnegative messbare Funktionen Konvergenzsätze kennengelernt: den Satz von Beppo Levi sowie das Lemma von Fatou. Solche Konvergenzsätze sind ein Grund für die Bevorzugung des Lebesgue- gegenüber des Riemann-Integrals.

Motivation: Dirichlet-Funktion $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x)$ auf $[0, 1]$ ist nicht Riemann-, aber Lebesgue-integrierbar, denn Ober- und Unterintegral stimmen nicht überein, aber durch eine Abzählung $(q_n) = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ gilt

$$\int f d\lambda = \int \sup_n \mathbb{1}_{(q_k)_{k=1, \dots, n}}(x) \lambda(dx) \stackrel{(B.L.)}{=} 0,$$

da

$$\lambda\{q_1, \dots, q_n\} = \sum_{k=1}^n \lambda(q_k) = 0$$

gilt sowie (wegen $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) f messbar und $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ ist.

Zunächst eine Verallgemeinerung des Satzes von Beppo Levi:

Satz 3.17 (Satz von der monotonen Konvergenz).

- (a) Sei $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, also $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$ und $f := \sup_n f_n$. Dann ist f genau dann Lebesgue-integrierbar ($f \in \mathcal{L}_R^1(\mu)$), wenn

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu < \infty,$$

d.h. insbesondere existiert eine Konstante $M < \infty$ mit

$$\int f_k \, d\mu \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

In diesem Fall ist die Vertauschbarkeit von Grenzwert- und Integralbildung erlaubt:

$$\int f \, d\mu = \int \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \in \mathbb{R},$$

wobei auch statt $\sup$ der Grenzwert $\lim$ geschrieben werden kann.

- (b) Für eine monoton fallende Folge int'barer Funktionen $(g_n)_n \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $g := \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n$ gilt: g ist genau dann Lebesgue-integrierbar ($g \in \mathcal{L}_R^1(\mu)$), wenn gilt:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu > -\infty,$$

und in diesem Fall gilt bzgl. der Vertauschbarkeit von Integral und $\inf = \lim$:

$$\int g \, d\mu = \int \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n \, d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: In Satz 3.3 wurde die Aussage für Folgen nichtnegativer Funktionen als Satz von Beppo Levi erfasst. Beachte, dass dort die Funktionen auf $\overline{\mathbb{R}}$ erklärt waren und die Integrale auch ∞ als Wert annehmen durften! Für *Lebesgue-Integrierbarkeit* fordern wir jedoch Endlichkeit des Integrals, daher brauchen wir Zusatzannahmen. Für fallende Folgen entfällt hier jedoch die explizite Zusatzannahme aus dem Satz von Beppo Levi, dass $\int g_1 \, d\mu < \infty$ gilt, da dies hier durch die Integrierbarkeit der g_n sowieso gesichert ist. ♦

Der wohl wichtigste Konvergenzsatz ist der folgende :

Satz 3.18 (Satz von Lebesgue (dominierte Konvergenz)).

Sei $(f_n)_n \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ Folge messbarer (!) Funktionen mit

(a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle x .

(b) $|f_n(x)| \leq g(x)$ für eine integrierbare Majorante $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

Dann sind auch f_n sowie f integrierbar, also $f_n, f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ und insbesondere messbar, und es gilt:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0,$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Bemerkung: Die Forderung der Majorante ist wesentlich: betrachte beispielsweise $(E, \mathcal{A}, \mu) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ und darauf

$$f_n(x) := n \cdot \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x) \rightarrow \infty \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(x) \stackrel{\text{f.ü.}}{=} 0.$$

Dann gilt

$$\int f_n(x) dx = n \cdot \lambda \left[0, \frac{1}{n} \right] = \underbrace{1}_{\forall n \in \mathbb{N}} \neq 0 = \int \infty \cdot \mathbb{1}_{\{0\}} d\lambda(x). \quad \blacklozenge$$

Aufgabe 3.3.

Bestimmen Sie für ein endliches Maß μ auf $([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty)))$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} e^{-rx} \mu(dx).$$

Lösung: Da μ ein endliches Maß (!) ist, folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass wegen $e^{-rx} \leq 1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} e^{-rx} \mu(dx) = \int_{[0, \infty)} \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-rx} \mu(dx) = \int_{[0, \infty)} \mathbb{1}_{\{0\}} \mu(dx) = \mu(\{0\}). \quad \blacklozenge$$

Aufgabe 3.4.

Betrachte auf $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ die Funktionenfolge $f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0, n]}$. Beweisen Sie, dass $f_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, aber

$$\int f_n d\lambda = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Widerspricht das dem Satz von Lebesgue?

Anwendung auf Parameterintegrale

Fragestellung: Unter welchen Voraussetzungen überträgt sich die Stetigkeit und Differenzierbarkeit eines Integranden bzgl. eines Parameters $t \in (a, b)$ auf das Integral? (also wieder ein Problem der Grenzwert-Vertauschung)

$$\underbrace{f(x)}_{\text{stetig/diff'bar}}, \underbrace{t}_{\mu\text{-int'bar}} \implies \underbrace{I(t)}_{\text{stetig/diff'bar?}} = \int f(x, t) \mu(dx).$$

Satz 3.19 (Stetigkeitslemma).

Sei $f: E \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Parameter aus dem offenen Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) *Integrierbarkeit bzgl. x :*
für alle $t \in (a, b)$ fest ist $x \mapsto f(x, t)$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$
- (b) *Stetigkeit bzgl. t :*
für alle $x \in E$ fest ist $t \mapsto f(x, t)$ stetig
- (c) *Existenz einer (parameterunabh.) integrierbaren Majorante*
es gibt ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so dass für alle $(x, t) \in E \times (a, b)$ gilt: $|f(x, t)| \leq g(x)$.

Dann ist

$$t \mapsto I(t) := \int f(x, t) d\mu(x)$$

stetig für alle $t \in (a, b)$.

Beweis: Wegen (c) ist I wohldefiniert und genau dann in t stetig, wenn für jede Folge $(a, b) \ni t_n \rightarrow t$ gilt: $I(t_n) \rightarrow I(t)$ (Beachte: *lokale* Eigenschaft, also nur kleine Umgebung von t wichtig). Sei für t fest eine solche Folge (t_n) gegeben. Dann gilt für $f_n(x) := f(x, t_n)$:

- nach (a): $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$
- nach (b): $f_n(x) \rightarrow f(x, t)$ für $n \rightarrow \infty$
- nach (c): $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Daraus folgt

$$I(t_n) = \int \underbrace{f_n}_{=f(\cdot, t_n)} d\mu \xrightarrow{\text{dom. Konv.}} \int f(\cdot, t) d\mu = I(t). \quad \square$$

Satz 3.20 (Differenzierbarkeitslemma).

Sei $f: E \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Parameter aus dem offenen Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) Integrierbarkeit bzgl. x :
für alle $t \in (a, b)$ fest ist $x \mapsto f(x, t)$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$
- (b) Differenzierbarkeit bzgl. t :
für alle $x \in E$ fest ist $t \mapsto f(x, t)$ differenzierbar
- (c) Existenz einer (parameterunabh.) integrierbaren Majorante für part. Ableitungen:
es gibt ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so dass für alle $(x, t) \in E \times (a, b)$ gilt: $|\partial_t f(x, t)| \leq g(x)$.

Dann ist

$$t \mapsto I(t) := \int f(x, t) \, d\mu(x)$$

differenzierbar in $t \in (a, b)$ und es gilt:

$$I'(t) = \frac{dI}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int f(x, t) \, d\mu(x) = \int \partial_t f(t, x) \, d\mu(x).$$

Unter Berücksichtigung des nächsten Abschnitts über Riemann- und Lebesgueintegrierbarkeit betrachten wir folgende Beispiele und Aufgaben:

Beispiel: Betrachte $f_t(x) := x^t$ mit $x > 0$ und $t \in \mathbb{R}$. Wir zeigen:

$$f_t \in \mathcal{L}^1(\lambda) \text{ auf } (0, 1) \iff t > -1.$$

Da $x \mapsto x^t$ für alle t stetig ist, ist $x^t \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ Borel-messbar. Also gilt mit Beppo-Levi:

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} x^t \, d\lambda(x) &\stackrel{\text{B.L.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, 1)}(x) \cdot x^t \, d\lambda(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^1 x^t \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{t+1}}{t+1} \Big|_{1/n}^1 = \frac{1}{t+1} < \infty, \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu $t > -1$. ◆

Aufgabe 3.5.

Zeigen Sie für das obige Beispiel analog:

$$f_t \in \mathcal{L}^1(\lambda) \text{ auf } (1, \infty) \iff t < -1.$$

Aufgabe 3.6.

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^s \cdot e^{-tx}$ für $x > 0$ Lebesgue-integrierbar auf $(0, \infty)$ ist, falls $s > -1, t > 0$ gilt.

Mit der letzten Aufgabe sieht man auch, dass die Gammafunktion $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Gamma(t) = \int_{(0, \infty)} x^{t-1} e^{-x} d\lambda(x)$$

für $t > 0$ wohldefiniert ist. Man kann als Übung zeigen, dass Γ stetig und differenzierbar in $(0, \infty)$ ist (Man kann auch zeigen: beliebig oft differenzierbar in $(0, \infty)$).

Aufgabe 3.7.

Zeigen Sie, dass für $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(xt) \lambda(dx) = \sqrt{x} e^{-\frac{t^2}{4}}$$

gilt. Nutzen Sie dazu, dass F das Anfangswertproblem $y'(t) = -\frac{1}{2}ty(t)$ mit $y(0) = \sqrt{\pi}$ löst und (wie wir zeigen werden) gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda(dx) = \sqrt{x}.$$

Lösung: Das Differenzierbarkeitslemma ist anwendbar wegen $e^{-x^2} |\cos(xt)| \leq e^{-x^2}$ und $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq e^{\frac{x^2}{2}} e^{-x^2} = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Das ergibt zusammen mit partieller Integration (wie wir später sehen werden, ist diese auch für das Lebesgue-Integral erlaubt!)

$$F'(t) = - \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2} \sin(xt) \lambda(dx) = -\frac{1}{2}t \cdot F(t).$$

Die Differentialgleichung $y' = -\frac{t}{2}y$ hat gemäß Trennung der Variablen - Methode ¹¹ die allgemeine Lösung

$$y(t) = C e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Mit dem Anfangswert $y(0) = C = \int e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ ergibt das die Behauptung. $\blacklozenge$

3.5 Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgueintegrierbarkeit

Die Motivation zur Entwicklung der Lebesgue-Integrationstheorie haben wir am Beispiel der Dirichletfunktion gesehen. Ferner wissen wir, dass die im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktionen nicht abgeschlossen sind bzgl. Grenzwertbildung (keine Vollständigkeit). Nun fragen wir uns aber nach dem Zusammenhang beider Integraltypen und ob wir in geeigneten Situationen auf die Theorie der Riemann'schen Integrale (und damit aller bekannten Rechenmethoden) zurückgreifen können, ohne den Integralwert zu verändern.

¹¹Die Methode der Separation der Variablen ist anwendbar wegen $y(0) = \sqrt{\pi} \neq 0$. Sonst wäre $y \equiv y_0 = \sqrt{\pi}$ als Konstante die Lösung, denn es gilt allgemein: $y' = f(y(x)) \cdot g(x)$ mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$ und $f(y(x_0)) = f(y_0) = 0$ hat die Konstante $y = y_0$ als Lösung.

Satz 3.21 (eigentlich R-int'bar impliziert L-int'bar).

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ Borel-messbar und Riemann-integrierbar, so ist f auch Lebesgue-integrierbar bzgl. des Lebesgue-Maßes λ ($f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$) und das Riemann- und Lebesgue-Integral stimmen überein:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

Im Beweis sieht man sogar, dass im Falle f Riemann-int'bar, aber nicht notwendig Borel-messbar eine messbare Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ existiert mit $f = \tilde{f}$ fast überall und

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} \tilde{f} \, d\lambda.$$

Man kann zeigen, dass die Menge der Stetigkeitsstellen einer beliebigen Funktion $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-Menge ist (genauer muss der Definitionsbereich nicht mal messbar sein). Damit ist aber auch die Menge der Unstetigkeitsstellen Borel-Menge. Ein sehr schönes Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit, dass die Maßtheorie benutzt, ist das folgende:

Satz 3.22 (R-int'bar und Unstetigkeitsstellen).

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen eine (Teilmenge einer) λ -Nullmenge ist.

Die bisherigen Sätze gelten i.A. **nicht** für uneigentliche Riemann-Integrale: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}(!)$, $a < b$ heißt uneigentlich Riemann-integrierbar, falls f für alle $[m, n] \subseteq (a, b)$ Riemann-integrierbar ist und es ein $c \in (a, b)$ derart gibt, $\lim_{m \rightarrow a_m} \int_m^c f(x) \, dx + \lim_{n \rightarrow b_n} \int_c^n f(x) \, dx$ existiert.

Satz 3.23 (Uneigentlich R-int'bar und L-int'bar).

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über jedem kompakten Teilintervall $[a, b] \subseteq I$. Dann ist f genau dann Lebesgue-integrierbar über I , wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar über I ist. In diesem Falle gilt

$$\int_I f(x) \, dx = \int_I f \, d\lambda.$$

Es reicht also insbesondere für stetige Funktionen die Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals zu untersuchen!

Korollar: Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar, d.h. es existiere das Riemann-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$. Dann ist g auf $\mathbb{R}$ auch λ -integrierbar. ◆

Beweis: Wurde in Übungsserie 8, Aufgabe 1b mit Beppo-Levi gezeigt. (hier folgt das direkt aus dem obigen Satz). □

Beispiel: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

als uneigentliches Riemann-Integral existiert (durch partielle Integration und Cauchy-Kriterium), aber nicht über $(0, \infty)$ Lebesgue-integrierbar ist wegen

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty. \quad \blacklozenge$$

Aufgabe 3.8.

Untersuchen Sie

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ auf uneigentliche Riemann- und Lebesgue-Integrierbarkeit!

Hinweis: Fälle $\alpha \leq 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $\alpha \in (1, 2)$ und $\alpha \geq 2$ untersuchen und (beispielsweise) folgende Integrale betrachten:

$$I_n(\alpha) := \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.6 Produktmaße

Motivation: Lebesgue-Maß für Quader im $\mathbb{R}^2$:

$$\lambda^2([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) = \lambda^1[a_1, b_1] \cdot \lambda^1[a_2, b_2].$$

Das legt nahe, dass für beliebige $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ gilt:

$$\lambda(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x, y) \lambda^2(dx, dy) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x, y) \lambda^1(dx) \cdot \lambda^1(dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x, \hat{y}) \lambda^1(dx) \right) \lambda^1(d\hat{y}).$$

Frage: Lässt sich das verallgemeinern auf beliebige Maße auf endlichen Produkträumen?

Dazu müssen wir zunächst klären, was geeignete σ -Algebren auf Produkträumen sind. Es gilt nämlich nicht einfach:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

denn für beliebige σ -Algebren ist

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

i.A. keine σ -Algebra mehr. Sind $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ jedoch Halbringe, so ist $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ ein Halbring.

Definition 3.24.

Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume. Dann heißt

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$$

Produkt- σ -Algebra auf dem messbaren Produktraum

$$(X, \mathcal{A}) \otimes (Y, \mathcal{B}) := (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

Wir wollen unsere Aussagen wieder auf Erzeuger zurückführen und erhalten: Das Produkt der Erzeuger ist der Erzeuger des Produkts. Das ganze etwas exakter in folgendem Satz:

Satz 3.25 (Erzeuger und Produkträume).

Seien $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$ und $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{T})$ mit $(S_n)_n \subseteq \mathcal{S}$ und $S_n \uparrow X$ sowie $(T_m)_m \subseteq \mathcal{T}$ und $T_m \uparrow Y$. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{S} \times \mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Nun klären wir die Frage nach dem Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Satz 3.26 (Existenz von Produktmaßen).

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ -endliche Maßräume. Dann existiert zu

$$\rho: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty], \quad \rho(A \times B) := \mu(A) \cdot \nu(B)$$

eine eindeutige Fortsetzung zu einem σ -endlichen Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dieses Maß $\rho := \mu \otimes \nu$ nennen wir Produktmaß und $(X, \mathcal{A}, \mu) \otimes (Y, \mathcal{B}, \nu) := (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ Produktmaßraum.

Ferner gilt für alle $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \rho(C) &= \int_{X \times Y} \mathbb{1}_C(x, y) \mu(dx) \otimes \nu(dy) \\ &= \int_X \left(\int_Y \mathbb{1}_C(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_Y \left(\int_X \mathbb{1}_C(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy) \end{aligned}$$

und insbesondere sind folgende Funktionen $\mathcal{A}$ - bzw. $\mathcal{B}$ -messbar:

$$\begin{aligned} y &\mapsto \mathbb{1}_C(x, y), & x &\mapsto \mathbb{1}_C(x, y) \\ x &\mapsto \int_Y \mathbb{1}_C(x, y) \nu(dy), & y &\mapsto \int_X \mathbb{1}_C(x, y) \mu(dx). \end{aligned}$$

Der Eindeutigkeitsatz für Produktmaße wird analog zur früheren Version formuliert und mit diesem bewiesen.

3.7 Doppelintegrale und Sätze von Fubini-Tonelli

Fazit: wir haben einen Vertauschungssatz für die Doppelintegrale über einstufige Treppenfunktionen:

$$\rho(C) = \int_{X \times Y} \mathbb{1}_C(x, y) \, d\mu \otimes \nu = \iint \mathbb{1}_C \, d\mu \, d\nu = \iint \mathbb{1}_C \, d\nu \, d\mu.$$

Frage: Lässt sich das auf komplizierte Funktionen ausweiten?

Mit den üblichen Sätzen lässt sich die Aussage schnell auf nichtnegative $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbare Funktionen $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ bei σ -endlichen Maßräumen ausweiten (**Satz von Tonelli**), d.h. lässt man ∞ als Wert zu, so darf man die Integrale immer vertauschen und wenn ein (Doppel-)Integral endlich ist, sind alle Integrale in der Gleichung endlich.

Aufgabe 3.9 (Satz von Tonelli).

Zeigen Sie mit dem Satz von Tonelli:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Das Beispiel zeigt insbesondere, wie die Methode der Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge Möglichkeiten eröffnet, Integrale zu berechnen, bei denen der Integrand keine elementare Stammfunktion besitzt.

Satz 3.27 (Satz von Fubini).

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ -endliche Maßräume und $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar. Ist eines der Integrale

$$\iint |f| \, d\mu \, d\nu, \quad \iint |f| \, d\nu \, d\mu, \quad \iint |f| \, d(\mu \otimes \nu)$$

endlich, dann sind alle diese Integrale endlich und es gilt:

- (a) $f \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu \otimes \nu)$
- (b) $x \mapsto f(x, y) \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu)$ für ν -fast alle y
- (c) $y \mapsto f(x, y) \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\nu)$ für μ -fast alle x
- (d) $y \mapsto \int_X f(x, y) \, \mu(dx) \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\nu)$
- (e) $x \mapsto \int_Y f(x, y) \, \nu(dy) \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^1(\mu)$
- (f)

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, \mu \otimes \nu(dx, dy) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, \mu(dx) \right) \nu(dy) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, \nu(dy) \right) \mu(dx)$$

Wir betrachten in der Übung einige Beispiele:

Aufgabe 3.10.

Zeigen Sie, dass die folgenden iterierten Integrale existieren sowie übereinstimmen:

$$\int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} e^{-xy} \sin x \sin y \lambda(dx) \right) \lambda(dy) = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} e^{-xy} \sin x \sin y \lambda(dy) \right) \lambda(dx)$$

und dass das Doppelintegral bzgl. $\lambda \times \lambda$ existiert.

Aufgabe 3.11.

Zeigen Sie, dass die folgenden iterierten Integrale existieren, aber nicht übereinstimmen:

$$\int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \lambda(dx) \right) \lambda(dy) \neq \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \lambda(dy) \right) \lambda(dx)$$

und folgern Sie daraus, dass das Doppelintegral bzgl. $\lambda \times \lambda$ nicht existiert.

Zeigen Sie außerdem direkt, dass das Doppelintegral nicht existiert.

Aufgabe 3.12.

Zeigen Sie, dass die folgenden iterierten Integrale existieren sowie übereinstimmen:

$$\int_{(-1,1)} \left(\int_{(-1,1)} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \lambda(dx) \right) \lambda(dy) = \int_{(-1,1)} \left(\int_{(-1,1)} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \lambda(dy) \right) \lambda(dx)$$

aber dass das Doppelintegral bzgl. $\lambda \times \lambda$ nicht existiert.

3.8 Normalbereiche

In der Übung hatten wir ein Beispiel bei der Besprechung von Serie 10 zur Abhängigkeit der Integrationsgrenze von der äußeren Integrationsvariablen behandelt - hier folgen nun die Beschreibung, was man unter Normalbereichen versteht und weitere Beispiele. Normalbereiche in $\mathbb{R}^1$ sind abgeschlossene Intervalle.

Definition 3.28.

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Normalbereich bzgl. x_i -Achse, falls es einen Normalbereich $\tilde{M} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und zwei stetige Funktionen $g, h: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $g(\tilde{x}) \leq h(\tilde{x})$ und

$$M = \left\{ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid g(\tilde{x}) \leq x_i \leq h(\tilde{x}), \tilde{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \tilde{M} \right\}.$$

Man überlegt sich also, wie der Bereich für x_n parametrisiert werden kann, wenn $n-1$ Variable festgehalten werden. Somit ist ein Tetraeder im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

ein Normalbereich, denn es lässt sich mit dem Dreieck $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ der Tetraeder beschreiben als

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq 1 - x - y, (x, y) \in \Delta\}$$

und Δ ist selbst wiederum ein Normalbereich wegen

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq 1 - x, x \in [0, 1]\}.$$

Satz 3.29.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich bzgl. der x_n -Achse und $f: M \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig. Dann ist f über M integrierbar und es gilt

$$\int_M f(x) \, dx = \int_{\tilde{M}} \left(\int_{g(x_1, \dots, x_{n-1})}^{h(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \, dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Sukzessiv wird das auf niederdimensionale Bereiche (bis schließlich eindimensional!) zurückgeführt - Integration durch mehrmaliges Abspalten eindimensionaler Integrale: Auf das Integral über $\tilde{M}$ kann der Satz schließlich erneut angewandt werden usw.

Beispiel: Das rechtwinklige Dreieck $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(a, a), (b, a), (b, b)$, wobei $b > a > 0$ sind, und rechtem Winkel bei (b, a) kann wie folgt parametrisiert werden (Skizze!): Wird x festgehalten, so kann y zwischen a und x variieren. Wird hingegen y festgehalten, dann kann x zwischen y und a variieren. Damit ist Δ wegen

$$\Delta = \{(x, y) | a \leq y \leq x, a \leq x \leq b\}$$

ein Normalbereich bzgl. der y -Achse, aber wegen

$$\Delta = \{(x, y) | y \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$$

auch ein Normalbereich bzgl. der x -Achse. Also gilt:

$$\int_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_a^x f(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x, y) \, dx \right) dy. \quad \blacklozenge$$

Aufgabe 3.13.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt eines Kreises $B_R(0)$ um 0 mit Radius $R > 0$ durch Parametrisierung von $B_R(0)$ als Normalbereich bzgl. der y -Achse und Integration von $f \equiv 1$. (Polarkoordinaten könnten bei Berechnung des letzten verbleibenden Integrals hilfreich sein.)

3.9 Nachträge zur Analysis II

3.9.1 Implizite Funktionen und Auflösbarkeit

Wir widmen uns dem Problem der Behandlung *impliziter Funktionen*, also Funktionen, bei denen $y = f(x)$ nicht explizit, sondern durch einen impliziten Ausdruck $F(x, y) = 0$ gegeben ist (das ist natürlich keine Einschränkung, da $F(x, y) = 0$ immer durch Umstellen gebildet werden kann).

Frage: Lassen sich grundlegende Aussagen über $f(x)$, wie Existenz und Eindeutigkeit, auch dann treffen, wenn für f kein expliziter Ausdruck gefunden werden kann (rechentechisches Problem)?

Im Höherdimensionalen entspricht das der Fragestellung der *Auflösbarkeit von Gleichungssystemen*

$$f_k(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+m}) = 0, \quad k = 1, \dots, p$$

nach den ersten p -Variablen $x_1, \dots, x_p$, d.h. suche Funktionen mit

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(x_{p+1}, \dots, x_{p+m}) \\ &\vdots \\ x_p &= F_p(x_{p+1}, \dots, x_{p+m}), \end{aligned}$$

die wiederum implizit durch das Gleichungssystem gegeben sind.

In der Realität trifft man beispielsweise bei Landkarten auf implizite Funktionen: dort sind die Höhenlinien $F(x, y) - h = 0$ eingezeichnet, um Informationen über den Geländeverlauf zu vermitteln. Zur Behandlung der Höhenlinien mit Mitteln der Analysis benötigt man $y = f(x)$ bzw. $x = g(y)$, jedoch beschreiben Höhenlinien hin und wieder Objekte, die nicht als Kurven interpretiert werden können (beispielsweise Plateaus).

Beispiel: Der Einheitskreis kann beschrieben werden durch $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Beim Auflösen nach y erhält man

$$\begin{aligned} f_1: [-1, 1] &\rightarrow [0, 1], & f_1(x) &= \sqrt{1 - x^2} \\ f_2: [-1, 1] &\rightarrow [-1, 0], & f_2(x) &= -\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Wir haben also keine eindeutige Auflösung. Betrachten wir jedoch einen Punkt (x_0, y_0) auf dem Einheitskreis und wollen in einer *Umgebung* davon nach $y = f(x)$ auflösen, so ist das bis auf die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ stets *eindeutig* möglich.

Problem: Wie zeichnen wir die Punkte aus, an denen die eindeutige Auflösung nach einer Variablen scheitert?

Geometrisch im obigen Beispiel klar: jene Punkte, wo die Kurve eine „Kehrtwende“ macht, also zwei Bögen entstehen, die als gültige Funktionsgraphen aufgefasst werden können. Versuchen

wir hingegen aus den impliziten Ausdrücken Funktionen $x = g(y)$ zu gewinnen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} g_1: [-1, 1] &\rightarrow [0, 1], & g_1(y) &= \sqrt{1 - y^2} \\ g_2: [-1, 1] &\rightarrow [-1, 0], & g_2(y) &= -\sqrt{1 - y^2}. \end{aligned}$$

Diese Funktionen haben in den „Problempunkten“ ein Extremum, aber auch diese Funktionen haben wir ja i.A. nicht zur Verfügung. Es gilt aber auch für die partielle Ableitung des impliziten Ausdrucks $F(x, y)$ nach y :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\pm 1, 0) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Das ergibt die Vermutung, dass im Falle einer verschwindenden partiellen Ableitung des impliziten Ausdrucks $F(x, y)$ nach einer Variablen (hier y) die durch $F(x, y) = 0$ beschriebene Kurve bzgl. der entsprechenden Variablen ein Extremum haben kann und dann die eindeutige Auflösung nach der Variablen nicht möglich ist. Im Falle $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ sollte das hingegen prinzipiell möglich sein. $\blacklozenge$

Im Höherdimensionalen ist der einfachste Fall der eines linearen Gleichungssystems. Dort ist die Auflösung nach Variablen $x_1, \dots, x_p$ möglich, falls für die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ der p -Variablen (von den $p + m$ -Variablen) $\det A \neq 0$ gilt. Dann hängt die Lösung natürlich noch von den restlichen m Variablen ab, also erhalten wir Funktionen

$$x_k = F_k(x_{p+1}, \dots, x_{p+m}), \quad k = 1, \dots, p.$$

Da jede differenzierbare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in einer genügend kleinen Umgebung eines Punktes durch eine lineare Abbildung approximieren lässt (mit Elementen der Jacobi-Matrix $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ als Koeffizienten), überträgt sich (wie man zeigen kann) das, was für lineare Gleichungssysteme gilt, auch auf nichtlineare, differenzierbare Systeme. Eine Auflösung wird also sicher gelingen, falls die Jacobi-Determinante nicht verschwindet.

Satz 3.30 (Satz über implizite Funktionen, Auflösbarkeitssatz).

Sei $f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Dann ist $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$, also

$$f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$(x^0, y^0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0) \in U \times V$ lokal eindeutig auflösbar nach $y_1, \dots, y_m$, falls gelten:

- (a) $f(x^0, y^0) = 0$,
- (b) Es ist $f_i \in C^1$ für $i = 1, \dots, n$ und die Jacobi-Matrix bzgl. $y_1, \dots, y_m$ in (x^0, y^0) invertierbar, also

$$\det J_y(x^0, y^0) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x^0, y^0) \right)_{i,j=1,\dots,m} \neq 0.$$

Dabei bedeutet lokal eindeutige Auflösbarkeit: es existieren Umgebungen $U_\epsilon \subseteq U$ von x^0 und $V_\delta \subseteq V$ von y^0 sowie eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $g: U_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V_\delta \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass $g(x^0) = y^0$ und für alle $(x, y) \in U_\epsilon \times V_\delta$

$$f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$$

gelten, also $f(x, g(x)) \equiv 0$.

Man beachte, dass die beiden Bedingungen zusammen hinreichend sind, jedoch (b) allein nicht notwendig, wie man an $f(x, y) = x^3 - y^3 = 0$ erkennt: es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, jedoch mit $y = x$ eine eindeutige Auflösung möglich.

Beispiel: Im Fall $n = m = 1$ wird durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ implizit die Schnittkurve der durch $z = f(x, y)$ gegebenen Fläche mit der $x - y$ -Ebene, welche an geeigneten Stellen als Funktion $y(x)$ interpretiert werden kann. Ist f einmal stetig differenzierbar, so ist das in einer geeigneten Umgebung jedes Punktes $(x^0, y^0) \in D$ mit $f(x^0, y^0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$ möglich. Betrachten wir konkret $f(x, y) = x - y + \frac{1}{2} \sin y$ in einer Umgebung von $(0, 0)$. Dann ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und $f(0, 0) = 0$ sowie

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2} \cos y \implies f_y(0, 0) = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

Also ist eine Auflösung $y = y(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ möglich. ◆

Der Satz garantiert die Existenz der Funktionen g_i , die lokal das nichtlineare Gleichungssystem lösen. Um weitere Eigenschaften der Funktion zu ermitteln, bietet sich das *implizite Differenzieren* an. So ist im Falle der eindeutigen Auflösbarkeit der Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y mit $F(x) := f(x, y(x)) = 0$ nach Kettenregel

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

und somit

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

der wegen der Voraussetzung des Satzes definiert ist.

Beispiel: Am Punkt $(0, 1)$ lässt sich die Gleichung

$$f(x, y) = (x + y^2)e^{y-1} - 1 = 0$$

nach y auflösen, da $f(0, 1) = 0$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ als Verkettung von C^1 -Funktionen und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = (2y + y^2)e^{y-1}|_{(0,1)} = 3 \neq 0$$

ist. Es existiert also eine stetig differenzierbare Funktion g mit $g(0) = 1$, die

$$F(x) := (x + g^2(x))e^{g(x)-1} - 1 = 0$$

erfüllt. Die eben definierte Funktion F ist also in dieser Umgebung gleich der Nullfunktion. Damit verschwindet nicht nur F selbst, sondern auch alle ihre Ableitungen beliebiger Ordnung in dieser Umgebung von $x = 0$, also insbesondere in $x = 0$ selbst. Ableiten der obigen Gleichung nach x liefert für alle x in einer Umgebung von $x = 0$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (1 + 2g(x)g'(x))e^{g(x)-1} + (x + g^2(x))e^{g(x)-1}g'(x) \\ &= (1 + (x + 2g(x) + g^2(x))g'(x))e^{g(x)-1} = 0. \end{aligned}$$

Das liefert einen eindeutigen Zusammenhang der Werte von g und g' , was uns aber nicht viel nützt, da wir nicht die Größe der Umgebung für die Gültigkeit des Zusammenhangs kennen und auch dort, wo der Zusammenhang gültig ist, kennen wir $g(x)$ nicht. Ausnahme jedoch bildet $x = 0$: dort ist der Zusammenhang auf jeden Fall gültig und wir kennen $g(0) = 1$, also:

$$F'(0) = (1 + (2g(0) + g(0)^2)g'(0))e^{g(0)-1} = 1 + 3g'(0) = 0,$$

also $g'(0) = -\frac{1}{3}$. Weiteres Ableiten liefert

$$F''(x) = ((1 + 2g'(x) + 2g(x)g'(x))g'(x) + (x + 2g(x) + g(x)^2)g''(x))e^{g(x)-1} + \underbrace{F'(x)g'(x)}_{\equiv 0} = 0$$

und an $x = 0$ erhalten wir mit $g(0) = 1, g'(0) = -\frac{1}{3}$ die Gleichung

$$F''(0) = \frac{1}{9} + 3g''(0) = 0,$$

also $g''(0) = -\frac{1}{27}$. ◆

Man benutzt allgemein, dass für $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$f(x_1, \dots, x_n, g_1(x), \dots, g_n(x)) = 0$$

in einer *Umgebung* von $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ gilt. Dadurch handelt es sich um eine *Identität*, die abgeleitet werden darf und immer noch gültig bleibt. Wiederholtes Ableiten liefert Gleichungssysteme, aus denen unter Benutzung von

$$g_i(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_i, \quad i = 1, \dots, m$$

die Ableitungen $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$ bestimmt werden können. Dabei definiert man zur angeneh-

meren Rechnung

$$F(x_1, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n, g_1, \dots, g_m)$$

und leitet diese m Funktionen nach $x_1, \dots, x_n$ ab.

Aufgabe 3.14.

Untersuchen Sie für $x \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}^2$ das Gleichungssystem

$$f_1(x, y) = e^{y_1} + y_2 x_1 - \sin x_2 + x_3^2 - 2 = 0$$

$$f_2(x, y) = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 - e^{x_3} - 1 = 0$$

auf Auflösbarkeit nach y_1, y_2 in der Umgebung von $(x^0, y^0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0) = (1, 0, 0, 0, 1)$ und berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Auflösung (g_1, g_2) nach x_1, x_2, x_3 für $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 0, 0)$.

3.9.2 Satz von Umkehrfunktion

Als Anwendung zeigt man den *Satz über die Umkehrfunktion*. Dabei geht es um die Frage, wann eine stetig differenzierbare Abbildung $f: U_1 \rightarrow U_2$ mit $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offenen Mengen bijektiv ist und eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung $g: U_2 \rightarrow U_1$ besitzt.

Eine notwendige Bedingung lässt sich leicht finden: Sei $a \in U_1$ und $b := f(a) \in U_2$. Dann folgt aus $g \circ f = \text{Id}_{U_1}$ mit der Kettenregel

$$Jg(b) \cdot Jf(a) = J\text{Id} = \mathbb{1}.$$

Also muss $Df(a)$ invertierbar sein. Der folgende Satz zeigt, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, falls Verkleinerungen von U_1, U_2 erlaubt sind.

Satz 3.31 (Satz von der Umkehrabbildung).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ferner sei $a \in U, b := f(a)$ und $Jf(a)$ invertierbar. Dann existiert eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von a , V_0 von b , so dass $f|_{U_0}$ bijektiv auf V_0 abbildet und die Umkehrfunktion $g = f^{-1}: V_0 \rightarrow U_0$ stetig differenzierbar ist. Es gilt $Jg(b) = (Jf(a))^{-1}$.

Wie oben gesehen gilt umgekehrt: existiert eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung $g = f^{-1}: V \rightarrow U$, dann ist $Jf(a)$ invertierbar.

Beweis (siehe O. Forster: Analysis 2. Kapitel 1, § 8, Satz 3): Der Beweis war Übungsaufgabe in Serie 13: Idee ist die Rückführung auf den Satz über implizite Funktionen. Definiere dazu $F: \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ über

$$F(x, y) := x - f(y).$$

Es gilt $F(b, a) = 0$ und wegen $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -Jf(y)$ sowie Invertierbarkeit von $Jf(a)$ kann der angesprochene Auflösbarkeitssatz angewandt werden: es existiert also offene Umgebungen V'

von b und $U' \subseteq U$ von a sowie $g: V' \rightarrow U'$ stetig differenzierbar mit

$$0 = F(x, g(x)) \iff f(g(x)) = x \quad \forall x \in V'$$

und für $(x, y) \in V' \times U'$ mit $F(x, y) = 0$, also $x = f(y)$, gilt stets $g(x) = y$ ($\star$). Die Stetigkeit von f liefert die Existenz einer offenen Umgebung $U_0 \subseteq U'$ von a mit $V_0 := f(U_0) \subseteq V'$, so dass wegen ($\star$) $V_0 = g^{-1}(U_0)$ gelten muss. Wegen der Stetigkeit von g ist V_0 offene Umgebung von b und nach Konstruktion ist $f: U_0 \rightarrow V_0$ bijektiv mit $f^{-1} = g$. $\square$

Die Aussage des Satzes für $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ lässt sich kurzfassen als: unter den Voraussetzungen der Injektivität von f , stetigen Differenzierbarkeit und der invertierbaren Jacobi-Matrix J ist $f: U \rightarrow f(U) = V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Diffeomorphismus bzw. allgemein ist eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbaren Differential lokal ein Diffeomorphismus.

Definition 3.32.

Eine Bijektion $f: U \rightarrow V$ mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt ein C^1 -Diffeomorphismus, falls f und f^{-1} stetig differenzierbar sind.

Diffeomorphismen sind also insbesondere stets Homöomorphismen - also Bijektionen, für die f und f^{-1} stetig sind.

Beispiel: Die Abbildung $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t) = \tan(t \cdot \frac{\pi}{2})$ ist ein Diffeomorphismus zwischen der offenen Menge $(-1, 1)$ und $\mathbb{R}$. Damit ist $(-1, 1)$ diffeomorph zu $\mathbb{R}$. Dagegen ist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$ bijektiv und differenzierbar, aber kein Diffeomorphismus, da g^{-1} in 0 nicht differenzierbar ist. $\blacklozenge$

3.9.3 Untermannigfaltigkeiten und Extrema unter Nebenbedingungen

Wir führen das in der mehrdimensionalen Analysis krummlinige Analogon zu k -dimensionalen affinen Unterräumen in der Linearen Algebra ein: k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$. Man kann diese *lokal* entweder

- (a) als Parameterdarstellung mit k reellen Parametern oder
- (b) als Nullstellengebilde von $n - k$ unabhängigen diff'baren Funktionen beschreiben.

Definition 3.33.

Eine auf einer offenen Menge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Funktion

$$f: T \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t = (t_1, \dots, t_k) \mapsto f(t)$$

heißt Immersion, falls in jedem Punkt $t \in T$

$$\text{rank } Jf(t) = \text{rank} \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(t_1, \dots, t_k)} = \text{rank} \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(t) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, k}} = k$$

gilt.

Da Jf eine $n \times k$ -Matrix ist, ist notwendigerweise $n \geq k$. Die Bedingung $\text{rank } Jf = k$ ist äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der Spaltenvektoren, also der Vektoren $\frac{\partial f}{\partial t_i}(t) \in \mathbb{R}^n$. Aus der Vorlesung zur linearen Algebra ist bekannt, dass der Rang der Matrix genau dann

k ist, wenn Indizes $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ existieren, so dass für die zugehörige Untermatrix der Jacobi-Matrix gilt:

$$\det \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t) \neq 0.$$

Wegen der Stetigkeit der Determinante gilt: Ist $\text{rank } Jf = k$ in einem Punkt $t \in T$, so gilt dies auch für alle Punkte in einer kleinen Umgebung von t .

Beispiel: Für $k = 1$ und $T \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall ist eine Immersion nichts anderes als eine reguläre Kurve, d.h. $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in T$. Für $k = n$ und $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Immersion nach dem Satz über die Umkehrabbildung eine lokal umkehrbare Abbildung. ♦

Man kann zeigen:

Lemma: Sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem Punkt $t \in T$ eine offene Umgebung $U \subseteq T$, so dass

$$f|_U: U \rightarrow f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

injektiv und ein Homöomorphismus von U auf $f(U)$ ist. ♦

Nun kommen wir zur zentralen Definition des Abschnitts:

Definition 3.34.

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, falls zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $F: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ existieren, so dass

$$F(T) = M \cap U \quad \text{homöomorph abbildet,}$$

also $F \in C^1$ injektiv und F^{-1} stetig. Man nennt $f: T \rightarrow M \cap U$ Parameterdarstellung oder lokales Koordinatensystem der Untermannigfaltigkeit M in einer Umgebung von a . Wir nennen $t_1, \dots, t_k$ mit $(t_1, \dots, t_k) \in T$ die lokalen Koordinaten eines Punktes $p \in M$ bzgl. f , falls $p = f(t_1, \dots, t_k)$. Ferner heißt $n - k$ die Kodimension der Untermannigfaltigkeit M und wir nennen M im Falle $n - k = 1$ Hyperfläche.

Grob gesprochen kann man sich k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten als gekrümmte Flächen im $\mathbb{R}^n$ vorstellen, die durch die C^1 -Funktion aufeinander abgebildet werden. Es sind Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die lokal, also in einer hinreichend kleinen Umgebung jeder ihrer Punkte, *so ähnlich* aussehen wie der $\mathbb{R}^k$, wobei als Kriterium für Ähnlichkeit die Diffeomorphie zugrunde gelegt wird. Die Mengen, die dabei aufeinander abgebildet werden, besitzen dann hinsichtlich Strukturen der Differential- und Integralrechnung die gleichen Eigenschaften, so dass Analysis auf Mannigfaltigkeiten betrieben werden kann (siehe später). Mannigfaltigkeiten treten, wie oben angedeutet, oft als Lösungsmengen bestimmter Gleichungssysteme oder Niveaumengen stetig diff'barer Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ auf.

Bemerkung (Alternative Definition): Wir wissen, dass ein C^1 -Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen zwei offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ als bijektive C^1 -Abbildung mit $f^{-1} \in C^1$ erklärt ist und der Diffeomorphiesatz gilt:

Ist $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, die Jacobimatrix $Jf(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar und f injektiv, so ist f ein Diffeomorphismus zwischen U und $f(U)$. (Dabei zeigt man über den Satz der Gebietstreue, dass f ein Homöomorphismus zwischen U und $f(U)$ ist.)

Daher fassen manche Lehrbücher die Definition wie folgt: $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem $a \in M$ eine Umgebung U und einen Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ auf eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

$$\Phi(M \cap U) = \mathbb{R}_0^k \cap V,$$

wobei $\mathbb{R}^n \supset \mathbb{R}_0^k := \{x \in \mathbb{R}^n | x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^k$ ist. Man bezeichnet dann Φ als *Karte* von M . $\blacklozenge$

Bei uns folgt diese Formulierung im nächsten Satz als äquivalente Eigenschaft.

Beispiel: Einfache Beispiele sind die Sphäre von Radius $r > 0$ in $\mathbb{R}^3$, die durch Rotation der Kreislinie $(r \sin \varphi, r \cos \varphi)$ mit $0 < \varphi < \pi$ um die z -Achse entsteht, und der Torus mit Radien $r, R > 0$, der durch die Rotation der Kreislinie $(R + r \cos t, r \sin t)$ um die z -Achse entsteht. $\blacklozenge$

Das man Untermannigfaltigkeit auch anders beschreiben kann als nur durch Parameterdarstellungen beinhaltet der folgende Satz, der *ähnlich* in der Vorlesung gezeigt worden ist:

Satz 3.35 (Äquivalenzsatz für Untermannigfaltigkeiten).

Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(P) M ist eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit bzw. hat eine lokale Parameterdarstellung, d.h. zu jedem $a \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $F: T \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass F die Menge T homöomorph auf

$$F(T) = M \cap U,$$

abbildet, also $F \in C^1$ injektiv und F^{-1} stetig.

(I) M kann durch Gleichungen beschrieben werden, d.h. zu jedem $a \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $n - k$ stetig diff'bare Funktionen $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n - k$, so dass

$$M \cap U = \{x \in U: f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$$

und die Differenziale linear unabhängig sind, also

$$\text{rank} \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) = n - k \quad \forall x \in M \cap U.$$

(Gr) M kann als Graph beschrieben werden, d.h. zu jedem Punkt $a \in M$ gibt es (nach evtl. Umnummerierung der Koordinaten) offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots, a_k)$ und $V \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ und eine stetig diff'bare Abbildung $g: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$, so dass gilt:

$$M \cap (U \times V) = \{(x, y) \in U \times V | y = g(x)\}.$$

(D) M kann in die Ebene diffeomorph transformiert werden, d.h. zu jedem $a \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen C^1 -Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$, die Karte von M , so dass

$$\Phi(M \cap U) = E_k \cap V$$

gilt, wobei $\mathbb{R}_0^k \subseteq \mathbb{R}^n$ die k -dimensionale Ebene

$$\mathbb{R}_0^k := \{x \in \mathbb{R}^n | x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^k.$$

beschreibt.

Beweis: siehe Forster: Analysis 2. Kapitel 1, § 9, Satz 2. $\square$

Korollar (Zusammenhangseigenschaften und Homöomorphismen): Aus Eigenschaft (D) folgt insbesondere, dass $U \cap M$ und $V \cap \mathbb{R}_0^k$ homöomorph sind (beide Mengen sind offen in M bzw. $\mathbb{R}_0^k$). Nach evtl. Verkleinerung von U besitzt jeder Punkt einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit eine Umgebung, die zu einer offenen Kugel in $\mathbb{R}^k$ homöomorph ist. Dadurch hat jede solche Umgebung die gleichen Zusammenhangseigenschaften wie eine offene Kugel in $\mathbb{R}^k$. $\blacklozenge$

Wir betrachten zur Verdeutlichung einige Beispiele:

Beispiel: (a) Die durch $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) := x^2 + xy - y - z, \quad g(x, y, z) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z$$

definierte Menge $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$ ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, da

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + y, x - 1, -1)^T \quad \nabla g(x, y, z) = (4x + 3y, 3x - 2, -3)^T$$

linear unabhängig für alle $(x, y, z) \in M$ sind. Man kann ferner zeigen, dass $\varphi(t) := (t, t^2, t^3)$ eine globale Parameterdarstellung von M ist.

- (b) Die nulldimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind die diskreten Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ (also die Mengen, die keine Häufungspunkte besitzen). Eine Karte von M bei a ist gegeben durch $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x) = x - a$.
- (c) Die n -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten sind die nichtleeren offenen Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und die identische Abbildung ist eine Karte für M bei a .
- (d) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$ ist keine Untermannigfaltigkeit, weil M Vereinigung der beiden Gerade $x = 0$, $y = 0$ ist und nach obigem Korollar durch Herausnahme des Nullpunktes in vier disjunkte eindimensionale offene Mengen zerfällt. $\blacklozenge$

Aufgabe 3.15.

Wieso ist die reguläre Kurve $c: (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $c(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ keine 1-dimensionale diff'bare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$?

Lösung: (Skizze!) Durch Herausnahme des Nullpunktes zerfällt deren Graph in drei disjunkte eindimensionale offene Mengen, jedoch gibt es keine offene Kugel in $\mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften. $\blacklozenge$

Aufgabe 3.16.

Eine etwas anspruchsvollere Aufgabe (zumindest (a)), bei denen Kenntnisse über Matrizen aus der linearen Algebra wiederholt werden können: Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ können mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ mit den Koordinaten a_{ij} identifiziert werden. Zeigen Sie:

- Die spezielle lineare Gruppe über $\mathbb{R}$

$$SL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$$

ist eine 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$.

- Die dreidimensionale orthogonale Gruppe

$$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = Id\}$$

ist für $n = 3$ eine kompakte dreidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Hinweise: Es handelt sich dabei tatsächlich im algebraischen Sinn um Gruppen, d.h. u.a. existiert die Inverse A^{-1} . Es kann bei (a) hilfreich sein zu zeigen: für $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$J(\det A)(\tilde{A}) = \operatorname{tr}(A^\# \tilde{A}),$$

wobei $\operatorname{tr}(A)$ die Spur von A und $A^\#$ die Adjunkte zu A bezeichnet, die durch $A^\# A = AA^\# = (\det A) \cdot Id$ eindeutig festgelegt ist. Bei (b) ergibt die Untersuchung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $A \in O(3)$ an die Spaltenvektoren von A 6 Gleichungen.

Um Extremwerte von mehrdimensionalen Funktionen unter Nebenbedingungen zu bestimmen, erweist sich die Methode der *Lagrange-Multiplikatoren* als sehr effektiv. Um diese Methode (wie in der Vorlesung) zu beweisen, benötigt man neben der Theorie der Untermannigfaltigkeiten M auch Tangentialvektoren an M . Dann sind Tangentialvektoren von in M verlaufenden Kurven. Ein Normalenvektor steht senkrecht auf der Untermannigfaltigkeit.

Definition 3.36.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Dann heißt $v \in \mathbb{R}^n$ Tangentialvektor an M in a , wenn eine stetig diff'bare Kurve $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ für ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$c(0) = a \quad \text{und} \quad c'(0) = v.$$

Wir bezeichnen mit $T_a(M)$ die Menge aller Tangentialvektoren an M in a und bezeichnen einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ als Normalenvektor von M in a , falls dieser auf allen Tangentialvektoren $v \in T_a(M)$ senkrecht steht bzgl. der kanonischen euklidischen Metrik, also $\langle w, v \rangle = 0$ für alle $v \in T_a(M)$. Mit $N_a(M)$ wird die Menge aller Normalenvektoren von M in a bezeichnet.

Man kann zeigen, dass es sich bei den Mengen um Vektorräume handelt und wie die konkrete Gestalt der Menge der Tangentialvektoren aussieht:

Lemma: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Dann gelten:

- (a) $T_a(M)$ ist ein k -dimensionaler Vektorraum und $N_a(M)$ ist ein $(n - k)$ -dimensionaler Vektorraum.
- (b) Sei U offene Umgebung von a in $\mathbb{R}^n$ und $f_1, \dots, f_{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bare Funktionen mit

$$M \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$$

sowie

$$\text{rank } \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) = n - k.$$

Dann gilt

$$T_a(M) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, \nabla f_j(a) \rangle = 0, j = 1, \dots, n - k\}.$$

(für Konstruktion von Basen in (a) siehe Forster, Ana2) ◆

Mit diesen Hilfsmitteln (bzw. der daraus entwickelten Idee) zeigt man folgenden Satz über die Bestimmung von Extrema unter Nebenbedingungen:

Satz 3.37 (Lagrange'sche Multiplikatorenmethode).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $M \subseteq U$ r -kodimensionale Untermannigfaltigkeit ($r = n - k$)

$$M = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$$

mit stetig diff'baren Funktionen $g_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$\text{rank } \frac{\partial(g_1, \dots, g_r)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) = r \quad \forall x \in M.$$

Ferner sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig diff'bare Funktion, so dass f eingeschränkt auf M in einem Punkt $a \in M$ ein lokales Extremum besitzt. Dann ist $\nabla f(a)$ ein Normalenvektor von M in a , d.h. es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ konstant mit

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \nabla g_i(a)$$

und nennt a lokales Extremum von f unter der Nebenbedingung $\{g_1 = \dots = g_r = 0\}$ sowie λ_i Lagrange'sche Multiplikatoren.

f hat in $a \in M$ ein relatives Maximum (Minimum) unter den Nebenbedingungen $g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0$, falls $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) für alle $x \in U \cap M$ gilt.

Beachte, dass es sich bei dem Satz ausschließlich um eine notwendige und nicht hinreichende Bedingung handelt - es werden also nur *Kandidaten* für Extremstellen gefunden. Die Untersuchung, ob es wirklich Extremstellen sind, muss anderweitig erfolgen und stellt den i.d.R. schwierigeren Teil dar. Dabei bieten sich verschiedene Methoden an:

- (a) Zulässigen Bereich auf Kompaktheit oder andere mit dem Extremum der Aufgabe zusammenhängende günstige Informationen untersuchen
- (b) Untersuchung der Hessematrix (pos. definit: Minimum, neg. definit: Maximum, indefinit: Sattelpunkt, semidefinit: keine Aussage)
- (c) Berechnung von $f(a+h)$ mit $g(a+h)=0$ und h klein genug
- (d) Abstrakte Argumentation über die kompakte $M := \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0, \|x\| \leq C\}$ für festes $C > 0$ (dort ex. Max. und Min.) - beachte, dass die Niveaumengen von g abgeschlossen sind und deswegen M kompakt ist! Dabei wird C so groß gewählt, dass $a \in M$ liegt und zusätzliche Informationen gefunden werden können (beispielsweise, dass a nicht Max. sein kann wegen $\exists x^0 \in M : f(x^0) > f(a)$).
- (e) Einsetzen der Nebenbedingung in die Aufgabe, falls sich diese nach einer Variablen auflösen lässt (das macht jedoch Lagrange-Multiplikatoren unnötig, weil dann die Aufgabe über die gewöhnliche Extremwertuntersuchung behandelt werden kann).

Beweis (Beweis des Satzes über Lagrange-Multiplikatoren): Im Satz ist die durch die Nebenbedingungen gegebene Menge $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$M := \{x \in U | g(x) = 0\}$$

eine $(n-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine stetig diff'bare Kurve in M mit $c(0) = a$, so hat die Funktion $t \mapsto f(c(t))$ bei $t = 0$ ein lokales Extremum, daher gilt

$$0 = \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot c'_i(0) = \langle \nabla f(a), c'(0) \rangle,$$

d.h. $\nabla f(a)$ steht senkrecht auf allen Tangentialvektoren von M . □

Beispiel: (a) Wir suchen das Maximum von

$$f(x, y, z) = 3x + 2y + z$$

unter den Nebenbedingungen

$$x - y + z = 1 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Die Nebenbedingungen beschreiben den Schnitt eines Zylinders mit einer Ebene, also eine Ellipse, die schräg im Raum liegt. Diese Menge ist kompakt und f stetig, also können wir die Existenz einer Maximalstelle $a \in M$ folgern, wobei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ durch $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) := (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))^T$ mit $g_1(x, y, z) := x - y + z - 1$, $g_2(x, y, z) := x^2 + y^2 - 1$ gegeben ist als

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes von Lagrange sind erfüllt, denn es gilt

$$\text{rank } J(g)(x, y, z) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

da für beliebiges $z \in \mathbb{R}$: $(0, 0, z) \notin M$ ist. Aus der notwendigen Bedingung erhalten wir Kandidaten für Maximalstellen $a \in M$, denn es existieren dann Konstanten $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda^T \nabla g(x, y, z),$$

mit $(x, y, z) \in M$, d.h. folgendes Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + 2\lambda_2 x &= 3, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 y &= 2, \\ \lambda_1 &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 1.\end{aligned}$$

Die ersten drei ergeben $x = \frac{1}{\lambda_2}$ und $y = \frac{3}{2\lambda_2}$, so dass die Nebenbedingungen $\lambda_2 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$ liefern und die Kandidaten für Maximalstellen wie folgt lauten müssen:

$$\begin{aligned}a_+ &:= \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{13}} \right), \\ a_- &:= \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{13}} \right).\end{aligned}$$

Da $f(a_+) = 1 + \sqrt{13} > 1 - \sqrt{13} = f(a_-)$, ist a_+ Maximalstelle.

- (b) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische reelle Matrix. Wir bestimmen die Extrema der zugehörigen *quadratischen Form*

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle x, Ax \rangle = x^T Ax = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} x_j$$

unter der Nebenbedingung $\|x\|_2 = 1$. Setze daher $g(x) := \sum_i x_i^2 - 1 = 0$. Wir wenden dann den Satz über Lagrange-Multiplikatoren auf

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\|_2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, x \rangle = 1\}$$

an (beachte: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$!), denn es gilt $\frac{\partial g}{\partial x_k} = 2x_k$, also ist wegen

$$\nabla g(x) = 2x \neq 0 \quad \forall x \in M,$$

da $0 \notin M$, die Voraussetzung $\text{rank } \frac{\partial g}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = 1$ erfüllt. M ist kompakt und f stetig, also existiert ein Maximum von f auf M , d.h. eine Maximalstelle $a \in M$. Wir ermitteln eine notwendige Bedingung an a : Man berechnet mit Produktregel und wegen der Symmetrie $a_{ki} = a_{ik}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_j a_{kj} x_j + \sum_i a_{ik} x_i = 2 \sum_i a_{ki} x_i.$$

Das heißt $\nabla f(x) = 2Ax$ und daher lautet die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums $a \in M$

$$A \cdot a = \lambda a \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Interpretation: a ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Wie oben erklärt, existiert die Maximalstelle $a \in M$. Es gilt damit für den Maximalwert:

$$f(a) = a^T A a = a^T (\lambda a) = \lambda, \quad \blacklozenge$$

da $a \in M$ und somit $\langle a, a \rangle = a^T a = 1$ gilt. Also nimmt f auf M sein Maximum in einem Eigenvektor an und hat als Maximalwert den zugehörigen (und größten) Eigenwert.

Das zweite Beispiel zeigt insbesondere, dass eine symmetrische reelle Matrix stets einen reellen Eigenvektor mit reellen Eigenwert besitzt. Genauer folgt mit Induktion, dass alle Eigenwerte reell sind.

Aufgabe 3.17.

Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := 4x^2 - 3xy$ auf $\overline{B}_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. (Hinweis: Untersuchen Sie lokale Extrema im Inneren und auf dem Rand der Kreisscheibe separat!)

3.10 Prinzip von Cavalieri

Wir führen die Berechnung eines mehrdimensionalen Volumenintegrals auf die Berechnung eines eindimensionalen Integrals zurück. Dazu verwenden wir Schnittmengen.

Satz 3.38 (Prinzip von Cavalieri).

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und

$$K_t := \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in K\}$$

die $(n-1)$ -dimensionale Schnittmenge. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \text{Vol}_{n-1}(K_t)$$

integrierbar und es gilt

$$\text{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \text{Vol}_{n-1}(K_t) \, dt.$$

In Übungsaufgabe 10.1 wurde dieses Theorem bereits für den Kegel

$$K_h(A) = \{((1-t)x, t \cdot h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A \subseteq \mathbb{R}^n, t \in [0, 1]\}$$

angewandt und gezeigt, dass $K_h(A) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann messbar ist, wenn $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar ist. Ferner erhielten wir

$$\text{Vol}_n(K_h(A)) = \frac{h}{n} \text{Vol}_{n-1}(A).$$

Wir wenden diese Ergebnisse nun auf ein anderes Beispiel an:

Beispiel (Volumen eines Simplex): Seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Dann ist der von diesen Vektoren aufgespannte Simplex definiert als

$$S(a_0, a_1, \dots, a_n) := \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Wir zeigen nun:

$$\text{Vol}_n(S(a_0, \dots, a_n)) = \frac{1}{n!} |\det(a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0)|.$$

Wir betrachten wegen Translationsinvarianz des Volumens $a_0 = 0$. Wir bestimmen $\text{Vol}_n(S(0, e_1, \dots, e_n))$ für die kanonischen Basisvektoren $e_i \in \mathbb{R}^n$ per Induktion.

Zunächst ist im Induktionsanfang für $n = 1$ der Simplex $S(0, e_1) = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, also $\text{Vol}_1(S(0, e_1)) = 1$ richtig.

Sei nun im Induktionsschritt $S(0, e_1, \dots, e_n)$ der Kegel mit Höhe 1 über das Basis $S(0, e_1, \dots, e_{n-1})$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$\text{Vol}_{n-1}(S(0, e_1, \dots, e_{n-1})) = \frac{1}{(n-1)!} |\det(e_1, \dots, e_{n-1})| = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Also gilt nach obiger Formel für Kegel $K_h(A)$ mit Höhe $h = 1$

$$\text{Vol}_n(S(0, e_1, \dots, e_n)) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!}.$$

Nun zum allgemeinen Fall: für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ beliebig gilt

$$S(0, a_1, \dots, a_n) = A \cdot S(0, e_1, \dots, e_n)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gemäß $A = (a_1, \dots, a_n)$. Also liefert der (spezielle) Transformationssatz für lineare Abbildungen

$$\text{Vol}_n(S(0, a_1, \dots, a_n)) = \frac{1}{n!} |\det(a_1, \dots, a_n)|. \quad \blacklozenge$$

Bemerkung: In der Vorlesung wurde das obige Theorem allgemeiner gezeigt: Sei $n = k + l$ mit $k, l, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ Borelsch. Dann gelten:

- (a) $\forall y \in \mathbb{R}^l$ ist die Schnittmenge $A_y := \{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, y) \in A\}$ Borelsch und wird auch kurz y -Schnitt genannt.
- (b) $F_A: \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mit $F_A(y) := \text{Vol}_k(A_y)$ ist eine Borel-messbare Funktion auf $\mathbb{R}^l$.
- (c) Es gilt

$$\text{Vol}_n(A) = \int_{\mathbb{R}^l} \text{Vol}_k(A_y) \lambda^l(dy).$$

Ferner gelten die Aussagen analog für den x -Schnitt. $\blacklozenge$

Korollar: Für eine Borelsche Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ sind äquivalent:

- (a) A ist eine Nullmenge.
- (b) Die Schnittmenge $A_x := \{y \in \mathbb{R}^l \mid (x, y) \in A\}$ ist eine λ^l -Nullmenge in $\mathbb{R}^l$ für λ^k -fast alle $x \in \mathbb{R}^k$. $\blacklozenge$

Beispiel (Graph ist eine Nullmenge): Sei $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ Borelsch, $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktion. Dann ist der Graph von f

$$Gr(f) := \{(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \in B \times \mathbb{R} \mid y = f(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

Borelsch in $\mathbb{R}^n$, da

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}) - y$$

messbare Funktion (als Zusammensetzung messbarer Funktionen) auf $B \times \mathbb{R}$ und $Gr(f)$ das Urbild von 0 ist. Ferner gilt für jedes $x \in B$ fest, dass die Schnittmenge

$$\{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in Gr(f)\} = \{f(x)\}$$

einelementrig ist, also Nullmenge. Damit ist $Gr(f)$ nach dem Korollar eine Nullmenge. $\blacklozenge$

Korollar: Der Rand einer Kugel im $\mathbb{R}^n$ ist lokal als Graph einer stetigen Funktion darstellbar, also eine Nullmenge. $\blacklozenge$

Rotationskörper

Mit Hilfe des Satzes von Fubini bzw. dem Prinzip von Cavalieri lassen sich Volumina von Rotationskörpern berechnen.

Aufgabe 3.18 (Volumen von Rotationskörpern).

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Dann hat der Rotationskörper

$$K := \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

das Volumen

$$\lambda^3(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Der Rotationskörper entsteht also durch Rotation des Graphen $(x, f(x))$ um die x -Achse in dem Sinne, dass zu jedem x alle Punkte $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ gesucht werden, die um x einen Abstand von höchstens $f(x)$ haben.

Lösung: Nach der speziellen Transformationsformel für das Lebesgue-Maß unter linearen Abbildungen haben wir (für die Homothetie $x \mapsto rx$) gesehen, dass für Borelsche Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda^n(r \cdot B) = r^n \cdot \lambda^n(B),$$

also insbesondere für die Kugel $B_{f(x)}(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| \leq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\lambda^2(B_{f(x)}(0)) = f(x)^2 \cdot \lambda^2(B_1(0)) = \pi f(x)^2.$$

Damit erhalten wir nach Fubini

$$\lambda^3(K) = \int_K 1 \, d(x, y, z) = \int_a^b \int_{B_{f(x)}(0)} 1 \, d(y, z) dx = \int_a^b \lambda^2(B_{f(x)}(0)) \, dx = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx. \quad \blacklozenge$$

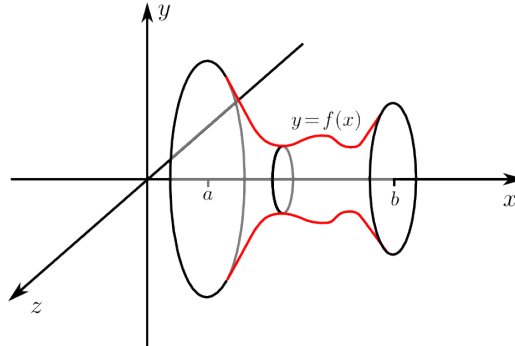


Abbildung 3: Rotationskörper durch Drehung um die x-Achse

Aufgabe 3.19 (Torus).

Man berechne das Volumen des Volltorus $\mathbb{T}_{r,R} \subseteq \mathbb{R}^3$, der durch Rotation der Kreisschreibe

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - R)^2 + z^2 \leq r^2, y = 0\}$$

um die z -Achse entsteht, wobei $0 < r < R < \infty$ ist.

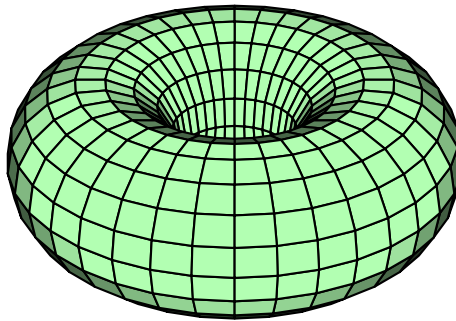


Abbildung 4: Torus

Lösung: Der Torus ist als Rotationskörper gegeben durch

$$\mathbb{T}_{r,R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

Die Ebene $z = C$ mit $C \in (-r, r)$ schneidet Torus in einem Kreisring mit Radien $r_{1,2} = R \pm \sqrt{r^2 - z^2}$, daher

$$\lambda^3(\mathbb{T}_{r,R}) = 2 \int_0^r (r_1^2 - r_2^2) \pi \, dz = 8R\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - z^2} \, dz = 2\pi^2 r^2 R. \quad \blacklozenge$$

Aufgabe 3.20.

Berechnen Sie für folgende Körper das Volumen:

- (a) Ring der Höhe h : $\mathbb{R}_{h,r} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| \leq r, x^2 + y^2 \geq r^2 - h^2\}$, wobei $0 \leq h \leq r$ gilt.
- (b) Ellipsoide, die durch Rotation der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die x - bzw. y -Achse entstehen mit $a, b > 0$.

Lösung: (a): Ebene $z = C$ mit $C \in (-h, h)$ schneidet Körper in einem Kreisring, daher mit Fubini:

$$\int_{-h}^h ((r^2 - z^2) - (r^2 - h^2))\pi \, dz = \frac{4}{3}h^3\pi$$

(Interessant: Unabhängigkeit von r !)

(b): Verwende lineare Abbildung $(x, y, z) \mapsto (\frac{b}{a}x, y, z)$ und Transformationsformel (Körper als Bild einer Kugel $B_b(0)$): $\frac{4}{3}ab^2\pi$ bzw. um y -Achse mit $(x, y, z) \mapsto (x, y, \frac{a}{b}z)$: $\frac{4}{3}a^2b\pi$. ♦

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, allgemeiner Integrale nichtnegativer messbarer Funktionen auf eindimensionale Integrale von Maßen zurückzuführen:

Satz 3.39 (Archimedes-Integral).

Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar, also $f \in \mathcal{M}^+(\mu)$ nichtnegative messbare Funktion. Dann gilt

$$\int_X f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{f \geq t\}) \, dt.$$

Dies haben wir in der Lösung einer Übungsaufgabe benutzt.

3.11 Rotationssymmetrische Funktionen

Wir behandeln einen wichtigen Spezialfall für die Zurückführung eines Integrals auf den eindimensionalen Fall. Dabei handelt es sich eigentlich nur um den Spezialfall eines allgemeineren Satzes, siehe Literatur über Integration auf Untermannigfaltigkeiten, beispielsweise Forster, Analysis 3, §14.

Definition 3.40.

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt rotationssymmetrisch, falls eine Abbildung $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ existiert mit $f(x) = g(\|x\|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Die Funktion f hängt also nur von der Norm eines Punktes ab. Bezeichne $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $T(x) = \|x\|$, dann ist das Bildmaß μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ definiert durch

$$\mu(B) := \lambda^n(T^{-1}(B)) = \lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in B\}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Man kann zeigen: ist $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, also Borelsch, dann gilt

$$\lambda^n(T^{-1}(B)) = n \cdot V_n \cdot \int_B s^{n-1} ds,$$

wobei $V_n := \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel ist.¹² Dabei ist Γ die Gammafunktion. Mit diesem Resultat zeigt man

Satz 3.41.

Sei $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Borel-messbare Funktion. Dann ist die rotationssymmetrische Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die gegeben ist durch $x \mapsto f(\|x\|)$, genau dann Lebesgue-integrierbar über $\mathbb{R}^n$, wenn die Funktion $\mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $s \mapsto f(s) \cdot s^{n-1}$ integrierbar über $\mathbb{R}_+$ ist und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|) \lambda^n(dx) = n \cdot V_n \cdot \int_{\mathbb{R}_+} f(s) \cdot s^{n-1} ds,$$

wobei

$$V_n := \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel ist.

Beispiel: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < r < R < \infty$. Dann gilt

$$\int_{r \leq \|x\| \leq R} \|x\|^{-\alpha} \lambda^n(dx) = n \cdot V_n \int_r^R s^{n-\alpha-1} ds.$$

Daraus folgt

$$\int_{r \leq \|x\| \leq R} \|x\|^{-\alpha} \lambda^n(dx) = \begin{cases} \frac{n \cdot V_n}{n-\alpha} (R^{n-\alpha} - r^{n-\alpha}), & \text{für } \alpha \neq n, \\ n \cdot V_n (\ln R - \ln r), & \text{für } \alpha = n. \end{cases}$$

Im Grenzübergang $r \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ liefert das die bereits früher in einer Aufgabe festgestellten Zusammenhänge: $x \mapsto \|x\|^{-\alpha}$ ist genau dann integrierbar über $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, wenn $\alpha < n$ und genau dann integrierbar über $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq 1\}$, wenn $\alpha > n$. ♦

Aufgabe 3.21.

Sei $R \in \mathbb{R}_+$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Berechnen Sie

$$I_j := \int_{\|x\| \leq R} x_j^2 \lambda^n(dx).$$

¹²Bemerkenswert ist, dass das Volumen der Einheitskugel bis Dimension 5 zunimmt, um danach wieder abzufallen und sogar für $n \rightarrow \infty$ gegen null zu gehen.

Lösung: Zwar ist $x \mapsto x_i^2$ nicht rotationssymmetrisch, aber aus Symmetriegründen ist $I_j = I_k$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Daher kann die Funktion auf den rotationssymmetrischen Fall zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} n \cdot I_j &= \sum_{k=1}^n \overbrace{\int_{\|x\| \leq R} x_k^2 \lambda^n(dx)}^{=I_k} \\ &\stackrel{\text{Lin.}}{=} \int_{\|x\| \leq R} \|x\|^2 \lambda^n(dx) \\ &= n \cdot V_n \int_0^R s^{n+1} ds = \frac{n \cdot V_n}{n+2} R^{n+2}, \end{aligned}$$

was schließlich liefert:

$$\int_{\|x\| \leq R} x_j^2 \lambda^n(dx) = \frac{V_n}{n+2} R^{n+2}. \quad \blacklozenge$$

3.12 Transformationssatz

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Sätze für die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen, der es uns erlaubt, auch viele (bisher unlösbare) Integrale beispielsweise krummliniger Gebiete zu berechnen.

Satz 3.42 (Allgemeine Transformationsformel).

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann ist $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann integrierbar, wenn $(f \circ \Phi) \cdot |\det J\Phi|$ über U integrierbar ist und dann gilt

$$\int_V f(y) \lambda^n(dy) = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det J\Phi(x)| \lambda^n(dx).$$

Insbesondere gilt also für das Volumen des Bildes jeder messbaren Teilmenge $A \subseteq U$, also $f \equiv 1$:

$$\lambda^n(\Phi(A)) = \int_A |\det J\Phi| \lambda^n(dx).$$

Das liefert mit einer linearen Abbildung $T: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine anschauliche Darstellung der Determinante als Volumen des Bildes des Einheitswürfels $T([0, 1]^n)$, das auch als Spat oder Parallelotop bezeichnet wird, denn es gilt $T'(x) = T$ für die Darstellungsmatrix T und

$$\lambda^n(T([0, 1]^n)) = |\det T|.$$

Die Transformationsformel findet insbesondere Anwendung bei der Definition und Benutzung von ebenen und räumlichen Polarkoordinaten:

Beispiel: (a) Ebene Polarkoordinaten (r, φ) von $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sind definiert durch

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ Abstand vom Nullpunkt,

$\varphi \in [0, 2\pi]$ der bis auf $k \cdot 2\pi$ eindeutig bestimmte orient. Winkel zw. $(1, 0)$ und (x, y) .

Transformationsformel liefert: Sei $\Phi: \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(r, \varphi) = (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi)$.

Dann ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ genau dann integrierbar, wenn

$$\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto r \cdot f(\Phi(r, \varphi))$$

integrierbar ist und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi) \cdot r \cdot dr \, d\varphi.$$

Beachte dabei:

$$\det J\Phi(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} = r.$$

(b) Räumliche Polarkoordinaten (r, θ, φ) von $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ werden definiert durch

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Abstand vom Ursprung,

$\theta \in [0, \pi]$ Poldistanz: Winkel zwischen z -Achse und Ortsvektor vor P ,

$\varphi \in [0, 2\pi]$ orient. Winkel zw. x -Achse und Ortsvektor der Projektion von P in die $x-y$ -Ebene.

Bezeichnet $\rho := r \cdot \sin \varphi$ den Abstand der Projektion P' vom Ursprung, so erhalten wir die ebenen Polarkoordinaten von P' als (ρ, φ) . Das liefert folgenden Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und räumlichen Polarkoordinaten:

$$x \stackrel{(a)}{=} \rho \cdot \cos \varphi = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

$$y \stackrel{(a)}{=} \rho \cdot \sin \varphi = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \theta.$$

Definiere also

$$\Phi: \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \theta, \varphi) := (r \cdot \sin \theta \cos \varphi, r \cdot \sin \theta \sin \varphi, r \cdot \cos \theta).$$

Dann ist $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $f(\Phi(r, \theta, \varphi)) \cdot r^2 \cdot \sin \theta$ integrierbar ist und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f(\Phi(r, \theta, \varphi)) \cdot r^2 \cdot \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi. \quad \blacklozenge$$

Beweis: Beweis war Übungsaufgabe in Serie 14. □

Beispiel (Volumen der dreidimensionalen Kugel mit Radius $R > 0$):

$$\begin{aligned} \text{Vol}_3(B_3(0)) &= \int_{B_3(0)} dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \cdot \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \left(\int_0^R r^2 \, dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Aufgabe 3.22.

Berechnen Sie

$$\int_D (x^2 - xy + y^2) \, d(x, y)$$

über dem Stück eines Kreisrings (Anulus)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0\}.$$

Lösung: Idee: Polarkoordinaten und Transformationsformel. Für

$$\Phi: \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi], \quad \Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

ist Φ ein C^1 -Diffeomorphismus auf sein Bild $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ mit $\det J\Phi(r, \varphi) = r$. Durch Einschränken erhalten wir:

$$\Phi: (1, 3) \times \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \rightarrow \overset{\circ}{D}$$

ist ein C^1 -Diffeomorphismus. Das liefert mit Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_D f \, d(x, y) &= \int_{\overset{\circ}{D}} f \, d(x, y) = \int_{(1,3) \times (\pi/2, \pi)} f(\Phi(r, \varphi)) \cdot |\det J\Phi(r, \varphi)| \, d(r, \varphi) \\ &= \int_{(1,3) \times (\pi/2, \pi)} (r^2 \cos^2 \varphi - r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \cdot r \, d(r, \varphi) \\ &= \int_{(1,3) \times (\pi/2, \pi)} \underbrace{r^3 (1 - \overbrace{\cos \varphi \cdot \sin \varphi}^{<0})}_{>0} \, d(r, \varphi) \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_1^3 r^3 \, dr \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (1 - \cos \varphi \cdot \sin \varphi) \, d\varphi \\ &= \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^3 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) = 10(\pi + 1). \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Integration auf Untermannigfaltigkeiten und Vektoranalysis

Manchmal findet man in der Literatur die mehrdimensionale Integrationstheorie mehr aus geometrischen Gesichtspunkten erklärt. Dann wird sich oft auf den dreidimensionalen Fall beschränkt. Wir wollen hier diese geometrische Anschauung kurz skizzieren, in dem wir kurz auf Vektorfelder eingehen (Erinnerung an den Abschnitt über Kurvenintegrale zu Beginn des Semesters) und die Definition des Oberflächenintegrals erläutern, die sich mit unseren allgemeinen Ergebnissen deckt. Es soll damit gezeigt werden, dass sich im dreidimensionalen Fall, wo uns das Kreuzprodukt zur Verfügung steht, die allgemeine Integraldefinition bzw. der Transformationssatz vereinfacht. Für unsere Belange kann man jedoch auch die ersten beiden Abschnitte überspringen und direkt zu den Integralsätzen weiterblättern, die den Inhalt dieses Semesters beschließen sollen.

4.1 Dreidimensionale Vektorfelder

Zu Beginn des Semesters haben wir uns als Wiederholung mit Kurvenintegralen für Skalarfelder $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und Vektorfelder $v: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ für zusammenhängende Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschäftigt. An dieser Stelle knüpfen wir an diese Thematik an, werden aber wegen des geometrischen Bezugs unser Hauptaugenmerk auf den *zwei- und dreidimensionalen Fall* legen. Schwerpunkt bilden hinreichend oft (stetig) differenzierbare Vektorfelder.

Beispiel: Ein zweidimensionales gleichförmiges Strömungsfeld, in dem die Flüssigkeit überall die Geschwindigkeit $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ hat, wird beschrieben durch das Feld

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Ein Strömungsfeld, das einen Wirbel im Ursprung beschreibt, ist

$$v(x) = \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin \varphi \\ v_0 \cdot \cos \varphi \end{pmatrix},$$

wobei φ der Polarwinkel mit $\tan \varphi = \frac{x_2}{x_1}$ ist und 0 nicht im Definitionsbereich liegt. Gleichwertig kann über kartesische Koordinaten das Feld auch beschrieben werden durch

$$v(x) = \frac{v_0}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Die Ableitung eines differenzierbaren Vektorfeldes $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist durch neun unabhängige Größen $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ bestimmt. Es genügen aber oft bestimmte Koordinaten für hinreichend viel Informationen bzgl. einer Fragestellung. Daher nutzt man den Nabla-Operator bzw. Gradient

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

der zugleich Vektor und Differentialoperator ist. Also sind sowohl Regeln der Vektor- als auch Differentialrechnung zu beachten. Es gelten also u.a. Produkt- und Kettenregel (beachte die Reihenfolge bzw. ein Abgrenzen durch Klammern!).

Lemma (Wirkung des Gradienten): Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Dann ist der Gradient $\text{grad}(f) = \nabla f$ ein Vektorfeld, das wir Gradientenfeld nennen. ♦

Der Gradient steht in jedem Punkt senkrecht auf den Niveaulinien des Skalarfeldes.

Beispiel: Zu $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + e^{-x_2^2}$ ist

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - 2x_2 e^{-x_2^2} \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld. ♦

Aufgabe 4.1.

Skizzieren Sie für $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ die Niveaudarstellung des Skalarfeldes und das zugehörige Gradientenfeld $v = \text{grad}(f)$.

Man kann also aus einem Skalarfeld ein Vektorfeld ableiten. Skalarfelder sind jedoch wesentlich einfacher zu handhaben. Leider gilt aber nicht die Umkehrung: es lässt sich nicht jedes Vektorfeld v als Gradient eines geeigneten Skalarfeldes $v = \nabla f$ darstellen. Solche Vektorfelder spielen aber eine große Rolle und werden Potenzialfeld, Gradientenfeld oder konservativ. In diesem Fall nennt man f das Potential des Vektorfeldes.

Um das Potential des entsprechenden Vektorfeldes zu bestimmen, muss die zugehörige Integrationsaufgabe gelöst werden:

Beispiel: Sei $v = \begin{pmatrix} ye^{xy} + z \\ xe^{xy} \\ x + 2z \end{pmatrix}$. Wir untersuchen, ob v ein Potenzial besitzt, lösen also

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{xy} + z \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{xy} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x + 2z. \end{aligned}$$

Integration liefert für die jeweilige Zeile

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= e^{xy} + xz + c_1(y, z) \\ f(x, y, z) &= e^{xy} + c_2(x, z) \\ f(x, y, z) &= xz + z^2 + c_3(x, y). \end{aligned}$$

Jetzt sind die Integrationskonstanten c_i derart zu bestimmen, dass in allen drei Zeilen das gleiche f steht. Wählt man nun $c_1(x, y) = z^2 + C$, $c_2(x, z) = xz + z^2 + C$, $c_3(x, y) = e^{xy} + C$ mit beliebiger Konstante C , so erhält man

$$f(x, y, z) = e^{xy} + xz + z^2 + C. \quad \blacklozenge$$

Aufgabe 4.2.

Untersuchen Sie das Vektorfeld $v = \begin{pmatrix} ye^x + yz \\ e^x + xz \\ e^x + xy \end{pmatrix}$ auf die Existenz eines zugehörigen Potentials.

Bemerkung: Der Ausdruck konservativ kommt aus der Physik: eine konservative Kraft entlang eines geschlossenen Weges leistet keine Arbeit - die Energie eines ruhenden Körpers hängt nur von seiner Position ab, nicht von der Weise, wie er dorthin gelangt ist. ♦

Man erinnere sich auch an die Analysis II: der Gradient ∇f zeigt in die Richtung des größten Anstiegs, $-\nabla f$ in die des steilsten Abfalls, also jene Richtung, in die ein kleines kugelförmiges Objekt auf der Funktionsfläche rollen würde.

Nun wollen wir den Nabla-Operator auf ein Vektorfeld v anwenden, wobei zwei Möglichkeiten offen stehen: über das Vektor- oder Skalarprodukt.

Definition 4.1.

Die Rotation eines Vektorfeldes $v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix}$ ist das Vektorprodukt des Nabla-Operators mit v , also

$$\operatorname{rot}(v) = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Ferner ist die Rotation eines Vektorfeldes wieder ein Vektorfeld.

Bemerkung: Beachte, dass das vektorielle Produkt nur im dreidimensionalen definiert ist, also auch die Rotation! Man kann aber ein *zweidimensionales* Vektorfeld durch Ergänzung einer Nullkomponente in den $\mathbb{R}^3$ einbetten und dann kann nur die dritte Komponente von $\operatorname{rot}(v)$ verschieden von null sein, nämlich $\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \neq 0$, das wiederum als Skalarfeld in $\mathbb{R}^2$ interpretiert werden kann. Also ist die Rotation eines zweidimensionalen Vektorfeldes ein Skalarfeld. Es lässt sich auch für höhere Dimensionen eine Verallgemeinerung der Rotation angeben. ♦

Die Rotation macht (als Differentialoperator nur lokal) Aussagen über die Dreheigenschaften eines Vektorfeldes.

Beispiel: Das Vektorfeld $v = \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschreibt die Geschwindigkeitsverteilung in einem mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Zylinder und man erhält (Skizze!)

$$\operatorname{rot}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Lokale Drehungen werden auch als *Wirbel* bezeichnet, die beispielsweise bei Wasserströmungen auftreten. Die Rotation eines Vektorfeldes misst also dessen (lokale) Wirbeldichte.

Für Flüssigkeitsströmungen kann man die Rotation einfach experimentell bestimmen, in dem man einen Korken in die Flüssigkeit setzt - denn dann gibt die Rotation an, wie schnell dieser sich an einer bestimmten Stelle dreht.

Nun kommen wir zur zweiten Möglichkeit, den Nabla-Operator mit einem Vektor zu verknüpfen, nämlich über das Skalarprodukt:

Definition 4.2.

Die Divergenz eines Vektorfeldes $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\operatorname{div}(v) = \langle \nabla, v \rangle = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Ferner ist die Divergenz eines Vektorfeldes ein Skalarfeld.

Die Divergenz dient als Maß für die Quelldichte von v und beschreibt die entstehende Flüssigkeitsmasse in einem Punkt. Wir werden beim Integralsatz von Gauß sehen, dass das Volumenintegral über diese Quelldichten die in einem Zeitintervall entstehende Flüssigkeitsmasse beschreibt und die Bilanz der Mengen an Flüssigkeit, die über den Rand der Menge ein- und ausfließen gleich der Masse ist, die in der Menge entsteht und vernichtet wird.

Wir haben also insgesamt erhalten:

$$\operatorname{grad}(v) = \nabla v, \quad \operatorname{rot}(v) = \nabla \times v, \quad \operatorname{div}(v) = \langle \nabla, v \rangle.$$

Ferner kann man zeigen, dass Gradientenfelder wirbelfrei und Wirbelfelder quellenfrei sind. Damit genügt es, die Rotation eines Vektorfeldes zu berechnen um herauszufinden, ob es ein Potential besitzt und muss keine Integrationsaufgabe wie oben lösen. Allerdings setzt das voraus, dass das Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist.

Außerdem gibt es noch den Laplace-Operator Δ , der zweite Ableitungen beinhaltet und Bestandteil wichtiger partieller Differentialgleichungen im 5. Semester sein wird. Er ist im $\mathbb{R}^n$ definiert als

$$\Delta := \langle \nabla, \nabla \rangle = \operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

4.2 Oberflächenintegrale im $\mathbb{R}^3$

An dieser Stelle sei auf die Wiederholung zu Kurvenintegralen 1. und 2. Art zu Beginn des Semester verwiesen. Wir betrachten nun nach der Integration über Kurven und Volumenintegralen nun die Integration über Flächen. Im $\mathbb{R}^3$ sind Flächen das Bild stetiger, stückweise stetig diff'barer Abbildungen $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit G einfach zusammenhängendes Gebiet, wobei die Tangentialvektoren $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ fast überall linear unabhängig sind. Es sind also Punkte $\mathbf{x} := \Phi(u, v)$. Dadurch werden Kurven $c(t) := (u(t), v(t))$ in der $u-v$ -Ebene unmittelbar zu Kurven $s(t) = \Phi(c(t))$ auf der Fläche. Dabei sind die Koordinatenlinien die von den Parameterraum-Geraden $u \equiv \text{const.}$ und $v \equiv \text{const.}$ definierten Kurven.

Ein Normalenvektor an die Fläche kann durch die lineare Unabhängigkeit der Tangentialvektoren sofort angegeben werden als

$$n = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Nach Voraussetzung spannen diese ein Parallelogramm der Fläche

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|$$

auf. Durch Überdeckung der Fläche mit vielen kleinen solchen Parallelogrammen und Grenzübergang zu Differentialen erhält für den Flächeninhalt, das Maß, der durch $\mathbf{x} = \Phi(u, v)$ parametrisierten Fläche F :

$$\mu(F) = \int_F d\sigma := \int_G \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| d(u, v).$$

Wir nennen

$$d\sigma = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| d(u, v)$$

das skalare Oberflächenelement. Wir verallgemeinern dies auf skalare Funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und erklären das Oberflächenintegral über der durch $(u, v) \in G$ als $\mathbf{x}(u, v)$ parametrisierten Fläche F als

$$\int_F f(\mathbf{x}) d\sigma := \int_G f(\mathbf{x}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| d(u, v).$$

In der Literatur wird manchmal auch ein $\iint$ für das Integral über zweidimensionale Objekte geschrieben. Ist F über $D \subseteq \mathbb{R}^2$ im Bildraum von Φ explizit gegeben durch $\mathbf{x} = (x, y, z(x, y))^T$, dann erhält man

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

und mit $d\sigma = \|z_x \times z_y\| d(x, y)$ vereinfacht sich das Oberflächenintegral zu

$$\int_F f(\mathbf{x}) d\sigma = \int_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dz_1 dz_2$$

Für derartige Flächen $z = (x, y)$ kann man sofort den Normalenvektor angeben als

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ -1 \end{pmatrix}$$

bzw. für umgekehrte Orientierung

$$n' = -n = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Orientierbarkeit einer Fläche besagt grob gesprochen, dass wir beide Seiten einer Fläche unterscheiden können. (Ein Beispiel einer nicht orientierbaren Fläche ist das Möbiusband.¹³)

Beispiel: Wir bestimmen $f(x, y, z) = z^2$ über die obere Halbkugelfläche F mit Radius $R > 0$, die wir parametrisieren mittels

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)^T$$

mit $(\theta, \varphi) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. Das ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ R^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

und für das skalare Oberflächenelement

$$d\sigma = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Das liefert für das Integral

$$\int_F z^2 \, d\sigma = \int_{[0, \pi/2] \times [0, 2\pi]} (R \cos \theta)^2 R^2 \sin \theta \, d(\theta, \varphi) = R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{2\pi R^4}{3}. \quad \blacklozenge$$

Nun definieren wir das Integral eines Vektorfeldes über einer Fläche. Das Ergebnis wird Fluss des Vektorfeldes durch diese Fläche genannt. Er wird im ebenen Fall durch ein Skalarprodukt gegeben, im Fall komplizierter geformter Flächen durch ein Oberflächenintegral. Das kann man sich geometrisch veranschaulichen, wenn n der Einheitsnormalenvektor einer infinitesimalen (ebenen) Fläche mit Inhalt dA ist und man den Vektor $d\sigma = n \, dA$ definiert. Ist das Feld v nämlich dann parallel zu $d\sigma$, so ist (je nach Orientierung des Feldes) der Fluss durch die Fläche gleich $d\Phi = \pm \|v\| \, dA$. Ist das Feld orthogonal zu n , also parallel zur Fläche, so ist der Fluss null. Ganz allgemein erhält man für den Fluss das Skalarprodukt $d\Phi = \langle v, d\sigma \rangle$. Der Gesamtfluss ergibt sich dann durch Zusammensetzen der kompletten Fläche aus infinitesimalen Flächen als

$$\Phi = \int_F \langle v, d\sigma \rangle = \int_G \left\langle v, \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) \right\rangle d(u, v)$$

und nennt es vektorielles Oberflächenintegral sowie $d\sigma = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \, du \, dv$ vektorielles Oberflächenelement.

Aufgabe 4.3.

Zeigen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes $v(\mathbf{x}) = (y, x, z)^T$ durch die obere Halbkugel um 0 mit Radius $R > 0$ gegeben ist durch $\frac{2\pi R^3}{3}$.

¹³Ein Möbiusband kann man nachbauen, wenn man einen Papierstreifen an beiden Enden zusammenklebt, aber eines der Enden vorher um 180 Grad dreht.

4.3 Integralbegriff für Untermannigfaltigkeiten

An dieser Stelle sei für die Wiederholung der Begriffe (Untermannigfaltigkeit, Karte, ...) an den entsprechenden Abschnitt zur den Nachträgen zur Analysis II im vorigen Kapitel erinnert.

Definition 4.3.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig differenzierbar sowie regulär ($\text{rank } J\Phi = d \leq n$). Dann erklären wir das Flächenintegral von f über $\Phi(U) \subseteq X$ offen mit $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ Borel-messbar als

$$\int_U f \, dA := \int_U f(\Phi(x)) \sqrt{|\det(J\Phi(x)^T \cdot J\Phi(x))|} \, d\lambda(x).$$

Beispiel: Ein Beispiel liefert das *Kurvenintegral* : für $\Phi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $f: \Phi((a, b)) \rightarrow \mathbb{R}^d$ Borel-messbar gilt:

$$\int_{\Phi((a,b))} f \underbrace{dl}_{\text{Länge}} = \int_{(a,b)} f(\Phi(x)) |J\Phi(x)| \, d\lambda(x).$$

Als weiteres Beispiel erhält man (nicht offensichtlich) für die Fläche eines Graphen einer Funktion $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit $\Phi(x) = (x, \tilde{f}(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\Phi(U) = \text{graph}(\tilde{f})$, dass gilt:

$$\int_{\Phi(U)} f \, dA = \int_U f(x, \tilde{f}(x)) \sqrt{1 + |\nabla \tilde{f}(x)|^2} \, d\lambda(x). \quad \blacklozenge$$

Um das Integral für Untermannigfaltigkeiten zu erklären, brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ d -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann existiert zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $U(x) \subseteq \mathbb{R}^d$ derart, dass eine injektive und reguläre ($\text{rank} = d$ auf $U(x)$) Abbildung $\Phi: U(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar existiert. Dann existiert auch eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x mit $U \cap M = \tilde{\Phi}(U(x))$, wobei $\tilde{\Phi} = (x, \Phi(x))$ ist. $\blacklozenge$

Definition 4.4.

Sei M eine d -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $\tilde{\Phi}_i: U(x_i) \rightarrow M$ mit $1 \leq i \leq k$ gemäß obigen Lemmas und $\bigcup_{i=1}^k \Phi_i(U(x_i)) = M$. Sei ferner $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f_i(x) = 0$, falls $x \in M \setminus \Phi_i(U(x_i))$. Dann definieren wir über das oben erklärte Flächenintegral

$$\int_M \left(\sum_{i=1}^k f_i \right) dA = \sum_{i=1}^k \int_{\Phi_i(U(x_i))} f_i \, dA.$$

Zur Übung greifen wir noch einmal die Thematik der Rotationskörper aus dem Abschnitt über das Prinzip von Cavalieri auf:

Aufgabe 4.4 (Rotationskörper).

Zeigen Sie, dass für eine stetige, positive Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Mantelfläche des durch den Graphen von f gebildeten Rotationskörpers den Flächeninhalt

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

besitzt. Zeigen Sie, dass der durch $f(x) = 1/x$ für $x \geq 1$ gebildete Rotationskörper zwar endliches Volumen, aber unendlichen Mantelflächeninhalt besitzt. (Der Rotationskörper ist durch EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647), einem Schüler von GALILEI, bekannt geworden und trägt auch den Namen Torricellis Trompete oder Gabriels Horn.)

Satz 4.5 (Gauß'scher Divergenzsatz).

Sei $\Phi: \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla \Phi \neq 0$ auf $M = \{\Phi = 0\}$. Dann gilt für $F: \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ stetig differenzierbar:

$$\int_{\{\Phi < 0\}} \operatorname{div}(F(x)) \, d\lambda(x) = \int_{M=\{\Phi=0\}} \langle F(x), \nabla \Phi(x) \rangle \, dA,$$

wobei $\operatorname{div}(F(x)) = \operatorname{tr}(JF(x)) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$ ist.

Im nächsten Abschnitt werden wir diesen Satz verallgemeinern.

4.4 Integralsatz von Gauß

Im Folgenden geht es um die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen Kurven-, Oberflächen- und Volumenintegralen. Integralsätze beschreiben Beziehungen, die eine Verbindung zwischen dem Integral über ein Objekt und dessen Rand herstellen. Man erinnere sich beispielsweise an den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in $\mathbb{R}$, der das Integral einer Funktion f durch das Auswerten einer verwandten Funktion F an den Randpunkten auswertet durch

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Im Mehrdimensionalen gilt das ähnlich für bestimmte Integrale über vektorwertige Funktionen v und ein verwandtes Vektorfeld w , jedoch ist hier eine zusätzliche Integration notwendig, da der Rand einer mehrdimensionalen Integrationsbereiche (Flächen, Volumenbereiche, ...) ausgedehnte Objekte sind. Zunächst benötigen wir aber eine spezielle Definition geeigneter Mengen, auf denen der Integralsatz gelten soll.

Definition 4.6.

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann sagt man, K ist ein Kompaktum mit glattem Rand, falls zu jedem Punkt $a \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

- (a) $K \cap U = \{x \in U \mid \Phi(x) < 0\}$
- (b) $\nabla \Phi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Es lässt sich zeigen, dass dann $\partial K \cap U = \{x \in U \mid \Phi(x) = 0\}$ ist.

Korollar: Der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand ist eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. ♦

Es lässt sich zeigen, dass für einen Punkt $a \in \partial K$ auf dem Rand eines Kompaktums mit glattem Rand ein eindeutiger äußerer Einheits-Normalenvektor $v(a) \in \mathbb{R}^n$ von K in a existiert, d.h. es gelten

- (a) $v(a) \perp T_a(\partial K)$
- (b) $\|v(a)\| = 1$
- (c) $\exists \epsilon > 0 : a + tv(a) \notin K$ für alle $t \in (0, \epsilon)$.

Daher existiert zu jedem Kompaktum A mit glattem Rand ein stetiges Vektorfeld

$$v: \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } v(a) \text{ äußerer Einheits-Normalenvektor zu } a \in \partial K$$

und man nennt dieses das äußere Einheits-Normalenvektorfeld

Beispiel: Die Kugel $B_r(0)$ vom Radius $r > 0$ um 0 hat glatten Rand (wähle $\Phi(x) := \|x\|^2 - r^2$). Man erhält für den äußeren Normalen-Einheitsvektor zu $a \in \partial B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$ gerade $v(a) = \frac{a}{r}$. ♦

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $v = (v_1, \dots, v_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist die Divergenz von v eine Funktion $\text{div}(v): U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\text{div}(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \langle \nabla, v \rangle.$$

Die Divergenz wird auch als *Quellenenergiebigkeit oder Quelldichte* von v bezeichnet. Daher heißt ein Vektorfeld v mit $\text{div}(v) \equiv 0$ *quellenfrei*.

Satz 4.7 (Gauß'scher Integralsatz).

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, $n: \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenfeld und U mit $K \subseteq U$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_K \text{div}(v(x)) \lambda^n(dx) = \int_{\partial K} \langle v(x), n(x) \rangle dA(x).$$

Bemerkung: Der Gauß'sche Integralsatz gilt auch in verallgemeinerten Versionen für Mengen K ohne glatten Rand, wenn diese niederdimensionale Singularitäten wie Kanten oder Ecken aufweisen oder das Vektorfeld v nicht in einer vollen Umgebung von K stetig diff'bar ist. ♦

Interpretation: Man stelle sich eine strömende Flüssigkeit vor. Dann ist die Menge an Flüssigkeit, die durch die Oberfläche eines Körpers heraus- und hereinströmt, gleich der Flüssigkeitsmenge, die Quellen im Körper hervorbringen oder vernichten. Ökonomisch kann man dies auch als Export-Import-Bilanz eines Landes betrachten und diese mit seiner Warenherstellung und dem Warenverbrauch in Beziehung setzen. Das man nur den Rand für den Nettofluss betrachten braucht ist für eine Flüssigkeit anschaulich klar, denn zerlege ich meine Menge in viele kleine diskjunkte Quader, dann fließt alles, was aus einem Quader herausfließt an den Berührungsflächen in einen anderen hinein. Alles was jedoch in dem gesamten Bereich mehr ab- als zufließt, muss in Quellen entstehen, andernfalls muss es Senken geben, wenn mehr zu- als abfließt.

Frage: Wie erhalten wir dieses Normalenfeld n ? Wir gehen hier zum Skizzieren des Vorgehens von einer durch $g(x, y, z) = 0$ implizit gegebenen Fläche im $\mathbb{R}^3$ aus mit $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar. Dann ist der Gradient $\text{grad}(g(x, y, z))$ ein Normalenvektor der Fläche in (x, y, z) , falls dieser dort nicht verschwindet. Man kann also das Gradientenfeld verwenden. Ist nun die Fläche als Graph einer stetig diff'baren Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so ist ein in $(x, y, f(x))$ nach oben weisender Normalenvektor angebar als

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right),$$

denn es ist $g(x, y, z) := z - f(x, y) = 0$ eine die Fläche darstellende Gleichung.

Beispiel: Wir bestimmen das äußere Normalenfeld n auf dem Rand der Einheitskugel $K \subseteq \mathbb{R}^3$, $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Danach verifizieren wir den Satz von Gauß für $f(x, y, z) = (x, y, z)^T$.

Wir spalten die Fläche der Kugel in die obere und untere Hälfte auf - so können wir sie als jeweils als Graph darstellen. Wir erhalten für die Fläche der oberen Halbkugel ∂O

$$g_O(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad x \in (-1, 1), y \in (-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}).$$

Das Gebiet für x, y bezeichnen wir als X . Daher ist das äußere Normalenfeld dort gegeben als

$$n_O(x, y, g_O(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog für die untere Halbkugel mit Graphen $g_U(x, y) := -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$: dort erhalten wir als Normalenfeld auf ∂U

$$n(x, y, g_U(x, y)) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

also für das äußere Normalenfeld auf ∂U : $n_U := -n = n_O$. Nun gilt

$$\int_K \text{div}(f(x, y, z)) \, d(x, y, z) = \int_K 3 \, d(x, y, z) \stackrel{\text{KugelKO}}{=} 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = 4\pi.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial O} \langle f, n \rangle dA &= \int_X \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} d(x, y) \\
&= \int_X \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} d(x, y) \\
&\stackrel{\text{PolarKO}}{=} \lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} d\varphi dr \\
&= 2\pi \cdot \left(-\sqrt{1-r^2} \right) \Big|_0^1 = 2\pi.
\end{aligned}$$

Das selbe Ergebnis erhalten wir wegen der sich aufhebenden neg. Vorzeichen für ∂U , also ist das Integral über ∂K ebenfalls 4π . Das verifiziert den Satz von Gauß für dieses Beispiel. ♦

Wir können die spezielle Struktur des $\mathbb{R}^3$ nutzen, um eine spezielle Version des Integralsatzes mit Hilfe des Kreuzproduktes zu formulieren.

Satz 4.8 (Variante: Gauß'schen Integralsatz in $\mathbb{R}^3$).

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine durch $\mathbf{x} = (x, y, z)^T = \mathbf{x}(u, v)$ mit $u, v \in G \subseteq \mathbb{R}^2$ parametrisierte Fläche mit stückweise stetig diff'barer Oberfläche ∂A und einem in ganz A stetig diff'baren Vektorfeld v . Dann gilt:

$$\int_A \operatorname{div}(v) d\mathbf{x} = \int_{\partial A} \langle v, d\sigma \rangle.$$

mit dem vektoriellen Oberflächenelement

$$d\sigma = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} du dv.$$

Beispiel: Wir berechnen im $\mathbb{R}^3$ über dem Einheitswürfel Q

$$\int_{\partial Q} \langle v(x, y, z) d\sigma \rangle$$

mit

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2+z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix}$$

Statt jedoch sechs Flächenintegrale zu berechnen (eins pro Würfelseite), benutzen wir den Satz von Gauß: es gilt

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

Jetzt bleibt nur noch ein Volumenintegral zu berechnen:

$$\int_Q 2x + 2y + 2z d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2x + 2y + 2z dx dy dz = 3. \quad \blacklozenge$$

Definition 4.9.

Eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt regulär, wenn für jedes $x \in \partial U$ ein $\epsilon > 0$ und eine stetig diff'bare Funktion $g = g_x: B_\epsilon(x) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla g(x) \neq 0$ sowie $U \cap B_\epsilon(x) = \{g < 0\}$ und $\partial U \cap B_\epsilon(x) = \{g = 0\}$ existiert. (Dann ist ferner ∂U eine Untermannigfaltigkeit.)

Die Regularität einer offenen Menge U sichert die Existenz eines äußeren Normalenfeldes auf dem Rand ∂U der Menge. Es gilt dann ferner auch folgende Fassung des Integralsatzes:

Satz 4.10 (Divergenzsatz von Gauß und Green).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und regulär sowie $\bar{U} \subseteq X$ mit X offen und $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar. Dann gilt

$$\int_U \operatorname{div}(F(x)) \, d\lambda(x) = \int_{\partial U} \langle F(y), n(y) \rangle \, dA(y).$$

Satz 4.11 (Green'sche Formel).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $v: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenfeld. Ferner seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_A (f \nabla g - g \nabla f)(x) \, \lambda^n(dx) = \int_{\partial A} \left(f \frac{\partial g}{\partial v} - g \frac{\partial f}{\partial v} \right) \, dS,$$

wobei

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) := \langle \nabla f(x), v(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} v_i(x)$$

als die Ableitung einer stetig diff'baren Funktion in Normalenrichtung in einem Punkt $x \in \partial A$ definiert ist.

Konvergenzbegriffe

5.1 $\mathcal{L}^p$ -Räume und wichtige Ungleichungen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir führen nun die p -fach integrierbaren Funktionen ein (genauer folgt in der Vorlesung Funktionalanalysis).

Definition 5.1.

Sei $p \in [1, \infty]$. Dann sind die Räume der p -fach integrierbaren Funktionen gegeben durch

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar mit } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}, \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) := \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar mit } \exists C > 0 : \mu\{|f| \geq C\} = 0 \}, \quad (p = \infty)$$

und schreiben

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf \{ C > 0 : \mu\{|f| \geq C\} = 0 \} \quad (p = \infty).$$

Oft spricht man auch nur kurz von $\mathcal{L}^p$ -Räumen und schreibt nur $\mathcal{L}^p$ statt $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Je nachdem, ob wir einen Teil des Maßraumes hervorheben wollen, schreiben wir auch beispielsweise $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Die Abbildung $f \mapsto \|f\|_{L^p}$ mit $p \in [1, \infty]$ verhält sich wie eine Norm¹⁴ (Definitheit bzw. Nullidentität fast überall, absolute Homogenität, Dreiecksungleichung). Um letzteres zu zeigen, verwendet man die Young'sche Ungleichung:

Lemma (Young'sche Ungleichung): Seien $p, q \in (1, \infty)$ konjugierte Exponenten, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und damit $q = \frac{p}{p-1}$. Dann gilt für alle nichtnegativen reellen Zahlen $a, b \geq 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $b = a^{p-1}$ ist. ◆

Mit der Young'schen Ungleichung zeigt man folgende fundamentale Ungleichung für Integrale:

Satz 5.2 (Hölder'sche Ungleichung).

Seien $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ und $p, q \in (1, \infty)$ konjugierte Exponenten. Dann gelten $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\left| \int f \cdot g d\mu \right| \leq \int |f \cdot g| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Für $p = q = 2$ erhält man daraus:

¹⁴Ist aber keine Norm, siehe weiter unten.

Korollar (Cauchy-Schwarz-Ungleichung): Für $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ gilt $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2} . \quad \blacklozenge$$

Ferner kann man mit der Hölder'schen Ungleichung zeigen:

Korollar (Minkowski-Ungleichung): Für $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $p \in [1, \infty]$ gilt $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ sowie

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} . \quad \blacklozenge$$

Bemerkung: (a) Mit diesem Korollar folgt also insbesondere, dass für beliebige Linearkombinationen $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ gilt, falls $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Also ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum.

(b) Es handelt sich bei $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_{L^p})$ um *keinen* normierten Raum, denn es gilt

$$\|f\|_{L^p} = 0 \iff f = 0 \text{ fast überall,}$$

also nicht notwendig $f \equiv 0$. $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist nur ein quasi-normierter Raum. Es gibt aber ein Standardverfahren, um diesen zu einem echten normierten Raum $L^p(\mu)$ zu machen (hier schreibt man dann statt dem $\mathcal{L}$ ein L , um das hervorzuheben):

- Man bezeichnet $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *äquivalent* und schreibt $f \sim g$ genau dann, wenn $\mu(f \neq g) = 0$. Dann bezeichnet

$$[f] := \{g \in \mathcal{L}^p(\mu) : g \sim f\}$$

die Äquivalenzklasse mit Repräsentant f und

$$\|[f]\|_{L^p} := \inf\{\|g\|_{L^p} : g \in [f]\} = \|f\|_{L^p} ,$$

da $f = g$ f.ü. auch $\|f\| = \|g\|$ impliziert (siehe Abschnitt über Nullmengen).

- Dann definiert

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \sim = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$$

mit der Norm $\|[f]\|_{L^p}$ einen normierten Vektorraum.

- Es ist üblich $[f]$ mit einem Repräsentanten $f_0 \in [f]$ zu identifizieren, wobei $[f] = [f_0]$ für alle $f_0 \in [f]$ gilt. Wir rechnen daher nur mit den Repräsentanten von L^p -Funktionen, die nur bis auf eine Nullmenge bestimmt sind.
- Für Funktionen $f, g \in L^p(\mu)$ sind Vergleichs-Ausdrücke wie $f = g$, $f < g$, ... immer nur fast überall zu verstehen!

(c) Es gilt $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ genau dann, wenn f messbar und $|f|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist. $\blacklozenge$

Definition 5.3.

Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^p$, $f \in \mathcal{L}^p$ und $p \in [1, \infty]$. Dann konvergiert $(f_n)_n$ in L^p gegen f , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

Dann schreiben wir $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} f$ oder $L^p - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ oder auch $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in L^p .

Bemerkung: Aus der punktweisen Konvergenz $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$ einer Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^p$ folgt i.A. nicht die L^p -Konvergenz. Hinreichende Bedingungen liefert die L^p -Version des Satzes der dominierten Konvergenz, siehe unten. ♦

Lemma: Seien $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^p$ und $p \in [1, \infty]$ sowie $f_n \geq 0$. Dann gilt

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_{L^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p}. \quad \blacklozenge$$

In der Funktionalanalysis wird gezeigt, dass der Raum $\mathcal{L}^p(\mu)$ für $p \in [1, \infty]$ vollständig ist (Satz von Riesz-Fischer), d.h. dass jede Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p$ auch konvergiert. Daraus folgt, dass eine gegen $f \in \mathcal{L}^p$ mit $p \in [1, \infty]$ L^p -konvergente Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^p$, die immer auch eine Cauchy-Folge ist, stets eine punktweise konvergente Teilfolge besitzt.

Satz 5.4 (Satz von der L^p -dominierten Konvergenz).

Sei $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $p \in [1, \infty)$. Gelten

- *punktweise Konvergenz:* $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ f.ü.
- *Existenz einer nichtneg. p -integrierbaren Majorante:*
 $|f_n| \leq g$ f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$ und einem $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$,

dann ist $f \in \mathcal{L}^p$ und es gilt

- (a) *Konvergenz in L^p :* $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$,
- (b) *Konvergenz der L^p -Normen:* $\|f_n\|_{L^p} \rightarrow \|f\|_{L^p}$.

Den genauen Zusammenhang zwischen beiden Konvergenzaussagen liefert der folgende Satz:

Satz 5.5 (Satz von Riesz).

Sei $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^p$ mit $p \in [1, \infty)$. Konvergiert f_n fast überall punktweise gegen $f \in L^p$, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}.$$

Beispiel: Der zu $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit dem Zählmaß $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ zugehörige L^p -Raum ist der Folgenraum der p -summierbaren Folgen, für $p \in [1, \infty)$ gegeben durch

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \mathcal{L}^p(\mu) = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{L^p} < \infty\} = \left\{ (f_n)_n \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p < \infty \right\}$$

und für $p = \infty$ durch

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n| < \infty \right\}.$$

Dann werden die Hölder- und Minkowski-Ungleichung zu den bereits aus der Analysis bekannten und zu Beginn des Semesters wiederholten Ungleichungen für Reihen. ♦

5.2 Konvergenz im Maß

Definition 5.6.

Seien $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann konvergiert $(f_n)_n$ im/nach Maß gegen f , falls für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\underbrace{\{|f_n - f| > \epsilon\}}_{=\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}}) = 0.$$

Man schreibt: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ oder $f_n \rightarrow f$ n.M.

Man sagt, $(f_n)_n$ konvergiert lokal nach Maß gegen f , falls für jedes $\epsilon > 0$ und alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\} \cap A) = 0.$$

Man schreibt: $f_n \xrightarrow{\mu, loc} f$ oder $f_n \rightarrow f$ lokal n.M.

Beispiel: Auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ konvergiert $f_n := \mathbb{1}_{(n, n+1)} \xrightarrow{\mu, loc} 0$, aber nicht nach Maß: $f_n \not\xrightarrow{\mu} 0$. ♦

Wir beschäftigen uns hier im folgenden nur mit Konvergenz nach Maß. In gewisser Weise ist der Grenzwert bei Maßkonvergenz eindeutig: Sind $(f_n)_n, f, (g_n)_n, g$ messbare reelle Funktionen auf X mit $f_n \xrightarrow{\mu} f$ und $f_n \xrightarrow{\mu} g$, so gilt $f = g$ μ -fast überall. Ferner gelten übliche Rechenregeln: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_n \xrightarrow{\mu} f$ sowie $g_n \xrightarrow{\mu} g$, so gilt

$$f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g, \quad \alpha \cdot f_n \xrightarrow{\mu} \alpha \cdot f.$$

Satz 5.7.

Seien $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $f_n \rightarrow f$ μ -fast überall und $\mu(X) < \infty$. Dann gilt: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Lässt man $\mu(X) = \infty$ zu, dann folgt lediglich lokale Konvergenz im Maß. Dass auf diese Voraussetzung nicht verzichtet werden darf, sieht man im folgenden Beispiel:

Beispiel: Auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ konvergiert die Folge $f_n := \mathbb{1}_{[n, \infty)}$ λ -fast überall punktweise gegen $f \equiv 0$, aber nicht nach Maß λ . ♦

Dass eine im Maß konvergente Folge nicht punktweise konvergent zu sein braucht, zeigen folgende Beispiele:

Beispiel (Wandernde Türme): Betrachte $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ mit λ Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}([0, 1])$. Definiere

$$g_{n,k}(x) := \mathbb{1}_{[k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n})}(x) \quad \text{für } 0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}_0$$

sowie die Durchnummerierung der Türme:

$$f_m(x) := g_{n,k}(x), \quad \text{falls } m = 2^n + k \quad \text{mit } 0 \leq k < 2^n, m \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert $f_m \xrightarrow{\lambda} f(x) := 0, x \in [0, 1]$ nach Maß, aber nicht λ -fast überall, denn:

$$\forall \epsilon > 0 : \quad \lambda(\{f_m > \epsilon\}) = 2^{-n}, \quad \text{falls } m = 2^n + k, 0 \leq k < 2^n,$$

also liegt für $m \rightarrow \infty$ Konvergenz dem Maß nach vor. Allerdings gilt für alle $x \in [0, 1]$:

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = 0 < 1 = \limsup_{m \rightarrow \infty} f_m(x),$$

was bedeutet, dass (f_m) nicht λ -fast überall konvergiert. ♦

Satz 5.8.

Sei $0 < p \leq \infty$ und $f, f_n \in \mathcal{L}^p$ sowie $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Dann konvergiert $f_n \xrightarrow{\mu} f$ nach Maß.

Definition 5.9.

Die Folge $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbarer Funktionen heißt Cauchy-Folge für die Konvergenz im Maß, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\mu(\{|f_m - f_n| > \epsilon\}) < \epsilon \quad \forall m, n \geq N(\epsilon).$$

Jede nach Maß konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge für die Konvergenz nach Maß, da gilt

$$\{|f_m - f_n| > \epsilon\} \subseteq \{|f_m - f| > \epsilon/2\} \cup \{|f - f_n| > \epsilon/2\}.$$

Satz 5.10.

(a) Seien $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen, die eine Cauchy-Folge für die Konvergenz nach Maß bilden. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die fast überall gleichmäßig gegen eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Seien $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen, die im Maß gegen eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die fast überall gleichmäßig gegen f konvergiert.

Im Satz kann man statt der gleichmäßigen Konvergenz auch die μ -fast überall Konvergenz folgern.

Index

- L^p -Konvergenz, 100
- L^p -Raum, 99
- äußeres Maß, 30
 - Borel-Maß, 31
 - Borel-reguläres-Maß, 31
 - Lebesgue-, 29
 - Radon-Maß, 31
- abgeschlossen, 14
- affin-lineare Abbildung, 52
- Algebra, 9
 - σ -Algebra, 10
 - erzeugte, 11
 - Urbild-, 16
 - erzeugte, 9
 - Semialgebra, 8
- Anulus, 86
- Banach-Tarski-Paradox, 29
- Beispiel
 - Wandernde Türme, 102
- Bildmaß, 35, 52
- Borel'sche σ -Algebra, 12
- Borelmenge, 12
- Cantor'sches Diskontinuum, 5
- Cantor-Menge, 5
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 99
- Cavalierisches Prinzip, 78
- Dichtefunktion, 50
- Diffeomorphisatz, 71
- Diffeomorphismus, 70
- Differentialgleichung, 58
 - Trennung der Variablen, 58
- Differentialoperator (Nabla-Operator), 87
- Dirichlet-Funktion, 53
- Divergenz, 90, 95
- Doppelintegral
 - iterierte Integrale, 63
- Dynkin-System, 25
- einfache Funktion, 38
- Einheitskugel
 - n -dimensionales Volumen, 83
- Ellipse, 82
- Ellipsoid, 82
- Erwartungswert, 49
- fast überall, 51
- fast alle, 51
- Feld
 - konservatives, 88
 - Gradientenfeld, 88
 - Potentialfeld, 88
 - quellenfrei, 95
 - Skalarfeld, 87
 - Strömungsfeld, 87
 - Vektorfeld, 87
- Fläche, 90
 - Koordinatenlinien, 90
 - Kurve, 90
 - Möbiusband, 92
 - Normalenvektor, 91
 - Orientierung, 91
- Folgen
 - p -summierbare Folgen, 101
 - absolut-summierbare Folgen, 49
- Gabriels Horn, 94
- Gamma-Funktion, 58
- glatter Rand, 95
- Gradient, 87
- Graph einer Funktion, 80
- Hölder'sche Ungleichung, 99
- Halbring, 28
- Homöomorphismus, 70
- Homothetien, 22
- Hyperfläche, 71
- Immersion, 70
- Indikatorfunktion, 17
- Integral
 - Nichtnegative messbare Funktionen, 43
- Integralsätze, 94
- integrierbare Majorante, 45, 55
 - parameterunabhängig, 56
- Jordan-messbar, 33
- Kegel, 78
- kompakter Raum, 30

- Kompaktum, 95
- konjugierte Exponenten, 99
- Konvergenz
 - Cauchy-Folge im Maß, 103
 - im p -ten Mittel, 100
 - im Maß, 102
 - lokal im Maß, 102
- Kreisring, 86
- Kurvenintegral, 93
- Lagrange'sche Multiplikatoren, 75
- Laplace-Operator, 90
- Lebesgue-Integral
 - für Teilmengen, 50
 - integrierbar, 46
 - Integrierbarkeitskriterien, 47
 - komplexwertig, 47
 - Lebesgue-integrierbar, 47
 - lineares Funktional, 48
 - Linearität, 48
 - messbare Funktionen, 46
 - quasi-integrierbar, 47
 - Treppenfunktion (Einfache Funktionen), 43
- Lebesgue-Maß, 31
 - bewegungsinvariant, 22
 - messbar, 31
 - spezielle Transformationsformel, 22
 - translationsinvariant, 22
- Lindelöf-Eigenschaft, 30
- lokal, 71
- lokale Eigenschaft, 56
- Maß, 19
 - Bildmaß, 35
 - Dirac-Maß, 21, 45
 - endlich, 55
 - Lebesgue-Borel-Maß, 22
 - Lebesgue-Maß, 31
 - Lebesgue-Stieltjes-Maß, 31
 - mit Dichtefunktion, 50
 - Produktmaß, 61
 - Wahrscheinlichkeitsmaß, 20
 - Zählmaß, 21
- Maßraum, 20
 - σ -endlicher, 20
 - endlicher, 20
- Markov-Ungleichung, 46, 51, 52
- Matrix
 - Adjunkte, 74
 - Eigenvektor, 78
 - Eigenwert, 78
 - Orthogonale Gruppe $O(n)$, 74
 - Spezielle lineare Gruppe $SL(n)$, 74
 - Spur, 74
- messbar, 12
 - Abbildung, 34
 - Funktion, 36
 - Jordan-, 33
 - Menge
 - äußeres Maß (nach Carathéodory), 30
 - messbarer Raum, 12, 20
- Minkowski-Ungleichung, 100
- Normalbereich, 63
- Normalenvektor
 - äußerer Einheits-, 95
 - Feld, 95
- Nullmenge, 23, 51
 - Ausnahmemenge, 51
- Oberfläche
 - Oberflächenintegral
 - skalar, 91
- Oberflächenintegral
 - vektorielles, 92
- offen, 14
- Operationstreue, 17, 18
- p -adischer Bruch, 7
- p -fach integrierbare Funktionen, 99
- Parallelotop, 23, 84
- Parameterintegral, 56
 - Differenzierbarkeitslemma, 57
 - Stetigkeits-Lemma, 56
- Polarkoordinaten
 - ebene, 85
 - räumlich, 85
- Prämaß, 19
- Produktraum, 61
 - Produktmaß, 61
- Quader, 8
- Quelldichte, 90, 95
- regulär
 - Funktion, 93
 - Menge, 98
- Reihenvergleichskriterium, 49
- Riemann-Integrierbarkeit

- eigentlich, 59
- uneigentlich, 59
- Ring, 9, 82
 - Semiring, 8
- Rotation, 80, 89
- Rotationskörper, 80, 94
- rotationssymmetrische Funktion, 82
- Satz
 - von Riesz-Fischer, 101
 - Approximationssatz
 - für Maße, 32
 - Eindeutigkeitssatz
 - für Maße, 25
 - Fortsetzungssatz
 - von Carathéodory, 28
 - Konvergenzsatz
 - L^p -dominierte Konvergenz, 101
 - Beppo Levi, 43
 - Beppo Levi - Variante, 44
 - dominierte Konvergenz, 55
 - Lebesgue'scher, 55
 - Lemma von Fatou, 45
 - monotone Konvergenz, 54
 - von Fubini, 62
 - von Riesz, 101
 - von Tonelli, 62
- separabel, 30
- Simplex, 79
- Sombrero-Lemma, 38
- Spat, 84
- Spiegelung, 18
- Standarddarstellung, 38
- Symmetrie, 18
- Ternärdarstellung, 7
- Torricellis Trompete, 94
- Torus, 81
- Transformationsformel
 - allgemein, 84
 - spezielle für affin-lineare Abbildungen, 53
 - spezielle für lineare Abbildungen, 22
- Treppenfunktion, 38
 - Standarddarstellung, 42
- Unabhängigkeit, 27
- Ungleichung
 - Cauchy-Schwarz, 99
 - Hölder'sche, 99
- Minkowski, 100
- Young'sche, 99
- Unstetigkeitsstellen, 59
- Untermannigfaltigkeit, 71
 - Diffeomorphe Transformation, 72
 - Gleichungssystem, 72
 - Graphendarstellung, 72
 - Karte, 72
 - Kodimension, 71
 - Lokales Koordinatensystem, 71
 - Normalenvektor, 74
 - Parameterdarstellung, 71
 - Tangentialvektor, 74
 - Zusammenhangseigenschaft, 73
- Vektorfeld
 - Fluss, 92
- Vertauschbarkeit
 - von Integral und Grenzprozess, 53
- Verteilung, 35
- Verteilungsfunktion, 31
- Vitali-Menge, 29
- Wahrscheinlichkeitsmaß, 20
 - diskretes, 22
- Wahrscheinlichkeitsraum, 20
 - diskreter, 22
- Wirbel, 89
 - Dichte, 89
- Young'sche Ungleichung, 99
- Zufallsvariable, 35
 - beschränkt, 49
 - integrierbar, 49