

$$f_x = 2x \cdot e^{x^2+y} \cdot (y^2+y+1) \Rightarrow f_x = 0$$

$$f_y = e^{x^2+y} \cdot (y+1) \cdot (y+2) \Rightarrow f_y = 0 \Leftrightarrow y \in \{-1, -2\}$$

↳ nicht erlaubt, da $-2 < -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow f_x(x, -1) = 2x \cdot e^{x^2-1} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow$ Einziger kritischer Punkt in $\mathring{B}$ ist $(0, -1)$ mit $f(0, -1)$

① Zeichne die Menge B .

Wo läuft der Rand?

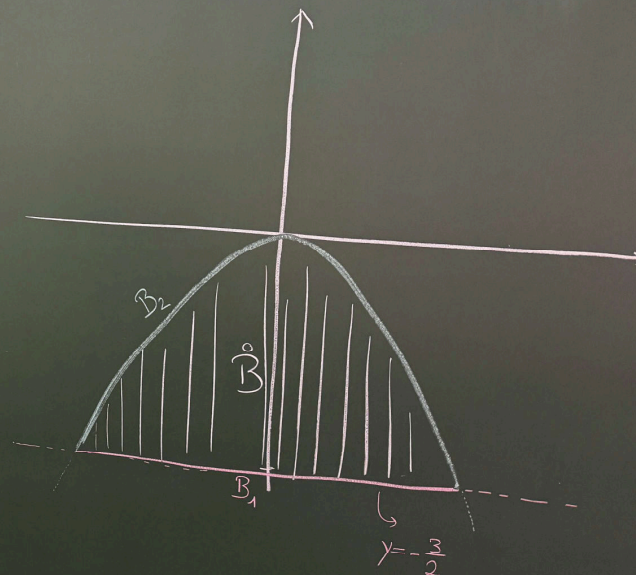
Wo sind die Ecken?

Wieso existieren M und m ?

Extremwertverdächtige Punkte bestimmen!

(Wann gilt $\nabla f = 0$)

Definiere
Rand- und innere Menge



$$\mathring{B} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{3}{2} < y < -x^2 \right\}$$

$$\partial B = \underbrace{\left(\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \times \left\{ -\frac{3}{2} \right\} \right)}_{B_1} \cup \underbrace{\left\{ (x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right\}}_{B_2}$$

Im Inneren: $\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} (0, 0)$

$$f_x = 2x \cdot e^{x^2+y} (y^2+y+1) \Rightarrow f_x = 0 \Leftrightarrow$$

$$f_y = e^{x^2+y} (y+1) \cdot (y+2) \Rightarrow f_y = 0 \Leftrightarrow y \in \{-1, -2\}$$

$\hookrightarrow$ nicht erlaubt, da $-2 < -\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow f_x(x, -1) = 2x \cdot e^{x^2-1} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow \text{Einzigster kritischer Punkt in } \mathring{B} \text{ ist } (0, -1)$$

mit $f(0, -1) = e^{-1}$

Zeichne die Menge B .



$$B_1(y = -\frac{3}{2}, |x| \leq \sqrt{3/2}) \Rightarrow f(x, -\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} \cdot e^{x^2 - 3/2} \xrightarrow{\text{Min}} \text{Für } x=0 \Rightarrow f(0, -\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} \cdot e^{-3/2}$$

$$B_2(y = -x^2, |x| \leq \sqrt{3/2}) \Rightarrow f(x, -x^2) = (x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{Max}} \text{Für } x = \pm\sqrt{3/2} \Rightarrow f(\pm\sqrt{3/2}, -\frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$$

Minimal für
 $x^2 = \frac{1}{2}$

Maximal für
 $x^2 = \frac{3}{2}$

$$f(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

$$f(0, 0) = 1$$

$$f(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$$

$$\min B = e^{-1} \quad \text{im Punkt } (0, -1)$$

$$\max B = \frac{7}{4} \quad \text{im Punkt } (\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2})$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot (\arctan(x) + \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) - \pi)$$

Voraussetzungen: $\left. \begin{array}{l} \text{D vollständig} \\ f(D) \subseteq D \\ \text{Kontraktion} \end{array} \right\} \text{Kurz überprüfen (Hinweis: ...)}$

$$f'(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot (\arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \pi)$$

Voraussetzungen: $\left. \begin{array}{l} \text{D vollständig} \\ f(D) \subseteq D \\ \text{Kontraktion} \end{array} \right\} \text{ Kurz überprüfen (Hinweis: ...)}$

$$f'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

$$|f'(x)| < \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = \lambda$$

$\lambda < 1$

Wieso reicht $|f'(x)| < \lambda$

↳ Nach dem MWS: $\exists x, y \in \mathbb{R}$ und ein ξ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \sup |f'| \cdot |x - y|$$

$$|\arctan(x)| < \frac{\pi}{2}$$

$$(1-|x|)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2|x| \leq 1+x^2$$

$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$$

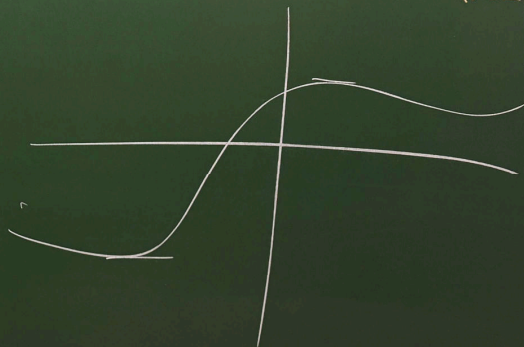
$$\lambda = \frac{2}{3} \rightarrow n \approx 19,7 < 20$$

$$f''(x) = \frac{3-x^2}{\pi \cdot (1+x^2)^2} \Rightarrow f \text{ hat EP bei } \pm\sqrt{3}$$

$$|f'(\pm\sqrt{3})| = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,609 < \frac{2}{3}$$

Es gilt:

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$



A-priori

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0|$$

A-posteriori

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{k}{1-k} \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot |x_1 - x_0| \stackrel{!}{\leq} \varepsilon = 10^{-3}$$

$$\lambda^n \stackrel{!}{\leq} \frac{\varepsilon \cdot (1-\lambda)}{|x_1 - x_0|} \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon \cdot (1-\lambda)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln(\lambda)}$$

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{5}{6} &\rightarrow n \approx 47,7 < 48 \\ &\rightarrow \text{Für } \lambda = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Rightarrow n = 16 \\ \lambda = \frac{2}{3} &\rightarrow n \approx 19,7 < 20 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{3-x^2}{2} \Rightarrow f \text{ hat EP bei } \pm\sqrt{3}$$