



LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. PETER MÜLLER



Skript zur Vorlesung

Analysis III

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Wintersemester 2020/21

Ich danke Michael Aichmüller für die $\text{\LaTeX}$ -Aufbereitung einer früheren Version.

Inhaltsverzeichnis

11 Mengensysteme und Maße	210
11.1 Das Maßproblem	210
11.2 Mengensysteme	211
11.3 Inhalte und Maße	217
11.4 Fortsetzungssatz von Carathéodory	223
11.5 Lebesgue-(Borel-) Maß	228
12 Integration bezüglich eines Maßes	234
12.1 Messbare Abbildungen	234
12.2 Integral von Elementarfunktionen	238
12.3 Integration messbarer Funktionen	241
12.4 Eigenschaften fast-überall	245
12.5 Konvergenzbegriffe und Konvergenzsätze	246
13 Lebesgue-Räume und der Satz von Radon-Nikodým	253
13.1 L^p als normierter Raum	253
13.2 Vollständigkeit von L^p	257
13.3 Dichte Unterräume von L^p	258
13.4 Geometrie in Hilbert-Räumen	261
13.5 Satz von Radon-Nikodým	263
14 Produktmaße und der Satz von Fubini	266
14.1 Produkt- σ -Algebren	266
14.2 Produktmaße	268
14.3 Integration bezüglich Produktmaßen	272
14.4 Die Transformationsformel für das Lebesgue-Maß	274
15 Untermannigfaltigkeiten und der Satz von Gauß	281
15.1 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$	281
15.2 Tangential- und Normalenvektoren	287
15.3 Integration auf Untermannigfaltigkeiten	290
15.4 Satz von Gauß	294
16 Kurvenintegrale und der Satz von Stokes	301
16.1 Kurvenintegrale	301
16.2 Orientierte Hyperflächen mit Rand	306
16.3 Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$	312

Mengensysteme und Maße

11.1 Das Maßproblem

①

ARCHIMEDES (3. Jh. v. Chr.): Oberfläche und Volumen einer Kugel berechnet (in $\mathbb{R}^3$).

G. CANTOR (1845–1918; Begründer der Mengenlehre): Frage nach „Volumen“ einer beliebigen Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

E. BOREL (1871–1956) & H. LEBESGUE (1875–1941): Formulieren das

11.1 Definition (Maßproblem) *Gesucht ist eine **Maßfunktion** $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ mit den Eigenschaften*

- (a) **σ -Additivität.** Für alle Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ aus paarweise disjunkten Teilmengen, das heißt $A_n \cap A_m = \emptyset$ für alle $n \neq m \in \mathbb{N}$, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- (b) **Bewegunsinvarianz.** Für alle Bewegungen $\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, das heißt $|\beta(x) - \beta(y)| = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ (wobei $|\cdot|$ Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$), und für alle $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mu(\beta(A)) = \mu(A).$$

- (c) **Normierung.** $\mu([0, 1]^d) = 1.$

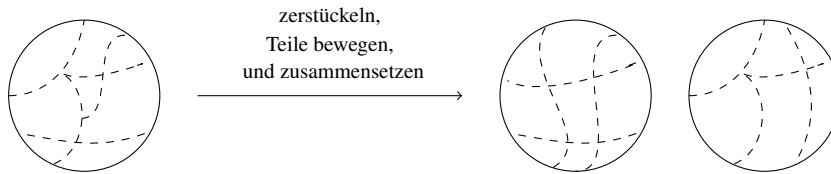
11.2 Satz (VITALI, 1905) *Für kein $d \in \mathbb{N}$ besitzt das Maßproblem eine Lösung.*

11.3 Satz (BANACH und TARSKI, 1924) *Sei $d \in \mathbb{N}$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit nicht-leerem Inneren. Dann existieren $C_k \subseteq \mathbb{R}^d$ und Bewegungen $\beta_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, mit*

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \beta_k(C_k).$$

Siehe z.B. Elstrodt für Referenzen.

11.4 Bemerkung (a) Wähle $A :=$ Kugel mit Radius 1, $B :=$ Zwei disjunkte Kugeln mit Radius 1



Gewisse Teile sind sehr(!) kompliziert. Konstruktion verwendet Auswahlaxiom.

- (b) Für $d \geq 3$ und A, B zusätzlich beschränkt, kommt man sogar mit endlich vielen Teilstücken C_k aus. Das heißt, das Inhaltsproblem ($:=$ Maßproblem mit nur endlicher Additivität statt σ -Additivität) ist nicht lösbar für $d \geq 3$.
- (c) Ausweg aus Dilemma: Schränke Definitionsbereich von μ (die „messbaren Mengen“) auf echte Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ein, das heißt, die Teilstücke von Banach & Tarski dürfen nicht messbar sein.

11.2 Mengensysteme

11.5 Definition Sei X eine Menge, sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X .

- $\mathcal{A}$ ist **$\complement$ -stabil** (komplementsstabil) $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

- Sei $*$ eine der Mengenoperationen $\cup, \cap, \setminus, \Delta$.
 $\uparrow$
symmetrische Differenz
 $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$\mathcal{A}$ ist **$*$ -stabil** $:\Leftrightarrow A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A * B \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ ist **$\setminus_{\supseteq}$ -stabil** $:\Leftrightarrow A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ ist **$\cup$ -stabil** $:\Leftrightarrow A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ ist **$\cup_{\infty}$ -stabil** $:\Leftrightarrow (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
(lies: stabil bzgl. abzählbarer Vereinigungen)

- $\mathcal{A}$ ist **$\cap_{\infty}$ -stabil** $:\Leftrightarrow (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ ist **$\cup_{\infty}$ -stabil** $:\Leftrightarrow (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_m \cap A_n = \emptyset$ für alle $m \neq n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

11.6 Lemma Seien X, X' Mengen und sei $*$ eine Mengenoperation aus Definition 11.5.

(a) Sei $T : X' \rightarrow X$ eine Abbildung, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{A}' := T^{-1}(\mathcal{A}) := \{T^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{P}(X').$$

Dann gilt

$$\mathcal{A} \text{ ist } *- \text{stabil} \implies \mathcal{A}' \text{ ist } *- \text{stabil}.$$

(b) Sei $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge und für alle $j \in J$ sei $\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt

$$\mathcal{A}_j \text{ ist } *- \text{stabil für alle } j \in J \implies \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \text{ ist } *- \text{stabil}.$$

Beweis. Durch Nachrechnen.

(a) Zum Beispiel sei $\mathcal{A} \cup$ -stabil und $A', B' \in \mathcal{A}'$, dann existieren $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A' = T^{-1}(A)$ und $B' = T^{-1}(B)$. Daraus folgt

$$A' \cup B' = T^{-1}(A \cup B) \in \mathcal{A}'.$$

Analog für die anderen Operationen.

(b) Zum Beispiel seien $\mathcal{A}_j \cap$ -stabil für alle $j \in J$. Seien $A, B \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \implies \underbrace{A, B \in \mathcal{A}_j}_{\substack{\implies A \cap B \in \mathcal{A}_j \\ \uparrow \text{n.V.}}} \text{ für}$
alle $j \in J$. Daraus folgt $A \cap B \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$. Analog für die anderen Operationen. ■

11.7 Korollar Sei $X' \subset X, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und

$$\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cap X' := \{A \cap X' : A \in \mathcal{A}\}.$$

die *Spur von $\mathcal{A}$ in X'* . Dann gilt für alle Mengenoperationen $*$ aus Definition 11.5

$$\mathcal{A} \text{ ist } *- \text{stabil} \implies \mathcal{A}' \text{ ist } *- \text{stabil}.$$

Beweis. Lemma 11.6 (a) mit $\mathcal{A}' = T^{-1}(\mathcal{A})$ für die Einbettung $T : \begin{matrix} X' & \rightarrow & X \\ x' & \mapsto & x' \end{matrix}$. ■

11.8 Korollar Sei Y eine Menge der in Definition 11.5 erklärten Mengenoperationen $*$. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert ein kleinstes Mengensystem $\mathcal{E}^Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit

- $\mathcal{E}^Y$ ist $*$ -stabil für alle $*$ in Y ,
- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^Y$.

Wir bezeichnen $\mathcal{E}$ als **Erzeuger** von $\mathcal{E}^Y$ und $\mathcal{E}^Y$ als das von $\mathcal{E}$ **erzeugte System**.

Beweis. Gemäß Lemma 11.6(b) werden alle Anforderungen erfüllt von

$$\mathcal{E}^Y := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X): \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \text{ ist } * \text{-stabil für alle } * \in Y}} \mathcal{A}.$$

■

11.9 Definition und Lemma Mengensysteme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Definition	enthält		stabil unter										
	$\emptyset$	X	$\cup$	$\cup_\infty$	$\cap$	$\cap_\infty$	$\setminus$	$\setminus_\infty$	Δ	$\complement$	$\setminus$	$\setminus_\infty$	Δ
Ring • $\emptyset \in \mathcal{A}$ • $\setminus$ -stabil • $\cup$ -stabil	✓		✓		✓						✓	✓	✓
Algebra • $X \in \mathcal{A}$ • $\complement$ -stabil • $\cup$ -stabil	✓	✓	✓		✓						✓	✓	✓
Dynkin-System • $X \in \mathcal{A}$ • $\setminus_\infty$ -stabil • $\cup_\infty$ -stabil	✓	✓			✓			✓				✓	✓
σ-Algebra • $X \in \mathcal{A}$ • $\complement$ -stabil • $\cup_\infty$ -stabil	✓	✓	✓		✓			✓			✓	✓	✓

Beweis. Die Behauptungen folgen aus den Umrechnungen der Operationen wie z.B.

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c, \quad A \cap B = A \setminus (A \setminus B), \quad A^c = X \setminus A, \quad A \setminus B = A \cap B^c, \quad \dots$$

■

11.10 Beispiel (a) $\mathcal{P}(X)$ ist σ -Algebra.

- (b) $\mathcal{A} := \{\text{endliche Teilmengen von } X\}$ ist Ring (und σ -Algebra $\iff X$ endlich).
- (c) Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist im Allgemeinen keines der Systeme aus Definition 11.9.
- (d) Die kleinste σ -Algebra, die $A \subseteq X$ enthält, ist $\{\emptyset, X, A, A^c\}$.
- (e) $\mathcal{I} := \{[a, b[: a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist das Mengensystem rechtshalboffener Intervalle. Das Mengensystem der **Figuren**

$$\mathcal{F} := \left\{ \bigcup_{j=1}^n A_j : A_j \in \mathcal{I}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(endliche Vereinigungen aus $\mathcal{I}$) ist ein Ring, siehe Übung.

11.11 Satz (Alternative Charakterisierungen) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt

- (a) $\mathcal{A}$ ist Ring $\iff (\emptyset \in \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{A} \text{ ist } \Delta\text{- und } \cup\text{-stabil})$.
- (b) $\mathcal{A}$ ist Ring $\iff (\emptyset \in \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{A} \text{ ist } \Delta\text{- und } \cap\text{-stabil})$.
- (c) $\mathcal{A}$ ist Algebra $\iff (X \in \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{A} \text{ ist } \mathfrak{C}\text{- und } \cap\text{-stabil})$.
- (d) $\mathcal{A}$ ist Algebra $\iff \mathcal{A}$ ist Ring und $X \in \mathcal{A}$.
- (e) $\mathcal{A}$ ist σ -Algebra $\iff \mathcal{A}$ ist Dynkin-System und $\cap$ -stabil.

Beweis. (a) – (d) siehe Übung. Für „ $\Leftarrow$ “ von (e) verwende das folgende Lemma. ■

11.12 Lemma Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\cup$ -stabil, $\setminus$ -stabil und sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Dann gibt es $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit

- (a) $B_n \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $B_n \cap B_m = \emptyset$ für alle $n \neq m \in \mathbb{N}$.
- (c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Beweis. Setze $B_1 := A_1 \in \mathcal{A}$ und definiere induktiv B_n durch

$$B_{n+1} := A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\implies$ (a) und $\forall n \in \mathbb{N} \forall j \in \{1, \dots, n\} : B_{n+1} \cap B_j = \emptyset \implies$ (b).

Insbesondere

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zu (c): per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ beweisen wir

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

$n = 1$: $A_1 = B_1$ klar.

$n \rightarrow n + 1$: Es gelte $\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j \implies$

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j = A_{n+1} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right)}_{=: Z} = \underbrace{(A_{n+1} \setminus Z)}_{B_{n+1}} \cup Z = \bigcup_{j=1}^{n+1} B_j.$$

Somit gilt (*) und damit

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n &= \left\{ x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in A_n \right\} = \left\{ x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in \bigcup_{j=1}^n A_j \right\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left\{ x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in \bigcup_{j=1}^n B_j \right\} = \left\{ x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in B_n \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

11.13 Definition (a) Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ -Algebra, die $\mathcal{E}$ (den „Erzeuger“) enthält.

(b) Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei $\text{dyn}(\mathcal{E})$ das kleinste Dynkin-System, das $\mathcal{E}$ enthält.

(c) Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, so heißt $\sigma(\mathcal{T})$ die **Borel- σ -Algebra in X** (zu $\mathcal{T}$). $A \subseteq X$ heißt **Borel-Menge**, wenn $A \in \sigma(\mathcal{T})$.

Speziell für $X = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ist $\mathcal{B}^d := \sigma(\mathcal{T}_{\text{euklidisch}})$ die **σ -Algebra der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^d$** . Wir setzen zudem $\mathcal{B} := \mathcal{B}^1$.

11.14 Satz Für $d \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d) = \sigma(\mathcal{Q}^d),$$

wobei

$$\mathcal{I}^d := \left\{ \bigtimes_{\alpha=1}^d [a_\alpha, b_\alpha[: -\infty < a_\alpha \leq b_\alpha < \infty \forall \alpha \in \{1, \dots, d\} \right\},$$

$$\mathcal{Q}^d := \left\{ \bigcup_{j=1}^n Q_j : Q_j \in \mathcal{I}^d \forall j \in \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

Ring der endlichen Vereinigungen von Quadern aus $\mathcal{I}^d$.

Beweis. Mittels Lemma 11.16 (Übung). ■

11.15 Bemerkung (a) An welcher Stelle (links- bzw. rechts) und ob die Intervalle in der Definition von $\mathcal{I}^d$ überhaupt offen sind, ist für die Aussage von Satz 11.14 irrelevant.

(b) Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Dann gilt (siehe Übung):

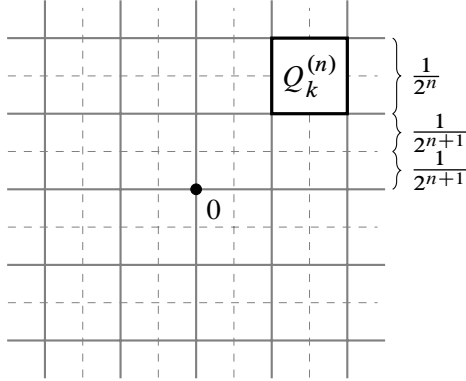
$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\text{abgeschlossene Mengen}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{falls } X \text{ sogar } \sigma\text{-kompakter Hausdorff-Raum}}}{=} \sigma(\text{Kompakta}).$$

11.16 Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann ist U eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Quader $\bigtimes_{\alpha=1}^d [a_\alpha, b_\alpha]$, wobei $-\infty < a_\alpha < b_\alpha < \infty$ für $\alpha \in \{1, \dots, d\}$, mit disjunktem Innerem.

Beweis. Idee: approximiere die offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ immer feiner von innen mit abgeschlossenen Quadern. Zunächst für alle $n \in \mathbb{N}$ Überdeckung von

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} Q_k^{(n)} \quad (*)$$

mit $Q_k^{(n)} := \bigtimes_{\alpha=1}^d \left[\frac{k_\alpha}{2^n}, \frac{k_\alpha+1}{2^n} \right]$, $k \in \mathbb{Z}^d$ (siehe Skizze). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d : Q_k^{(n)} \subseteq U} Q_k^{(n)} \implies$



$$U' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq U \quad (**).$$

Andererseits, sei nun $x \in U$ beliebig fest. Da U offen $\implies \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$. Aus (*) für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{d}/2^{n_0} < r \implies$

$$\exists k_0 \in \mathbb{Z}^d : x \in Q_{k_0}^{(n_0)} \subset B_r(x) \subset U$$

$$\text{per def. von } U_{n_0} \implies Q_{k_0}^{(n_0)} \subseteq U_{n_0} \implies x \in U_{n_0} \subseteq U'$$

$$x \in U \text{ bel.} \implies U \subseteq U' \xrightarrow{(**)} U = U'.$$

Wegen $U_n \subseteq U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist bislang jeder Punkt von U mit unendlich vielen Quadraten überdeckt worden. Zum Schluss noch durch Weglassen nicht benötigter Quader sicherstellen, dass deren Inneres paarweise disjunkt: $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{U}_n$ mit $\tilde{U}_1 := U_1$ und

$$\tilde{U}_n := \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d : Q_k^{(n)} \subseteq U \\ Q_k^{(n)} \not\subseteq U_{n-1}}} Q_k^{(n)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

■

Die Nützlichkeit von Dynkin-Systemen beruht auf dem folgenden Satz.

11.17 Satz Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\cap$ -stabil. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{E}) = \text{dyn}(\mathcal{E}).$$

Beweis. Die Inklusion $\sigma(\mathcal{E}) \supseteq \text{dyn}(\mathcal{E})$ ist klar, da $\sigma(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{E}$ selbst ein Dynkin-System ist.

Für die Inklusion $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \text{dyn}(\mathcal{E})$ zeigen wir, dass $\text{dyn}(\mathcal{E})$ $\cap$ -stabil ist. Denn dann folgt aus Satz 11.11(e), dass $\text{dyn}(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{E}$ eine σ -Algebra ist, und somit die Behauptung.

Zum Beweis der Schnittstabilität setze für $X' \in \text{dyn}(\mathcal{E})$

$$\mathcal{D}_{X'} := \{A \subseteq X : A \cap X' \in \text{dyn}(\mathcal{E})\}.$$

Beh.: $\mathcal{D}_{X'}$ ist Dynkin-System.

Bew.: (i) $X \in \mathcal{D}_{X'}$.

(ii) $\mathcal{D}_{X'}$ ist $\setminus \supseteq$ -stabil: seien $A, B \in \mathcal{D}_{X'}$ mit $B \subseteq A \implies$

$$(A \setminus B) \cap X' = (A \cap X') \setminus (B \cap X') \stackrel{A \cap X' \in \text{dyn}(\mathcal{E}), B \cap X' \in \text{dyn}(\mathcal{E}), B \cap X' \subseteq A \cap X'}{\in} \text{dyn}(\mathcal{E})$$

(iii) $\mathcal{D}_{X'}$ ist $\cup_\infty$ -stabil: sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{X'}$ paarweise disjunkt. Also ist n.V. $(A_n \cap X')_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dyn}(\mathcal{E})$ paarweise disjunkt und damit

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap X' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap X') \in \text{dyn}(\mathcal{E}),$$

also $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_{X'}$. Die Behauptung ist bewiesen.

Nun sei $B \in \mathcal{E}$ beliebig fix. Weil $\mathcal{E}$ $\cap$ -stabil $\implies \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_B \implies \text{dyn}(\mathcal{E}) \subseteq \text{dyn}(\mathcal{D}_B) = \mathcal{D}_B$, das heißt für alle $A \in \text{dyn}(\mathcal{E})$ gilt $A \cap B \in \text{dyn}(\mathcal{E}) \implies B \in \mathcal{D}_A$. Da $B \in \mathcal{E}$ bel. $\implies$

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A \implies \text{dyn}(\mathcal{E}) \subseteq \text{dyn}(\mathcal{D}_A) = \mathcal{D}_A.$$

Insbesondere für $A, C \in \text{dyn}(\mathcal{E})$ gilt $A \cap C \in \text{dyn}(\mathcal{E})$, also ist $\text{dyn}(\mathcal{E})$ $\cap$ -stabil. ■

11.18 Definition Seien $A \in \mathcal{P}(X)$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$.

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine **monoton wachsende Folge** : $\iff \forall n \in \mathbb{N}: A_n \subseteq A_{n+1}$
Notation: $A_n \nearrow A$, wobei $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine **monoton fallende Folge** : $\iff \forall n \in \mathbb{N}: A_n \supseteq A_{n+1}$
Notation: $A_n \searrow A$, wobei $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **monotone Klasse**

$$:\iff \text{Für alle monoton } \begin{cases} \text{wachsenden} \\ \text{fallenden} \end{cases} \text{ Folgen } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M} \text{ gilt } \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M} \\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M} \end{array} \right\}.$$

- Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $\text{mon}(\mathcal{E})$ die **kleinste monotone Klasse**, die $\mathcal{E}$ enthält.

11.19 Satz Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Dann gilt

$$\text{mon}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

Beweis. Übung. ■

11.3 Inhalte und Maße

11.20 Definition Sei $\mathcal{R}$ ein Ring von Mengen.

- $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Inhalt**, wenn

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

- (ii) **Additivität.** $\forall n \in \mathbb{N} \forall A_j \in \mathcal{R}, j \in \{1, \dots, n\}$, mit $A_j \cap A_k = \emptyset \forall j \neq k \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

- μ ist **stetiger Inhalt** (oder **Prämaß**), wenn μ Inhalt ist und die über (ii) hinausgehende **σ -Additivität** gilt

(iii) $\forall A_j \in \mathcal{R}, j \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$ und $A_j \cap A_k = \emptyset \forall j \neq k \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j).$$

- Falls $\mathcal{R}$ sogar eine σ -Algebra ist und μ ein stetiger Inhalt, so heißt μ **Maß** auf $\mathcal{R}$.
In diesem Fall ist die Bedingung $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$ in (iii) stets erfüllt.

11.21 Konvention Abweichend von den bisherigen Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (siehe Zusatz zu Definition 3.6) sei nun

$$0 \cdot (\pm\infty) := \pm\infty \cdot 0 := 0.$$

Die Ausdrücke

$$\infty - \infty, -\infty + \infty, \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\pm\infty}{0}$$

sind aber weiterhin nicht definiert!

11.22 Definition Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $m : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Dann heißt m

- **endlich** : $\iff |m(A)| < \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
- **σ -endlich** : $\iff \exists$ Folge $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ und $\forall k \in \mathbb{N} : |m(X_k)| < \infty$.
- **normiert** : $\iff X \in \mathcal{A}$ und $m(X) = 1$.
- **Wahrscheinlichkeitsmaß** : $\iff \mathcal{A}$ ist σ -Algebra und m normiertes Maß.

11.23 Beispiel (a) Sei X abzählbar und $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$ (also σ -Algebra!). Sei $\mu(A) := |A| := \#\{x \in X : x \in A\}$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dieses Maß heißt **Zählmaß** (Details Übung).

(b) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra, $x \in X$ und $\{x\} \in \mathcal{A}$. Sei

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in A \\ 0 & , \text{ falls } x \notin A \end{cases}.$$

Dieses Maß heißt das in x konzentrierte **Dirac-Maß** δ_x (oder Einheitsmasse in x).

(c) Sei $\mathcal{F}$ der Ring der endlichen Vereinigungen halb-offener Intervalle $[a, b[$ in $\mathbb{R}$, siehe Beispiel 11.10 (e) oder Satz 11.14. Sei $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ isoton und linksseitig stetig. Die Zuordnung

$$[a, b[\mapsto G(b) - G(a),$$

für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, induziert einen stetigen Inhalt μ_G auf $\mathcal{F}$ (Übung).

Speziell $\lambda := \mu_{\text{id}}$, das heißt $\lambda([a, b]) = b - a$, heißt das (1-dimensionale) **Lebesgue-Prämaß**.

11.24 Satz Sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$, $A, B \in \mathcal{R}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$. Dann gilt

- (a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (b) **Monotonie.** $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.
- (c) **Subtraktivität.** $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(d) **Sub-Additivität.** $\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mu(A_j) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(e) **Super- σ -Additivität.** Falls $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Beweis. (b), (c) folgen direkt aus $B = (B \setminus A) \cup A \implies \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$.

(a) Es gelten die Implikationen

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A),$$

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \implies \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

Damit folgt die Behauptung durch Auflösen der 2. Gleichung nach $\mu(B \setminus A)$, falls $\mu(A \cap B) < \infty$. Falls $\mu(A \cap B) = \infty$, somit $\mu(A) = \infty$, ist die Behauptung trivial.

(d) Lemma 11.12 $\implies \exists B_1, \dots, B_n \in \mathcal{R}$, paarweise disjunkt, mit

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j \quad \text{und} \quad B_j \subseteq A_j \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\mu(B_j)}_{\leq \mu(A_j)}.$$

(e) Sei $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ($\in \mathcal{R}$ n.V.). Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^N \mu(A_n) = \mu\left(\underbrace{\bigcup_{j=1}^N A_j}_{\subseteq A}\right) \underset{(b)}{\leq} \mu(A) \underset{N \rightarrow \infty}{\implies} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)}_{\text{existiert in } [0, \infty]} \leq \mu(A).$$

■

Zur Charakterisierung der Stetigkeit von Inhalten hilft der nächste Satz.

11.25 Satz Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Betrachte folgende Aussagen

(i) μ ist stetiger Inhalt.

(ii) **Stetigkeit von unten.** Für alle monoton wachsenden Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

(iii) **Stetigkeit von oben.** Für alle monoton fallenden Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) < \infty$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

(iv) **Stetigkeit in $\emptyset$.** Für alle monoton fallenden Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) < \infty$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0.$$

(v) Für alle monoton fallenden Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) < \infty$ und $\exists \varepsilon > 0$, so dass $\mu(A_n) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Dann bestehen die Implikationen

$$(i) \iff (ii) \implies (iii) \iff (iv) \iff (v).$$

Ist μ endlich, so gilt auch $(iii) \implies (ii)$.

11.26 Bemerkung Die Bedingung „ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) < \infty$ “ in (iii) – (v) von Satz 11.25 ist wesentlich! Betrachte hierzu das Zählmaß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, vgl. Beispiel 11.23 (a), und die Folge von Mengen $A_n := \{n, n+1, \dots\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt somit $A_n \supseteq A_{n+1}$ und $\mu(A_n) = \infty \forall n \in \mathbb{N}$, jedoch auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Beweis von Satz 11.25. „(i) $\implies$ (ii)“: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ monoton wachsende Folge. Lemma 11.12 $\implies \exists$ paarweise disjunkte Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$, $B_n \cap B_m = \emptyset$ für alle $n \neq m \in \mathbb{N}$, mit

$$\bigcup_{j=1}^n B_j = \bigcup_{j=1}^n A_j \stackrel{\text{mon. wach.}}{=} A_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \stackrel{\text{n.V.}}{\in} \mathcal{R}.$$

$$\text{Nach Voraussetzung gilt } \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(B_j) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \mu \text{ Inhalt}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

„(ii) $\implies$ (i)“: Sei $(B_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ Folge paarweise disjunkter Mengen mit $B := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathcal{R}$. Setze

$$A_n := \bigcup_{j=1}^n B_j \in \mathcal{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \text{ Damit folgt}$$

$$A_n \nearrow B \in \mathcal{R} \stackrel{\text{n.V.}}{\implies} \mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \stackrel{\mu \text{ Inhalt}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(B_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_j),$$

also ist μ σ -additiv.

„(ii) $\implies$ (iii)“: Sei $A_n \searrow A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ mit o.E. $\mu(A_1) < \infty$. Da $A_n \subseteq A_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt aus der Subtraktivität, Satz 11.24 (c), dass $\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gleiches gilt mit A anstelle von A_n . Da $(A_1 \setminus A_n) \nearrow (A_1 \setminus A) \in \mathcal{R}$, folgt n.V.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mu(A_1 \setminus A_n)}_{\mu(A_1) - \mu(A_n)} = \underbrace{\mu(A_1 \setminus A)}_{\mu(A_1) - \mu(A)}.$$

Wegen $\mu(A_1) < \infty$ ergibt sich daraus die Behauptung.

„(iii) $\iff$ (iv)“: „ $\implies$ “ ist klar, „ $\impliedby$ “ folgt mit $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ aus

$$A_n \searrow A \in \mathcal{R} \implies \underbrace{(A_n \setminus A)}_{\in \mathcal{R}} \searrow \emptyset.$$

„(iii) $\implies$ (v)“: Sei $A_n \searrow A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ und $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_n) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\mu(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n.V.}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\geq \varepsilon} \geq \varepsilon > 0 \implies A \neq \emptyset.$$

„(v) $\implies$ (iv)“: Sei $A_n \searrow \emptyset$ und $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Annahme: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ sei falsch. Da $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, $\exists \varepsilon > 0$, so dass $\mu(A_n) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\implies$ $\uparrow$ n.V.

$A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Widerspruch zu $A_n \searrow \emptyset$.

„(iv) $\implies$ (ii)“: Sei nun zusätzlich μ endlich. Sei $A_n \nearrow A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R} \implies (A \setminus A_n) \searrow \emptyset$. Da μ endlich ist, gilt n.V.

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \setminus A_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 11.24(c)}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A) - \mu(A_n)).$$

Erneut weil μ endlich ist, folgt hieraus die Behauptung. ■

(4)

Satz 11.25 liefert ein handliches Stetigkeitskriterium für Anwendungen.

11.27 Satz (Approximation mit Kompakta) Sei X ein Hausdorff-Raum und μ ein endlicher Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Falls es für alle $A \in \mathcal{R}$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subseteq X$ und ein $B \in \mathcal{R}$ mit

$$B \subseteq K \subseteq A \quad \text{und} \quad \mu(A \setminus B) < \varepsilon$$

gibt, dann ist μ stetiger Inhalt.

Beweis. Wir verifizieren das Kriterium (v) in Satz 11.25. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $A_n \searrow A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ mit $\mu(A_n) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung existiert zu jedem A_n , $n \in \mathbb{N}$, ein $K_n \subseteq X$ kompakt und $B_n \in \mathcal{R}$ mit $B_n \subseteq K_n \subseteq A_n$ und $\mu(A_n \setminus B_n) < 2^{-(n+1)}\varepsilon$. Es gilt $B_n = A_n \setminus (A_n \setminus B_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb

$$\bigcap_{n=1}^N B_n = \underbrace{\left(\bigcap_{n=1}^N A_n \right)}_{=:S} \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^N (A_n \setminus B_n) \right)}_{=:T} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Es folgt mit $S \setminus T = S \setminus (S \cap T)$

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{n=1}^N B_n\right) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subtraktivität,} \\ \text{Monotonie} \\ \text{Satz 11.24(c), (b)}}}{\geq} \underbrace{\mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_n\right)}_{A_N} - \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^N (A_n \setminus B_n)\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Sub-Additivität 11.24(d)} \\ < \varepsilon 2^{-(n+1)}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n.V.}}}{\geq} \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0 \end{aligned}$$

und daraus

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^N B_n \subseteq \bigcap_{n=1}^N K_n \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Mit der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen (Übung) folgt

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{K_n}_{\subseteq A_n} \subseteq A,$$

das heißt, Kriterium (v) ist erfüllt. ■

11.28 Satz (Eindeutigkeitssatz für Maße) *Sei $\mathcal{E}$ $\cap$ -stabiler Erzeuger einer σ -Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und es gibt eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $X_n \nearrow X$. Seien μ_1, μ_2 Maße auf $\mathcal{A}$ mit*

- (1) $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$,
- (2) $\mu_1(X_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$, das heißt $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. Wähle $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$ (gibt es nach Voraussetzung). Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$, dass $\mu_1(A \cap E) < \infty$ und $\mu_2(A \cap E) < \infty$. Setze

$$\mathcal{D}_E := \{A \in \mathcal{A} : \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)\} \quad \begin{array}{c} \supseteq \\ \uparrow \\ \mathcal{E} \cap\text{-stabil} \end{array} \mathcal{E}.$$

Beh.: $\mathcal{D}_E$ ist Dynkin-System.

- $X \in \mathcal{D}_E$.
- $\setminus \supseteq$ -stabil: für $A_1, A_2 \in \mathcal{D}_E$ mit $A_2 \subseteq A_1$ folgt $E \cap (A_1 \setminus A_2) = (E \cap A_1) \setminus (E \cap A_2)$, also

$$\begin{aligned} \mu_1(E \cap (A_1 \setminus A_2)) &= \mu_1(E \cap A_1) - \mu_1(E \cap A_2) = \mu_2(E \cap A_1) - \mu_2(E \cap A_2) \\ &\quad \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{Subtraktivität Satz 11.24 (c),} & & A_1, A_2 \in \mathcal{D}_E \\ \text{da } E \cap A_2 \subseteq E \cap A_1 & & \end{array} \\ &\downarrow \\ &= \mu_2(E \cap (A_1 \setminus A_2)). \end{aligned}$$

- $\cup_{\infty}$ -stabil: für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_E$ paarweise disjunkt folgt $E \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E \cap A_n)$, also

$$\mu_1 \left(E \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right) \underset{\mu_1 \text{ Maß}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu_1(E \cap A_n)}_{\substack{\mu_2(E \cap A_n) \\ \uparrow \\ A_n \in \mathcal{D}_E}} \underset{\mu_2 \text{ Maß}}{=} \mu_2 \left(E \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right).$$

Somit ist die Behauptung gezeigt. Diese liefert

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_E & \supseteq & \text{dyn}(\mathcal{E}) & = & \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A} \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{enthält } \mathcal{E} & & \text{Satz 11.17, da } \mathcal{E} \cap\text{-stabil} & & \end{array}$$

und deshalb

$$\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E) \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \forall E \in \mathcal{E} \text{ mit } \mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty. \quad (\star)$$

Gemäß Lemma 11.12 existiert eine paarweise disjunkte Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ und $Y_n \subseteq X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt

$$\mu_1(A \cap Y_n) \underset{Y_n \subseteq X_n}{=} \mu_1(A \cap Y_n \cap X_n) \underset{(\star) \text{ mit } E=X_n}{=} \mu_2(A \cap Y_n \cap X_n) \underset{Y_n \subseteq X_n}{=} \mu_2(A \cap Y_n) \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\star\star)$$

Da $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap Y_n)$, liefert die σ -Additivität

$$\mu_1(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(A \cap Y_n) \underset{(\star\star)}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2(A \cap Y_n) = \mu_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

■

11.4 Fortsetzungssatz von Carathéodory

Ziel: Setze *stetigen* Inhalt auf einem Ring zu einem Maß auf einer σ -Algebra fort.

Dazu benötigen wir allerdings noch weitere Hilfsgrößen.

11.29 Definition Eine Abbildung $m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ heißt **äußeres Maß** (auf X), falls es die Eigenschaften

(1) $m(\emptyset) = 0$.

(2) **Monotonie.** $A \subseteq B \subseteq X \implies m(A) \leq m(B)$.

(3) **Sub- σ -Additivität.** $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X) \implies m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$.

11.30 Lemma Sei μ ein Inhalt auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und für beliebiges $A \subseteq X$ setze

$$\mathcal{U}(A) := \left\{ (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R} : A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\},$$

das „Mengensystem der abzählbaren Überdeckungen von A aus $\mathcal{R}$ “, dann heißt das **äußere Maß**

$$\mu^* : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \rightarrow & [0, \infty] \\ A & \mapsto & \begin{cases} \inf_{(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) & , \text{ falls } \mathcal{U}(A) \neq \emptyset, \\ \infty & , \text{ falls } \mathcal{U}(A) = \emptyset. \end{cases} \end{array}$$

das **von μ induzierte äußere Maß**. Es gilt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Beweis. (1) Für $A \in \mathcal{R}$ ist $(A, \emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{U}(A) \implies \mu^*(A) \leq \mu(A)$. Insbesondere folgt $0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0 \implies \mu^*(\emptyset) = 0$.

(2) $A \subseteq B \implies \mathcal{U}(B) \subseteq \mathcal{U}(A) \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(3) Sei $(A_k)_k \subset \mathcal{P}(X)$ mit (ohne Einschränkung) $\mu^*(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (andernfalls ist die Behauptung klar, da $\infty \leq \infty$), also $\mathcal{U}(A_k) \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle $\varepsilon > 0$ eine Folge $(B_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A_k)$ gibt, so dass

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n^{(k)}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Sei $\lambda : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion (Abzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$), sei $C_{\lambda(k,n)} := B_n^{(k)} \forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies (C_l)_{l \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \implies$

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) &\leq \lim_{L \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{l=1}^L \mu(C_l)}_{= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{1_{\{1, \dots, L\}}(\lambda(k,n))}_{\leq 1} \mu(B_n^{(k)})} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n^{(k)}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k) + \varepsilon \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k}}_{=1}. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt die Sub- σ -Additivität. ■

11.31 Definition Sei μ^* ein äußeres Maß auf X . Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^* &:= \left\{ A \subseteq X : \mu^*(Q) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stets gilt } \leq \text{ nach Def. 11.29 (3)}}}{\geq} \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \text{ für alle } Q \subseteq X \right\} \\ &= \left\{ A \subseteq X : \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \text{ für alle } Q \subseteq X \right\}, \end{aligned}$$

das System der μ^* -messbaren Mengen in X .

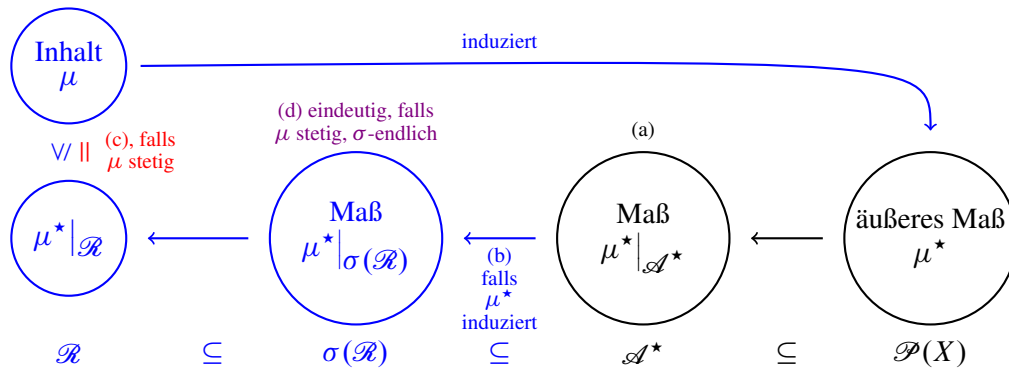
11.32 Satz (Carathéodory, 1914) Sei μ^* ein äußeres Maß auf X .

- (a) Dann ist $\mathcal{A}^*$ eine σ -Algebra in X und die Restriktion $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ ein Maß.
- (b) Ist μ^* zudem von einem Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ in X induziert, so gilt $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}^*$.
- (c) Ist der Inhalt μ aus (b) sogar stetig, so gilt $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$.
- (d) Ist der stetige Inhalt μ aus (c) sogar σ -endlich auf $\mathcal{R}$, dann ist $\nu := \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ das einzige Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\nu|_{\mathcal{R}} = \mu$.

11.33 Bemerkung (a) Teil (c) des Satzes besagt, dass ein stetiger Inhalt μ fortsetzbar ist von $\mathcal{R}$ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$, ja sogar zu einem auf der σ -Algebra $\mathcal{A}^*$. Die Maßfortsetzung $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ heißt **Carathéodory-Erweiterung** von μ . Ohne Voraussetzung der Stetigkeit von μ wie in (b) sind diese Maße im allgemeinen keine Fortsetzungen von μ , da dann nach Lemma 11.30 nur $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ für $A \in \mathcal{R}$ gilt.

(b) Unter den Voraussetzungen von (d) ist auch $\nu := \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ das einzige Maß auf $\mathcal{A}^*$ mit $\nu|_{\mathcal{R}} = \mu$, siehe die späteren Sätze 11.35 und 11.36.

(c) Veranschaulichung der Aussagen des Satzes von Carathéodory.



Beweis von Satz 11.32.

(a) (i) Zeige: $\mathcal{A}^*$ ist $\cap$ -stabiles Dynkin System [$\iff \mathcal{A}^*$ σ -Algebra nach Satz 11.11(e)]
Dazu

Hilfsbehauptung: $\mathcal{A}^*$ ist Algebra.

- $X \in \mathcal{A}^*$ gilt bereits aus der Definition.
- ^{c} -stabil: $Q \cap A = Q \setminus A^c$ und $Q \setminus A = Q \cap A^c \implies$

$$A \in \mathcal{A}^* \iff A^c \in \mathcal{A}^*.$$

- $\cup$ -stabil: seien $A, B \in \mathcal{A}^*$, dann folgt für alle $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(X)$

$$\mu^*(\tilde{Q}) = \mu^*(\tilde{Q} \cap B) + \mu^*(\tilde{Q} \setminus B) \quad (1)$$

und somit für alle $Q \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) &= \underbrace{\mu^*(Q \cap A)}_{\substack{\mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*((Q \cap A) \setminus B) \\ \uparrow \\ (1) \text{ mit } \tilde{Q} = Q \cap A}} + \underbrace{\mu^*(Q \setminus A)}_{\substack{\mu^*((Q \setminus A) \cap B) + \mu^*((Q \setminus A) \setminus B) \\ \uparrow \\ (1) \text{ mit } \tilde{Q} = Q \setminus A}} \\ &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \\ &\quad + \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c). \end{aligned} \quad (2)$$

Nun folgt aus (2) mit der Ersetzung von Q durch $Q \cap (A \cup B)$

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B). \quad (3)$$

(3) in (2) eingesetzt liefert dann

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \underbrace{\mu^*(Q \cap (A \cup B)^c)}_{Q \setminus (A \cup B)}.$$

Somit folgt $A \cup B \in \mathcal{A}^*$ und die Hilfsbehauptung gezeigt.

Behauptung: $\mathcal{A}^*$ ist $\cap$ -stabiles Dynkin-System.

- $\cap$ -, $\setminus$ -Stabilität ist klar, da $\mathcal{A}^*$ wie eben gezeigt eine Algebra ist (siehe 11.9).
- Für $\cup_\infty$ -Stabilität sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^*$ paarweise disjunkt und $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Die disjunkten Mengen $A = A_1, B = A_2$ eingesetzt in Gleichung (3) liefern

$$\mu^*(Q \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_2)$$

für alle $Q \in \mathcal{P}(X)$.

Durch Induktion folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $Q \in \mathcal{P}(X)$

$$\mu^*\left(Q \cap \underbrace{\bigcup_{j=1}^n A_j}_{=: B_n}\right) = \sum_{j=1}^n \mu^*(Q \cap A_j).$$

Schon gezeigt: $\mathcal{A}^*$ ist Algebra $\implies B_n \in \mathcal{A}^*$

$$\begin{aligned} \implies \mu^*(Q) &= \mu^*(Q \cap B_n) + \underbrace{\mu^*(Q \setminus B_n)}_{\supseteq Q \setminus A} \\ &\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(Q \cap A_j) + \mu^*(Q \setminus A) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{11.29(2)} \\ &\quad \text{Monotonie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu^*(Q) &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(Q \cap A_n) + \mu^*(Q \setminus A) \\ &\geq \underbrace{\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Q \cap A_n)\right)}_{\uparrow} + \mu^*(Q \setminus A). \\ &\quad \text{Def. 11.29(3)} \end{aligned} \tag{4}$$

Also $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$ für alle $Q \in \mathcal{P}(X)$, d.h. $A \in \mathcal{A}^*$.

(ii) μ^* ist Maß auf $\mathcal{A}^*$.

- $\mu^*|_{\mathcal{A}^*} \geq 0$ und $\mu^*(\emptyset) = 0$ ist klar, da μ^* ein äußeres Maß ist.
- Für die σ -Additivität sei $(A_n)_n \subset \mathcal{A}^*$ paarweise disjunkt und $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dann folgt aus (4) mit $Q = A$

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu^*(A \cap A_n)}_{A_n}$$

und mit μ^* sub- σ -additiv die Behauptung.

(b) Zeige $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}^*$. Denn daraus folgt $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}^*$, weil $\mathcal{A}^*$ eine σ -Algebra ist.

Dazu seien $A \in \mathcal{R}$, $Q \in \mathcal{P}(X)$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $\mu^*(Q) < \infty$ (sonst ist die Bedingung in Definition 11.31 trivial erfüllt), also $\mathcal{U}(Q) \neq \emptyset$. Sei $(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)$ eine beliebige Folge, dann ist $A_n \cap A \in \mathcal{R}$ und $A_n \setminus A \in \mathcal{R}$ disjunkt für alle $n \in \mathbb{N}$. Da μ ein additiver Inhalt, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)$$

und durch Aufsummierung

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \setminus A).$$

Da $(A_n \cap A)_n \in \mathcal{U}(Q \cap A)$ und $(A_n \setminus A)_n \in \mathcal{U}(Q \setminus A)$, folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) &= \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \\ &\geq \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \cap A) + \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \setminus A) \\ &\geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A), \end{aligned}$$

also $A \in \mathcal{A}^*$.

(c) Zeige für alle $A \in \mathcal{R}$: $\mu^*(A) \geq \mu(A)$. Denn daraus folgt mit Lemma 11.30 $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Dazu sei $(A_n)_n \in \mathcal{U}(A)$, das heißt $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\implies \left(\bigcup_{j=1}^n (A_j \cap A) \right) \nearrow A$. Aus der Stetigkeit von unten folgt nun

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n (A_j \cap A)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subadditivität} \\ \text{Satz 11.24(d)}}}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \underbrace{\mu(A_j \cap A)}_{\substack{\leq \mu(A_j) \\ \text{Monotonie}}} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Daraus folgt

$$\mu(A) \leq \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(A)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu^*(A). \quad (5)$$

(d) Folgt aus dem Eindeutigkeitssatz 11.28, denn

- $\mathcal{R}$ ist ein $\cap$ -stabiler Erzeuger von $\sigma(\mathcal{R})$.
- μ ist σ -endlich auf $\mathcal{R}$. ■

11.34 Definition Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. In diesem Fall nennen wir

- $(X, \mathcal{A})$ **Messraum** (oder auch **messbarer Raum**).
- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **Maßraum**. Falls $\mu(X) = 1$, dann **Wahrscheinlichkeitsraum**.
- $A \subseteq X$ **messbar**, falls $A \in \mathcal{A}$.
- $A \subseteq X$ **$(\mu\text{-})$ Nullmenge**, falls $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) = 0$.

- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (oder nur μ) **vollständig**, falls für alle Nullmengen $N \subset X$ und für alle $A \subseteq N$ gilt

$$A \in \mathcal{A} \quad (\text{und somit wegen Monotonie } \mu(A) = 0).$$

„Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen“.

11.35 Satz Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann existiert genau ein kleinster, vollständiger Maßraum, die **Vervollständigung** $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ von $(X, \mathcal{A}, \mu)$, mit $\overline{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$, $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ und $\overline{\mu}$ vollständig. Das heißt, für alle weiteren vollständigen Maßräume $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ mit $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ und $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ gilt

$$\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \overline{\mathcal{A}} \quad \text{und} \quad \tilde{\mu}|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mu}.$$

Beweis. Übung. ■

11.36 Satz Sei μ^* ein äußeres Maß auf X und $\mathcal{A}^*$ die σ -Algebra der μ^* -messbaren Mengen.

- (a) Dann ist $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})$ vollständig.
- (b) Sei zudem μ^* von einem stetigen, σ -endlichen Inhalt μ auf dem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ induziert. Dann gilt

$$(X, \overline{\sigma(\mathcal{R})}, \overline{\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}}) = (X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*}).$$

Beweis. Übung. ■

⑥

11.5 Lebesgue-(Borel-) Maß

11.37 Satz Sei $d \in \mathbb{N}$. Dann $\exists_1$ Maß auf $\mathcal{B}^d$, das **Lebesgue-Borel-Maß** λ^d , so dass $\forall$ Quader $Q := \bigtimes_{\alpha=1}^d [a_\alpha, b_\alpha[\in \mathcal{I}^d$ mit $-\infty < a_\alpha \leq b_\alpha < \infty$, $\alpha = 1, \dots, d$, gilt

$$\lambda^d(Q) = \prod_{\alpha=1}^d (b_\alpha - a_\alpha).$$

Spezielle Notation: $\lambda := \lambda^1$.

Beweis. Hier nur für $d = 1$. Für den Fall $d \geq 2$, siehe das Ende von Kapitel 14.2.

Übung $\implies \exists_1$ endlicher Inhalt μ auf $\mathcal{F}$ mit

$$\mu([a, b[) = b - a$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Zudem ist μ stetig (Übung) $\xRightarrow{\text{Satz 11.32(d)}} \exists_1$ Maß λ auf $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$ mit $\lambda|_{\mathcal{F}} = \mu$. ■

11.38 Definition Die Vervollständigung des Lebesgue-Borel-Maßraums $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$ ist der Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}^d, \overline{\mathcal{B}^d}, \overline{\lambda^d})$. Dabei heißt $\overline{\mathcal{B}^d}$ die σ -Algebra der **Lebesgue-messbaren Mengen im $\mathbb{R}^d$** und $\overline{\lambda^d}$ das **d -dimensionale Lebesgue-Maß**. Gemäß Übung gilt

$$\overline{\mathcal{B}^d} = \left\{ B \cup \tilde{N} \subseteq \mathbb{R}^d : B \in \mathcal{B}^d, \exists N \in \mathcal{B}^d \text{ mit } \lambda^d(N) = 0 \text{ und } \tilde{N} \subseteq N \right\}.$$

11.39 Lemma Sei $B \in \mathcal{B}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$, dann folgt

$$x + B := \{x + b \in \mathbb{R}^d : b \in B\} \in \mathcal{B}^d.$$

Beweis. Aus $Q \in \mathcal{J}^d$ folgt $x + Q \in \mathcal{J}^d$. Da $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{J}^d)$ aus Mengen in $\mathcal{J}^d$ konstruiert wird, folgt hieraus die Behauptung. ■

11.40 Bemerkung Satz 11.37 und Lemma 11.39 gelten analog für $\overline{\mathcal{B}^d}$ und $\overline{\lambda^d}$.

Das Lebesgue-Borel-Maß (bzw. Lebesgue-Maß) ist das einzige translationsinvariante und normierte Maß auf $\mathcal{B}^d$ (bzw. $\overline{\mathcal{B}^d}$), denn es gilt der folgende Satz. In dessen Formulierung sichert Lemma 11.39 die Wohldefiniertheit des Begriffs der Translationsinvarianz.

11.41 Satz Sei μ ein Maß auf $\mathcal{B}^d$. Dann sind äquivalent

- (i) $\mu = \lambda^d$.
- (ii) μ ist translationsinvariant, das heißt, $\mu(B) = \mu(x + B) \forall B \in \mathcal{B}^d \forall x \in \mathbb{R}^d$, und normiert, das heißt, $\mu([0, 1]^d) = 1$, wobei $[0, 1]^d := \bigtimes_{\alpha=1}^d [0, 1]$.

Zusatz: Die Aussage des Satzes gilt analog für $\overline{\mathcal{B}^d}$ und $\overline{\lambda^d}$.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: λ^d ist normiert. Fixiere $x \in \mathbb{R}^d$. Für das Maß $\nu_x : \mathcal{B}^d \rightarrow [0, \infty]$
 $B \mapsto \lambda^d(x + B)$
gilt

$$\nu_x \left(\bigtimes_{\alpha=1}^d [a_\alpha, b_\alpha[\right) = \lambda^d \left(x + \bigtimes_{\alpha=1}^d [a_\alpha, b_\alpha[\right) = \prod_{\alpha=1}^d \underbrace{(b_\alpha + x - a_\alpha - x)}_{=b_\alpha - a_\alpha}.$$

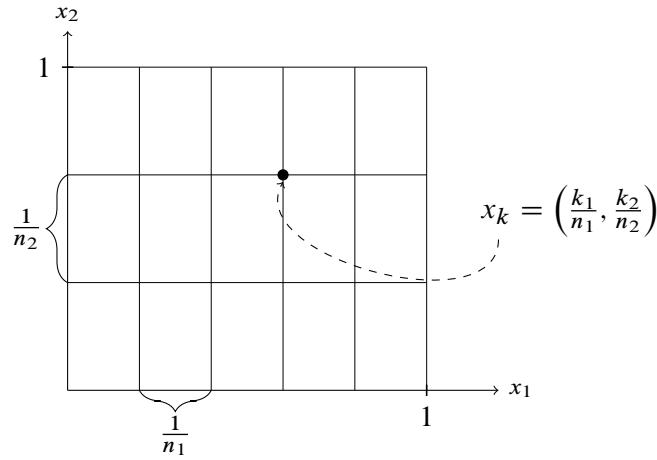
Mit Satz 11.37 folgt hieraus $\nu_x = \lambda^d$, also ist λ^d translationsinvariant.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“: 1. Schritt. Es gilt

$$\mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^d \left[0, \frac{1}{n_\alpha}\right]\right) = \prod_{\alpha=1}^d \frac{1}{n_\alpha} \quad \forall (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d,$$

denn sei $\mathcal{K} := \{k \in \mathbb{N}_0^d : k_\alpha < n_\alpha \ \forall \alpha = 1, \dots, d\}$ und $x_k := (k_1/n_1, \dots, k_d/n_d)$ für $k \in \mathcal{K}$, so folgt (siehe Skizze)

$$[0, 1]^d = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} \left(x_k + \bigtimes_{\alpha=1}^d \left[0, \frac{1}{n_\alpha}\right] \right)$$



und

$$\begin{aligned} 1 & \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Normierung}}}{=} \mu([0, 1]^d) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{additiv}}}{=} \sum_{k \in \mathcal{K}} \mu\left(x_k + \bigtimes_{\alpha=1}^d \left[0, \frac{1}{n_\alpha}\right]\right) \\ & \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{translationsinvariant}}}{=} \left(\prod_{\alpha=1}^d n_\alpha\right) \mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^d \left[0, \frac{1}{n_\alpha}\right]\right). \end{aligned}$$

2. Schritt. Es gilt

$$\mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^d [0, q_\alpha]\right) = \prod_{\alpha=1}^d q_\alpha \quad \forall (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Q}_{\geq}^d.$$

Dies ist wahr, denn für $q_\alpha = \frac{p_\alpha}{n_\alpha}$ mit $p_\alpha \in \mathbb{N}_0, n_\alpha \in \mathbb{N}$, folgt die Behauptung mittels Zerlegung und der Translationsinvarianz von μ wie im 1. Schritt.

3. Schritt. Es gilt

$$\mu\left(\underbrace{\bigtimes_{\alpha=1}^d [0, b_\alpha]}_{=: Q}\right) = \prod_{\alpha=1}^d b_\alpha \quad \forall (b_1, \dots, b_d) \in (\mathbb{R}_{\geq})^d.$$

Dies ist wahr, denn $\forall \alpha = 1, \dots, d$ gibt es eine Folge $(q_\alpha^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_{\geq}$, so dass $q_\alpha^{(n)} \nearrow b_\alpha \implies$

$$Q^{(n)} := \bigtimes_{\alpha=1}^d [0, q_\alpha^{(n)}] \nearrow Q.$$

Somit implizieren die Stetigkeit von unten und der 2. Schritt

$$\mu(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mu(Q^{(n)})}_{\prod_{\alpha=1}^d q_{\alpha}^{(n)}} = \prod_{\alpha=1}^d b_{\alpha}.$$

4. Schritt. Es gilt

$$\mu\left(\underbrace{\bigtimes_{\alpha=1}^d [a_{\alpha}, b_{\alpha}[}_{=:Q}\right) = \prod_{\alpha=1}^d (b_{\alpha} - a_{\alpha})$$

$\forall -\infty < a_{\alpha} \leq b_{\alpha} < \infty, \alpha = 1, \dots, d$. Dies folgt aus $Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} + \bigtimes_{\alpha=1}^d [0, b_{\alpha} - a_{\alpha}[$, der

Translationsinvarianz und dem 3. Schritt.

Die Implikation „(ii) $\Rightarrow$ (i)“ folgt nun aus dem 4. Schritt und Satz 11.37.

Der Beweis des Zusatzes zum Satz verläuft analog unter Beachtung von Bemerkung 11.40. ■

Eine Charakterisierung Lebesgue-messbarer Mengen durch eine Approximationseigenschaft des Lebesgue-Borel-Maßes gibt

11.42 Satz Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent

- (i) $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$.
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\exists C \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, so dass
 - $C \subseteq A \subseteq U$.
 - $\lambda^d(U \setminus C) < \varepsilon$.

Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) heißt **Regularität** von λ^d .

Warnung! Aus (ii) folgt im Allgemeinen nicht, dass $A \in \mathcal{B}^d$.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$.

(a) Wir nehmen zunächst vereinfachend an, dass $\overline{\lambda^d}(A) < \infty$. Wegen

$$\overline{\lambda^d}(A) \stackrel{\text{Satz 11.36 (b)}}{=} \underbrace{(\lambda^d)^*(A)}_{\substack{\text{von } \lambda^d|_{\mathcal{F}^d} \text{ induz.} \\ \text{äußeres Maß}}} \stackrel{\text{Lemma 11.30}}{=} \inf_{\substack{(F_n)_n \subset \mathcal{F}^d: \\ A \subseteq \bigcup_n F_n}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(F_n)$$

gibt es $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{J}^d$ mit $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ und

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(I_n) < \overline{\lambda^d}(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zu I_n existiert $J_n \in \mathcal{J}^d$ mit $I_n \subseteq \overset{\circ}{J}_n$ und $\lambda^d(\overset{\circ}{J}_n) \leq \lambda^d(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Setze $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{J}_n$, dann ist $U \supseteq A$ offen und

$$\overline{\lambda^d}(U \setminus A) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Subtraktivität}}}{=} \lambda^d(U) - \overline{\lambda^d}(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(\overset{\circ}{J}_n) - \overline{\lambda^d}(A) < \varepsilon. \quad (1)$$

(b) Nun verallgemeinern wir (1) auf beliebige $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$, also $\underbrace{\overline{\lambda^d}(A \cap [-n, n]^d)}_{\in \overline{\mathcal{B}^d}} < \infty$. Gemäß (a) existiert $U_n \supseteq A \cap [-n, n]^d$

offen mit

$$\overline{\lambda^d}(U_n \setminus (A \cap [-n, n]^d)) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Damit ist $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \supseteq A$ und

$$\overline{\lambda^d}(U \setminus A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{\lambda^d}(\underbrace{U_n \setminus A}_{\subseteq U_n \setminus (A \cap [-n, n]^d)}) < \varepsilon. \quad (2)$$

(c) Da $A^c \in \overline{\mathcal{B}^d}$, existiert nach (b) $V \supseteq A^c$ offen mit $\overline{\lambda^d}(V \setminus A^c) < \varepsilon$. Setze $C := V^c \implies C$ abgeschlossen, $C \subseteq A$ und

$$\overline{\lambda^d}(A \setminus C) = \overline{\lambda^d}(A \cap V) = \overline{\lambda^d}(V \setminus A^c) < \varepsilon. \quad (3)$$

Insgesamt gilt: gemäß (b) und (c) existieren $U \supseteq A$ offen und $C \subseteq A$, die (2) und (3) erfüllen, also

$$\lambda^d(U \setminus C) = \overline{\lambda^d}(\underbrace{U \setminus C}_{(U \setminus A) \cup (A \setminus C)}) < 2\varepsilon.$$

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Übung. ■

Wir zeigen nun, dass auch tatsächlich Mengen existieren, die nicht Lebesgue- (und somit auch nicht Borel-) messbar sind.

11.43 Satz Für alle $d \in \mathbb{N}$ ist $\overline{\mathcal{B}^d} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}^d$ definieren wir $[x] := x + \mathbb{Q}^d \subseteq \mathbb{R}^d$, also die Äquivalenzklasse von x bzgl. der Äquivalenzrelation $x \sim y : \iff x - y \in \mathbb{Q}^d$. Demnach ist $\{[x] : x \in \mathbb{R}^d\} = \mathbb{R}^d / \mathbb{Q}^d$. Für jede der Klassen gilt

$$[x] \cap [0, 1]^d \neq \emptyset.$$

Für alle $[x] \in \mathbb{R}^d / \mathbb{Q}^d$ wählen wir genau ein Element $v_{[x]} \in [x] \cap [0, 1[^d$ aus (mit Auswahlaxiom möglich). Sei

$$V := \left\{ v_{[x]} \in [0, 1[^d : [x] \in \mathbb{R}^d / \mathbb{Q}^d \right\},$$

dann ist

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{v \in V} (v + \mathbb{Q}^d) = \bigcup_{v \in V} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} \{v + q\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (q + V).$$

Die Disjunktheit der letzten Vereinigung kann wie folgt erkannt werden (die der ersten gilt analog): nehmen wir an, es gäbe $q \neq q' \in \mathbb{Q}^d$ mit $(q + V) \cap (q' + V) \neq \emptyset$. Daraus würde folgen, dass es auch $v, v' \in V$ gäbe mit $q + v = q' + v' \implies v' - v = q - q' \in \mathbb{Q}$, also $v \neq v'$ und $v \in [v']$, im Widerspruch zur Definition von V . Kommen wir nun zum eigentlichen Widerspruch.

Angenommen: $V \in \overline{\mathcal{B}}^d$. Dann können wir folgern, dass

- zum einen

$$\infty = \overline{\lambda}^d(\mathbb{R}^d) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-Add.}}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{\overline{\lambda}^d(q + V)}_{\substack{= \overline{\lambda}^d(V) \\ \text{Translationsinvarianz}}},$$

und damit auch $\overline{\lambda}^d(V) > 0$ gelten muss,

- zum anderen jedoch

$$\infty > \overline{\lambda}^d([0, 2]^d) \geq \overline{\lambda}^d\left(\bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[^d \\ \subseteq [0, 2]^d}} (q + V)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-Add.}}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q}^d \cap [0, 1[^d} \underbrace{\overline{\lambda}^d(q + V)}_{= \overline{\lambda}^d(V)},$$

und somit $\overline{\lambda}^d(V) = 0$ gelten muss.

Widerspruch! ■

Integration bezüglich eines Maßes

12.1 Messbare Abbildungen

7

12.1 Definition Seien $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ Messräume und $f : X \rightarrow X'$ eine Abbildung.

$$\begin{aligned} f \text{ heißt } (\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}'\text{-}) \text{ messbar} &: \iff \forall A' \in \mathcal{A}': f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \\ &\iff \sigma(f) := \underbrace{f^{-1}(\mathcal{A}')}_{\sigma\text{-Algebra nach Lemma 11.6 (a)}} := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \subseteq \mathcal{A}. \end{aligned}$$

$\sigma(f)$ heißt **von f erzeugte σ -Algebra** und ist die kleinste σ -Algebra auf X , bzgl. der f messbar.

- Speziell für $(X', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ heißt f **($\mathcal{A}$ -) messbare Funktion**.
- Speziell für $(X', \mathcal{A}') = (\overline{\mathbb{R}}, \underbrace{\sigma(\mathcal{B} \cup \{\{+\infty\}\} \cup \{\{-\infty\}\})}_{=: \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})})$ heißt f **($\mathcal{A}$ -) messbare, numerische Funktion**.¹
- Speziell für $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum heißt f **(X' -wertige) Zufallsvariable**.

12.2 Bemerkung Sei X eine Menge, $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge, seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$ Messräume und $f_j : X \rightarrow X_j$ Abbildungen für alle $j \in J$. Dann ist die **von $\{f_j\}_{j \in J}$ erzeugte σ -Algebra auf X**

$$\sigma(f_j, j \in J) := \sigma\left(\bigcup_{j \in J} \sigma(f_j)\right)$$

die kleinste σ -Algebra auf X , bezüglich der alle $f_j, j \in J$, messbar sind.

12.3 Beispiel Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $A \subseteq X$ und

$$1_A : \begin{array}{ll} X & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases} \end{array}$$

die **Indikatorfunktion** (oder auch charakteristische Funktion) von A . Dann gilt

¹Def.: Eine Basis der Standardtopologie $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}}$ von $\overline{\mathbb{R}}$ erhält man aus der Vereinigung einer Basis der euklidischen Topologie von $\mathbb{R}$ mit den Mengen $]n, \infty]$, $[-\infty, -n[$, $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt: (i) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}})$ ist die Borel- σ -Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$, (ii) $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ konvergent in $\overline{\mathbb{R}} \iff (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{R}$ oder bestimmt divergent nach $\pm\infty$.

- 1_A messbar $\iff A$ messbar, denn $\sigma(1_A) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.
- $A \subseteq B \implies 1_A \leq 1_B$.
- $1_{A^c} = 1 - 1_A$.
- $1_{\bigcup_{j \in J} A_j} = \sup_{j \in J} 1_{A_j}$, $1_{\bigcap_{j \in J} A_j} = \inf_{j \in J} 1_{A_j}$.

12.4 Satz (a) Seien $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ Messräume und sei $\mathcal{E}'$ Erzeuger von $\mathcal{A}'$. Dann gilt

$$f : X \rightarrow X' \text{ messbar} \iff f^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{A}.$$

(b) Seien $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ topologische Räume und $f : X \rightarrow X'$. Dann gilt

$$f \text{ stetig} \implies f \text{ **Borel-messbar**, das heißt, } f \text{ } \sigma(\mathcal{T})\text{-}\sigma(\mathcal{T}')\text{-messbar.}$$

(c) Für $j = 1, 2, 3$ seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$ Messräume und $f_1 : X_1 \rightarrow X_2, f_2 : X_2 \rightarrow X_3$ messbare Abbildungen. Dann gilt

$$f_2 \circ f_1 : X_1 \rightarrow X_3 \text{ ist messbar.}$$

Beweis. (a) „ $\implies$ “ klar.

„ $\impliedby$ “ Betrachte $\tilde{\mathcal{A}} := \{A' \in \mathcal{P}(X') : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$, das größte Mengensystem in X' , so dass f $\mathcal{A}$ - $\tilde{\mathcal{A}}$ -messbar ist. Es gilt

(1) $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{E}'$ (n.V.)

(2) $\tilde{\mathcal{A}}$ ist σ -Algebra in X' , denn (i) $f^{-1}(X') = X \in \mathcal{A} \implies X' \in \tilde{\mathcal{A}}$
(ii) $\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}} : f^{-1}(\tilde{A}^c) = \underbrace{(f^{-1}(\tilde{A}))^c}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \implies \tilde{A}^c \in \tilde{\mathcal{A}}$

(iii) $\forall (\tilde{A}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{\mathcal{A}} : f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}(\tilde{A}_n)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(1) und (2) $\xRightarrow{\tilde{\mathcal{A}} \text{ ist } \sigma\text{-Alg.}} \tilde{\mathcal{A}} \supseteq \sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{A}' \implies f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}'\text{-messbar.}$

(b) folgt aus (a), denn n.V. gilt $f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}$.

(c) klar, da $\forall A_3 \in \mathcal{A}_3 : (f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(\underbrace{f_2^{-1}(A_3)}_{\in \mathcal{A}_2}) \in \mathcal{A}_1$. ■

12.5 Lemma Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum. Dann sind äquivalent

- (i) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist messbar
- (ii) $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \leq a\} := \{x \in X : f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$.
- (iii) $\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathcal{A}$.
- (iv) $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \geq a\} \in \mathcal{A}$.

- (v) $\forall a \in \mathbb{R}: \{f > a\} \in \mathcal{A}$.
- (vi) $\exists D \subseteq \mathbb{R}$ *dicht* mit $\forall a \in D: \{f \leq a\} \in \mathcal{A}$.
- (vii) $\exists D \subseteq \mathbb{R}$ *dicht* mit $\forall a \in D: \{f < a\} \in \mathcal{A}$.
- (viii) $\exists D \subseteq \mathbb{R}$ *dicht* mit $\forall a \in D: \{f \geq a\} \in \mathcal{A}$.
- (ix) $\exists D \subseteq \mathbb{R}$ *dicht* mit $\forall a \in D: \{f > a\} \in \mathcal{A}$.
- (x) $\forall U \subseteq \mathbb{R}$ *offen*: $\{f \in U\} \in \mathcal{A}$.
- (xi) $\forall C \subseteq \mathbb{R}$ *abgeschlossen*: $\{f \in C\} \in \mathcal{A}$.
- (xii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b: \{a \leq f < b\} \in \mathcal{A}$.

Analog auch mit $\overline{\mathbb{R}}$ statt $\mathbb{R}$.

Beweis. Folgt aus Satz 12.4(a), da alles Erzeuger von $\mathcal{B}$ sind, siehe auch Übung. ■

12.6 Satz Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $f, f_n, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ alle messbar für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

- (a) $\{f \leq g\}, \{f < g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$.
- (b) Für $c \in \mathbb{R}$ sind $cf, f \pm g, fg, \underset{\min}{f \wedge g}, \underset{\max}{f \vee g}, |f|$ sind messbar.
- (c) $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ sind messbar.
- (d) Falls für alle $x \in X$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert (punktweise), dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ messbar.

Analog mit $\overline{\mathbb{R}}$ statt $\mathbb{R}$. Jedoch muss dann zusätzlich noch $f \pm g$ wohldefiniert gefordert werden (das heißt kein Ausdruck von $\infty - \infty$ darf entstehen).

Beweis. (a) Folgt mit Lemma 12.5 aus

$$\begin{aligned} \{f < g\} &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{q < g\}), \\ \{f \leq g\} &= \{g < f\}^c, \\ \{f = g\} &= \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\}, \\ \{f \neq g\} &= \{f = g\}^c. \end{aligned}$$

- (b) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist messbar und $\gamma: \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & cr \end{matrix}$ stetig $\xRightarrow{\text{Satz 12.4(b)}}$ messbar. Aus Satz 12.4(c) folgt dann auch $\gamma \circ f = cf$ messbar. Analog für $|f|$. Rest ist Übung.

- (c) • $\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a \right\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq a\}$ ist messbar, daraus folgt die Behauptung mit Lemma 12.5.

- $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}} (-f_n)$ messbar nach obigem und (b).
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} f_m = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} f_m$ bzw. $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} f_m$
 $\uparrow$
 antitone Folge
 $\Rightarrow$ Behauptung aus der Messbarkeit von inf und sup.

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n. \quad \blacksquare$$

Eine zentrale Rolle in der Integrationstheorie spielen Treppenfunktionen.

12.7 Definition Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

$$f \text{ ist Treppenfunktion} : \Longleftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \exists A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A} \exists a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R} : f = \sum_{n=1}^N a_n 1_{A_n}$$

Diese sind stets messbar, da sie eine endliche Linearkombination von messbaren Indikatorfunktionen sind.

12.8 Satz Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum und $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt

$$f \text{ messbar} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \text{ Folge } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ von Treppenfunktionen } X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit} \\ f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ (punktweise).} \end{cases}$$

Falls f messbar und $f \geq 0$, kann $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar isoton gewählt werden und es gilt $f_n \nearrow f$. Falls f messbar und beschränkt ist, kann $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so gewählt werden, dass die Konvergenz sogar gleichmäßig ist.

Beweis. „ $\Leftarrow$ “ Satz 12.6(d), da Treppenfunktionen messbar sind.

„ $\Rightarrow$ “ Sei $f_{\pm} := \max\{\pm f, 0\} \geq 0$ der **Positiv-** bzw. **Negativteil von** f , so ist $f_{\pm}$ messbar nach Satz 12.6(b) und $f = f_+ - f_-$. Ohne Einschränkung genügt es $f \geq 0$ zu betrachten, denn aus $f_n^{\pm} \nearrow f_{\pm}$ folgt $f_n^+ - f_n^- \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_+ - f_-$ (Diff. wohldef., da $\{f_+ = \infty\} \cap \{f_- = \infty\} = \emptyset$).

Sei also $f \geq 0$. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$

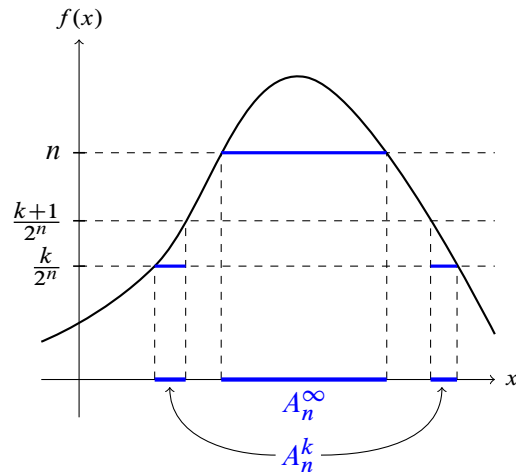
$$A_n^k := \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\} \in \mathcal{A}$$

und

$$A_n^{\infty} := \{f \geq n\} \in \mathcal{A},$$

sowie

$$f_n := n 1_{A_n^{\infty}} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{A_n^k}.$$



Für die Treppenfunktionen f_n gilt

- $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$\uparrow$
 da Unterteilung $\{A_{n+1}^k\}_k$
 eine Verfeinerung von $\{A_n^k\}_k$

$\uparrow$
 klar
- $\forall x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{denn}$
 1. Fall: $f(x) = \infty \implies x \in A_n^\infty$ für alle $n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f_n(x)}_{=\infty} = \infty.$
 2. Fall: $f(x) < \infty \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : f(x) < n_0 \implies \forall n \geq n_0 \exists k_n \text{ mit } x \in A_n^{k_n} \implies$

$$\forall n \geq n_0 \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}. \quad (\star)$$

Falls f beschränkt ist, tritt nur der 2. Fall auf mit einem von x unabhängigen n_0

$\stackrel{(\star)}{\implies}$ gleichmäßige Konvergenz. ■

12.2 Integral von Elementarfunktionen

8

12.9 Definition Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum.

- (a) Die Menge $E := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \geq 0 \text{ ist Treppenfunktion}\}$ heißt der Raum der **Elementarfunktionen**.
- (b) Sei $f \in E$, so heißt

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j} \quad \text{\textbf{Normaldarstellung}} \quad :\iff \quad \alpha_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ und} \\ \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{A} \text{ paarweise disjunkt}$$

12.10 Bemerkung (a) Die Normaldarstellung ist nicht eindeutig.

- (b) Für $f, g \in E, \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \implies \alpha f, f + g, f \vee g, f \wedge g \in E.$

Im Folgenden liege immer ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zugrunde.

12.11 Definition (Integral von Elementarfunktionen) Sei $E \ni f = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}$ in Normaldarstellung. In diesem Fall heißt

$$\int_X f(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

das (μ) -Integral von f über X .

12.12 Bemerkung (a) Der Name der Integrationsvariablen ist beliebig.

(b) Wegen des nächsten Lemmas 12.13 ist das Integral wohldefiniert, da unabhängig von der Wahl der Normaldarstellung.

(c) Weitere gebräuchliche Schreibweisen für das Integral beinhalten

$$\int f \, d\mu, \quad \int_X f(x) \mu(dx), \quad \int_X d\mu(x) f(x).$$

Spezielle Notation für $\mu = \lambda^d$ und $\mu = \overline{\lambda^d}$ ist $d\mu(x) = d^d x$ oder dx .

(d) $f \mapsto \int f \, d\mu$ definiert eine Abbildung $E \rightarrow [0, \infty]$.

12.13 Lemma Sei $f \in E$ mit 2 Normaldarstellungen

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j} = f = \sum_{k=1}^m \beta_k 1_{B_k}.$$

Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^m \beta_k \mu(B_k).$$

Beweis. Sei $W := \{w \in]0, \infty[: f^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset\}$ der Wertebereich von f ohne 0 (NB: $\#W < \infty$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \bigcup_{j \in \{1, \dots, n\} : \alpha_j = w} A_j = f^{-1}(\{w\}) = \bigcup_{k \in \{1, \dots, m\} : \beta_k = w} B_k \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{w \in W} w \underbrace{\sum_{j \in \{1, \dots, n\} : \alpha_j = w} \mu(A_j)}_{\mu\left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, n\} : \alpha_j = w} A_j\right)} = \sum_{w \in W} w \mu(f^{-1}(\{w\})) \stackrel{\text{analog}}{=} \sum_{k=1}^m \beta_k \mu(B_k) \end{aligned}$$

■

12.14 Lemma Seien $f, g \in E, a \in [0, \infty[, A \in \mathcal{A}$. Dann gilt

(a) $\int_X 1_A(x) \, d\mu(x) = \mu(A).$

(b) $\int a f \, d\mu = a \int f \, d\mu.$

(c) $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$

(d) $f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ (Monotonie).

Beweis. (a) und (b) folgen unmittelbar aus der Definition; für (c) und (d) siehe Übung. ■

12.15 Satz (Vorstufe des monotonen Konvergenzsatzes von BEPPO LEVI)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ isoton, $f \in E$ und $f_n \nearrow f$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Beweis. 1. Fall: $\mu(\{f \neq 0\}) = \infty$.

Sei $f = \sum_{j=1}^J \alpha_j 1_{A_j}$ Normaldarstellung, dann gelte o.E. $\alpha_1 > 0$ und $\mu(A_1) = \infty$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_1^{(n)} := \{f_n > \frac{\alpha_1}{2}\} \xrightarrow{(f_n)_n \text{ isoton}} A_1^{(n)} \subseteq A_1^{(n+1)} \forall n \in \mathbb{N}$ und, wegen punktweiser Konvergenz, $A_1 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_1^{(n)}$. Nach Lemma 12.14(d) existiert folgender Limes in $\overline{\mathbb{R}}$ (da isotone Folge)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \underbrace{f_n}_{\geq \frac{\alpha_1}{2} 1_{A_1^{(n)}}} \, d\mu &\stackrel{\text{Lemma 12.14(d)}}{\geq} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1}{2} \mu(\underbrace{A_1^{(n)}}_{\bigcup_{j=1}^n A_1^{(j)}}) \stackrel{\substack{\text{Stetigkeit} \\ \text{von unten}}}{=} \frac{\alpha_1}{2} \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_1^{(j)}\right) \stackrel{\substack{\text{Monotonie von } \mu}}{\geq} \frac{\alpha_1}{2} \mu(A_1) = \infty. \end{aligned}$$

Andererseits gilt ebenfalls $\int \underbrace{f}_{\geq \alpha_1 1_{A_1}} \, d\mu \geq \alpha_1 \mu(A_1) = \infty$, also $\infty = \infty$.

2. Fall: $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$.

Aus $f_n \leq f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu. \quad (\star)$$

Zeige nun „ $\geq$ “ in $(\star)$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ und setze $C_n := \{f - f_n > \varepsilon\} \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung gilt dann $C_n \subseteq \{f \neq 0\}$, also $\mu(C_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $C_n \searrow \emptyset$, da $f_n \nearrow f$. Die Stetigkeit von oben liefert damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = 0. \quad (\star\star)$$

Mit $F := \max_{x \in X} f(x) < \infty$ (da $f \in E$) folgt

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu - \int f_n \, d\mu &= \int 1_{\{f \neq 0\}} (f - f_n) \, d\mu \\ &= \int \underbrace{1_{C_n} (f - f_n)}_{\leq F} \, d\mu + \int \underbrace{1_{C_n^c} 1_{\{f \neq 0\}} (f - f_n)}_{\leq \varepsilon 1_{\{f \neq 0\}}} \, d\mu \\ &\leq F \mu(C_n) + \varepsilon \underbrace{\mu(\{f \neq 0\})}_{< \infty} \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ (\star\star)}]{n \rightarrow \infty} \varepsilon \mu(\{f \neq 0\}). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung zusammen mit $(\star)$. ■

12.3 Integration messbarer Funktionen

Im Folgenden liege stets der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zugrunde.

12.16 Definition (a) Menge der nicht-negativen, numerischen Funktionen

$$\begin{aligned} E^* &:= \left\{ f : X \rightarrow [0, \infty] : f \text{ messbar} \right\} \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 12.8}}}{=} \left\{ f : X \rightarrow [0, \infty] : \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E \text{ isoton mit } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f \right\}. \end{aligned}$$

(b) Sei $f \in E^*$ und $(f_n)_n \subset E$ eine approximierende Folge nach Satz 12.8. Dann heißt

$$\int_X f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

das $(\mu\text{-})$ Integral von f .

12.17 Lemma Das Integral für $f \in E^*$ ist wohldefiniert, da unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge. Für $f \in E$ stimmt es mit Definition 12.11 überein.

Beweis. Sei $(g_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$, $g_k \nearrow f$, eine weitere approximierende Folge. Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k \, d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$, denn durch Vertauschung der Rollen von g_k und f_n folgt auch „ $\leq$ “.

Sei $\varphi_{k,n} := g_k \wedge f_n \in E$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi_{k,n} \nearrow f_n \in E \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

da $g_k \nearrow f \geq f_n$. Daraus folgt die Behauptung im Limes $n \rightarrow \infty$ von

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_X g_k \, d\mu}_{\geq \varphi_{k,n}} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi_{k,n} \, d\mu \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 12.15}}}{=} \int_X f_n \, d\mu.$$

■

12.18 Lemma Seien $f, g \in E^*$ und $a \in [0, \infty[$. Dann gilt

(a) $af, f + g, f \vee g, f \wedge g \in E^*$.

(b) $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

(c) $\int af \, d\mu = a \int f \, d\mu$.

(d) $f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ (Monotonie).

Beweis. (a) folgt aus Satz 12.6 und (b) – (d) aus Lemma 12.14 und den Rechenregeln des Limes. ■

Der erste wichtige Satz zum Vertauschen von Limiten mit Integralen ist

12.19 Satz (Monotone Konvergenz nach BEPPO LEVI) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$ mit $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in E^*$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty]$ isoton und messbar $\xRightarrow{\text{Satz 12.6(d)}} f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ existiert punktweise in $[0, \infty]$ und ist messbar, also $f \in E^*$. Nach Satz 12.8 existiert zu $f_n \in E^*$, $n \in \mathbb{N}$, eine isotone Folge $(f_n^m)_{m \in \mathbb{N}} \subset E$ mit $f_n^m \nearrow f_n$ für $m \rightarrow \infty$. Setze $h_m := \max\{f_1^m, \dots, f_m^m\} \in E$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

- $h_m \leq \max\{f_1, \dots, f_m\} = f_m \leq f$,
- $h_m \leq h_{m+1}$.

Also konvergiert die isoton Folge $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ punktweise in $\overline{\mathbb{R}}$ und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_m \leq f. \quad (\star)$$

Andererseits gilt nach Definition $f_n^m \leq h_m$ für alle $n = 1, \dots, m$, so dass

$$f_n = \lim_{m \rightarrow \infty} f_n^m \leq \lim_{m \rightarrow \infty} h_m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \leq \lim_{m \rightarrow \infty} h_m. \quad (\star\star)$$

Aus $(\star)$ und $(\star\star)$ folgt

$$f = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m = \sup_{\substack{\uparrow \\ \text{isoton} \\ m \in \mathbb{N}}} h_m.$$

Also gilt per Def. 12.16, dass $\int f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m d\mu$. Die verbleibende Behauptung folgt mittels $n \rightarrow \infty$ aus

$$\int \underbrace{f_n}_{\leq f} d\mu \leq \int f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int \underbrace{h_m}_{\leq f_m} d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m d\mu. \quad \blacksquare$$

12.20 Korollar Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^*$. Dann ist $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \in E^*$ und

$$\int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Folgt aus monotoner Konvergenz mit $g_N := \sum_{n=1}^N f_n$. ■

Zur Erinnerung: für $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist der Positiv- bzw. Negativteil gegeben durch $f_{\pm} := \max\{\pm f, 0\}$. Somit gilt $f = f_+ - f_-$ und es gilt f messbar $\iff f_{\pm}$ messbar.

12.21 Definition Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

$$f \text{ } (\mu\text{-}) \text{ integrierbar (über } X) \iff f \text{ messbar und } \int f_+ d\mu < \infty, \int f_- d\mu < \infty.$$

In diesem Fall heißt

$$\int f d\mu := \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$$

das $(\mu\text{-})$ **Integral von f (über X)**. Für $A \in \mathcal{A}$ sei

$$\int_A f d\mu := \int f \cdot 1_A d\mu.$$

12.22 Bemerkung (a) Alternativschreibweisen wie in Bemerkung 12.12 (c).

(b) Definition 12.21 stimmt für $f \in E^*$ mit Definition 12.16 (b) überein.

(c) Allgemeiner könnte man auch $\int f_+ d\mu = \infty$ oder $\int f_- d\mu = \infty$ (aber nicht beide gleichzeitig!) erlauben und das machen wir auch in Kapitel 12.5.

(d) Falls $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine integrierbare Zufallsvariable, so heißt

- $\mathbb{E}(f) := \int f d\mu$ **Erwartungswert**,
- $\text{Var}(f) := \mathbb{E}[(f - \mathbb{E}(f))^2]$ **Varianz** von f .

12.23 Definition

$$\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}^1(X) := \mathcal{L}^1(X, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ } \mu\text{-integrierbar}\}.$$

$$\overline{\mathcal{L}^1} := \overline{\mathcal{L}^1}(\mu) := \overline{\mathcal{L}^1}(X) := \overline{\mathcal{L}^1}(X, \mu) := \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : f \text{ } \mu\text{-integrierbar}\}.$$

12.24 Satz Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind äquivalent

- (i) $f \in \overline{\mathcal{L}^1}$.
- (ii) $f_+, f_- \in \overline{\mathcal{L}^1}$.
- (iii) $|f| \in \overline{\mathcal{L}^1}$.
- (iv) $\int |f| d\mu < \infty$.

$$(v) \exists u, v \in \overline{\mathcal{L}^1}: f_+ \leq u, f_- \leq v.$$

$$(vi) \exists g \in \overline{\mathcal{L}^1}: |f| \leq g.$$

(Analog für $\mathbb{R}$ und $\mathcal{L}^1$.)

Beweis. Übung. ■

12.25 Korollar $\overline{\mathcal{L}^1}$ ist ein Vektorverband, das heißt für alle $f, g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left. \begin{array}{ll} (a) \int \underbrace{\alpha f}_{\in \overline{\mathcal{L}^1}} d\mu = \alpha \int f d\mu. \\ (b) \int \underbrace{(f+g)}_{\in \overline{\mathcal{L}^1}} d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \\ (c) f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Linearität} \\ \\ \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array}} \right\} \text{monotone Linearform}$$

$$(d) \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu. \quad \text{Dreieck-Ungleichung}$$

$$(e) f \vee g, f \wedge g \in \overline{\mathcal{L}^1}. \quad \text{Verbandseigenschaft}$$

(Analog für $\mathcal{L}^1$.)

Beweis. (a) – (c) durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil und mit Lemma 12.18.

$$(d) \left| \int f d\mu \right| = \left| \underbrace{\int f_+ d\mu}_{\geq 0} - \underbrace{\int f_- d\mu}_{\geq 0} \right| \leq \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu = \int \underbrace{(f_+ + f_-)}_{|f|} d\mu.$$

(e) Aus Lemma 12.18(a), $|f \vee g| \leq |f| + |g|$ bzw. $|f \wedge g| \leq |f| + |g|$, Satz 12.24 und (b). ■

12.26 Beispiel (a) Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $a \in X$, $\{a\} \in \mathcal{A}$ und $\mu = \delta_a$ das in a konzentrierte Dirac-Maß, so ist $\overline{\mathcal{L}^1}(\delta_a) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar u. } |f(a)| < \infty\}$, da $\int_X f d\delta_a = f(a)$ (siehe Übung).

(b) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Dann gilt

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar, beschränkt} \implies f \in \mathcal{L}^1(\mu),$$

$$\text{da } \int_X |f(x)| d\mu(x) \leq \left(\sup_{x \in X} |f(x)| \right) \mu(X).$$

12.4 Eigenschaften fast-überall

Im Folgenden liege stets der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zugrunde.

12.27 Definition Für alle $x \in X$ sei $Q(x)$ eine mathematische Aussage.

$Q(x)$ gilt für $(\mu\text{-})$ fast alle $x \in X$ bzw. Q gilt $(\mu\text{-})$ fast überall

$$:\Longleftrightarrow \exists N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N) = 0 \text{ und } Q(x) \text{ gilt } \forall x \in N^c.$$

Das heißt, Q gilt überall bis (eventuell) auf einer μ -Nullmenge.

Abkürzungen: $(\mu\text{-})$ f.a. $x \in X$ bzw. $(\mu\text{-})$ f.ü.

12.28 Beispiel (a) $f \in \overline{\mathcal{L}^1} \implies f$ ist f.ü. endlich (Übung!), das heißt $\exists \mu$ -Nullmenge N mit $|f(x)| < \infty$ für alle $x \in X \setminus N$ (die Rückrichtung gilt nicht!)

(b) $f = g$ f.ü., das heißt $\exists \mu$ -Nullmenge N mit $f(x) = g(x) \forall x \in X \setminus N$.
Falls auch $g = h$ f.ü. $\implies f = h$ f.ü. (Das bedeutet „ $=$ f.ü.“ ist Äquivalenzrelation!)

12.29 Satz Sei $f \in E^*$. Dann gilt

$$\int f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ f.ü.}$$

NB: Für „ $\implies$ “ ist die Voraussetzung $f \geq 0$ wesentlich.

Beweis. „ $\implies$ “ Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{f > \frac{1}{n}\} \implies A_n \nearrow \{f > 0\}$. Mit der Stetigkeit von unten folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\{f > 0\}). \quad (\star)$$

$$\begin{aligned} \text{Da } f \geq 0, \text{ gilt } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ dass } \frac{1}{n} 1_{A_n} \leq f \implies 0 \leq \frac{1}{n} \mu(A_n) \leq \int f \, d\mu \stackrel{\text{n.V.}}{=} 0 \\ \stackrel{(\star)}{\implies} \mu(\{f > 0\}) = 0. \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “ $f \in E^* \stackrel{\text{Satz 12.8}}{\implies} \exists \text{ Folge } (f_n)_n \subset E \text{ mit } f_n \nearrow f$. Somit gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mu(\{f_n > 0\}) \leq \mu(\{f > 0\}) = 0 \stackrel{f_n \in E}{\implies} \int f_n \, d\mu = 0.$$

Die Behauptung folgt aus der Definition des Integrals. ■

(10)

12.30 Satz Seien $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $f = g$ μ -f.ü. Dann gilt

$$(a) \quad f, g \in E^* \implies \int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

$$(b) \quad f \in \overline{\mathcal{L}^1} \implies g \in \overline{\mathcal{L}^1} \text{ und } \int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

(Analog für $\mathbb{R}$ und $\mathcal{L}^1$.)

$$\text{Beweis. Es gilt } f - g = (f - g) 1_{\{f \neq g\}} = \underbrace{(f - g)_+ 1_{\{f \neq g\}}}_{=: h_+} - \underbrace{(f - g)_- 1_{\{f \neq g\}}}_{=: h_-}.$$

$$\text{N.V. ist } h_{\pm} \in E^* \text{ und } h_{\pm} = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.} \xrightarrow{\text{Satz 12.29}} h_{\pm} \in \overline{\mathcal{L}^1} \text{ mit } \int h_{\pm} \, d\mu = 0 \xrightarrow{\text{Kor. 12.25(b)}}$$

$$f - g \in \overline{\mathcal{L}^1} \quad \text{mit} \quad \int (f - g) \, d\mu = 0. \quad (*)$$

Zu (b): die Beh. folgt aus $g = f + (g - f)$, (*) und Korollar 12.25 (b).

Zu (a): falls $\int f \, d\mu < \infty$, folgt die Beh. aus (b). Falls $\int f \, d\mu = \infty$, gilt auch $\int g \, d\mu = \infty$, denn sonst wäre $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ und (b) – mit vertauschten Rollen von f und g – ergäbe den Widerspruch. ■

12.31 Korollar Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $|f| \leq g$ μ -f.ü. Dann gilt auch $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. (Analog für $\overline{\mathbb{R}}$ und $\overline{\mathcal{L}^1}$.)

Beweis. Setze $g' := |f| \vee g \implies g'$ messbar und $g' = g$ f.ü. $\xrightarrow{\text{Satz 12.30(b)}} g' \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Da $|f| \leq g'$ (überall!), folgt die Behauptung aus Satz 12.24. ■

12.5 Konvergenzbegriffe und Konvergenzsätze

Wie bisher liege stets ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zugrunde. Eine Verallgemeinerung der monotonen Konvergenz lernen wir nun im nächsten Satz kennen.

12.32 Satz Für all $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $f_n \leq f_{n+1}$. Sei $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ mit $g \leq f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ messbar nach Satz 12.6(d) und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

(Existenz der Integrale im Sinne von Bem. 12.22 (c), das heißt $\int f_+ \, d\mu \leq \infty$, $\int f_- \, d\mu < \infty$.)

Beweis. O.E. sei $g < \infty$ (sonst ändere g auf der Nullmenge $\{g = \infty\}$ zu 0 ab – dies verletzt keine Voraussetzung). O.E. gelte $\forall n \in \mathbb{N}$, dass $f_n > -\infty$ (denn sonst ändere auf der Menge $\{f_1 = -\infty\}$, die wegen $f_1 \geq g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ Nullmenge ist, alle f_n , und damit auch f zu 0 ab – dies verletzt keine Voraussetzung und ändert kein Integral). Setze $h_n := f_n - g \in E^*$, $n \in \mathbb{N}$, und $h := f - g \in E^*$

$$\begin{array}{ccc} h_n \nearrow h & & \lim_{n \rightarrow \infty} \int \underbrace{h_n}_{f_n - g} d\mu = \int h d\mu. \\ \uparrow \text{Satz 12.19 (mon. Kgz.)} & & \end{array}$$

Da $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ und $(f_n)_- \leq g_- \implies (f_n)_- \in \mathcal{L}^1 \implies \int f_n d\mu$ existiert nach Bemerkung 12.22 (c) und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int h d\mu + \int g d\mu. \quad (\star)$$

1. Fall: $\int h d\mu < \infty$. Also, $h \in \overline{\mathcal{L}^1}$. Dann ist

$$f = h + g \in \overline{\mathcal{L}^1} \quad \text{und} \quad \int f d\mu = \int h d\mu + \int g d\mu \xrightarrow{(\star)} \text{Beh.}$$

2. Fall: $\int h d\mu = \infty$. Da auch $g \leq f \implies f_- \leq g_-$, also $\int f_- d\mu < \infty$

$$\stackrel{h = f_+ - f_- - g}{\implies} \int f_+ d\mu = \infty \implies \infty = \int f d\mu = \int h d\mu + \int g d\mu \xrightarrow{(\star)} \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

Verzichtet man auf die Isotonie, so gilt immer noch das folgende Lemma von FATOU.

12.33 Satz (Lemma von FATOU) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $f_n \geq g$ für ein $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$. Dann gilt (wobei die Integrale wieder wie in Satz 12.32 zu verstehen sind)

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $g_m := \inf_{n \geq m} f_n$ messbar, $g \leq g_m \leq g_{m+1}$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m$ messbar

$$\implies \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \stackrel{\text{Satz 12.32}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m d\mu = \liminf_{m \rightarrow \infty} \int \underbrace{g_m}_{\leq f_m} d\mu \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int f_m d\mu. \quad \blacksquare$$

12.34 Bemerkung (a) Analog gilt für $f_n \leq g \in \overline{\mathcal{L}^1}$, $n \in \mathbb{N}$, (ersetze f_n durch $-f_n$ in Satz 12.33)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

(b) Auf die Bedingung $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ kann nicht verzichtet werden.

12.35 Definition Seien $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

- **Konvergenz (μ -) f.ü.**

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.ü.} f \iff \begin{cases} \exists N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N) = 0 : \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X \setminus N. \end{cases}$$

- **(μ -) stochastische Konvergenz (oder Konvergenz dem Maße nach)**

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f \iff \begin{cases} \forall A \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 : \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0. \end{cases}$$

Im Fall $\mu(X) < \infty$ genügt es $A = X$ zu betrachten.

- **Konvergenz in L^1 (-Norm)**

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0,$$

wobei $\|g\|_1 := \int_X |g| d\mu$ die **L^1 -Norm** bezeichnet.

12.36 Satz (Satz von der majorisierten Konvergenz von H. LEBESGUE) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{L}^1}$. Es gebe $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.ü.} f$ und es gebe $h \in \overline{\mathcal{L}^1}$ mit $|f_n| \leq h$ f.ü. für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ mit $\tilde{f} = f$ f.ü. und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \tilde{f} d\mu.$$

Ist f auch messbar, so folgt $f \in \overline{\mathcal{L}^1}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Sei $A := \{\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n\}$. Dann ist $A \in \mathcal{A}$ und auf A konvergiert $(f_n)_n$, zudem ist

$\mu(A^c) = 0$. Es gibt $\tilde{h} \in \overline{\mathcal{L}^1}$, $\tilde{h} = h$ f.ü. mit $|f_n| \leq \tilde{h}$ (überall!) für alle $n \in \mathbb{N}$.

Setze $\varphi := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n 1_A \implies$ messbar und $|\varphi| \leq \tilde{h} \xrightarrow{\text{Satz 12.24}} \varphi \in \overline{\mathcal{L}^1} \implies \exists \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ mit $\varphi = \tilde{f}$ f.ü.

Also gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \stackrel{\text{Bem. 12.34(a)}}{\leq} \int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \stackrel{\mu(A^c)=0}{=} \int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n 1_A d\mu = \int \varphi d\mu = \int \tilde{f} d\mu$$

$\uparrow$
 $f_n \leq \tilde{h}$

$$= \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n 1_A \, d\mu = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \stackrel{\substack{\text{Fatou} \\ \uparrow \\ f_n \geq -\tilde{h}}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \quad (*)$$

$$\liminf \dots \leq \limsup \dots \implies \text{in } (*) \text{ gilt überall Gleichheit} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu.$$

Zudem gibt es eine μ -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit $f 1_{N^c} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n 1_{N^c})$, wobei $N^c \subseteq A$ gelten muss.

Damit ist $f 1_{N^c} = \varphi 1_{N^c}$, also $f = \tilde{f}$ f.ü.

Zusatz: Falls f selbst messbar ist, folgt daraus und aus Satz 12.30(b) $\int f \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$. ■

12.37 Lemma (TSCHEBBYSCHEFF-MARKOV-Ungleichung) Sei $f \in E^*$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\mu(\{f \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int f \, d\mu.$$

Beweis. Es gilt

$$\mu(\{f \geq \varepsilon\}) = \frac{1}{\varepsilon} \int \underbrace{\varepsilon 1_{\{f \geq \varepsilon\}}}_{\leq f} \, d\mu. \quad \blacksquare$$

12.38 Satz Es gelten die Implikationen

$$\begin{array}{ccc} \text{Konvergenz-f.ü.} & \Downarrow & \text{Konvergenz dem Maße nach.} \\ & \nearrow & \\ \text{Konvergenz in } L^1 & & \end{array}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$.

„ $\Downarrow$ “ Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ beliebig fest. Nach Voraussetzung existiert $N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0$: $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \, \forall x \in X \setminus N$. Setze

$$C_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$

$$B_n := \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \geq n}} C_m = \{x \in X : \exists m \geq n \text{ mit } |f_m(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$

$$\implies B_n \searrow B \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ mit } B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq N$$

$$\implies 0 \leq \mu(A \cap C_n) \leq \mu(A \cap B_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{\uparrow \\ \text{Stetigkeit von oben}}} 0.$$

„ $\nearrow$ “ Aus der Tschebyscheff-Ungleichung mit $|f_n - f|$ folgt

$$\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \blacksquare$$

11

Warnung! In Satz 12.38 gelten weder die Umkehrungen „ $\Leftarrow$ “, „ $\nrightarrow$ “, noch gelten die Implikationen „ $\Uparrow$ “ oder „ $\Downarrow$ “. Hinsichtlich „ $\Downarrow$ “, siehe das folgende Beispiel; für „ $\Downarrow$ “ siehe Übung.

12.39 Beispiel $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$ und definiere $f_n := \frac{n}{2} 1_{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.ü.} 0$, aber $\|f_n - 0\|_1 = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist hier keine Limitenvertauschung erlaubt!

Für die Implikation „ $\Leftarrow$ “, und damit auch für „ $\Uparrow$ “, gibt es jedoch eine Abschwächung.

12.40 Satz Sei μ σ -endlich und seien $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f \iff \begin{cases} \forall \text{ Teilfolgen } (f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ von } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} \\ \text{mit } f_{n_{k_l}} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{f.ü.} f. \end{cases}$$

Obiger Satz gilt auch ohne die Voraussetzung der σ -Endlichkeit von μ , siehe z.B. BAUER. Wir benötigen diese nur für „ $\Rightarrow$ “.

Satz 12.40 und „ $\nrightarrow$ “ in Satz 12.38 ergeben

12.41 Korollar Unter den Voraussetzungen in Satz 12.40 gilt

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} f \implies \forall \text{ Teilfolgen } (f_{n_k})_k \text{ von } (f_n)_n \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_{k_l}})_l \text{ mit } f_{n_{k_l}} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{f.ü.} f.$$

Beweis von Satz 12.40. Sei ohne Einschränkung $f = 0$.

„ $\Leftarrow$ “ Angenommen: $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} 0 \implies \exists \varepsilon, \delta > 0 \exists A \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) < \infty \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} :$

$$\mu\left(\{x \in A : |f_{n_k}(x)| > \varepsilon\}\right) > \delta \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (\star)$$

Nach Voraussetzung hat $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine f.ü. konvergente Teilfolge $(f_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$. Aus Satz 12.38 folgt

$$f_{n_{k_l}} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{\mu} 0 \quad \nrightarrow \text{ zu } (\star).$$

„ $\Rightarrow$ “ Ohne Einschränkung genügt es zu zeigen

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} 0 \implies \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ von } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{f.ü.} 0, \quad (\star\star)$$

denn sei $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \implies f_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mu} 0 \xRightarrow{(\star\star)}$

$(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt eine f.ü. konvergente Teilfolge gegen 0.

Um (★★) zu zeigen, sei $X_l \in \mathcal{A}$, $\mu(X_l) < \infty$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und $X_l \nearrow X$ (σ -endlich!). Sei $l \in \mathbb{N}$ fix. Nach Voraussetzung gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_k$

$$\mu\left(\left\{x \in X_l : |f_n(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = \mu\left(\left\{|f_n| 1_{X_l} > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Ohne Einschränkung wähle daher n_k so, dass $n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Setze

$$A_k^l := \left\{|f_{n_k}| 1_{X_l} > \frac{1}{k}\right\} \quad \text{und} \quad A^l := \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N}: \\ k \geq j}} A_k^l.$$

(NB: $x \in A^l \iff x \in A_k^l$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.) Dann gilt

$$\begin{aligned} - x \notin A^l &\implies \underbrace{x \in X \setminus A_k^l}_{\iff |f_{n_k}(x) 1_{X_l}(x)| \leq \frac{1}{k}} \text{ für schließlich alle } k. \text{ Somit folgt } (f_{n_k} 1_{X_l})(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \\ - \forall j \in \mathbb{N} : \mu(A^l) &\leq \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N} : k \geq j} A_k^l\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \mu(A_k^l) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu(A^l) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch $A := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} A^l$ eine Nullmenge und für alle $x \in X \setminus A$ gilt

$$(f_{n_k} 1_{X_l})(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad \xRightarrow{\text{wähle } l, \text{ so dass } x \in X_l} f_{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

das heißt $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{f.ü.}} 0$. ■

Zum Schluss sei als Ausblick erwähnt, unter welchen Zusatzbedingungen aus der Konvergenz dem Maße nach auch die Konvergenz in L^1 folgt.

12.42 Definition Sei $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $(f_j)_{j \in J} \subset \mathcal{L}^1$.

$$(f_j)_{j \in J} \text{ gleichgradig integrierbar} \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists 0 \leq h \in \mathcal{L}^1 : \forall j \in J \\ \int |f_j| 1_{\{|f_j| \geq h\}} d\mu < \varepsilon. \end{cases}$$

12.43 Bemerkung In endlichen Maßräumen, insbesondere Wahrscheinlichkeitsräumen, kann die gleichgradige Integrierbarkeit auch äquivalent, aber kürzer definiert werden mittels

$$(f_j)_{j \in J} \text{ gleichgradig integrierbar} \iff \sup_{j \in J} \int |f_j| 1_{\{|f_j| \geq N\}} d\mu \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

12.44 Beispiel Sei $(f_j)_{j \in J} \subset \mathcal{L}^1$ und es gebe $g \in \mathcal{L}^1$ mit $|f_j| \leq g$ f.ü. $\forall j \in J$. Dann ist $(f_j)_{j \in J}$ gleichgradig integrierbar ist. Beweis: wähle z.B. $h = 2g$.

Insbesondere ist jede endliche Familie gleichgradig integrierbar.

Beweis: wähle oben $g := \max_{j \in J} |f_j| \in \mathcal{L}^1$.

12.45 Satz Seien $f, f_n \in \mathcal{L}^1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

- (i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.
- (ii) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} f$.

Beweis. Für den Beweis siehe z.B. BAUER. ■

12.46 Bemerkung (a) Sei $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.ü.}} f$ und $\exists g \in \mathcal{L}^1 \forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq g$ f.ü., so folgt aus Satz 12.38, Beispiel 12.44 und Satz 12.45 (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

- (b) Da $\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| d\mu \geq \left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right|$ ist (a) eine Verschärfung des Satzes der majorisierten Konvergenz 12.36. Wir beweisen (a) später auf eine andere Weise.

13

LEBESGUE-RÄUME und der Satz von RADON-NIKODÝM

Grundlegende Konzepte für verschiedene Zweige der Mathematik.

13.1 L^p als normierter Raum

Im Folgenden sei stets $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

13.1 Definition

- (a) • $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ **messbar** $\iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ messbar.
• $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ **(μ) -integrierbar** $\iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

In diesem Fall ist

$$\int f \, d\mu := \int \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int \operatorname{Im} f \, d\mu.$$

- (b) Für $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$ messbar und $p \in [1, \infty]$ heiÙe

$$\bullet \text{ } p\text{-Norm} \quad \|f\|_p := \begin{cases} \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| & \text{für } p = \infty, \end{cases}$$

- **(μ) -wesentliches Supremum**

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf \left\{ \alpha > 0 : \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0 \right\} = \inf_{\substack{N \in \mathcal{A} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)|$$

- (c) Für $p \in [1, \infty]$ heiÙe Menge der **p -fach integrierbaren Funktionen**

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X) := \mathcal{L}^p(X, \mu) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty \right\}.$$

13.2 Lemma (a) Alle bisherigen Eigenschaften des Integrals, die nicht von den Anordnungs-eigenschaften von $\mathbb{R}$ bzw. $\overline{\mathbb{R}}$ Gebrauch machen, gelten auch für komplexwertige Integranden.

(b) Zudem gilt für komplexwertige $f \in \mathcal{L}^1$ die Dreiecks-Ungleichung

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}^1$.

(a) Beispielsweise gilt für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, dass $\alpha \int f \, d\mu = \int \alpha f \, d\mu$ nach Korollar 12.25 und Zerlegung von α und f in Real- und Imaginärteil.

(b) Wähle $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, so dass

$$0 \leq \left| \int f \, d\mu \right| = \alpha \int f \, d\mu = \int \alpha f \, d\mu = \operatorname{Re} \int \alpha f \, d\mu = \int \underbrace{\operatorname{Re}(\alpha f)}_{\leq |\alpha f|} \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu. \quad \blacksquare$$

12

13.3 Satz Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gilt

(a) (**Verallgemeinerte**) **HÖLDER-Ungleichung**. Für alle $r, p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ gilt

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(b) **MINKOWSKI-Ungleichung**. Für alle $p \in [1, \infty]$ gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(c) Falls $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$, dann gilt für alle $f \in \mathcal{L}^q$

$$\|f\|_p \leq [\mu(X)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q \quad \text{und daher} \quad \mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p.$$

13.4 Bemerkung (a) $\|\cdot\|_p$ ist eine **Halbnorm** auf $\mathcal{L}^p$ ist, das heißt, es gilt

$$(i) \quad \|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$(ii) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

$\|\cdot\|$ ist keine Norm auf $\mathcal{L}^p$. Aus (i) folgt zwar $\|0\|_p = 0$, aber aus $\|f\|_p = 0$ nur $f \stackrel{\text{f.ü.}}{=} 0$.

(b) Die Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ ist wesentlich in (c). Zum Beispiel sei $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$. Dann folgt $f \equiv 1 \in \mathcal{L}^\infty$, aber $f \notin \mathcal{L}^p$ für alle $p \in [1, \infty[$.

Beweis. (a) Fall $r = 1$: analog zum Beweis von Satz 7.7(b) in Analysis II. Ersetze lediglich dort x durch f , x_j durch $f(x)$, y durch g , y_j durch $g(x)$ und $\sum_{j=1}^v$ durch $\int_X d\mu$.

Fall $r \in]1, \infty[$: aus $r = 1$ mittels $\tilde{p} := \frac{p}{r}$ und $\tilde{q} := \frac{q}{r}$, denn $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = r \cdot \frac{1}{r} = 1 \implies$

$$\begin{aligned} \|fg\|_r &= (\| |f|^r |g|^r \|_1)^{\frac{1}{r}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hölder für } r=1}}{\leq} (\| |f|^r \|_{\tilde{p}} \| |g|^r \|_{\tilde{q}})^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int |f|^{\frac{p}{r}} d\mu \right)^{\frac{1}{r} \frac{r}{p}} \left(\int |g|^{\frac{q}{r}} d\mu \right)^{\frac{1}{r} \frac{r}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Fall $r = \infty$: $\implies p, q = \infty$ und $\forall N_1, N_2 \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ gilt

$$\|fg\|_\infty \leq \sup_{x \in X \setminus (N_1 \cup N_2)} |f(x)g(x)| \leq \left(\sup_{x \in X \setminus N_1} |f(x)| \right) \left(\sup_{x \in X \setminus N_2} |g(x)| \right) \xrightarrow{\inf_{N_1, N_2} \text{Beh. (*)}} \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

(b) Falls $p = \infty$: analog zu (*). Falls $1 \leq p < \infty$, gilt

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (\|f\|_p + \|g\|_p) \| |f + g|^{p-1} \|_q \stackrel{q(p-1)=p}{=} (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung, außer $f + g = 0$ f.ü. Aber in letzterem Fall gilt die Minkowski-Ungleichung offensichtlich.

(c) Der Fall $p = q$ ist klar. Sei also $1 \leq p < q \leq \infty$. Aus (a) mit $r = p$ und $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ folgt

$$\|f\|_p = \|1 \cdot f\|_p \leq \underbrace{\|1\|_{p'}}_{[\mu(X)]^{\frac{1}{p'}}} \|f\|_q = [\mu(X)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

Insbesondere gilt $f \in \mathcal{L}^q \implies f \in \mathcal{L}^p$. ■

13.5 Korollar Sei $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Dann gilt: zu jedem $f \in \mathcal{L}^p$ existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^q$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Beweis. Wegen Satz 13.3(c) genügt es zu den Fall $q = \infty$ und $p < \infty$ zu betrachten. Sei also $f \in \mathcal{L}^p$ für ein $p \in [1, \infty[$. Ohne Einschränkung sei $f \geq 0$ (ansonsten zerlege f in Re, Im und +, - Anteile). Setze $f_n := \min(f, n) \in \mathcal{L}^\infty$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_p^p &= \int_X |f - \min(f, n)|^p d\mu = \int_{\{f > n\}} (f - \min(f, n))^p d\mu \leq \int_{\{f > n\}} f^p d\mu \\ &= \int_X f^p d\mu - \int_{\{f \leq n\}} f^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

gemäß monotoner Konvergenz. ■

13.6 Definition Seien $p \in [1, \infty]$, $f, g \in \mathcal{L}^p$.

- Äquivalenzrelation auf $\mathcal{L}^p$: $f \sim g : \Longleftrightarrow f = g$ f.ü.
- Äquivalenzklasse $[f] := \{h \in \mathcal{L}^p : h = f \text{ f.ü.}\} \subseteq \mathcal{L}^p$
- **Lebesgue-Raum** $L^p := L^p(\mu) := L^p(X) := L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p / \sim = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p\}$
Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|_p$, wobei $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ (wohldefiniert auf L^p nach Satz 12.29)
- Für $p = 2$ wird $\|\cdot\|_2$ induziert von dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2 \times L^2 \rightarrow \mathbb{K}$, wobei

$$\langle [f], [g] \rangle := \int \overline{f} g \, d\mu = \int \overline{f(x)} g(x) \, d\mu(x).$$

13.7 Konvention (a) Statt $[f]$ ist es üblich nur f zu schreiben. (Ab sofort!)

(b) Wir sagen

$$f \in L^p \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{E} : \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall \text{ Repräsentanten } g \text{ der Äquivalenzklasse } f \text{ gilt:} \\ g \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{E} \text{ f.ü.} \end{cases}$$

Der nächste Satz verschärft den Satz 12.36 von den majorisierten Konvergenz, siehe auch Bemerkung 12.46.

13.8 Satz (Majorisierte Konvergenz – L^p -Version) Sei $p \in [1, \infty[$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ existiert punktweise (das heißt punktweise f.ü. für eine beliebige Wahl eines Repräsentanten). Es gebe $g \in L^p$ mit $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (das heißt „ $\leq$ “ f.ü. für bel. Repräsentanten). Dann ist

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in L^p \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Beweis. Gemäß Konvention 13.7(a) keine Unterscheidung in der Notation zwischen Repräsentanten und Äquivalenzklassen!

Sei $N \in \mathcal{A}$ die Nullmenge, außerhalb der [die Folge der Repräsentanten] $(f_n)_n$ konvergiert. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N, \end{cases}$$

so ist f messbar und für fast alle $x \in X$ gilt $|f(x)|^p \leq g(x)^p \in \mathcal{L}^1$ [Repräsentanten!]. Aus Korollar 12.31 folgt $|f|^p \in \mathcal{L}^1$ [Repräsentant!], also $f \in L^p$ [Äquivalenzklasse!]. Betrachte $h_n := |f - f_n|^p$. Für [die Repräsentanten] $h_n \in \mathcal{L}^1$ gilt

- $h_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.ü.}} 0$,
- $0 \leq h_n \leq \underbrace{(|f| + |f_n|)^p}_{\leq g} \leq \underbrace{2^p g^p}_{\substack{\uparrow \\ \text{f.ü.}}} \in \mathcal{L}^1$.

Somit gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n \, d\mu \stackrel{\text{Satz 12.36 (maj. Kgz.)}}{=} 0$. ■

13.2 Vollständigkeit von L^p

Zur Vorbereitung benötigen wir ein Kriterium für die Konvergenz bestimmter Reihen in L^p .

13.9 Lemma Sei $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$, $f_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \in L^p.$$

Beweis. Da $f_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies$

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right)^p = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N f_n \right)^p \in E^*,$$

wobei der Limes wegen Isotonie in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert. Somit haben wir

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right\|_p \overset{\substack{= \\ \text{Monotone} \\ \text{Konvergenz}}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\left\| \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p}_{\substack{\text{Minkowski} \\ \leq \sum_{n=1}^N \|f_n\|_p}} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty. \quad \blacksquare$$

13.10 Satz (RIESZ-FISCHER) Für alle $p \in [1, \infty]$ ist L^p ein Banach-Raum. Insbesondere ist L^2 ein Hilbert-Raum.

Beweis. Nur die Vollständigkeit bezüglich $\|\cdot\|_p$ ist noch zu zeigen.

Für den Fall $p = \infty$, siehe Übung. Wir beweisen hier den Fall $p \in [1, \infty[$. Sei also $(f_n)_n \subset L^p$ Cauchy.

0. Schritt: Zeige: $\exists$ Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist Cauchy für fast alle $x \in X$.

N.V. $\exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit $n_k < n_{k+1} \ \forall k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\star)$$

Setze $h := |f_{n_1}| + \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \xRightarrow[\text{Lemma 13.9 und } (\star)]{} \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^p$ und $h \in L^p$.

Somit gilt für fast alle $x \in X$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty.$$

Für alle $k, k' \in \mathbb{N}$ mit $k \leq k'$ gilt damit

$$|f_{n_{k'}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{j=k}^{k'-1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} \ \forall k \geq K \ \forall k' \geq k : |f_{n_{k'}}(x) - f_{n_k}(x)| < \varepsilon. \quad \checkmark$

1. Schritt: Verwende die Vollständigkeit von $\mathbb{K}$, um einen Kandidaten für den gesuchten Grenzwert zu konstruieren.

Aus dem 0. Schritt und der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ folgt, dass es eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, gibt, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1_{X \setminus N}(x) f_{n_k}(x)) =: f(x)$$

für alle $x \in X$ existiert und eine messbare Funktion f definiert (setze z.B. $f = 0$ auf N).

2. Schritt: Zeige $f \in L^p$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ und somit $|f_{n_k}| \leq h \in L^p$. Mit

1. Schritt und Satz 13.8 (major. Kgz.) folgt $f \in L^p$ und $\|f - f_{n_k}\|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, also auch $\|f - f_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, denn Cauchy-Folgen mit einer konvergenten Teilfolge sind konvergent. ■

13.3 Dichte Unterräume von L^p

13

13.11 Bemerkung Falls $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$, folgt aus Korollar 13.5, dass L^q ein dichter Unterraum von L^p ist.

In diesem Unterkapitel geht es um Dichtheit von Unterräumen stetiger Funktionen im Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$.

13.12 Definition Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ messbar.

- **Wesentlicher Träger** $\text{ess supp } f := \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{\substack{A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen :} \\ \lambda^d(\{x \in A : f(x) \neq 0\}) = 0}} A$.
- **(topologischer) Träger** $\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}$.
- **Vektorräume $\mathbb{K}$ -wertiger, stetiger bzw. differenzierbarer Funktionen über $\mathbb{R}^d$:**

$$C(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ stetig}\}.$$

$$C^k(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ } k\text{-mal stetig partiell diff.-bar}\}, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

$$C^\infty(\mathbb{R}^d) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\mathbb{R}^d) \quad \text{beliebig oft differenzierbare Funktionen.}$$

$$C_c(\mathbb{R}^d) := \{f \in C(\mathbb{R}^d) : \text{supp } f \text{ kompakt}\}.$$

$$C_c^k(\mathbb{R}^d) := \{f \in C^k(\mathbb{R}^d) : \text{supp } f \text{ kompakt}\} \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}).$$

Beispiel Sei $d = 1$, $f = 1_{\mathbb{Q}}$, so gilt

$$\begin{aligned} \text{ess supp } f &= \emptyset \quad (\text{da } f = 0 \text{ } \lambda\text{-f.ü. in } \mathbb{R}), \\ \text{supp } f &= \mathbb{R} \quad (\text{da } \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}). \end{aligned}$$

13.13 Lemma (a) Für $f \in C(\mathbb{R}^d)$ gilt $\text{supp } f = \text{ess supp } f$.

(b) Für alle $p \in [1, \infty]$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset C_c^k(\mathbb{R}^d) \subset C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d). \\ \uparrow \\ \text{identifiziere } f \in C_c(\mathbb{R}^d) \text{ mit} \\ [f] = \{g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) : g = f \text{ f.ü.}\} \in L^p \end{aligned}$$

Beweis. Siehe Übung. ■

13.14 Satz Für alle $p \in [1, \infty[$ gilt

$$C_c(\mathbb{R}^d) \text{ ist dicht in } L^p(\mathbb{R}^d) \text{ bezüglich } \|\cdot\|_p.$$

Beweis. Zu zeigen: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d) \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C_c(\mathbb{R}^d) :$

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Ohne Einschränkung reicht es, dies für $f \geq 0$ zu zeigen (sonst zerlege f in $(\text{Re } f)_\pm$ und $(\text{Im } f)_\pm$).
Ohne Einschränkung darf man auch noch $\text{supp } f$ kompakt annehmen, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\| f 1_{[-n,n]^d} - f \right\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gemäß majorisierter Konvergenz 13.8.

Sei also $\varepsilon > 0$ und $0 \leq f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{supp } f$ kompakt. Da $f \in E^*$, gibt es eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ mit $\varphi_n \nearrow f$. Insbesondere gilt demnach $\text{supp } \varphi_n \subseteq \text{supp } f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach majorisierter Konvergenz, Satz 13.8, folgt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: \underbrace{\|f - \varphi_n\|_p}_{\leq f \in L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon. \quad (\star)$$

Die Elementarfunktionen sind dabei von der Form $\varphi_n = \sum_{j=1}^J \underbrace{\alpha_j}_{>0} \underbrace{1_{A_j}}_{\in \mathcal{B}^d \text{ beschränkt}}$.

Behauptung. $\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \forall A \in \mathcal{B}^d \text{ beschränkt} \exists h \in C_c(\mathbb{R}^d) \text{ mit } \|1_A - h\|_p < \tilde{\varepsilon}$. (Beweis später).

Aus der Behauptung folgt, dass es zu jedem $j \in \{1, \dots, J\}$ ein $h_j \in C_c(\mathbb{R}^d)$ gibt mit

$$\|1_{A_j} - h_j\|_p < \frac{\varepsilon}{J\alpha_j}.$$

Daraus folgt mit $h := \sum_{j=1}^J \alpha_j h_j \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und $(\star)$, dass

$$\|f - h\|_p \leq \|f - \varphi_n\|_p + \sum_{j=1}^J \alpha_j \|1_{A_j} - h_j\|_p < 2\varepsilon,$$

und hieraus der Satz. Es verbleibt der

Beweis der Behauptung. Sei also $\tilde{\varepsilon} > 0$ und $A \in \mathcal{B}^d$ beschränkt. Wegen der Regularität von λ^d , Satz 11.42, gibt es ein $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und ein $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $K \subseteq A \subseteq U$ und $\lambda^d(U \setminus K) < \tilde{\varepsilon}^p$. Da A beschränkt ist, lässt sich hierbei o.E. U als beschränkt wählen (sonst schneide U mit einer offenen Kugel, die A enthält).

1. Fall: $K = \emptyset$. Wähle $h = 0 \implies \|1_A - h\|_p = \|1_A\|_p \leq (\lambda^d(U))^{\frac{1}{p}} < \tilde{\varepsilon}$.

2. Fall: $K \neq \emptyset$. Die Funktion $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \text{dist}(x, U^c) \end{array}$ ist stetig, denn für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\text{dist}(\tilde{x}, U^c) = \inf_{y \in U^c} |\tilde{x} - y| \leq |x - \tilde{x}| + \text{dist}(x, U^c) \\ \leq |\tilde{x} - x| + |x - y|$$

und eine Wiederholung des Arguments mit der Vertauschung $x \leftrightarrow \tilde{x}$ liefert

$$|\text{dist}(x, U^c) - \text{dist}(\tilde{x}, U^c)| \leq |x - \tilde{x}|. \quad \checkmark$$

Da U offen, gilt $\forall x \in U \exists \delta_x > 0 : B_{\delta_x}(x) \subseteq U \implies \text{dist}(x, U^c) \geq \delta_x > 0$. Da stetige Funktionen auf einem Kompaktum ihr Minimum annehmen, Satz 7.54, erhalten wir zudem $\text{dist}(K, U^c) := \inf_{x \in K} \text{dist}(x, U^c) > 0$. Schließlich setze

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & [0, 1] \\ x & \mapsto & \min \left\{ 1, \frac{\text{dist}(x, U^c)}{\text{dist}(K, U^c)} \right\}. \end{array}$$

Es gilt $h|_K = 1$ und $h|_{U^c} = 0$, sowie $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$, denn $\text{supp } h = \overline{U}$ ist kompakt (da U beschränkt). Die Behauptung folgt dann aus

$$\underbrace{\|1_A - h\|_p}_{(1_A - h)|_{U \setminus K}} \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\|1_A - h\|_\infty}_{\leq 1} \underbrace{\|1_{U \setminus K}\|_p}_{[\lambda^d(U \setminus K)]^{\frac{1}{p}}} < \tilde{\varepsilon}. \quad \blacksquare$$

13.15 Bemerkung (a) $C_c(\mathbb{R}^d)$ ist nicht dicht in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(b) Mit Hilfe des Approximationssatzes von WEIERSTRASS kann man zeigen, dass $C_c(\mathbb{R}^d)$ eine abzählbare dichte Teilmenge bezüglich $\|\cdot\|_p$ besitzt für alle $p \in [1, \infty]$, also ist $C_c(\mathbb{R}^d)$ ein separabler normierter Raum bzgl. $\|\cdot\|_p$. Damit folgt aus Satz 13.14, dass auch $L^p(\mathbb{R}^d)$ separabel ist für alle $p \in [1, \infty[$.

(c) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dicht bezüglich $\|\cdot\|_p$ in $C_c(\mathbb{R}^d)$ ist für alle $p \in [1, \infty]$ (siehe Übung). Damit ist auch $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ für alle $p \in [1, \infty[$.

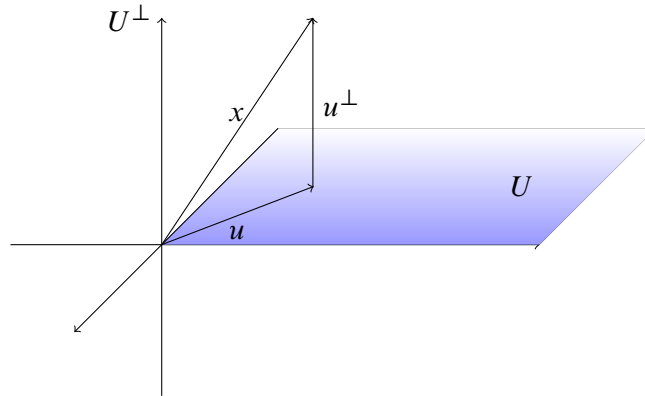


Abbildung 13.1: Illustration von Lemma 13.18

- (d) Gemäß Satz 13.14 und (c) ist weder $C_c(\mathbb{R}^d)$ noch $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ abgeschlossen bezüglich $\|\cdot\|_p$ für $p \in [1, \infty[$. Da endlich-dimensionale Unterräume stets abgeschlossen sind, folgt, dass $\dim C_c(\mathbb{R}^d) = \dim C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \infty$.

13.4 Geometrie in Hilbert-Räumen

Für dieses Unterkapitel sei $\mathcal{H}$ stets ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und davon induzierter Norm $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \forall x \in \mathcal{H}$.

13.16 Definition Sei $U \subseteq \mathcal{H}$ (nicht notwendigerweise ein Unterraum). Dann nennen wir

$$U^\perp := \{y \in \mathcal{H} : \langle y, x \rangle = 0 \forall x \in U\}$$

das **orthogonale Komplement** von U .

13.17 Bemerkung (a) $U^\perp$ ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{H}$.

(b) $U \cap U^\perp = \{0\} \cap U$.

Denn sei $x \in U \cap U^\perp \implies 0 = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \implies x = 0$.

13.18 Lemma Sei $U \subseteq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum und $x \in \mathcal{H}$. Dann gilt:

$$\exists_1 u \in U \exists_1 u^\perp \in U^\perp : x = u + u^\perp.$$

Beweis. Sei $x \in \mathcal{H}$, dann existiert eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \inf_{y \in U} \|x - y\| =: \delta \geq 0. \quad (1)$$

1. Schritt: zeige $\exists u \in U : y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$ für $n \rightarrow \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Aus (1) folgt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \|x - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \varepsilon^2 \quad (2)$$

Parallelogrammidentität einer von einem Skalarprodukt induzierten Norm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2) &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + \frac{1}{2} (\langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle - \langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle) \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 \quad \forall a, b \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Damit folgt für $a := x - y_n, b := x - y_m, m, n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y_m - y_n\|^2 &= \|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 - \underbrace{\frac{1}{2} 4 \left\| x - \underbrace{\frac{y_m + y_n}{2}}_{\substack{\in U \text{ (Unterraum!)}} \right\|^2}_{\geq \delta^2}} \\ &\stackrel{(2)}{\leq} 2\varepsilon^2 \\ &\uparrow \\ &\forall m, n \geq n_0 \end{aligned}$$

$$\implies (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U \text{ ist Cauchy-Folge} \xrightarrow{\mathcal{H} \text{ vollst.}} \exists u \in \mathcal{H} : y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u \xrightarrow{U \text{ abgeschlossen}} u \in U.$$

2. Schritt: zeige $u^\perp := x - u \in U^\perp$. Für beliebiges $u' \in U$ betrachte die Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) := \|x - \underbrace{u - t \cdot u'}_{\in U}\|^2 = \|u^\perp\|^2 + t^2 \|u'\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle u^\perp, u' \rangle.$$

Per Def. von u ist $t = 0$ eine globale Minimalstelle der differenzierbaren Funktion $f \implies$

$$0 = \frac{d}{dt} f \Big|_{t=0} = -2 \operatorname{Re} \langle u^\perp, u' \rangle.$$

Analog folgt für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ durch Betrachtung von $t \mapsto f(it)$, dass auch $\operatorname{Im} \langle u^\perp, u' \rangle = 0$.

Wir haben damit

$$\langle u^\perp, u' \rangle = 0 \quad \forall u' \in U \implies u^\perp \in U^\perp.$$

3. Schritt: Eindeutigkeit. Seien $u_1 + u_1^\perp = x = u_2 + u_2^\perp \implies$

$$\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{u_2^\perp - u_1^\perp}_{\in U^\perp} \xrightarrow{\text{Bem. 13.17(b)}} u_1 = u_2 \text{ und } u_1^\perp = u_2^\perp.$$

■

13.19 Satz (RIESZ-Darstellung stetiger linearer Funktional) Sei $\ell : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ stetig und linear¹. Dann existiert genau ein $x_\ell \in \mathcal{H}$, so dass $\ell = \langle x_\ell, \cdot \rangle$, d.h.

$$\ell(x) = \langle x_\ell, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

¹Zur Erinnerung: $\ell(\alpha x + \beta y) = \alpha \ell(x) + \beta \ell(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$.

Beweis. Sei $U := \ker \ell = \{x \in \mathcal{H} : \ell(x) = 0\} = \ell^{-1}(\{0\})$, so ist U ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$, da ℓ stetig ist. Ohne Einschränkung sei $\ell \neq 0$ (sonst gilt der Satz mit $x_\ell = 0$). Somit gilt

$$U \subsetneq \mathcal{H} \implies \exists y \in \mathcal{H} \setminus U \xRightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 13.18}}} y = \underbrace{u}_U + \underbrace{u^\perp}_{U^\perp} \text{ und } u^\perp \neq 0.$$

Sei $v := \frac{u^\perp}{\|u^\perp\|} \implies \ell(v) = \frac{1}{\|u^\perp\|} \ell(u^\perp) \neq 0$ (sonst wäre $u^\perp \in U$). Damit gilt für alle $x \in \mathcal{H}$

$$x - \frac{\ell(x)}{\ell(v)} v \in U \xRightarrow{v \in U^\perp} 0 = \left\langle v, x - \frac{\ell(x)}{\ell(v)} v \right\rangle = \langle v, x \rangle - \frac{\ell(x)}{\ell(v)} \underbrace{\|v\|^2}_{=1}$$

$\implies \ell(x) = \langle x_\ell, x \rangle$ mit $x_\ell := \overline{\ell(v)} v \in \mathcal{H}$.

Zur Eindeutigkeit: es gelte $\langle x_\ell^1, x \rangle = \ell(x) = \langle x_\ell^2, x \rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$, also

$$\langle x_\ell^1 - x_\ell^2, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Mit der Wahl $x := x_\ell^1 - x_\ell^2$ folgt daraus $x_\ell^1 = x_\ell^2$. ■

13.5 Satz von RADON-NIKODÝM

Ab jetzt ist wieder $(X, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum.

13.20 Definition Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$.

(a) ν heißt **absolut stetig bezüglich** μ $:\iff \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$

Notation: $\nu \ll \mu$

(b) ν **hat eine Dichte bezüglich** μ $:\iff \exists f \in E^* \forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int_A f \, d\mu$

Notation: $f := \frac{d\nu}{d\mu}$

f heißt **μ -Dichte** von ν bzw.

Radon-Nikodým-Ableitung von ν bezüglich μ

13.21 Bemerkung Die Radon-Nikodým-Ableitung ist eindeutig bis auf Gleichheit μ -fast überall.

13.22 Satz (RADON-NIKODÝM) Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$. Dann gilt

(a) ν hat eine μ -Dichte $\frac{d\nu}{d\mu} \implies \nu \ll \mu$.

(b) Falls μ σ -endlich ist, gilt auch

$$\nu \ll \mu \implies \nu \text{ hat } \mu\text{-Dichte } \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Beweis. (a) Aussage ist klar, da für $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0 \implies f \cdot 1_A = 0$ μ -f.ü. $\implies \nu(A) = 0$.

(b) Wir beweisen nur den Spezialfall von endlichen Maßen μ und ν . [Achtung: selbst wenn μ endlich ist, braucht ν nicht einmal σ -endlich zu sein! Siehe z.B. ELSTRODT, Kapitel VII.2, oder BAUER für die Verallgemeinerung auf (zuerst) beliebiges ν und (danach) auf σ -endliches μ]. Betrachte das endliche Maß

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto \eta(A) := \mu(A) + \nu(A).$$

Es gilt $L^2(\eta) := L^2(X, \eta) \subseteq L^2(\nu) \subseteq L^1(\nu)$. Die Abbildung
 $\uparrow$
 ν endlich, Bem. 13.11

$$\begin{aligned} L^2(\eta) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \ell : f &\mapsto \ell(f) := \int f \, d\nu \end{aligned}$$

ist demnach ein wohldefiniertes, stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{H} = L^2(\eta)$, wobei die Stetigkeit aus der Abschätzung

$$|\ell(f)| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int f^2 \, d\nu \right)^{\frac{1}{2}} [\nu(X)]^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2(\eta)} [\nu(X)]^{\frac{1}{2}}$$

gemäß $|\ell(f_n) - \ell(f)| = |\ell(f_n - f)| \leq [\nu(X)]^{\frac{1}{2}} \|f_n - f\|_{L^2(\eta)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\eta)} f$ folgt. Somit gibt es eine Riesz-Darstellung nach Satz 13.19

$$\exists_1 f_0 \in L^2(\eta) \, \forall f \in L^2(\eta): \ell(f) = \langle \overline{f_0}, f \rangle_{L^2(\eta)} = \int f_0 f \, d\eta, \quad (1)$$

also

$$\int f f_0 \, d\mu = \int f(1 - f_0) \, d\nu \quad \forall f \in L^2(\eta). \quad (2)$$

Idee: Dürften wir in (2) die Wahl $f = 1_A \frac{1}{1-f_0}$ mit $A \in \mathcal{A}$ vornehmen, so erhielten wir $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f_0}{1-f_0}$. Um dieses Vorgehen zu rechtfertigen, werden wir zunächst (2) auch für $f \in E^*$ etablieren. Vorbereitend dafür beobachten wir

- $f_0 \geq 0$ η -f.ü., denn $\forall A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\int_A f_0 \, d\eta \stackrel{(1)}{=} \ell(1_A) = \nu(A) \geq 0, \quad (3)$$

also insbesondere für $A = A_- := \{f_0 < 0\}$ gilt wegen $f_0 \cdot 1_{A_-} = -(f_0)_-$

$$0 \leq \int (f_0)_- \, d\eta \stackrel{(3)}{=} -\nu(A_-) \leq 0,$$

so dass die Behauptung mit Satz 12.29 folgt.

- $1 - f_0 \geq 0$ η -f.ü., denn $\forall A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\int_A (1 - f_0) d\eta \stackrel{(3)}{=} \eta(A) - \nu(A) = \mu(A) \geq 0$$

und die Behauptung folgt wie oben durch Wahl von $A = \{1 - f_0 < 0\}$.

Es gibt deshalb einen Repräsentanten von $f_0 \in L^2(\eta)$, den wir wieder mit f_0 bezeichnen(!), mit

$$0 \leq f_0(x) \leq 1 \quad \forall x \in X.$$

Wegen der Endlichkeit von μ und ν , und damit von η , folgt $E \subset L^2(\eta)$. Also gilt (2) für jede Elementarfunktion f . Wegen $0 \leq f_0 \leq 1$ und monotoner Konvergenz gilt (2) dann auch für jedes $f \in E^*$.

Mit $X_1 := \{f_0 = 1\} \in \mathcal{A}$ gilt

- (i) $\nu(X_1) = \mu(X_1) = 0$ wegen $\nu \ll \mu$ und (2) mit $f = 1_{X_1} \in E^*$.

- (ii) $\nu(A') = \int_{A'} \frac{f_0}{1 - f_0} d\mu \quad \forall A' \subseteq X_1^c, A' \in \mathcal{A}$, wegen (2) mit $f = 1_{A'} \frac{1}{1 - f_0} \in E^*$.

Wir erhalten so für beliebiges $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu(A) &\stackrel{(i)}{=} \nu(A \cap X_1^c) \stackrel{(ii)}{=} \int_{A \cap X_1^c} \frac{f_0}{1 - f_0} d\mu = \int_A \underbrace{1_{X_1^c} \frac{f_0}{1 - f_0}}_{=: \frac{d\nu}{d\mu} \in E^*} d\mu. \end{aligned}$$

■

Produktmaße und der Satz von FUBINI

Ziel dieses Abschnitts ist der Umgang mit Mehrfach- und iterierten Integralen.

14.1 Produkt- σ -Algebren

14.1 Definition Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$ Messräume für $j \in \{1, \dots, n\}$, $X := \prod_{j=1}^n X_j$ das kartesische Produkt und für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$p_j : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X_j \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_j \end{array}$$

die Projektion auf die j -te Koordinate. Die **Produkt- σ -Algebra**

$$\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{A}_j := \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \sigma(p_1, \dots, p_n)$$

ist die kleinste σ -Algebra auf X , bezüglich der alle p_j messbar sind.

14.2 Satz Für $j \in \{1, \dots, n\}$ sei $\mathcal{E}_j$ der Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ in X_j . Zudem gebe es $(E_j^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_j$ mit $E_j^k \nearrow X_j$ für $k \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma\left(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_j \in \mathcal{E}_j \text{ für alle } j = 1, \dots, n\}\right)$$

Beweis. „ $\subseteq$ “ Sei $\tilde{\mathcal{A}} := \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_l \in \mathcal{E}_l \forall l\})$. Zeige: für alle $j = 1, \dots, n$ ist p_j $\tilde{\mathcal{A}}$ - $\mathcal{A}_j$ -messbar. O.E. sei $j = 1$. Es gilt für $A_1 \in \mathcal{E}_1$, dass

$$p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \stackrel{\text{n.V.}}{=} \bigcup_{k_2 \in \mathbb{N}} \dots \bigcup_{k_n \in \mathbb{N}} \underbrace{A_1 \times E_2^{k_2} \times \dots \times E_n^{k_n}}_{\in \tilde{\mathcal{A}}} \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Da $\mathcal{E}_1$ Erzeuger von $\mathcal{A}_1$ ist, folgt die Behauptung mit Satz 12.4 (a).

„ $\supseteq$ “ $A_1 \times \dots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(A_n) \in \sigma(p_1, \dots, p_n)$ für alle $A_j \in \mathcal{E}_j$, $j = 1, \dots, n$. ■

14.3 Bemerkung Die Voraussetzung $E_j^k \nearrow X_j$ für $k \rightarrow \infty$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ ist wesentlich, siehe Übung.

14.4 Beispiel Für die Borel- σ -Algebra in $\mathbb{R}^d$ gilt $\mathcal{B}^d = \underbrace{\mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}}_{d\text{-Faktoren}}$, da

$$\mathcal{B}^d = \sigma\left(\left\{\bigotimes_{j=1}^d [a_j, b_j[: a_j \leq b_j\right\}\right), \quad \mathcal{B} = \sigma(\{[a, b[: a \leq b\})$$

und $[-n, n[\nearrow \mathbb{R}$ für $n \rightarrow \infty$.

(15)

14.5 Lemma (Assoziativität) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Identifiziert man

$$\left(\bigotimes_{j=1}^m X_j\right) \times \left(\bigotimes_{j=m+1}^n X_j\right) = \bigotimes_{j=1}^n X_j$$

vermöge der Bijektion $J : ((x_1, \dots, x_m), (x_{m+1}, \dots, x_n)) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$, so gilt

$$\left(\bigotimes_{j=1}^m \mathcal{A}_j\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=m+1}^n \mathcal{A}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{A}_j.$$

Beweis. Mit Satz 14.2 folgt

$$\begin{aligned} \sigma\left(\underbrace{\{A_1 \times \dots \times A_m : A_j \in \mathcal{A}_j \text{ für } j = 1, \dots, m\}}_{=: \mathcal{E}_1}\right) &= \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_m, \\ \sigma\left(\underbrace{\{A_{m+1} \times \dots \times A_n : A_j \in \mathcal{A}_j \text{ für } j = m+1, \dots, n\}}_{=: \mathcal{E}_2}\right) &= \mathcal{A}_{m+1} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n. \end{aligned}$$

Erneute Anwendung von Satz 14.2 (diesmal mit $n = 2$) ergibt

$$\sigma\left(\underbrace{\{E_1 \times E_2 : E_j \in \mathcal{E}_j \text{ für } j = 1, 2\}}_{\mathcal{E}}\right) = (\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_m) \otimes (\mathcal{A}_{m+1} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n). \quad (1)$$

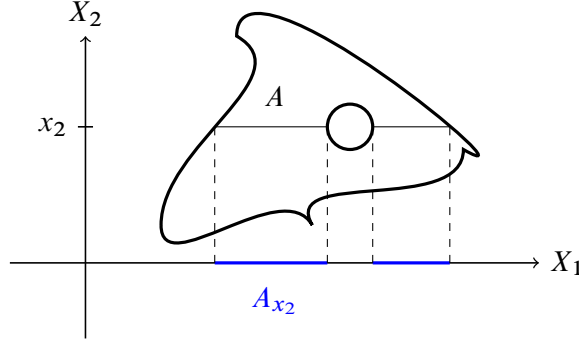
Gemäß der durch J induzierten Identifikation der Produkträume gilt

$$\mathcal{E} = \{A_1 \times \dots \times A_n : A_j \in \mathcal{A}_j \text{ für } j = 1, \dots, n\}, \quad (2)$$

und eine letzte Anwendung von Satz 14.2 ergibt

$$\sigma\left(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_j \in \mathcal{A}_j \text{ für } j = 1, \dots, n\}\right) = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n. \quad (3)$$

Die Behauptung folgt aus (1) – (3). ■

Abbildung 14.1: Illustration eines x_2 -Schnitts.

14.2 Produktmaße

Zunächst betrachten wir nur den Fall $n = 2$, also zwei Messräume $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$.

14.6 Definition Seien $A \subseteq X_1 \times X_2, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$, so sind

$$A_{x_1} := \{x'_2 \in X_2 : (x_1, x'_2) \in A\} \subseteq X_2 \quad \text{bzw.} \quad A_{x_2} := \{x'_1 \in X_1 : (x'_1, x_2) \in A\} \subseteq X_1$$

die x_1 - bzw. x_2 -Schnitte von A .

14.7 Lemma Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Dann gilt

$$A_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \quad \text{und} \quad A_{x_2} \in \mathcal{A}_1.$$

Beweis. Wir beweisen dies nur für x_2 -Schnitte, für x_1 -Schnitte verläuft es analog.

Sei $x_2 \in X_2$ und $\tilde{\mathcal{A}} := \{Q \subseteq X_1 \times X_2 : \underbrace{Q_{x_2}}_{=:X} \in \mathcal{A}_1\}$. Dann gilt $X \in \tilde{\mathcal{A}}$ sowie

- $Q \in \tilde{\mathcal{A}} \implies (X \setminus Q)_{x_2} = X_1 \setminus \underbrace{Q_{x_2}}_{\in \mathcal{A}_1 \text{ n.V.}} \in \mathcal{A}_1 \implies X \setminus Q \in \tilde{\mathcal{A}},$
- $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset \tilde{\mathcal{A}} \implies \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{(k)} \right)_{x_2} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{A_{x_2}^{(k)}}_{\in \mathcal{A}_1} \in \mathcal{A}_1 \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{(k)} \in \tilde{\mathcal{A}},$

also ist $\tilde{\mathcal{A}}$ eine σ -Algebra auf X . Außerdem ist

$$(A_1 \times A_2)_{x_2} = \begin{cases} A_1, & x_2 \in A_2, \\ \emptyset, & x_2 \notin A_2, \end{cases}$$

und damit ist insbesondere mit $A_j \in \mathcal{A}_j, j = 1, 2$, auch $A_1 \times A_2 \in \tilde{\mathcal{A}}$. Somit gilt $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. ■

14.8 Lemma Sei $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ ein σ -endlicher Maßraum für $j \in \{1, 2\}$ und sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Dann sind

$$s_A^{(1)} : \begin{array}{l} X_1 \rightarrow [0, \infty] \\ x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1}) \end{array} \quad \mathcal{A}_1\text{-messbar}, \quad s_A^{(2)} : \begin{array}{l} X_2 \rightarrow [0, \infty] \\ x_2 \mapsto \mu_1(A_{x_2}) \end{array} \quad \mathcal{A}_2\text{-messbar}.$$

Beweis. Wir behandeln nur die Aussage für $s_A^{(2)}$, für $s_A^{(1)}$ verläuft alles analog.

Die Funktion $s_A := s_A^{(2)}$ ist wohldefiniert nach Lemma 14.7.

1. Akt: μ_1 ist endlich.

$\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : s_D \text{ ist } \mathcal{A}_2\text{-messbar}\}$ ist ein Dynkin-System in $X_1 \times X_2 =: X$, da

- $x_2 \mapsto s_X(x_2) = \mu_1(X_1)$ ist konstant $\implies \mathcal{A}_2$ -messbar $\implies X \in \mathcal{D}$.
- Seien $D, D' \in \mathcal{D}$, $D' \subseteq D$, so gilt $(D \setminus D')_{x_2} = D_{x_2} \setminus D'_{x_2} \forall x_2 \in X_2$.
 $\implies x_2 \mapsto s_{D \setminus D'}(x_2) = \mu_1(D_{x_2} \setminus D'_{x_2}) = s_D(x_2) - s_{D'}(x_2)$ ist messbar
 $\implies \mathcal{D}$ ist $\setminus$ -stabil.
- Sei $(D_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ paarweise disjunkt und $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, so gilt $D_{x_2} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (D_n)_{x_2}$
 $\implies x_2 \mapsto s_D(x_2) = \mu_1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (D_n)_{x_2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_{D_n}(x_2)$ ist messbar
 $\implies \mathcal{D}$ ist $\cup_\infty$ -stabil.

Außerdem gilt $\mathcal{E} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\} \subseteq \mathcal{D}$, denn für $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ ist

$$x_2 \mapsto s_{A_1 \times A_2}(x_2) := \mu_1((A_1 \times A_2)_{x_2}) = \mu_1(A_1) 1_{A_2}(x_2) \text{ messbar.}$$

Es folgt $\mathcal{D} = \text{dyn}(\mathcal{D}) \supseteq \text{dyn}(\mathcal{E}) \stackrel{\mathcal{E}\text{-stabil, Satz 11.17}}{=} \sigma(\mathcal{E}) \stackrel{\text{Satz 14.2}}{=} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

2. Akt: μ_1 ist σ -endlich.

Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Nach Voraussetzung gibt es $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_1$ mit $B_n \nearrow X_1$ und $\mu_1(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schließen für alle $x_2 \in X_2$, dass

$$s_A(x_2) = \mu_1(A_{x_2}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Stetigkeit} \\ \text{von unten}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mu_1(B_n \cap A_{x_2})}_{=: \mu_{1,n}(A_{x_2})}.$$

Da $\mu_{1,n}$ ein endliches Maß ist für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt aus dem 1. Akt, dass s_A messbar ist. ■

14.9 Satz Für $j \in \{1, 2\}$ seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ σ -endliche Maßräume. Dann existiert genau ein Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, das **Produktmaß** $\mu_1 \otimes \mu_2$, so dass für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2). \quad (\star)$$

Zudem ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ σ -endlich und es gilt für alle $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ das **Prinzip von CAVALIERI**

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2}) d\mu_2(x_2). \quad (\star\star)$$

Für die Eindeutigkeit des Produktmaßes genügt es bereits, $(\star)$ nur für alle $A_1 \in \mathcal{E}_1$ und $A_2 \in \mathcal{E}_2$ zu fordern, wobei für $j = 1, 2$ gilt

- (1) $\mathcal{E}_j$ ist ein $\cap$ -stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_j$,
 (2) $\exists (B_j^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_j$ mit $B_j^k \nearrow X_j$ für $k \rightarrow \infty$ und $\mu_j(B_j^k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Existenz: Die Abbildung $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \ni A \mapsto \pi_2(A) := \int_{X_2} s_A^{(2)} d\mu_2 \in [0, \infty]$ ist wohldefiniert gemäß Lemma 14.8. Zudem gilt $\pi_2(\emptyset) = 0$, sowie für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ paarweise disjunkt

$$\pi_2\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \int_{X_2} \underbrace{s_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}^{(2)}}_{\sum_{n \in \mathbb{N}} s_{A_n}^{(2)}} d\mu_2 \stackrel{\text{Mon. Konvergenz}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \pi_2(A_n).$$

Damit ist π_2 ein Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Sei nun $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$. Wegen $s_{A_1 \times A_2}^{(2)} = \mu_1(A_1) 1_{A_2}$ folgt $\pi_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2)$.

Eindeutigkeit: Seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Erzeuger von $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ wie in (1) und (2) gefordert, so folgt mit Satz 14.2

- (0) $\mathcal{E} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{E}_1, A_2 \in \mathcal{E}_2\}$ ist $\cap$ -stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Sei π ein Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit $\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2) \forall A_1 \times A_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\pi|_{\mathcal{E}} = \pi_2|_{\mathcal{E}}$.

Ein Beispiel ist (folgt analog zu oben) $\pi = \pi_1$, wobei $\pi_1(A) := \int_{X_1} s_A^{(1)} d\mu_1$ für $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Somit gilt

- (i) $\mathcal{E} \ni B_1^k \times B_2^l \nearrow X_1 \times X_2$ für $k, l \rightarrow \infty$,
 (ii) $\pi(B_1^k \times B_2^l) = \mu_1(B_1^k) \mu_2(B_2^l) < \infty$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$.

(0), (i), (ii) $\xRightarrow{\text{Satz 11.28}} \pi = \pi_2 =: \mu_1 \otimes \mu_2$. Insbesondere gilt auch $\pi_1 = \pi_2$, also $(\star\star)$.

σ -Endlichkeit: aus (i) und (ii). ■

14.10 Korollar Für $j \in \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ σ -endliche Maßräume. Dann gibt es genau ein **Produktmaß** $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j := \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$, so dass für alle $A_j \in \mathcal{A}_j, j \in \{1, \dots, n\}$, gilt

$$\left(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right)\left(\bigtimes_{j=1}^n A_j\right) = \prod_{j=1}^n \mu_j(A_j). \quad (\star)$$

Zudem ist das Produktmaß σ -endlich.

Für die Eindeutigkeit des Produktmaßes genügt es, $(\star)$ nur für alle $A_j \in \mathcal{E}_j, j \in \{1, \dots, n\}$, zu fordern, wobei für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

- (1) $\mathcal{E}_j$ ist ein $\cap$ -stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_j$,
 (2) $\exists (B_j^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_j$ mit $B_j^k \nearrow X_j$ für $k \rightarrow \infty$ und $\mu_j(B_j^k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Eindeutigkeit und σ -Endlichkeit eines Maßes $\pi^{(n)}$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$, welches $(\star)$ erfüllt für alle $A_j \in \mathcal{E}_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, mit Erzeugern wie in (1) und (2), folgen wie im Beweis von Satz 14.9.

Die Existenz eines Maßes $\pi^{(n)}$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$, welches $(\star)$ erfüllt für alle $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, zeigen wir nun per Induktion.

Induktionsanfang $n = 2$:

$$\pi^{(2)} = \mu_1 \otimes \mu_2 \text{ aus Satz 14.9.}$$

Induktionsschritt $n - 1 \rightarrow n$:

gemäß Induktionsannahme existiert für $n > 2$ ein Maß $\pi^{(n-1)}$ auf $\left(\bigtimes_{j=1}^{n-1} \mathcal{A}_j, \bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathcal{A}_j \right)$ mit

$$\pi^{(n-1)}(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) = \prod_{j=1}^{n-1} \mu_j(A_j) \quad \forall A_j \in \mathcal{A}_j, j \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Damit ist $\pi^{(n-1)}$ σ -endlich (nach der Eingangsbemerkung) und gemäß Satz 14.9 ist das Maß $\pi^{(n)} := \pi^{(n-1)} \otimes \mu_n$ wohldefiniert auf $(\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n$ mit

$$\pi^{(n)}(A' \times A_n) = \pi^{(n-1)}(A') \mu_n(A_n)$$

für alle $A' \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}$ und für alle $A_n \in \mathcal{A}_n$. Da

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n \stackrel{\text{Lemma 14.5}}{=} \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$$

folgt mit der Wahl $A' = \bigtimes_{j=1}^{n-1} A_j$

$$\pi^{(n)}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{j=1}^n \mu_j(A_j) \quad \text{für alle } A_j \in \mathcal{A}_j, j \in \{1, \dots, n\},$$

und somit der Induktionsschritt. ■

14.11 Bemerkung Zusammen mit Lemma 14.5 folgt für $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$,

$$\left(\bigotimes_{j=1}^m \mu_j \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=m+1}^n \mu_j \right) = \bigotimes_{j=1}^n \mu_j.$$

Als Anwendung des bisherigen führen wir nun den noch schuldig gebliebenen Beweis von Satz 11.37 für $d \geq 2$ im Rahmen von

14.12 Korollar (Neufassung von Satz 11.37) *Es gibt genau ein Maß auf $\mathcal{B}^d$, das Produktmaß*

$\lambda^d := \bigotimes_{\alpha=1}^d \lambda$, *welches*

$$\lambda^d \left(\bigtimes_{\alpha=1}^d [a_\alpha, b_\alpha[\right) = \prod_{\alpha=1}^d (b_\alpha - a_\alpha)$$

erfüllt für alle $-\infty < a_\alpha \leq b_\alpha < \infty$ und $\alpha \in \{1, \dots, d\}$.

Beweis. Nach Beispiel 14.4 ist $\mathcal{B}^d = \bigotimes_{\alpha=1}^d \mathcal{B}$ und nach Satz 11.14 wird $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I})$ erzeugt vom Mengensystem $\mathcal{I}$ der rechts halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$.

Der Fall $d = 1$, also die Existenz von λ , wurde bereits im Rahmen von Satz 11.37 bewiesen. Insbesondere ist

- λ σ -endlich auf $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{I}$ $\cap$ -stabil und für $I_n := [-n, n[\in \mathcal{I}$ gilt $I_n \nearrow \mathbb{R}$ für $n \rightarrow \infty$ und $\lambda(I_n) = 2n < \infty$. Also ist $\mathcal{I}$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}$ wie in Korollar 14.10 gefordert.
- $\prod_{\alpha=1}^d (b_\alpha - a_\alpha) = \prod_{\alpha=1}^d \lambda([a_\alpha, b_\alpha[)$.

Damit folgt die Behauptung aus Korollar 14.10. ■

16

14.3 Integration bezüglich Produktmaßen

14.13 Lemma *Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume und $(X, \mathcal{A}) := (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ deren Produktraum. Sei $(X', \mathcal{A}')$ ein weiterer Messraum und $f : X \rightarrow X'$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar. Dann gilt für alle $x_1 \in X_1$ und alle $x_2 \in X_2$*

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdot) : X_2 &\rightarrow X' \\ x_2 &\mapsto f(x_1, x_2) \end{aligned} \quad \text{ist } \mathcal{A}_2\text{-}\mathcal{A}'\text{-messbar} \quad \text{und} \\[10pt] f(\cdot, x_2) : X_1 &\rightarrow X' \\ x_1 &\mapsto f(x_1, x_2) \end{aligned} \quad \text{ist } \mathcal{A}_1\text{-}\mathcal{A}'\text{-messbar.}$$

Beweis. Hier nur für $f_{x_1} := f(x_1, \cdot)$. Für $f_{x_2} := f(\cdot, x_2)$ verläuft alles analog. Sei $A' \in \mathcal{A}'$, so folgt

$$f_{x_1}^{-1}(A') = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in f^{-1}(A')\} = \underbrace{(f^{-1}(A'))_{x_1}}_{\in \mathcal{A}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 14.7}}}{\in} \mathcal{A}_2. \quad \blacksquare$$

14.14 Beispiel Sei $A \subseteq X_1 \times X_2 \implies (1_A)(x_1, \cdot) = 1_{A_{x_1}} \quad \forall x_1 \in X_1$ und analog für $1 \leftrightarrow 2$.

14.15 Satz (FUBINI-TONELLI) Für $j \in \{1, 2\}$ seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ σ -endliche Maßräume. Sei $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -messbar. Dann sind für $g \in \{\operatorname{Re} f_+, \operatorname{Re} f_-, \operatorname{Im} f_+, \operatorname{Im} f_-\}$ die Abbildungen

$$\begin{array}{ll} X_1 \rightarrow [0, \infty] & X_2 \rightarrow [0, \infty] \\ x_1 \mapsto \int_{X_2} g(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) & x_2 \mapsto \int_{X_1} g(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{A}_1\text{-messbar;} \\ \mathcal{A}_2\text{-messbar.} \end{array}$$

Weiterhin gilt:

- (a) Ist $f \geq 0$ $\mu_1 \otimes \mu_2$ -f.ü., so ist für μ_1 -fast alle $x_1 \in X_1$ die Abbildung $f(x_1, \cdot) \geq 0$ μ_2 -f.ü., sowie für μ_2 -fast alle $x_2 \in X_2$ die Abbildung $f(\cdot, x_2) \geq 0$ μ_1 -f.ü. und es gilt

$$\begin{aligned} & \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) \\ &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \quad (\star) \end{aligned}$$

(Integrale können auch $+\infty$ sein).

- (b) Ist eines der drei Integrale $\int_{X_1 \times X_2} |f(x_1, x_2)| d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$,

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1, x_2)| d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \quad \text{oder} \quad \int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f(x_1, x_2)| d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)$$

endlich, so sind es alle drei und es gilt ebenfalls $(\star)$.

14.16 Bemerkung (a) Die Beträge in Teil (b) des Satzes sind wesentlich.

(b) Die Aussage gilt analog für das n -fache Produkt.

Beweis von Satz 14.15. Teil (b) folgt aus (a) durch Anwendung von (a) auf $g \in \{\operatorname{Re} f_+, \operatorname{Re} f_-, \operatorname{Im} f_+, \operatorname{Im} f_-\}$. Beweis von (a) in 3 Schritten:

1. Schritt: Für Elementarfunktionen gilt

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{j=1}^J \underbrace{\alpha_j}_{\geq 0} \underbrace{1_{A_j}}_{\in \mathcal{A}} & \xrightarrow[\substack{\text{Lemma 14.7} \\ \text{(oder 14.13)}}]{\forall x_1 \in X_1} & \varphi_{x_1} := \varphi(x_1, \cdot) = \sum_{j=1}^J \alpha_j \underbrace{1_{(A_j)_{x_1}}}_{\in \mathcal{A}_2} & \mathcal{A}_2\text{-messbar} \\ & \xRightarrow[\substack{\text{Lemma 14.8}}]{\uparrow} & x_1 \mapsto \int_{X_2} \varphi_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \sum_{j=1}^J \alpha_j \mu_2((A_j)_{x_1}) \geq 0 & \mathcal{A}_1\text{-messbar.} \end{aligned}$$

Somit ist das folgende μ_1 -Integral wohldefiniert und es gilt mit $X := X_1 \times X_2 \ni x := (x_1, x_2)$ und $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} \varphi_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \sum_{j=1}^J \alpha_j \underbrace{\int_{X_1} \mu_2((A_j)_{x_1}) d\mu_1(x_1)}_{\mu(A_j) \text{ nach Satz 14.9}} = \int_X \varphi(x) d\mu(x).$$

Analog verläuft es für die Vertauschung der Indizes $1 \leftrightarrow 2$, also gilt die Gleichheit der drei Integrale in (a) für Elementarfunktionen.

2. Schritt: Sei $f : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar $\implies \exists (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Elementarfunktionen mit $\varphi_n \nearrow f \implies (\varphi_n)_{x_1} \nearrow f_{x_1} \quad \forall x_1 \in X_1$

$$\implies x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mon. Kgz.}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)}_{\mathcal{A}_1\text{-messbar (1. Schritt)}} \quad \mathcal{A}_1\text{-messbar}$$

(also die erste der beiden Behauptungen für g) und

$$\begin{aligned} \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mon. Kgz.}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{X_1} \left(\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)}_{\int_X \varphi_n(x) d\mu(x) \text{ nach 1. Schritt}} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mon. Kgz.}}}{=} \int_X f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Wiederum unter Vertauschung der Indizes $1 \leftrightarrow 2$ folgt die Gleichheit der drei Integrale.

3. Schritt: Sei $f(x) \in [0, \infty]$ für μ -f.a. $x \in X$. Siehe Übung. ■

14.4 Die Transformationsformel für das Lebesgue-Maß

14.17 Definition Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ ein Messraum und $\varphi : X \rightarrow X'$ messbar, so heißt

$$\varphi(\mu) := \mu \circ \varphi^{-1} : \begin{array}{ll} \mathcal{A}' & \rightarrow [0, \infty] \\ A' & \mapsto \mu(\varphi^{-1}(A')) \end{array}$$

das **Bildmaß** von μ (unter φ).¹

¹Die σ -Additivität des Bildmaßes beruht auf $\varphi^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\varphi^{-1}(A'_n)}_{\in \mathcal{A}}$ für $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}'$ paarweise disjunkt.

14.18 Beispiel Sei $X = X' = \mathbb{R}^d, \mathcal{A} = \mathcal{A}' = \mathcal{B}^d, \mu = \lambda^d$.

(a) Translation um $y \in \mathbb{R}^d$

$$T_y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & x + y \end{array} .$$

Mit Satz 11.41 folgt $T_y(\lambda^d) = \lambda^d$.

(b) Skalierung um einen Faktor $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\Lambda_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & \alpha x \end{array} .$$

Es gilt $\Lambda_\alpha(\lambda^d) = \frac{1}{|\alpha|^d} \lambda^d$ (siehe Übung).

(c) Permutation von Koordinaten $j, k \in \{1, \dots, d\}$

$$\pi_{jk} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ (\dots, x_j, \dots, x_k, \dots) & \mapsto & (\dots, x_k, \dots, x_j, \dots) \end{array} .$$

Es gilt $\pi_{jk}(\lambda^d) = \lambda^d$, da $\lambda^d = \lambda \otimes \dots \otimes \lambda$ Produkt gleicher Faktoren ist.

14.19 Satz (vom Bildmaß) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ ein Messraum und $\varphi : X \rightarrow X'$ messbar. Dann gilt

(a) für alle $A' \in \mathcal{A}'$ und alle $f : X' \rightarrow [0, \infty]$ messbar, dass

$$\int_{A'} f(x') d(\varphi(\mu))(x') = \int_{\varphi^{-1}(A')} (f \circ \varphi)(x) d\mu(x), \quad (\star)$$

(b) $f \in \mathcal{L}^1(X', \mathcal{A}', \varphi(\mu)) \iff f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Beweis. Teil (b) folgt aus (a) mit $A' = X'$ durch Zerlegung von f in Real-, Imaginär-, Positiv- und Negativanteile.

Zu (a): sei o.E. $A' = X'$ (sonst ersetze f durch $f 1_{A'}$). Die Gleichheit $(\star)$ ist wahr für $f = 1_{B'}$, $B' \in \mathcal{A}'$, denn

$$\int_{X'} 1_{B'}(x') d(\varphi(\mu))(x') = (\varphi(\mu))(B') = \mu(\varphi^{-1}(B')) = \int_X \underbrace{1_{\varphi^{-1}(B')}(x)}_{1_{B'}(\varphi(x)) = (1_{B'} \circ \varphi)(x)} d\mu(x).$$

Wegen der Linearität gilt $(\star)$ somit für alle Elementarfunktionen f , wegen monotoner Konvergenz dann auch für alle messbaren $f \geq 0$. ■

14.20 Definition Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi : U \rightarrow V$.

- φ ist **Diffeomorphismus** : $\iff \varphi$ bijektiv und φ, φ^{-1} stetig diff.bar.
- U, V **diffeomorph** : $\iff \exists$ Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$.

14.21 Satz (Transformationsformel für λ^d) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt für alle $A \subseteq U, A \in \mathcal{B}^d$

$$\lambda^d(\varphi(A)) = \int_A |\det[(D\varphi)(x)]| dx. \quad (\text{TF})$$

$\uparrow$
Differential von φ (Jacobi-Matrix)

Das heißt, das Bildmaß $\varphi^{-1}(\lambda^d)$ ist absolut stetig bzgl. λ^d auf U mit Radon-Nikodým-Ableitung

$$\frac{d\varphi^{-1}(\lambda^d)}{d\lambda^d} = |\det[(D\varphi)]|, \quad \text{Jargon: „Funktionaldeterminante“}.$$

In Kombination mit dem Satz vom Bildmaß – wähle dort $A' = X' = U, \mu = \lambda^d$ und ersetze φ durch φ^{-1} – ergibt sich die Substitutionsregel für mehrdimensionale Lebesgue-(Borel-) Integrale.

14.22 Korollar Unter den Voraussetzungen von Satz 14.21 gilt für alle $f : U \rightarrow [0, \infty]$ $\mathcal{B}^d$ -messbar, sowie für alle $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{L}^1(\varphi(U), \lambda^d)$

$$\int_{\varphi(U)} (f \circ \varphi^{-1})(x) dx = \int_U f(x) |\det[(D\varphi)(x)]| dx.$$

14.23 Beispiel (Invarianz des Lebesgue-Borel-Maßes unter Bewegungen)

Sei $\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Bewegung, d.h. es gibt $y \in \mathbb{R}^d$ und eine orthogonale Matrix $M \in O(d)$, so dass $\beta(x) = Mx + y$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\beta(\lambda^d) = \lambda^d,$$

da $|\det D\beta| = |\det(M)| = 1$.

17

Beweis von Satz 14.21. In 6 Akten mittels vollständiger Induktion nach d (Akte 5 und 6). Zuvor vier Vorbereitungsakte.

1. Akt: Es genügt eine lokale Version von (TF) zu zeigen:

$$\forall y \in U \exists U_y \subseteq U \text{ offen mit } y \in U_y \text{ und (TF) gilt } \forall A \subseteq U_y, A \in \mathcal{B}^d. \quad (\star)$$

Beweis. „(TF) $\Rightarrow$ ($\star$)“ klar, da die globale die lokale Aussage impliziert.

„(TF) $\Leftarrow$ ($\star$)“ $\forall y \in U$ sei $U_y \subseteq U$ die offene Umgebung von y aus ($\star$). Da $U \subset \mathbb{R}^d$ dem 2. Abzählbarkeitsaxiom genügt (Beispiel 10.14), folgt mit dem Satz von Lindelöf (Satz 10.25), dass die offene Überdeckung $U = \bigcup_{y \in U} U_y$ eine abzählbare Teilüberdeckung $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_{y_j}$ besitzt. Diese machen wir nach Lemma 11.12 disjunkt, das heißt,

$$\forall j \in \mathbb{N} \exists B_j \subseteq U_{y_j} \text{ mit } B_j \in \mathcal{B}^d : \underbrace{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_{y_j}}_{\in \mathcal{B}^d} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = U.$$

Sei nun $\mathcal{B}^d \ni A \subseteq U$ und beachte, dass auch die Folge von Mengen $(\varphi(A \cap B_j))_{j \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkt ist, da φ ein Diffeomorphismus, also injektiv ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda^d(\varphi(A)) &= \lambda^d\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \varphi(A \cap B_j)\right) \stackrel{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^d(\varphi(A \cap B_j)) \\ &\stackrel{(\star) \text{ mit } A \cap B_j \subseteq U_{y_j} \text{ für alle } j \in \mathbb{N}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\det[(D\varphi)(x)]| 1_{A \cap B_j}(x) dx \\ &\stackrel{\text{Mon. Kgz.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |\det[(D\varphi)(x)]| \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} 1_{A \cap B_j}(x)}_{1_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A \cap B_j)}(x)} dx \\ &= \int_A |\det[(D\varphi)(x)]| dx, \end{aligned}$$

das heißt, (TF) gilt global auf U . ✓

2. Akt: Seien $\psi : U \rightarrow \psi(U)$ und $\chi : \psi(U) \rightarrow \chi(\psi(U))$ Diffeomorphismen, für die (TF) gelte. Dann gilt (TF) auch für $\chi \circ \psi$.

Beweis. Sei $A \subseteq U$ Borel-messbar, so folgt

$$\lambda^d\left(\underbrace{(\chi \circ \psi)(A)}_{\chi(\psi(A))}\right) \stackrel{(\text{TF}) \text{ für } \chi}{=} \int_{\psi(A)} |\det[(D\chi)(x)]| dx.$$

(TF) gilt für $\varphi = \psi \implies$ Korollar 14.22 gilt mit $\varphi = \psi$ und $f = 1_A (|\det[D\chi]| \circ \psi)$

$$= \int_A \underbrace{|\det[(D\chi)(\psi(x))]| |\det[(D\psi)(x)]|}_{|\det[(D(\chi \circ \psi))(x)]|} dx,$$

wobei $(\det M_1)(\det M_2) = \det(M_1 M_2)$ und die Kettenregel $(D\chi)(\psi(x)) \cdot (D\psi)(x) = (D(\chi \circ \psi))(x)$ verwendet wurden. ✓

3. Akt: (TF) gilt für die Permutationsabbildung π_{jk} aus Beispiel 14.18 (c).

Beweis. • $\lambda^d \circ \pi_{jk} = \lambda^d$ nach Beispiel 14.18 (c).

- $|\det[(D\pi_{jk})(x)]| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, da $D\pi_{jk}$ eine Permutationsmatrix ist (siehe Lineare Algebra). ✓

4. Akt: Ohne Einschränkung kann für jedes $y \in U$ der für $(\star)$ relevante lokale Diffeomorphismus $\varphi|_{U_y}$ von der Form $U_y \ni (x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \alpha_{x_1}(x_2, \dots, x_d))$ gewählt werden, wobei α_{x_1} ein auf dem x_1 -Schnitt $(U_y)_{x_1} := \{(x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} : (x_1, x_2, \dots, x_d) \in U_y\}$ von U_y definierter Diffeomorphismus ist für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $(U_y)_{x_1} \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $y \in U$ fest. Ohne Einschränkung sei $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$, denn falls nicht, gibt es wegen der Invertierbarkeit¹ von $(D\varphi)(y)$ Indizes $j, k \in \{1, \dots, d\}$ mit $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(y) \neq 0 \implies \tilde{\varphi} := \pi_{1j} \circ \varphi|_{U_y} \circ \pi_{1k}$ erfüllt $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_1}(\pi_{1k}(y)) \neq 0$ und $\varphi|_{U_y} = \pi_{1j} \circ \tilde{\varphi} \circ \pi_{1k}$. Ist also (TF) für $\tilde{\varphi}$ auf $\pi_{1k}(U_y)$ gezeigt, so folgt aus dem 2. und 3. Akt, dass (TF) für $\varphi|_{U_y}$ gilt.

Sei nun also $\varphi : U_y \rightarrow \varphi(U_y)$ ein Diffeomorphismus mit $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$. Ziel: zerlege φ in Diffeomorphismen von der gesuchten Form.

- (i) Definiere $\psi : U_y \ni x \mapsto \psi(x) := (\varphi_1(x), x_2, \dots, x_d)$.

Wegen ($\mathbb{1}_n$ bezeichnet die $n \times n$ -Einheitsmatrix)

$$D\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{1}_{d-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

ist $(D\psi)(y)$ invertierbar und es gibt nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Korollar 9.7) eine offene Umgebung $\hat{U}_y \subseteq U_y$ von y , auf der ψ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist $\tilde{\psi} := \pi_{12} \circ \psi \circ \pi_{12}$ ebenfalls ein Diffeomorphismus und von der gesuchten Form

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x) &= (x_1, \underbrace{\varphi_1(x_2, x_1, x_3, \dots, x_d), x_3, \dots, x_d}_{=: \alpha_{x_1}(x_2, x_3, \dots, x_d)}) \quad \forall x \in \pi_{12}(\hat{U}_y). \\ &=: \alpha_{x_1}(x_2, x_3, \dots, x_d) \end{aligned}$$

In der Tat ist $\alpha_{x_1}(\hat{x})$ stetig differenzierbar in $\hat{x} := (x_2, x_3, \dots, x_d) \in (\pi_{12}(\hat{U}_y))_{x_1}$ $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ und

$$(D\alpha_{x_1})(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \circ \pi_{12}\right)(x_1, \hat{x}) & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{1}_{d-2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

¹folgt z.B. aus $\text{id} = \varphi^{-1} \circ \varphi \implies \mathbb{1} = ((D\varphi^{-1}) \circ \varphi) \cdot D\varphi$.

Also ist $(D\alpha_{x_1})(\hat{x})$ invertierbar für $(x_1, \hat{x}) = \pi_{12}(y)$ und nach dem Satz über die Umkehrfunktion existiert eine eventuell verkleinerte Umgebung $(\pi_{12}\tilde{U}_y)_{x_1} \subseteq (\pi_{12}\hat{U}_y)_{x_1}$ in $\mathbb{R}^{d-1}$, auf der α_{x_1} ein Diffeomorphismus ist für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $(\pi_{12}\tilde{U}_y)_{x_1} \neq \emptyset$.

- (ii) $\chi := \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(\tilde{U}_y) \rightarrow \varphi(\tilde{U}_y)$ ist ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $\chi^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\tilde{U}_y) \rightarrow \psi(\tilde{U}_y)$.

Für $z = (z_1, \hat{z}) \in \psi(\tilde{U}_y)$ gilt $\psi^{-1}(z) = (\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z})$, wobei $\eta_{\hat{z}}$ die Umkehrfunktion von $\varphi_1(\cdot, \hat{z})$ ist. Diese Umkehrfunktion existiert und ist stetig diff.bar, da $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) \neq 0 \forall x \in \tilde{U}_y$. Folglich gilt

$$\chi(z) = \left(z_1, \underbrace{\varphi_2(\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z}), \dots, \varphi_d(\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z})}_{=: \alpha_{z_1}(\hat{z})} \right) \quad \forall z \in \psi(\tilde{U}_y).$$

Analog erhält man

$$\chi^{-1}(x) = \left(x_1, \underbrace{(\varphi^{-1})_2(\hat{x}), \dots, (\varphi^{-1})_d(\hat{x})}_{=: \beta_{x_1}(\hat{x})} \right) \quad \forall x \in \varphi(\tilde{U}_y).$$

Dabei ist α_{z_1} stetig diff.bar auf $(\psi(\tilde{U}_y))_{z_1}$ für alle z_1 , für die $(\psi(\tilde{U}_y))_{z_1} \neq \emptyset$ und β_{x_1} ist stetig diff.bar auf $(\varphi(\tilde{U}_y))_{x_1}$ für alle x_1 , für die $(\varphi(\tilde{U}_y))_{x_1} \neq \emptyset$. Wegen $\chi^{-1} \circ \chi = \text{id}|_{\psi(\tilde{U}_y)}$ folgt zudem $\beta_{z_1} \circ \alpha_{z_1} = \text{id}|_{(\psi(\tilde{U}_y))_{z_1}}$. Also ist $\alpha_{z_1} : (\psi(\tilde{U}_y))_{z_1} \rightarrow (\varphi(\tilde{U}_y))_{z_1}$ ein Diffeomorphismus für alle $z_1 \in \mathbb{R}$, für die $(\psi(\tilde{U}_y))_{z_1} \neq \emptyset$.

Nach (i) und (ii) sind die Diffeomorphismen $\tilde{\psi}$ und χ von der gesuchten Form. Ist $(\star)$ für diese bewiesen, so folgt wegen $\varphi = \chi \circ \pi_{12} \circ \tilde{\psi} \circ \pi_{12}$ und dem 2. und 3. Akt, dass $(\star)$ auch für φ gilt. $\checkmark$

5. Akt: Induktionsanfang: (TF) ist wahr für $d = 1$.

Beweis. Wegen des 1. Akts sei U ohne Einschränkung ein endliches offenes Intervall (durch Verkleinerung von U_y in $(\star)$ stets möglich). Sei $[a, b[\subset U$ ein Intervall ($a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$). Dann gilt (TF) wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für Riemann-Integrale, denn

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1} \circ \lambda)([a, b[) &= \lambda(\varphi([a, b[)) && \stackrel{\varphi \text{ streng monoton}}{=} && |\varphi(b) - \varphi(a)| && \stackrel{\text{HDI}}{=} && \left| \int_a^b \varphi'(x) dx \right| \\ &&& \stackrel{\varphi \text{ wechselt Vorzeichen nicht}}{=} && \int_a^b |\varphi'(x)| dx && = && \int_{[a, b[} |\det[(D\varphi)(x)]| dx. \end{aligned}$$

Also gilt (TF) auf $\mathcal{I}_U := \{I \in \mathcal{I} : I \subset U\}$, einem $\cap$ -stabilen Erzeuger von $\mathcal{B} \cap U$ mit Ausschöpfungsbedingung $U =] \inf U, \sup U[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n^{-1} + \inf U, \sup U[$ wie in Satz 11.28. Da beide Seiten von (TF) je ein Maß auf $\mathcal{B} \cap U$ definieren, folgt mit dem Eindeutigkeitsatz 11.28, dass (TF) für alle $A \in \mathcal{B} \cap U$ gilt. $\checkmark$

6. Akt: Induktionsschritt: Sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Gilt (TF) für $d - 1$, dann gilt (TF) auch für d .

Beweis. Sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Nach dem 1. und 4. Akt genügt es zum Nachweis der Behauptung, dass man für $y \in U$ bel. fest (TF) nachweist für einen Diffeomorphismus der Form $\varphi(x) = (x_1, \alpha_{x_1}(\hat{x}))$, wobei $x = (x_1, \hat{x}) \in U_y$ und $U_y \subseteq U$ eine offene Umgebung von y ist. Also sei φ von obiger Form. Dann gilt $\forall x = (x_1, \hat{x}) \in U_y$

$$(D\varphi)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & (D\alpha_{x_1})(\hat{x}) & & \\ * & & & \end{pmatrix}$$

und somit auch

$$\det[(D\varphi)(x)] = \det[(D\alpha_{x_1})(\hat{x})]. \quad (\spadesuit)$$

Sei $A \in \mathcal{B}^d \cap U_y$ und $x_1 \in \mathbb{R} \implies$

$$\begin{aligned} (\varphi(A))_{x_1} &= \left\{ \hat{a} \in \mathbb{R}^{d-1} : \underbrace{(x_1, \hat{a}) \in \varphi(A)} \right\} = \begin{cases} \alpha_{x_1}(A_{x_1}), & \text{falls } A_{x_1} \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases} \\ &\iff \exists \hat{x} \in A_{x_1} : \hat{a} = \alpha_{x_1}(\hat{x}) \end{aligned}$$

Sei $X_1 := \{x_1 \in \mathbb{R} : A_{x_1} \neq \emptyset\} \implies$

$$\begin{aligned} \lambda^d(\varphi(A)) &\stackrel{\substack{\lambda^d = \lambda \otimes \lambda^{d-1} \\ \uparrow \\ \text{Satz 14.9}}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lambda^{d-1}((\varphi(A))_{x_1}) \, d\lambda(x_1) = \int_{X_1} \underbrace{\lambda^{d-1}(\alpha_{x_1}(A_{x_1}))}_{\substack{\text{Ind.annahme} \\ \implies \int_{A_{x_1}} |\det[(D\alpha_{x_1})(\hat{x})]| \, d\lambda^{d-1}(\hat{x})}} \, d\lambda(x_1) \\ &\stackrel{(\spadesuit)}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{1_{A_{x_1}}(\hat{x})}_{1_A(x_1, \hat{x})} |\det[(D\varphi)(x_1, \hat{x})]| \, d\lambda^{d-1}(\hat{x}) \right) d\lambda(x_1) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_A |\det[(D\varphi)(x)]| \, d\lambda^d(x). \quad \checkmark \end{aligned}$$

Somit folgt der Satz aus dem 5. und 6. Akt. ■

Untermannigfaltigkeiten und der Satz von GAUSS

18

15.1 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$

15.1 Definition Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^d$ versehen mit der Relativtopologie $\mathcal{T}_M$ des $\mathbb{R}^d$ (mit der Euklidischen Topologie). Sei $n \in \mathbb{N}, n \leq d$.

- (a) M ist eine **n -dimensionale C^1 -(Unter-)Mannigfaltigkeit (des $\mathbb{R}^d$)** $:\Leftrightarrow$
 $\forall a \in M \exists V \subseteq M$, eine in der Relativtopologie offene Umgebung von a , $\exists$ **Kartengebiet**
 $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\exists$ (lokale) **Karte** $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d) : T \rightarrow V$ mit
- (i) φ bijektiv,
 - (ii) φ, φ^{-1} stetig,
 - (iii) φ stetig differenzierbar,
 - (iv) $\forall t \in T: \text{Rang}((D\varphi)(t)) = \text{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t)\right)_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq k \leq n}} = n$.
- (b) Sei $A \neq \emptyset$ eine Indexmenge.
Atlas von M $:\Leftrightarrow$ Familie von Karten $\{\varphi_\alpha : T_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ mit $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = M$.

15.2 Bemerkung (a) Falls statt (iii) gilt, dass φ l -mal stetig differenzierbar ist mit $l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, so ist M eine C^l -Mannigfaltigkeit.

(b) Vorsicht! Eine andere übliche Konvention für Karten ist $\varphi : V \rightarrow T$.

(c) Konvention: j kartesischer Index für φ , α Familienindex von φ in einem Atlas.

15.3 Beispiel (a) Die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^2$: $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ ist 1-dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Nur 2 Karten sind für den Atlas nötig, z.B. die Einschränkungen

$$\varphi_1 := \Phi|_{]0, 2\pi[} \text{ und } \varphi_2 := \Phi|_{]-\pi, \pi[} \text{ von } \Phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei

$$(D\varphi)(\tau) = \begin{matrix} & & 1 & \cdots & n \\ & & \vdots & & \vdots \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n & & & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n+1 & & \cdots & & \\ \vdots & & & & \\ d & & 0 & & \end{matrix} =: I \quad (\star)$$

wobei $\tau := \varphi^{-1}(a)$.

Begründung: Ergänze die gemäß Def. 15.1(a)(iv) linear unabhängigen Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ der Jacobi-Matrix $(D\varphi)(\tau)$ mit $d - n$ weiteren Vektoren $v_{n+1}, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^d$ (Basisergänzungssatz). Sei $S := (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^{d \times d} \implies S$ invertierbar (Basiswechsel) und $(D\varphi)(\tau) = SI$. Somit ist $\chi := S^{-1} \circ \varphi$ Karte der C^1 -Mannigfaltigkeit $S^{-1}M := \{S^{-1}x : x \in M\}$ mit $(D\chi)(\tau) = I$ und das Lemma sei dafür gezeigt, d.h. $\exists \hat{\chi}$ das (1) – (3) erfüllt $\implies$ das Lemma gilt mit $\hat{\varphi} := S \circ \hat{\chi}$ für φ und M . ✓

Es gelte also $(\star)$ und sei nun $\delta > 0$, $\hat{t} := (t, t') \in T \times]-\delta, \delta[^{d-n} =: \hat{T}$, $\hat{\tau} := (\tau, 0)$ und

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_j(\hat{t}) &:= \varphi_j(t), & j &= 1, \dots, n, \\ \hat{\varphi}_j(\hat{t}) &:= \varphi_j(t) + t'_{j-n}, & j &= n+1, \dots, d. \end{aligned}$$

Damit ist $\hat{\varphi}$ stetig differenzierbar auf $\hat{T}$ mit Differential

$$(D\hat{\varphi})(\hat{\tau}) = \frac{\partial(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_d)}{\partial(\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_d)}(\hat{\tau}) = \begin{matrix} & & t & & t' \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots \\ n & & I & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n+1 & & & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ d & & & & 1 \end{matrix} = \mathbb{1}_{d \times d}. \quad (\star\star)$$

$(D\hat{\varphi})(\hat{\tau})$ invertierbar $\implies$ Satz über die Umkehrfunktion (Korollar 9.7): $\exists$ Umgebung $\hat{T}_0$ von $\hat{\tau}$ in $\mathbb{R}^d$ mit $\hat{T}_0 \subseteq \hat{T}$ und

$$\hat{\varphi} : \hat{T}_0 \rightarrow \hat{\varphi}(\hat{T}_0) =: \hat{V}_0 \text{ ist Diffeomorphismus.}$$

Durch weiteres Verkleinern kann $\hat{T}_0$ von der Form $T_0 \times T'_0$ gewählt werden (Dreiecksungleichung!) und somit folgt Eigenschaft (1). Da $\hat{\varphi}|_{T \times \{0\}} = \varphi|_T$ folgt ebenso (2).

Eigenschaft (3) folgt aus weiterer Verkleinerung von $T_0 \times T'_0$. Dazu nützlich:

Behauptung: $\exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon^{(d)}(a) \cap M \subseteq \varphi(T_0)$.

Die Behauptung ist wahr, denn: da $\varphi(T_0)$ offen in $\mathcal{T}_M \implies$ (Def. Relativtop.) $\exists U \subset \mathbb{R}^d$ offen (bzgl. Euklidischer Top.) mit $U \cap M = \varphi(T_0)$. Da $a \in \varphi(T_0) \subset U$ innerer Punkt $\implies \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon^{(d)}(a) \subseteq U$. ✓

Da $\hat{\varphi}$ stetig $\implies \exists T_1 \subseteq T_0$ offen mit $\tau \in T_1$ und $T'_1 \subseteq T'_0$ offen mit $0 \in T'_1: \hat{\varphi}(T_1 \times T'_1) \subset B_\varepsilon^{(d)}(a)$. Sei $V_1 := \hat{\varphi}(T_1 \times T'_1) \cap M$. Zu zeigen: $V_1 = \varphi(T_1)$.

$$(i) \quad T_1 \times T'_1 \supseteq T_1 \times \{0\} \implies V_1 \supseteq \hat{\varphi}(T_1 \times \{0\}) \cap M \stackrel{(2)}{=} \varphi(T_1) \cap M \stackrel{\varphi(T) \subseteq M}{=} \varphi(T_1).$$

$$(ii) \quad \text{Nach Def. von } V_1 \text{ und da } \hat{\varphi} \text{ injektiv} \implies \hat{\varphi}^{-1}(V_1) \subseteq T_1 \times T'_1 \quad (ii-1)$$

$$\text{Wegen } V_1 \subseteq B_\varepsilon^{(d)}(a) \cap M \stackrel{\text{Beh.}}{\subseteq} \varphi(T_0) \stackrel{(2)}{=} \hat{\varphi}(T_0 \times \{0\}) \stackrel{\hat{\varphi} \text{ injektiv}}{\implies} \hat{\varphi}^{-1}(V_1) \subseteq T_0 \times \{0\} \quad (ii-2)$$

$$(ii-1) \text{ und } (ii-2) \implies \hat{\varphi}^{-1}(V_1) \subseteq T_1 \times \{0\} \implies V_1 \subseteq \hat{\varphi}(T_1 \times \{0\}) \stackrel{(2)}{=} \varphi(T_1).$$

$$(i) \text{ und } (ii) \implies V_1 = \varphi(T_1). \quad \blacksquare$$

19

15.6 Satz (Kartenwechsel) Sei M eine n -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit. Dann gilt

- (a) $n =: \dim M$ ist eindeutig bestimmt, das heißt, falls φ eine Karte von M mit Kartengebiet $\subseteq \mathbb{R}^m$ ist, so folgt $m = n$.
- (b) Für $\alpha = 1, 2$ sei $\varphi_\alpha : T_\alpha \rightarrow V_\alpha$ eine Karte von M mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ (V offen in M nach Voraussetzung). Setze $W_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(V) \subseteq T_\alpha$ (offen in $\mathbb{R}^n$). Dann ist

$$\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \rightarrow W_2$$

ein Diffeomorphismus.

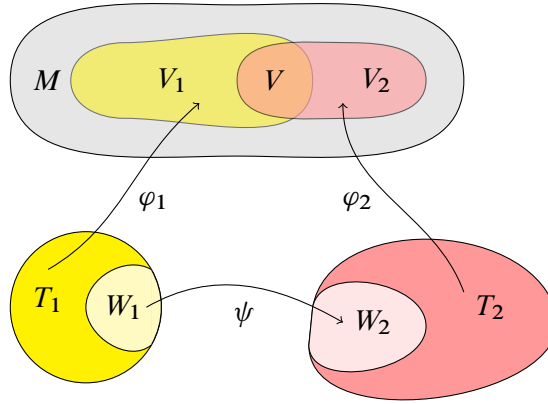


Abbildung 15.2: Illustration von Satz 15.6.

15.7 Bemerkung Der Beweis des Satzes benutzt die Tatsache, dass es für $n \neq m$ keinen Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ gibt, siehe Übung. Man kann sogar zeigen, dass es nicht einmal einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt (Brouwer, 1912). Wohl aber existiert die stetige und surjektive, aber nicht injektive *Peano-Kurve* $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$.

Beweis von Satz 15.6. Für $\alpha = 1, 2$ seien $T_\alpha \subseteq \mathbb{R}^{n_\alpha}$ offen, $n_\alpha \in \mathbb{N}$, und $\varphi_\alpha : T_\alpha \rightarrow V_\alpha$ Karten mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$.

- (i) ψ ist ein Homöomorphismus, da φ_1, φ_2 Homöomorphismen sind.
- (ii) Zur Differenzierbarkeit: sei $a \in V$ beliebig fest und $\tau_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(a) \in W_\alpha \subseteq T_\alpha$. Sei $\hat{\varphi}_\alpha : \hat{T}_{0,\alpha} \rightarrow \hat{V}_{0,\alpha}$ ein Flachmacher zu φ_α bezüglich a (wobei die Notation wie in Lemma 15.5 ist mit angehängtem α), das heißt, $\hat{T}_{0,\alpha}$ ist eine offene Umgebung von $(\tau_\alpha, \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^{d-n\alpha}}) \in \mathbb{R}^d$.

Sei $\hat{Y} := \hat{V}_{0,1} \cap \hat{V}_{0,2} (\neq \emptyset, \text{ da } a \text{ darin enthalten ist}), \hat{X}_\alpha := \hat{\varphi}_\alpha^{-1}(\hat{Y})$ (offen in $\mathbb{R}^d$), $\hat{\psi} := \hat{\varphi}_2^{-1} \circ \hat{\varphi}_1 : \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$. Da $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ Diffeomorphismen sind, folgt, dass auch $\hat{\psi}$ ein Diffeomorphismus ist mit Umkehrung $\hat{\psi}^{-1} = \hat{\varphi}_1^{-1} \circ \hat{\varphi}_2$ ist.

Setze $X_\alpha := \hat{X}_\alpha \cap W_\alpha$ (offene Umgebung von τ_α in $\mathbb{R}^{n\alpha}$). Aus (2) in Lemma 15.5 und $\varphi_\alpha, \hat{\varphi}_\alpha$ bijektiv folgt

$$\hat{\psi} \left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in X_1.$$

Da $\hat{\psi}$ stetig differenzierbar ist, ist die linke Seite lokal linearisierbar in t mit stetigem Differential. Daraus folgt, dass auch ψ lokal linearisierbar ist mit stetigem Differential, also stetig differenzierbar auf W_1 .

Analog schließt man auf die stetige Differenzierbarkeit von ψ^{-1} auf W_2 .

Nach (i) und (ii) ist ψ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{n_1}$ und $\mathbb{R}^{n_2}$. Zusammen mit Bemerkung 15.7 folgt $n_1 = n_2$, also (a) und (b) des Satzes. ■

Wir zeigen nun, dass Mannigfaltigkeiten als Lösungsmenge lokaler Gleichungssysteme auftreten (vgl. lineare Unterräume von $\mathbb{R}^d$ als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems).

15.8 Satz Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ und $n \in \mathbb{N}, n \leq d$. Dann sind äquivalent:

- (i) M ist n -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit.
- (ii) $\forall a \in M \exists$ (in $\mathbb{R}^d$) offene Umgebung U von a und $\exists f_1, \dots, f_{d-n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit
- (1) $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{d-n}(x) = 0\},$
 - (2) $\text{Rang} \frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-n})}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(a) = d - n.$

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Benutze Flachmacher $\hat{\varphi}$ von Karte φ bezüglich a aus dem Beweis von Lemma 15.5 mit $U := \hat{V}_0$ und für $j = 1, \dots, d - n$ setze $f_j := (\hat{\varphi}^{-1})_{n+j}$, also stetig diff.bar.

zu (1): Aus Eigenschaft (3) in Lemma 15.5 und da der Flachmacher $\hat{\varphi}$ bijektiv.

zu (2): Nach (★★) und der Begründung von (★) im Beweis von Lemma 15.5 ist das Differential $(D\hat{\varphi})(\hat{\tau}) = S$ des Flachmachers invertierbar $\xrightarrow{\text{Kor. 9.7}} (D\hat{\varphi}^{-1})(a) = S^{-1}$ hat maximalen Rang d . Die $(d - n) \times d$ -Matrix $\frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-n})}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(a)$ besteht aus den untersten $d - n$ Zeilen der $d \times d$ -Matrix $(D\hat{\varphi}^{-1})(a)$ und muss damit maximalen Rang $d - n$ haben.

„(i) $\Leftarrow$ (ii)“ Zeige: $\forall a \in M \exists$ Karte φ von M , in deren Bild a liegt.

Sei $a \in M$. Aus (2) folgt, dass es $1 \leq j_1 < \dots < j_{d-n} \leq d$ gibt mit¹

$$\text{Rang } \frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-n})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_{d-n}})}(a) = d - n \quad (\star)$$

und somit auch invertierbar. Ohne Einschränkung sei $j_k = n + k$ für $k = 1, \dots, d - n$ (ansonsten umnummerieren!) Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $(a_1, \dots, a_n) =: a'$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{d-n}$ eine offene Umgebung von $(a_{n+1}, \dots, a_d) =: a''$, so dass $U' \times U'' \subseteq U$ (möglich wegen Dreiecks-Ungleichung). Sei

$$F : U' \times U'' \rightarrow \mathbb{R}^{d-n} \\ (x', x'') \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x', x'') \\ \vdots \\ f_{d-n}(x', x'') \end{pmatrix},$$

so ist F stetig differenzierbar, es gilt $M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : F(x', x'') = 0\}$ und wegen $(\star)$ – in der Notation von Satz 9.5 – die Invertierbarkeit von $(D_{(x'')}F)(a', a'')$. Es folgt mit dem Satz 9.5 über implizite Funktionen

$\exists U'_0 \subseteq U'$ offene Umgebung von a' ,

$\exists U''_0 \subseteq U''$ offene Umgebung von a'' ,

$\exists g : U'_0 \rightarrow U''_0$ stetig diff.bar mit $M \cap (U'_0 \times U''_0) = \{(x', x'') \in U'_0 \times U''_0 : x'' = g(x')\}$. (★★)

Somit ist $\varphi : U'_0 \rightarrow M \cap (U'_0 \times U''_0)$
 $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$

- stetig differenzierbar mit

$$(D\varphi)(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ n \\ \downarrow \\ \vdots \\ d-n \\ \downarrow \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Rang}[(D\varphi)(t)] = n \quad \forall t \in U'_0.$$

*

- injektiv per Definition
- surjektiv wegen (★★).
- φ^{-1} ist stetig, denn sei $x_1 = \varphi(t_1)$, $x_2 = \varphi(t_2)$, so folgt

$$|\varphi^{-1}(x_2) - \varphi^{-1}(x_1)|_{\mathbb{R}^n} = |t_2 - t_1|_{\mathbb{R}^n} \leq \left| \begin{pmatrix} t_2 \\ g(t_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 \\ g(t_1) \end{pmatrix} \right|_{\mathbb{R}^d} = |x_2 - x_1|_{\mathbb{R}^d}.$$

Also ist φ die gesuchte Karte. ■

¹Seien $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^{d-n}$ die Spaltenvektoren der Matrix in (2) und $\delta_j := \dim \text{span}\{v_1, \dots, v_j\}$ für $j = 1, \dots, d$, sowie $\delta_0 := 0$. Gemäß (2) ist $\delta_d = d - n$. Für $j = 1, \dots, d$ gilt entweder $\delta_j = \delta_{j-1}$ oder $\delta_j = \delta_{j-1} + 1$. Letzteres tritt $(d - n)$ -mal auf und wir bezeichnen diese Indizes j mit $j_1, \dots, j_{d-n}$.

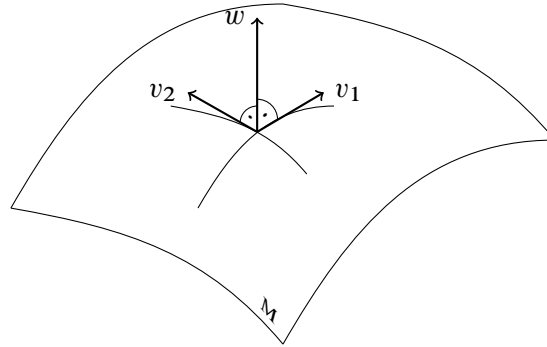


Abbildung 15.3: Skizze von Tangential- und Normalenvektoren

15.2 Tangential- und Normalenvektoren

(20)

15.9 Definition (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (auch uneigentliches), sei $t_0 \in I$. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt **C^1 -Kurve** (in $\mathbb{R}^d$) mit **C^1 -Kurvenbogen** $\kappa(I)$ und $v := \kappa'(t_0) \in \mathbb{R}^d$ heißt **Tangentialvektor** von κ in $\kappa(t_0)$.

NB: Tangentialvektor von κ in $\kappa(t_0)$ i.a. nicht eindeutig, falls κ nicht injektiv in $\kappa(t_0)$.

(b) Sei M eine C^1 -Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^d$, sei $a \in M$.

$$\left. \begin{array}{l} v \in \mathbb{R}^d \text{ ist Tangentialvektor} \\ \text{von } M \text{ in } a \end{array} \right\} : \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0 \text{ und } C^1\text{-Kurve } \kappa :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^d : \\ \kappa(0) = a \text{ und } v = \kappa'(0) \end{array} \right.$$

Tangentialraum von M in a : $T_a M := \{v \in \mathbb{R}^d : v \text{ ist Tangentialvektor von } M \text{ in } a\}$.

$w \in \mathbb{R}^d$ ist **Normalenvektor** von M in a : $\Longleftrightarrow w \perp T_a M$

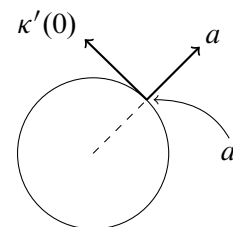
Normalenraum von M in a : $N_a M := \{w \in \mathbb{R}^d : w \text{ ist Normalenvektor von } M \text{ in } a\}$
 $= (T_a M)^\perp$.

15.10 Beispiel Sei $M = S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$. Sei $a := \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \in S^1$ mit $t_0 \in \mathbb{R}$.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte die C^1 -Kurve $\kappa : \mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\lambda t + t_0) \\ \sin(\lambda t + t_0) \end{pmatrix}$. Es

gilt $\kappa(0) = a$ und $\kappa'(0) = \lambda \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix}$. Der nächste Satz zeigt, dass

$$T_a S^1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix} \right\} \implies N_a S^1 = \text{span}\{a\}.$$



15.11 Satz Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine n -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit und sei $a \in M$. Dann gilt

$$(a) \quad T_a M = \text{span} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\} \text{ ist unabhängig von der Wahl der Karte } \varphi : T \rightarrow M \text{ mit } a \in \varphi(T).$$

Insbesondere ist $T_a M$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^d$ mit $\dim(T_a M) = n$.

(b) Sei U eine offene Umgebung von a in $\mathbb{R}^d$ und (gemäß Satz 15.8) seien $f_1, \dots, f_{d-n} \in C^1(U)$ mit

$$M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{d-n}(x) = 0\}$$

und mit $\text{Rang} \frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-n})}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(a) = d - n$. Dann ist

$$N_a M = \text{span} \{(\nabla f_1)(a), \dots, (\nabla f_{d-n})(a)\}$$

unabhängig von der Wahl der $f_1, \dots, f_{d-n}$.

Insbesondere ist $N_a M$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^d$ mit $\dim(N_a M) = d - n$. Zudem gilt

$$v \cdot (\nabla f_j)(a) = 0 \quad \forall v \in T_a M \quad \forall j = 1, \dots, d - n.$$

Beweis. Sei

$$X := \text{span} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\} \quad \text{und} \quad Y := \text{span} \{(\nabla f_1)(a), \dots, (\nabla f_{d-n})(a)\}.$$

Also gilt nach Definition 15.1(a)(iv)

$$\dim(X) = n = \dim(Y^\perp). \quad (\star)$$

Wir zeigen $X \subseteq T_a M \subseteq Y^\perp$ ($\stackrel{(\star)}{\implies} X = T_a M = Y^\perp \implies$ alle Behauptungen).

„ $X \subseteq T_a M$ “ Sei $v := \sum_{j=1}^n \underbrace{\lambda_j}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{d\varphi}{dt_j}(\varphi^{-1}(a))}_{=: \tau \in T \subseteq \mathbb{R}^n} \in X$ beliebig und setze $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Da T offen $\exists \varepsilon > 0 : \tau + t\lambda \in T \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\implies$

$$\kappa : \begin{array}{ccc}]-\varepsilon, \varepsilon[& \rightarrow & M \\ t & \mapsto & \varphi(\tau + t\lambda) \end{array} \text{ ist wohldefinierte } C^1\text{-Kurve,}$$

sowie $\kappa(0) = \varphi(\tau) = a$ und $\kappa'(0) = v$. Somit ist $v \in T_a M$.

„ $T_a M \subseteq Y^\perp$ “ Sei $\kappa :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ eine C^1 -Kurve mit $\kappa(0) = a, \kappa'(0) = v$. Da $\kappa(t) \in M$, folgt für alle $|t| < \varepsilon$ und $j = 1, \dots, d - n$, dass

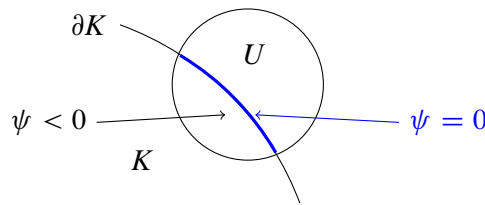
$$f_j(\kappa(t)) = 0 \stackrel{\frac{d}{dt}=0}{\implies} 0 = \frac{d}{dt} f_j(\kappa(t)) \Big|_{t=0} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{l=1}^d \frac{\partial f_j}{\partial x_l}(a) \kappa'_l(0) = (\nabla f_j)(a) \cdot \underbrace{\kappa'(0)}_v$$

$$\implies v \in Y^\perp. \quad \blacksquare$$

15.12 Definition Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^d$.

$$\left. \begin{array}{l} K \text{ ist } d\text{-dim.} \\ \text{Teilmenge mit} \\ C^1\text{-Rand} \end{array} \right\} : \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall a \in \partial K \exists \text{ offene Umgebung } U \ni a \text{ in } \mathbb{R}^d \text{ und } \psi \in C^1(U, \mathbb{R}) : \\ (1) \quad K \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\} \\ (2) \quad \forall x \in U : (\nabla \psi)(x) \neq 0 \\ (3) \quad \partial K \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} K \text{ ist } d\text{-dim. Kompaktum} \\ \text{mit } C^1\text{-Rand} \end{array} \right\} : \Longleftrightarrow K \text{ kompakt und } d\text{-dim. Teilmenge mit } C^1\text{-Rand.}$$



15.13 Bemerkung • (3) ist keine eigenständige Forderung, sondern folgt bereits aus (2) und (1) (siehe Forster 3, §15, S. 176).

- Es genügt (2) für $x = a$ zu fordern, da $\psi \in C^1$.

15.14 Beispiel $\overline{B_1(0)} := \{x \in \mathbb{R}^d : \underbrace{x^2 - 1}_{=: \psi(x)} \leq 0\} \subset \mathbb{R}^d$ ist d -dim. Kompaktum mit C^1 -Rand

$\implies S^{d-1} := \partial \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^d : \psi(x) = 0\}$ und $N_a S^{d-1} = \text{span}\{a\}$ für alle $a \in S^{d-1}$, vgl. Beispiel 15.10.

15.15 Satz Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ eine d -dim. Teilmenge mit C^1 -Rand.
Dann ist ∂K eine $(d-1)$ -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^d$.

Beweis. Folgt aus Satz 15.8 (ii) $\implies$ (i) mit $n = d-1$ und $f_1 = \psi$. ■

15.16 Satz Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ eine d -dim. Teilmenge mit C^1 -Rand. Dann gilt

- (a) $\forall a \in \partial K \exists_1$ **äußerer Normalen-Einheitsvektor** $v(a) := \frac{(\nabla \psi)(a)}{|(\nabla \psi)(a)|} \in \mathbb{R}^d$ von K in a
(ψ wie in Definition 15.12) mit
- (1) $v(a) \perp T_a(\partial K)$,
 - (2) $|v(a)| = 1$,
 - (3) $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[: a + \varepsilon v(a) \notin K$.

- (b) Das **äußere Normalen-Einheitsvektorfeld** $v : \begin{array}{ccc} \partial K & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ a & \mapsto & v(a) \end{array}$ ist stetig.

Beweis. Sei $a \in \partial K$. Dann ist $v(a)$ wohldefiniert und erfüllt (2). Ebenso ist die Stetigkeit von $a \mapsto v(a)$ klar. Eigenschaft (1) folgt mit $\psi = f_1$, siehe Beweis von Satz 15.15, und Satz 15.11 (b). Für Eigenschaft (3) betrachte

$$\psi(a + \varepsilon v(a)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diff.-bar}}}{=} \underbrace{\psi(a)}_0 + \underbrace{(\nabla \psi)(a) \cdot \varepsilon v(a)}_{\varepsilon |(\nabla \psi)(a)|} + o(\varepsilon).$$

Somit ist für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ auch $\psi(a + \varepsilon v(a)) > 0$, also $a + \varepsilon v(a) \notin K$.

Eindeutigkeit: sei $\tilde{v} \in \mathbb{R}^d$ mit (1) – (3). Aus (1) und Satz 15.11 (b) folgt

$$\tilde{v} \in (T_a(\partial K))^\perp = N_a(\partial K) = \text{span} \{(\nabla \psi)(a)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\implies} \tilde{v} = \pm v(a) \stackrel{(3)}{\implies} \tilde{v} = +v(a). \quad \blacksquare$$

15.3 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

21

Problem: Für $n < d$ ist die n -dim. Mannigfaltigkeit M eine Nullmenge bzgl. λ^d .

Idee: Karte $\varphi : T \rightarrow M$ induziert „ n -dim. Lebesgue-Maß“ auf $M \cap \varphi(T)$ als Bildmaß von geeignetem Maß auf T , so dass das Bildmaß unabhängig von Wahl der Karte ist.

Eine zentrale Rolle spielt dabei

15.17 Definition Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine n -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit und $\varphi : T \rightarrow M$ eine Karte.

- **Gram-Matrix :** $G := G_\varphi : \begin{array}{ll} T & \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ t & \mapsto [(D\varphi)(t)]^\top (D\varphi)(t) \end{array}$
(auch **metrischer Tensor**)
- **Gram-Determinante:** $g := g_\varphi : \begin{array}{ll} T & \rightarrow [0, \infty[\\ t & \mapsto \det G(t) \end{array}$

NB: g ist stetig.

15.18 Bemerkung (a) Für alle $t \in T$ ist $g(t) \geq 0$, da $G = [D\varphi]^\top D\varphi \geq 0$ (selbstadjungiert und $u \cdot (A^\top A)u = (Au) \cdot (Au) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$). Also ist $G(t)$ diagonalisierbar mit nicht-negativen Eigenwerten und auch $g(t)$ ist das Produkt dieser Eigenwerte.

(b) Für $j, k \in \{1, \dots, n\}$ und $t \in T$ ist $[G(t)]_{jk} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t)$, wobei „ $\cdot$ “ für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^d$ steht.

Das folgende Lemma hilft uns das Transformationsverhalten von g unter Kartenwechseln zu erkennen.

15.19 Lemma Sei M eine n -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit und seien $\varphi : T \rightarrow V \subseteq M$, $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{V} \subseteq M$ zwei Karten mit $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, sowie $W := \varphi^{-1}(V \cap \tilde{V})$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(V \cap \tilde{V})$ und $\psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : W \rightarrow \tilde{W}$, welches nach Satz 15.6 ein Diffeomorphismus ist. Dann gilt

$$g(t) = [\det(D\psi)(t)]^2 \tilde{g}(\psi(t)) \quad \forall t \in W,$$

wobei $g := g_\varphi$ und $\tilde{g} := g_{\tilde{\varphi}}$ die Gram-Determinanten bzgl. der Karten φ und $\tilde{\varphi}$ sind.

Beweis. Es gilt $\varphi(t) = (\tilde{\varphi} \circ \psi)(t)$ und somit nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} (D\varphi)(t) &= (D\tilde{\varphi})(\psi(t)) (D\psi)(t) \\ \implies g(t) &= \det \left[\underbrace{[(D\psi)(t)]^\top}_{n \times n\text{-Matrix}} \underbrace{[(D\tilde{\varphi})(\psi(t))]^\top}_{n \times d\text{-Matrix}} \underbrace{(D\tilde{\varphi})(\psi(t))}_{d \times n\text{-Matrix}} \underbrace{(D\psi)(t)}_{n \times n\text{-Matrix}} \right]. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ und $\det(A^\top) = \det A$.

15.20 Beispiel Sei $n = d - 1$, $T \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ und $\varrho \in C^1(T, \mathbb{R})$. Für

$$x := ((x_1, \dots, x_{d-1}), x_d) \in T \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x) := x_d - \varrho(x_1, \dots, x_{d-1})$$

gilt $(\nabla f)(x) \neq 0$, also folgt aus Satz 15.8, dass

$$M := \{x \in T \times \mathbb{R} : x_d = \varrho(x_1, \dots, x_{d-1})\}$$

eine $(d - 1)$ -dim. C^1 -Mannigfaltigkeit mit globaler Karte

$$\begin{array}{rcl} & T & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \varphi : & t & \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varrho(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ist. Also folgt

$$(D\varphi)(t) = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & & & 0 & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \hline (\partial_1 \varrho)(t) \cdots \cdots \cdots (\partial_{a-1} \varrho)(t) \end{array}$$

und

$$G(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(d-1) \times (d-1)} & \\ & (\nabla \varrho)(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(d-1) \times (d-1)} \\ \hline (\nabla \varrho)(t)^\top \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{(d-1) \times (d-1)} + P(t),$$

wobei $[P(t)]_{jk} = (\partial_j \varrho)(t)(\partial_k \varrho)(t)$ für $j, k = 1, \dots, d-1$. $P(t)$ ist ein Vielfaches des Orthogonalprojektors auf den Vektor $(\nabla \varrho)(t)$ im $\mathbb{R}^{d-1}$, das heißt, für alle $u \in \mathbb{R}^{d-1}$ gilt

$$P(t)u = \underbrace{[(\nabla \varrho)(t) \cdot u]}_{\in \mathbb{R}} (\nabla \varrho)(t) = |(\nabla \varrho)(t)|^2 \left[\frac{(\nabla \varrho)(t)}{|(\nabla \varrho)(t)|} \cdot u \right] \frac{(\nabla \varrho)(t)}{|(\nabla \varrho)(t)|}.$$

Ergänze $(\nabla \varrho)(t)/|(\nabla \varrho)(t)|$ zu einer Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^{d-1} \implies G(t)$ hat einfachen Eigenwert $1 + |(\nabla \varrho)(t)|^2$ und $(d-2)$ -fach entarteten Eigenwert 1, also

$$g(t) = 1 + |(\nabla \varrho)(t)|^2.$$

15.21 Satz Sei M eine n -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^d$ mit Atlas $\{\varphi_\alpha : T_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ (existiert wegen Lemma 15.4) und der Zerlegung $M = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} U_\alpha$, wobei $U_\alpha \subseteq V_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{B}^d \cap M$ (existiert wegen Lemma 11.12). Sei $g_\alpha := g_{\varphi_\alpha}$ die Gram-Determinante bzgl. der Karte φ_α . Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^d \cap M &\rightarrow [0, \infty] \\ \lambda_M : B &\mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(B \cap U_\alpha)} \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t) \end{aligned}$$

ein Maß, das **Lebesgue-Borel-Maß auf M** , und unabhängig von der Wahl des abzählbaren Atlas.

Beweis. λ_M ist ein Maß: für $\alpha \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^n \cap \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow [0, \infty] \\ \tau_\alpha := \tau_{\varphi_\alpha} : S &\mapsto \int_S \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t) \end{aligned} \quad (\star)$$

ein Maß (klar!) $\implies$ das Bildmaß $\varphi_\alpha(\tau_\alpha)$ ist ein Maß auf $\mathcal{B}^d \cap U_\alpha \implies$

$$\lambda_M = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} (\varphi_\alpha(\tau_\alpha))(\cdot \cap U_\alpha) \quad (\star\star)$$

ist ein Maß auf $\mathcal{B}^d \cap M$ (verwende den großen Umordnungssatz für Reihen – d.h. Fubini für Zählmaße – für die σ -Additivität).

Unabhängigkeit von λ_M von der Wahl der Karte: seien $\varphi : T \rightarrow V$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{V}$ zwei Karten von M wie in Lemma 15.19 mit $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Seien $W := \varphi^{-1}(V \cap \tilde{V})$ und $\tilde{W} := \varphi^{-1}(V \cap$

$\tilde{V}$), sowie $\tau := \tau_\varphi$ und $\tilde{\tau} := \tau_{\tilde{\varphi}}$ wie in $(\star)$. Nach Satz 15.6 ist $\psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : W \rightarrow \tilde{W}$ ein Diffeomorphismus und für alle $B \in \mathcal{B}^d \cap (V \cap \tilde{V})$ gilt

$$\begin{aligned} (\varphi(\tau))(B) &= \int_{\varphi^{-1}(B)} \underbrace{\sqrt{g(t)}}_{\substack{\text{nach Lemma 15.19} \\ |\det(D\psi)(t)|\sqrt{\tilde{g}(\psi(t))}}} d\lambda^n(t) \stackrel{\substack{\text{Trafo-Formel} \\ \text{Kor. 14.22}}}{=} \int_{\underbrace{\psi(\varphi^{-1}(B))}_{\tilde{\varphi}^{-1}(B)}} \sqrt{\tilde{g}(\tilde{t})} d\lambda^n(\tilde{t}) \\ &= (\tilde{\varphi}(\tilde{\tau}))(B), \end{aligned}$$

d.h. die Bildmaße auf M im Schnittgebiet stimmen überein. Die Behauptung folgt mit der Form $(\star\star)$ von λ_M . ■

15.22 Korollar *Mit der Notation des vorigen Satzes gilt*

$$f \in \mathcal{L}^1(M, \mathcal{B}^d \cap M, \lambda_M) \iff \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} f_\pm(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} d\lambda^n(t) < \infty.$$

In diesem Fall ist

$$\int_M f(x) d\lambda_M(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} f(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} d\lambda^n(t). \quad (\star)$$

Beweis. Für das Integral der Indikatorfunktion einer Menge $B \in \mathcal{B}^d \cap M$ gilt

$$\begin{aligned} \int_M 1_B(x) d\lambda_M(x) &:= \lambda_M(B) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(B \cap U_\alpha)} \sqrt{g_\alpha(t)} d\lambda^n(t) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} 1_B(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} d\lambda^n(t). \end{aligned}$$

Also gilt $(\star)$ für Elementarfunktionen. Zweimalige monotone Konvergenz liefert dann $(\star)$ für nicht-negative, $\mathcal{B}^d \cap M$ -messbare Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und daraus folgt die Behauptung. ■

15.23 Beispiel Die Sphäre $S_r^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\}$ vom Radius $r > 0$ in $\mathbb{R}^2$ mit den 2 Karten

$$\varphi : \begin{array}{ll}]0, 2\pi[& \rightarrow S_r^1 \\ t & \mapsto r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi} : \begin{array}{ll}]-\pi, \pi[& \rightarrow S_r^1 \\ t & \mapsto r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array}.$$

Setze $V := \varphi(]0, 2\pi[)$, $\tilde{V} := \tilde{\varphi}(]-\pi, \pi[)$ und wähle

$$U := V = S_r^1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \tilde{U} := \tilde{V} \setminus U = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

dann ist $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{U}) = \{0\}$ eine Nullmenge von λ^1 in $] - \pi, \pi[\implies$ liefert keinen Beitrag zu $(\star)$ in Korollar 15.22. Weiter gilt $\forall t \in \varphi^{-1}(U) =]0, 2\pi[$

$$(D\varphi)(t) = r \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \implies G(t) = r^2(-\sin t, \cos t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = r^2 \implies g(t) = r^2.$$

Also gilt für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ messbar ($\implies f|_{S_r^1} \mathcal{B}^2 \cap S_r^1$ -messbar)

$$f \in \mathcal{L}^1(S_r^1, \lambda_{S_r^1}) \iff t \mapsto f(r \cos t, r \sin t) \in \mathcal{L}^1(]0, 2\pi[, \lambda^1)$$

und

$$\int_{S_r^1} f(x) d\lambda_{S_r^1}(x) = r \int_{]0, 2\pi[} f(r \cos t, r \sin t) dt,$$

wobei auf der rechten Seite $]0, 2\pi[$ auch durch $[0, 2\pi]$ ersetzt werden kann.

Spezielle Wahl $f = 1 \implies$ Kreisumfang $\lambda_{S_r^1}(S_r^1) = 2\pi r$.

15.4 Satz von Gauß

22

Der Satz von Gauß kann als mehrdimensionales Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aufgefasst werden. Zur Vorbereitung dient ein lokaler Spezialfall.

15.24 Lemma Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen und $\varrho \in C^1(U', \mathbb{R})$ beschränkt. Seien

$$A := \{(x', x_d) \in U' \times \mathbb{R} : x_d \leq \varrho(x')\}$$

$$M := \{(x', x_d) \in U' \times \mathbb{R} : x_d = \varrho(x')\}$$

und $f \in C_c^1(U' \times \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $k = 1, \dots, d$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) d\lambda^d(x) = \int_M f(x) v_k(x) d\lambda_M(x),$$

wobei $v(\underbrace{x}_{(x', x_d)}) := [1 + |(\nabla \varrho)(x')|^2]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -(\nabla \varrho)(x') \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ der äußere Normalen-Einheitsvektor in $x \in M$ ist (vgl. Satz 15.16 (a) mit $\psi(x) = x_d - \varrho(x')$ für die Interpretation von v).

Beweis. Nach Beispiel 15.20 betrachten wir die globale Karte

$$\begin{aligned} U' &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ \varphi : x' &\mapsto \begin{pmatrix} x' \\ \varrho(x') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

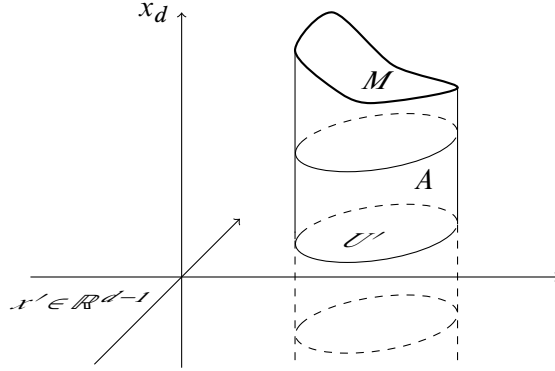


Abbildung 15.4: Illustration von Lemma 15.24

der $(d-1)$ -dimensionalen C^1 -Mannigfaltigkeit M mit Gram-Determinante $g(x') = 1 + [(\nabla \varrho)(x')]^2$ für alle $x' \in U'$. Nach Korollar 15.22 gilt für die rechte Seite der Behauptung

$$\begin{aligned} \int_M f(x) v(x) d\lambda_M(x) &= \int_{U'} f(x', \varrho(x')) v(x', \varrho(x')) \sqrt{g(x')} d\lambda^{d-1}(x') \\ &= \int_{U'} f(x', \varrho(x')) \begin{pmatrix} -(\nabla \varrho)(x') \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda^{d-1}(x'). \end{aligned} \quad (\star)$$

Für die linke Seite gilt im Fall

$k = d$:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_d}(x) d\lambda^d(x) &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\varrho(x')} \frac{\partial f}{\partial x_d}(x', x_d) dx_d \right)}_{f(x', \varrho(x')) - \underbrace{\lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(x', \xi)}_{=0, \text{ da } \text{supp } f \text{ kompakt}}} d\lambda^{d-1}(x') \end{aligned}$$

und mit $(\star)$ folgt die Behauptung.

$k \in \{1, \dots, d-1\}$:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) d\lambda^d(x) &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \left(\int_{-\infty}^{\varrho(x')} \frac{\partial f}{\partial x'_k}(x', x_d) dx_d \right) d\lambda^{d-1}(x') \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{U'} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x'_k} \int_{-\infty}^{\varrho(x')} f(x', x_d) dx_d - f(x', \varrho(x')) \frac{\partial \varrho}{\partial x'_k}(x') \right)}_{=: F(x')} d\lambda^{d-1}(x') \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x'_k} F(x') \, d\lambda^{d-1}(x')}_0 + \int_{U'} f(x', \varrho(x')) \left(-\frac{\partial \varrho}{\partial x'_k} \right)(x') \, d\lambda^{d-1}(x'),$$

wobei das erste Integral wegen der Kompaktheit von $\text{supp } F \subset U'$ gemäß Aufgabe E9.1(a) verschwindet. Somit folgt die Behauptung wieder mit $(\star)$. ■

Nun kommen wir zur globalen Version.

15.25 Satz (von GAUSS) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $F \in C^1(A, \mathbb{R}^d)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $K \subseteq A$ ein d -dim. Kompaktum mit C^1 -Rand. Dann gilt

$$\int_K (\nabla \cdot F)(x) \, d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x) \, d\lambda_{\partial K}(x),$$

wobei $\nabla \cdot F$ die Divergenz von F und ν das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld von K bezeichnen.

15.26 Bemerkung Der Satz von Gauß gilt auch dann noch, wenn ∂K nur glatt bis auf eine $(d-1)$ -dimensionale Nullmenge ist, beispielsweise ein Würfel.

Wir beweisen den Satz von Gauß durch Zusammensetzen der lokalen Versionen. Dazu benötigen wir allerdings noch eine Vorarbeit.

15.27 Definition Sei $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{Z}^d$ und $\gamma_{p,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$$\left. \begin{array}{l} \{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p \in \mathbb{Z}^d} \text{ ist} \\ (C^\infty)\text{-Zerlegung der} \\ \text{Eins (in } \mathbb{R}^d) \end{array} \right\} : \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \text{supp } \gamma_{p,\varepsilon} = \bigtimes_{j=1}^d [\varepsilon(p_j - 1), \varepsilon(p_j + 1)] \\ (2) \quad \gamma_{p,\varepsilon} \geq 0 \\ (3) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d: \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\varepsilon}(x) = 1 \end{array} \right.$$

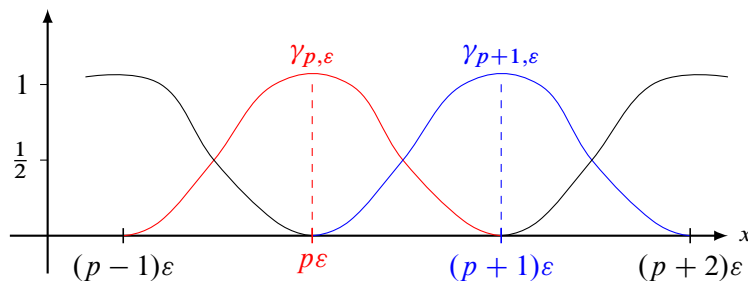


Abbildung 15.5: Illustration einer Zerlegung der Eins in einer Dimension.

15.28 Beispiel Sei

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), & |t| < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } g = [-1, 1]$ nach Aufgabe 9.1. Für $t \in \mathbb{R}$ setze

$$\gamma(t) := \frac{g(t)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k)}.$$

Dann gilt

$$\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{supp } \gamma = [-1, 1] \quad \text{und} \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma(\cdot - l) = 1.$$

Für $\varepsilon > 0$ und $p \in \mathbb{Z}^d$ definiere

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \gamma_{p,\varepsilon}(x) := \prod_{j=1}^d \gamma\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - p_j\right).$$

Dann ist $\{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p \in \mathbb{Z}^d}$ eine C^∞ -Zerlegung der Eins in $\mathbb{R}^d$.

Noch ein technischer Hilfssatz.

15.29 Lemma (Lebesgue) Sei X ein metrischer Raum und $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge. Sei $K \subseteq X$ kompakt und $\{U_j\}_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von K . Dann existiert $\ell > 0$ (**Lebesgue-Zahl**) mit

$$\forall A \subseteq X \text{ mit } A \cap K \neq \emptyset \text{ und } \text{diam}(A) \leq \ell \exists j \in J: A \subseteq U_j.$$

Beweis. Für alle $x \in K \exists r_x > 0$ und $j_x \in J: B_{r_x}(x) \subseteq U_{j_x}$. Somit ist $\{B_{\frac{r_x}{2}}(x)\}_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_N \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{n=1}^N B_{\frac{r_{x_n}}{2}}(x_n)$.

Setze $\ell := \min\left(\frac{r_{x_1}}{2}, \dots, \frac{r_{x_N}}{2}\right)$.

Nun sei $A \subseteq X$ mit $A \cap K \neq \emptyset$ und $\text{diam}(A) \leq \ell$. Wähle ein $a \in A \cap K$, dann folgt

$$\exists n := n_a \in \{1, \dots, N\}: a \in B_{\frac{r_{x_n}}{2}}(x_n) \xrightarrow{\text{diam}(A) \leq \ell} A \subset B_{r_{x_n}}(x_n) \subseteq U_{j_{x_n}}. \quad \blacksquare$$

Kommen wir nun zum eigentlichen

Beweis von Satz 15.25. (1) Sei $a \in \partial K$

$$\xrightarrow{C^1\text{-Rand}} \exists (\text{in } \mathbb{R}^d) \text{ offene Umgebung } U \text{ von } a \text{ und } \exists \psi \in C^1(U) \text{ mit}$$

- (a) $(\nabla \psi)(x) \neq 0$ für alle $x \in U$,
- (b) $\partial K \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}$,
- (c) $K \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$.

(a) $\implies \exists j \in \{1, \dots, d\}$ mit $(\partial_j \psi)(a) \neq 0$.

Für $x \in U$ sei $x' := (\dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots) \in \mathbb{R}^{d-1}$ [j -te Komponente fehlt!]. Sei $F(x', x_j) := \psi(x)$. Nach Voraussetzung gibt es $\delta > 0$, so dass

$$\underbrace{B_{\frac{\delta}{2}}^{(d-1)}(a')}_{=: U' \subset \mathbb{R}^{d-1}} \times \underbrace{B_{\frac{\delta}{2}}^{(1)}(a_j)}_{=: I \subset \mathbb{R}} \xrightarrow[\text{Dreiecksungleichung}]{\subseteq} B_{\delta}^{(d)}(a) \subseteq U.$$

Dies impliziert $F \in C^1(U' \times I)$ mit $\frac{\partial F}{\partial x_j}(a', a_j) = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(a) \neq 0$ und

$$\partial K \cap (U' \times I) = \{(x', x_j) \in U' \times I : F(x', x_j) = 0\}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen folgt nun

$$\begin{aligned} \exists U'_0 &\subseteq U' \text{ offene Umgebung von } a' \\ \exists I_0 &\subseteq I \text{ offene Umgebung von } a_j \\ \exists \varrho \in C^1(U'_0, I_0) &\text{ mit } \partial K \cap \underbrace{U_a}_{:= U'_0 \times I_0} = \{(x', x_j) \in U_a : x_j = \varrho(x')\}. \end{aligned}$$

Aus (c) folgt

$$K \cap U_a = \{(x', x_j) \in U_a : x_j \leq \varrho(x')\}.$$

Moral: K wird lokal um $a \in \partial K$ wie in Lemma 15.24 beschrieben (modulo $j \leftrightarrow d$).

(2) Für $r > 0$ sei $V_r := \{x \in K : \text{dist}(x, \partial K) > r\}$. $\forall a \in \partial K \exists \delta_a > 0 : B_{\delta_a}(a) \subseteq U_a$.

∂K ist als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktum K selbst kompakt

$$\implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ und } \exists a_1, \dots, a_N \in \partial K : \partial K \subset \bigcup_{n=1}^N B_{\delta_{a_n}/2}(a_n). \text{ Sei } r_0 := \min\{\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_N}\}/2$$

$$\begin{aligned} \text{und sei } x \in K \setminus V_{r_0} &\xrightarrow{\partial K \text{ kompakt}} \exists a(x) \in \partial K : |a(x) - x| \leq r_0 \text{ und } \exists n_x \in 1, \dots, N : a(x) \in \\ B_{\delta_{a_{n_x}}/2}(a_{n_x}) &\implies x \in B_{\delta_{a_{n_x}}}(a_{n_x}) \subseteq U_{a_{n_x}} \implies \end{aligned}$$

$$K \subset \left(\bigcup_{a \in \partial K} U_a \right) \cup V_{r_0}.$$

Sei ℓ die zugehörige Lebesgue-Zahl dieser offenen Überdeckung nach Lemma 15.29.

$$\text{Sei } \{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p \in \mathbb{Z}^d} \text{ eine } C^\infty\text{-Zerlegung der Eins mit } \varepsilon := \frac{\ell}{2\sqrt{d}} \implies \underbrace{\text{diam supp } \gamma_{p,\varepsilon}}_{\text{Würfel der Kantenlänge } 2\varepsilon} \leq \ell.$$

Sei $P_K := \{p \in \mathbb{Z}^d : \text{supp } \gamma_{p,\varepsilon} \cap K \neq \emptyset\} \implies P_K$ endlich (da K beschränkt).

Mit Lemma 15.29 folgt dann für alle $p \in P_K$, dass

$$\text{entweder: } \text{supp } \gamma_{p,\varepsilon} \subset V_{r_0},$$

$$\text{oder: } \exists a \in \partial K : \text{supp } \gamma_{p,\varepsilon} \subset U_a.$$

Da $F(x) = \sum_{p \in P_K} \gamma_{p,\varepsilon}(x) F(x)$ für alle $x \in K$, folgt

$$\begin{aligned} \int_K (\nabla \cdot F)(x) \, d\lambda^d(x) &= \sum_{p \in P_K} \int_K (\nabla \cdot (\gamma_{p,\varepsilon} F))(x) \, d\lambda^d(x), \\ \int_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x) \, d\lambda_{\partial K}(x) &= \sum_{p \in P_K} \int_{\partial K} (\gamma_{p,\varepsilon}(x) F(x)) \cdot \nu(x) \, d\lambda_{\partial K}(x). \end{aligned}$$

Moral: Es genügt den Satz für das C^1 -Vektorfeld $\gamma_{p,\varepsilon} F$ zu zeigen.

(3) Sei $k \in \{1, \dots, d\}$, $p \in P_K$ und $f_k := \gamma_{p,\varepsilon} F_k$.

1. Fall: $\text{supp } \gamma_{p,\varepsilon} \subset V_{r_0} \implies$

$$\int_K \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x) \, d\lambda^d(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aufg. E9.1(a)}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \partial K \cap V_{r_0} = \emptyset}}{=} \int_{\partial K} f_k(x) \nu_k(x) \, d\lambda_{\partial K}(x).$$

2. Fall: $\text{supp } \gamma_{p,\varepsilon} \subset U_a \implies$

$$\begin{aligned} \int_K \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x) \, d\lambda^d(x) &= \int_{K \cap U_a} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x) \, d\lambda^d(x) \stackrel{\substack{\text{Lemma 15.24} \\ \text{da (1)}}}{=} \int_{\partial K \cap U_a} f_k(x) \nu_k(x) \, d\lambda_{\partial K \cap U_a}(x) \\ &= \int_{\partial K} f_k(x) \nu_k(x) \, d\lambda_{\partial K}(x). \end{aligned}$$

Summation über $k = 1$ bis d in jedem der beiden Fälle und (2) liefert die Behauptung. $\blacksquare$

15.30 Beispiel Sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $K = \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$. Dann ist $\partial K = S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$. Betrachte das C^1 -Vektorfeld $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit konstanter Divergenz $\nabla \cdot F = d$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d \lambda^d(B_1(0)) &= \int_{B_1(0)} (\nabla \cdot F)(x) \, d\lambda^d(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß}}}{=} \int_{S^{d-1}} \underbrace{F(x) \cdot \nu(x)}_{x^2=1} \, d\lambda_{S^{d-1}}(x) = \lambda_{S^{d-1}}(S^{d-1}) \\ \implies \lambda_{S^{d-1}}(S^{d-1}) &= d \lambda^d(B_1(0)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aufg. E9.2(c)}}}{=} \frac{d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}. \end{aligned}$$

Spezielle Werte für $d = 2, 3$: $\lambda_{S^1}(S^1) = 2\pi$, $\lambda_{S^2}(S^2) = 4\pi$.

15.31 Korollar (GREEN-Formeln) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subset A$ ein d -dim. Kompaktum mit C^1 -Rand und $f, g \in C^2(A, \mathbb{R})$. Dann gelten die Identitäten

$$\int_K (\nabla f)(x) \cdot (\nabla g)(x) \, d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} f(x) \underbrace{v(x) \cdot (\nabla g)(x)}_{=: (\partial_v g)(x)} \, d\lambda_{\partial K}(x) - \int_K f(x)(\Delta g)(x) \, d\lambda^d(x)$$

äußere Normalenableitung von g (GF1)

und

$$\int_K [f(x)(\Delta g)(x) - (\Delta f)(x)g(x)] \, d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} [f(x)(\partial_v g)(x) - (\partial_v f)(x)g(x)] \, d\lambda_{\partial K}(x).$$

(GF2)

Beweis. (GF1) folgt aus dem Satz von Gauß mit $F = f \nabla g$.

(GF2) folgt aus der Differenz von (GF1) und (GF1) mit vertauschten Rollen von f und g . ■

Kurvenintegrale und der Satz von Stokes

16.1 Kurvenintegrale

Generalvoraussetzung für diesen Abschnitt: $I \subset \mathbb{R}$ ist ein kompaktes Intervall und $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine C^1 -Kurve mit C^1 -Kurvenbogen $\Gamma_\kappa =: \Gamma$ sind, siehe Definition 15.9.

16.1 Definition • Sei $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ein $\mathcal{B}^d \cap \Gamma$ -messbares Skalarfeld mit $(f \circ \kappa)|\kappa'| \in L^1(I)$.

$$\textbf{Kurvenintegral (für Skalarfelder)} \quad \int_{\kappa} f(x) \, dx := \int_I f(\kappa(t)) |\kappa'(t)| \, dt.$$

• Sei $A : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein $\mathcal{B}^d \cap \Gamma$ -messbares Vektorfeld mit $(A \circ \kappa) \cdot \kappa' \in L^1(I)$.

$$\textbf{Kurvenintegral (für Vektorfelder)} \quad \int_{\kappa} A(x) \cdot dx := \int_I A(\kappa(t)) \cdot \kappa'(t) \, dt.$$

• Eine C^1 -Kurve κ heißt **geschlossen** $:\Leftrightarrow \kappa(\min I) = \kappa(\max I)$. In diesem Fall sind auch übliche Notationen

$$\oint_{\kappa} f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \oint_{\kappa} A(x) \cdot dx.$$

16.2 Bemerkung (a) Falls κ nicht injektiv ist, werden Teile von Γ mehrfach durchlaufen.

(b) Falls $\kappa(I) = \Gamma$ eine 1-dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit ist, es eine λ -Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$ gibt mit $\kappa|_{I \setminus N}$ ist eine Karte von Γ und $\tilde{\kappa}^{-1}(\kappa(N))$ ist eine λ -Nullmenge für eine Karte $\tilde{\kappa}$ von Γ mit Kartengebiet $\supset \kappa(N)$, so gilt nach Satz 15.21

$$\int_{\kappa} f(x) \, dx = \int_{\Gamma} f(x) \, d\lambda_{\Gamma}(x).$$

Als Beispiel dient $\Gamma = S^1, \kappa : \begin{matrix} [0, 2\pi] & \rightarrow & S^1 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{matrix}$, vgl. Beispiel 15.23.

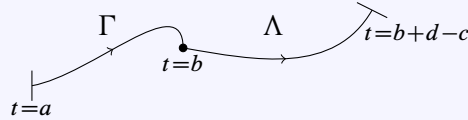
Von nun an gelte: Alle Kurven sind bis auf eine Nullmenge injektiv!

16.3 Definition • Zu einer C^1 -Kurve $\kappa : [a, b] \rightarrow \Gamma$ ist die zugehörige **rückwärts durchlaufene Kurve** die C^1 -Kurve

$$\kappa^- : \begin{array}{ll} [a, b] & \rightarrow \Gamma \\ t & \mapsto \kappa(b + a - t) \end{array} .$$

- Sei κ wie oben und $\lambda : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine C^1 -Kurve mit C^1 -Kurvenbogen Λ und $\kappa(b) = \lambda(c)$, dann ist die **Aneinanderkettung von κ und λ**

$$\lambda \odot \kappa : \begin{array}{ll} [a, b + (d - c)] & \rightarrow \Gamma \cup \Lambda \\ t & \mapsto \begin{cases} \kappa(t) & , t \in [a, b] \\ \lambda(t - b + c) & , t \in]b, b + (d - c)] \end{cases} \end{array}$$



- κ heißt **stückweise C^1 -Kurve** $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ und $\exists \kappa_1, \dots, \kappa_n$ C^1 -Kurven mit $\kappa = \kappa_n \odot \dots \odot \kappa_1$
- Seien κ, λ C^1 -Kurven wie oben und $f : \Gamma \cup \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Setze

$$\int_{\lambda \odot \kappa} f(x) dx := \int_{\lambda} f(x) dx + \int_{\kappa} f(x) dx,$$

falls beide Integrale auf rechter Seite existieren. Analog für Vektorfelder.

Falls $\lambda \odot \kappa$ sogar C^1 -Kurve ist, dann ist diese Definition im Einklang mit Definition 16.1.

24

16.4 Definition Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$. Wir nennen

$$B \text{ sternförmig} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists x_0 \in B \quad \forall x \in B : \underbrace{\{x_0 + \tau(x - x_0) : \tau \in [0, 1]\}}_{\text{Geradenstück von } x_0 \text{ nach } x} \subseteq B.$$

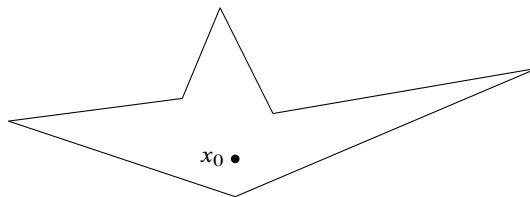


Abbildung 16.1: Eine sternförmige Menge mit Zentrum x_0

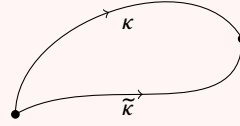
16.5 Satz (über Gradientenfelder) Für $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und ein Vektorfeld $A \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ betrachte die Aussagen

(i) Für alle geschlossenen, stückweisen C^1 -Kurven κ mit $\Gamma \subset U$ gilt

$$\oint_{\kappa} A(x) \cdot dx = 0.$$

(ii) Für alle stückweisen C^1 -Kurven $\kappa : I \rightarrow \Gamma \subseteq U$ und $\tilde{\kappa} : \tilde{I} \rightarrow \tilde{\Gamma} \subseteq U$ mit denselben Anfangs- und Endpunkten, $\kappa(\max I) = \tilde{\kappa}(\max \tilde{I})$ und $\kappa(\min I) = \tilde{\kappa}(\min \tilde{I})$ gilt die **Wegunabhängigkeit**

$$\int_{\kappa} A(x) \cdot dx = \int_{\tilde{\kappa}} A(x) \cdot dx.$$



(iii) A ist ein **Gradientenfeld** (auch: **konservativ**), das heißt,

$$\exists \text{ Potential (auch: Stammfunktion) } f \in C^2(U, \mathbb{R}) \text{ mit } A = \nabla f.$$

(iv) Es gelten die **Integrabilitätsbedingungen** für A

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad \forall j, k \in \{1, \dots, d\}.$$

Dann gilt

$$(i) \iff (ii) \iff (iii) \implies (iv).$$

Falls U zusätzlich noch sternförmig ist, so gilt auch das **Lemma von POINCARÉ**, das heißt,

$$(iv) \implies (iii).$$

16.6 Bemerkung (a) Der Beweis zeigt, dass (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) gilt auch dann, falls nur $A \in C(U, \mathbb{R}^d)$. In dem Fall ist dann $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.

(b) (iv) in $d = 3$ bedeutet $\nabla \times A = 0$, das heißt, A ist wirbelfrei.

(c) Die Voraussetzung eines sternförmigen U für (iv) $\implies$ (iii) kann abgeschwächt, aber nicht weggelassen werden!

Beweis von Satz 16.5. (i) $\implies$ (ii) Folgt aus $\tilde{\kappa}^- \odot \kappa$ ist eine geschlossene, stückweise C^1 -Kurve

$$0 \stackrel{(i)}{=} \int_{\tilde{\kappa}^- \odot \kappa} A(x) \cdot dx \stackrel{\text{Def. 16.3}}{=} \int_{\kappa} A(x) \cdot dx + \int_{\tilde{\kappa}^-} A(x) \cdot dx = \int_{\kappa} A(x) \cdot dx - \int_{\tilde{\kappa}} A(x) \cdot dx$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Definiere für $x, y \in U$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim y : \Longleftrightarrow \exists \kappa : I \rightarrow U \text{ stückweise } C^1\text{-Kurve in } U \text{ mit } \kappa(\min I) = x \text{ und } \kappa(\max I) = y.$$

Die Äquivalenzklasse $[x] := \{y \in U : y \sim x\}$ stimmt mit der Wegzusammenhangskomponente von $x \in U$ überein, siehe die Definition¹ im Beweis von Satz 10.41(b), und es gilt $U = \bigcup_{[x] \in U/\sim} [x]$.

1. Schritt Spezialfall, dass U wegzusammenhängend ist, also $U = [x_0]$ für ein $x_0 \in U$.

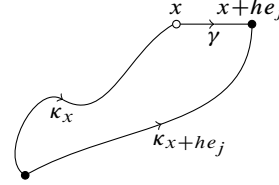
Sei $x_0 \in U$ nun fixiert, sei $x \in U$ beliebig und wähle eine stückweise C^1 -Kurve κ_x mit Anfangspunkt x_0 , Endpunkt x und Kurvenbogen $\Gamma \subset U$. Dann ist

$$f(x) := \int_{\kappa_x} A(y) \cdot dy, \quad x \in U,$$

wohldefiniert, da nur von x abhängig (und vom fixierten x_0), nicht aber von der Wahl der Kurve κ_x aufgrund von (ii). Wähle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ genügend nahe bei Null, so dass $B_{2|h|}(x) \subset U$. Sei $j \in \{1, \dots, d\}$ und $e_j \in \mathbb{R}^d$ der Einheitsvektor in j -Richtung $\Rightarrow x + he_j \in U \xrightarrow{U \text{ wegzush.}} \exists$ stückweise C^1 -Kurve κ_{x+he_j} in U von x_0 nach $x + he_j$.

$$\text{Sei } \gamma : \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow U \\ t \mapsto x + the_j \end{array}.$$

Dann folgt



$$\frac{1}{h}[f(x + he_j) - f(x)] = \frac{1}{h} \left[\int_{\kappa_{x+he_j}} A(y) \cdot dy - \int_{\kappa_x} A(y) \cdot dy \right] = \frac{1}{h} \int_{\kappa_{x+he_j} \ominus \kappa_x^-} A(y) \cdot dy$$

$$\stackrel{\text{n.V. (ii)}}{=} \frac{1}{h} \int_{\gamma} A(y) \cdot dy = \int_0^1 \underbrace{A(x + the_j) \cdot e_j}_{A_j(x + the_j)} dt$$

$$\stackrel{\text{Mittelwertsatz 6.20}}{=} A_j(x + \theta_h e_j) \quad \text{mit } \theta_h \in [0, h]$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} A_j(x) \quad \text{wegen Stetigkeit.}$$

Also existiert ∇f und $\nabla f = A \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$. Also gilt auch $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

¹Wegzusammenhangskomponente von x in U :

$$\mathcal{W}(x) := \{y \in U : \exists \text{ stetige Kurve } \kappa : I \rightarrow U \text{ mit } \kappa(\min I) = x \text{ und } \kappa(\max I) = y\}.$$

Es gilt $[x] = \mathcal{W}(x)$. Die Richtung $[x] \subseteq \mathcal{W}(x)$ klar. Umgekehrt sei $y \in \mathcal{W}(x)$ und sei $\kappa \in C(I, U)$ eine zugehörige stetige Kurve zwischen x und y . Ihr Kurvenbogen $\Gamma := \kappa(I)$ ist kompakt, da I kompakt und κ stetig. Da U offen $\Rightarrow \forall x \in U \exists r_x > 0$ mit $B_{r_x}(x) \subseteq U$ und $\Gamma \subset \bigcup_{x \in \Gamma} B_{r_x}(x)$ ist eine offene Überdeckung $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_N \in \Gamma$ mit

$\Gamma \subset \bigcup_{n=1}^N B_{r_{x_n}}(x_n)$. Somit gibt es einen Polygonzug von x nach y via höchstens $N - 1$ Punkten, die jeweils im Schnitt zweier (oder mehr) Bälle liegen. Da mit je 2 Punkten in einem offenen Ball auch deren Verbindungsgerade in demselben offenen Ball liegt, liegt der Polygonzug in U – und er lässt sich als Kurvenbogen einer stückweisen C^1 -Kurve erhalten.

2. Schritt Falls U nicht wegzusammenhängend ist, zerlege U in seine Wegzusammenhangskomponenten und definiere f separat auf all diesen wie im 1. Schritt.

(Beachte dabei: auch $[x] \in U / \sim$ ist offen in $\mathbb{R}^d$, da für alle $y \in [x]$ auch $y \in U$ und damit für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ auch $B_\varepsilon(y) \subseteq U$. Somit gilt $B_\varepsilon(y) \subseteq [x]$.)

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\kappa = \kappa_n \odot \cdots \odot \kappa_1 : I \rightarrow U$ eine geschlossene, stückweise C^1 -Kurve, wobei $\kappa_\nu : I_\nu \rightarrow U$ für $\nu = 1, \dots, n$ C^1 -Kurven mit $\kappa_\nu(\max I_\nu) = \kappa_{\nu+1}(\min I_{\nu+1})$ für $\nu = 1, \dots, n-1$ und $\kappa_n(\max I_n) = \kappa_1(\min I_1)$. Es folgt dann, dass

$$\begin{aligned} \oint_{\kappa} (\nabla f)(x) \cdot dx &= \sum_{\substack{\uparrow \\ \text{per Def.}}} \sum_{\nu=1}^n \int_{\kappa_\nu} (\nabla f)(x) \cdot dx = \sum_{\nu=1}^n \int_{I_\nu} \underbrace{(\nabla f)(\kappa_\nu(t)) \cdot \kappa'_\nu(t)}_{\frac{d}{dt} f(\kappa_\nu(t))} dt \\ &= \sum_{\nu=1}^n [f(\kappa_\nu(\max I_\nu)) - f(\kappa_\nu(\min I_\nu))] = 0. \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Mit dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit 2. partieller Ableitungen.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Sei U zudem sternförmig. Ohne Einschränkung sei $x_0 = 0$ der zentrale Punkt für die Verbindungsstrecken. Betrachte

$$U \ni x \mapsto f(x) := \sum_{k=1}^d x_k \int_0^1 A_k(\underbrace{tx}_{\in U, \text{ da } U \text{ sternförmig}}) dt.$$

Es gilt $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, da $A \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ und Differentiation und t -Integral nach Aufgabe E6.2(b) vertauschbar sind – die Existenz der Majorante in Aufgabe E6.2(b) folgt aus der Beschränktheit der ersten partiellen Ableitungen von A auf Kompakta (da stetig). Also gilt $\forall j = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 A_j(tx) dt + \sum_{k=1}^d x_k \int_0^1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} [A_k(tx)]}_{t \frac{\partial A_k}{\partial x_j}(tx)} dt \\ &= \int_0^1 \underbrace{\left[A_j(tx) + t \sum_{k=1}^d x_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k}(tx) \right]}_{\frac{d}{dt} A_j(tx)} dt = t A_j(tx) \Big|_0^1 = A_j(x). \end{aligned}$$

Da $A \in C^1(U, \mathbb{R}^d) \implies f \in C^2(U, \mathbb{R}^d)$ und $\nabla f = A$. ■

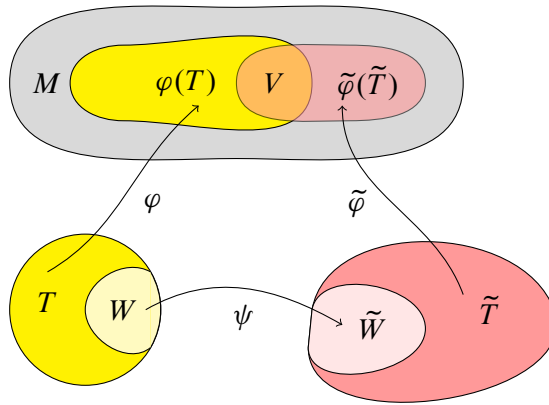


Abbildung 16.2: Zwei überlappende Karten wie in Definition 16.7.

16.2 Orientierte Hyperflächen mit Rand

25

16.7 Definition Sei M eine n -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^d$.

- Seien $\varphi, \tilde{\varphi}$ zwei **überlappende** Karten von M , das heißt $V := \varphi(T) \cap \varphi(\tilde{T}) \neq \emptyset$. Sei $W := \varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ und $\psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : W \rightarrow \tilde{W}$ der Diffeomorphismus aus Satz 15.6(b). Wir nennen

$$\varphi, \tilde{\varphi} \left\{ \begin{array}{l} \text{gleich-} \\ \text{gegensätzlich} \end{array} \right\} \text{orientiert} \iff \det(D\psi)(t) \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0 \quad \forall t \in W$$

- $\mathcal{A}$ **orientierter Atlas** von M $\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{je 2 überlappende Karten von } \mathcal{A} \\ \text{sind gleichorientiert} \end{array} \right.$
- M **ist orientierbar** $\iff \mathcal{O} := \{\text{Menge der orientierten Atlanten von } M\} \neq \emptyset$
- $\left. \begin{array}{l} \text{zwei orientierte Atlanten } \mathcal{A} \text{ und } \\ \mathcal{A}' \text{ von } M \text{ sind gleichorientiert} \end{array} \right\} \iff \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \text{ ist orientierter Atlas}$

Für orientierbares M wird dadurch eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathcal{O}$ induziert. $\sigma \in \mathcal{O}/\sim$ heißt **Orientierung** von M und (M, σ) heißt **orientierte Mannigfaltigkeit**.

16.8 Beispiel $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ ist orientierbare Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2$. Ein orientierter Atlas wäre $\mathcal{A} = \{\varphi, \tilde{\varphi}\}$, wobei

$$\begin{aligned} \varphi : \begin{array}{ll}]0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array}, \quad \tilde{\varphi} : \begin{array}{ll}]-\pi, \pi[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\ \psi : \begin{array}{ll}]0, 2\pi[\setminus \{\pi\} & \rightarrow]-\pi, \pi[\setminus \{0\} \\ t & \mapsto \begin{cases} t, & t \in]0, \pi[, \\ t - 2\pi, & t \in]\pi, 2\pi[, \end{cases} \end{array} \implies \psi'(t) = 1 \quad \forall t \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $\hat{\varphi} :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$
 gegensätzlich orientiert zu $\tilde{\varphi}$ mit $\psi = -\text{id}$ und damit auch zu φ .
 Für S^1 ist $\text{card}(\mathcal{O}/\sim) = 2$, d.h. S^1 hat 2 Orientierungen. (Falls mehr als 2 Orientierungen existieren, ist M nicht zusammenhängend).

16.9 Definition (Orientierung von Tangentialräumen)

- (a) Eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist **positiv (bzw.) negativ orientiert** (bzgl. der kanonischen Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$) $\left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right\} \iff \det(v_1 | \dots | v_n) > 0$ (bzw. < 0).
- (b) Sei (M, σ) eine orientierbare Mannigfaltigkeit, $a \in M$, $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ eine Basis von $T_a M$ und $\varphi : T \rightarrow M$ eine zur Orientierung σ gleichorientierte Karte von M , das heißt, für einen (und damit jeden) Atlas $\mathcal{A} \in \sigma$ gilt $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ ist orientierter Atlas von M . Weiter sei $a \in \varphi(T)$. Wir nennen

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1, \dots, \tau_n \text{ positiv} \\ \text{orientiert (bzgl. } \sigma) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ positiv orientierte Basis } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ in } \mathbb{R}^n: \\ \tau_j = (D\varphi)(\varphi^{-1}(a))v_j \text{ für } j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Insbesondere ist $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\}$ eine positiv orientierte Basis von $T_a M$ (wähle $v_j = e_j$).

16.10 Lemma Definition 16.9 (b) ist unabhängig von der Wahl der gleichorientierten Karte φ mit $\varphi(T) \ni a$.

Beweis. Sei $\tilde{\varphi}$ eine weitere solche Karte mit $a \in \tilde{\varphi}(\tilde{T})$. Es gilt $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ mit $\det(D\psi)(t) > 0$ für alle $t \in W$, siehe Definition 16.7. Setzt man $\tilde{v}_j := (D\psi)(\varphi^{-1}(a))v_j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 1, \dots, n$, so folgt

$$\tau_j = (D(\tilde{\varphi} \circ \psi))(\varphi^{-1}(a))v_j = (D\tilde{\varphi})(\psi \circ \varphi^{-1}(a))(D\psi)(\varphi^{-1}(a))v_j = (D\tilde{\varphi})(\tilde{\varphi}^{-1}(a))\tilde{v}_j,$$

und

$$\det(\underbrace{\tilde{v}_1 | \dots | \tilde{v}_n}) = \det[(D\psi)(\varphi^{-1}(a))] \det(v_1 | \dots | v_n) > 0.$$

$$(D\psi)(\varphi^{-1}(a))(v_1 | \dots | v_n)$$

■

16.11 Definition Sei $d \geq 2$.

- (a) $M \subset \mathbb{R}^d$ ist $(C^1\text{-})$ **Hyperfläche** $\iff M$ ist $(d-1)$ -dim. C^1 -Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^d$
 [Also wird M nach Satz 15.8 als Lösungsmenge einer lokalen Gleichung beschrieben und es gilt $\dim N_a M = 1$ nach Satz 15.11(c).]

$$(b) \quad v \text{ ist } \mathbf{Einheitsnormalenfeld} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} M \rightarrow \mathbb{R}^d \\ v : a \mapsto v(a) \in \left\{ \frac{\pm(\nabla f)(a)}{|\langle \nabla f \rangle(a)|} \right\} \end{cases}$$

(c) Sei (M, σ) eine orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^d$ mit Einheitsnormalenfeld v , so heißt

$$\left. \begin{array}{l} v \text{ positiv orientiert} \\ \text{bezüglich } \sigma \end{array} \right\} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall a \in M \exists \text{ eine bezüglich } \sigma \text{ positiv orientierte Basis} \\ \{\tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\} \text{ von } T_a M, \text{ so dass } \{v(a), \tau_1^{(a)}, \dots, \\ \tau_{d-1}^{(a)}\} \text{ eine positiv orientierte Basis in } \mathbb{R}^d \text{ ist.} \end{cases}$$

16.12 Lemma Definition 16.11 (c) ist unabhängig von der Wahl der bezüglich σ positiv orientierten Basis $\{\tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\}$ von $T_a M$.

Beweis. Sei $\{\tilde{\tau}_1^{(a)}, \dots, \tilde{\tau}_{d-1}^{(a)}\}$ eine weitere, bezüglich σ positiv orientierte Basis von $T_a M$, so ist für $j = 1, \dots, d-1$

$$\tau_j^{(a)} = (D\varphi)(\varphi^{-1}(a))v_j, \quad \tilde{\tau}_j^{(a)} = (D\varphi)(\varphi^{-1}(a))\tilde{v}_j$$

mit $\{v_1, \dots, v_{d-1}\}, \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{d-1}\}$ je eine positiv orientierte Basis in $\mathbb{R}^{d-1}$. Es gibt Basiswechsel $A \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$ invertierbar mit $\tilde{v}_j = Av_j$ für $j = 1, \dots, d-1$. Weiter gilt $\det A > 0$, denn

$$0 < \det(\tilde{v}_1 | \dots | \tilde{v}_{d-1}) = \det(A) \underbrace{\det(v_1 | \dots | v_{d-1})}_{>0}.$$

Wählt man nun im $\mathbb{R}^d$ die Basis $\{v(a), \tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\}$, so besitzt das Differential die Matrixform

$$(D\varphi)(\varphi^{-1}(a)) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & F & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times (d-1)},$$

wobei $F \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$. Folglich gilt auch mit dieser Basenwahl

$$\begin{aligned} \det(v(a) | \tau_1^{(a)} | \dots | \tau_{d-1}^{(a)}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & F(\tilde{v}_1 | \dots | \tilde{v}_{d-1}) & & \\ 0 & \vdots & & \end{pmatrix} \\ &= \det(F A(v_1 | \dots | v_{d-1})) = \underbrace{\det(F(v_1 | \dots | v_{d-1}))}_{\det(v(a) | \tau_1^{(a)} | \dots | \tau_{d-1}^{(a)})} \det A > 0. \end{aligned}$$

■

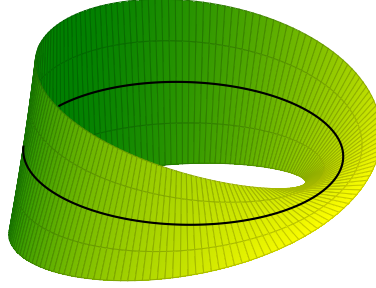


Abbildung 16.3: Das Möbius-Band aus Beispiel 16.15

16.13 Satz Sei $d \geq 2$ und (M, σ) eine orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^d$. Dann existiert genau ein Einheitsnormalenfeld $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit positiver Orientierung bezüglich σ . Zudem ist ν stetig.

(26)

16.14 Bemerkung Es gilt auch die Umkehrung von Satz 16.13: falls es ein stetiges Einheitsnormalenfeld für die Hyperfläche M gibt, so ist M orientierbar. Man kann also dies als Definition der Orientierbarkeit von Hyperflächen verwenden.

16.15 Beispiel Das Möbius-Band M ist eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^3$, aber nicht orientierbar, da es kein stetiges Einheitsnormalenfeld gibt (siehe Forster 3, Beispiel 20.6).

Beweis von Satz 16.13. • Die Existenz ist durch Definition 16.11 gesichert.

- Zur Eindeutigkeit. Sei $a \in M$ und $\{\tau_1, \dots, \tau_{d-1}\}$ eine positiv orientierte Basis von $T_a M$ bezüglich σ . Sei $\xi \in \{\pm 1\}$, so folgt

$$\det \left(\xi (\nabla f)(a) \mid \tau_1 \mid \dots \mid \tau_{d-1} \right) > 0$$

für entweder $\xi = +1$ oder $\xi = -1$.

- Zur Stetigkeit. Sei $a \in M$, U eine in $\mathbb{R}^d$ offene Umgebung von a und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $V := M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$ (existiert nach Satz 15.8). Zudem folgt aus $(\nabla f)(a) \neq 0$ auch $(\nabla f)(x) \neq 0$ für alle $x \in V$, falls U hinreichend klein ist. Da $f \in C^1$, setze $\tilde{\nu}(x) := \frac{(\nabla f)(x)}{|(\nabla f)(x)|}$. Für $x \in V$ folgt, dass $V \ni x \mapsto \tilde{\nu}(x)$ stetig ist. Sei $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ das eindeutige Einheitsnormalenfeld mit positiver Orientierung bezüglich σ . Ohne Einschränkung gelte $\tilde{\nu}(a) = \nu(a)$ (sonst vertausche f mit $-f$). Sei $\varphi : T \rightarrow V$ eine Karte von M , so folgt

$$T \ni t \mapsto h(t) := \det \left(\tilde{\nu}(\varphi(t)) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \mid \dots \mid \frac{\partial \varphi}{\partial t_{d-1}}(t) \right) \text{ ist stetig und } h(\varphi^{-1}(a)) > 0.$$

Da h stetig ist, gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $h(t) > 0$ für alle $t \in B_\varepsilon^{(d-1)}(\varphi^{-1}(a)) =: T_0$ gilt. Somit ist $\tilde{\nu}(x) = \nu(x)$ für alle $x \in \varphi(T_0) \subset V$ (offene Umgebung in M von a) und da $\tilde{\nu}$ stetig in a ist, ist auch ν stetig in a . ■

16.16 Lemma Sei (M, σ) eine orientierte Hyperfläche in $d = 3$, sei $a \in M$ und $v(a)$ der bezüglich σ positiv orientierte Einheitsnormalenvektor in a . Dann gilt für eine Basis $\{\tau_1, \tau_2\}$ von $T_a M$

$$\left. \begin{array}{l} \{\tau_1, \tau_2\} \text{ ist positiv orientierte} \\ \text{Basis bezüglich } \sigma \end{array} \right\} \iff v(a) = \frac{\tau_1 \times \tau_2}{|\tau_1 \times \tau_2|}.$$

Beweis. Da $0 \neq \tau_1 \times \tau_2 \perp \text{span}(\tau_1, \tau_2) = T_a M$ und $\dim N_a M = 1$, folgt $v(a) = \pm \frac{\tau_1 \times \tau_2}{|\tau_1 \times \tau_2|}$. Für diesen gilt

$$\text{positiv orientiert} \iff \det(v(a)|\tau_1|\tau_2) > 0.$$

Dies für „+“ der Fall wegen

$$\begin{aligned} \det(\tau_1 \times \tau_2 | \tau_1 | \tau_2) &= \det(\underbrace{R}_{\in \text{SO}(3)}) \cdot \det(\tau_1 \times \tau_2 | \tau_1 | \tau_2) = \det \left(\underbrace{R\tau_1}_{=: \hat{\tau}_1} \times \underbrace{R\tau_2}_{=: \hat{\tau}_2} \mid \underbrace{R\tau_1}_{\hat{\tau}_1} \mid \underbrace{R\tau_2}_{\hat{\tau}_2} \right) \\ &= |\tau_2|^2 \det \begin{pmatrix} \hat{\tau}_{1,2} & \hat{\tau}_{1,1} & 0 \\ -\hat{\tau}_{1,1} & \hat{\tau}_{1,2} & 0 \\ 0 & \hat{\tau}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = |\tau_2|^2 \det \begin{pmatrix} \hat{\tau}_{1,2} & \hat{\tau}_{1,1} \\ -\hat{\tau}_{1,1} & \hat{\tau}_{1,2} \end{pmatrix} \\ &= |\tau_2|^2 (\hat{\tau}_{1,2}^2 + \hat{\tau}_{1,1}^2) = |\tau_1|^2 |\tau_2|^2 - (\tau_1 \cdot \tau_2)^2 = |\tau_1 \times \tau_2|^2 > 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

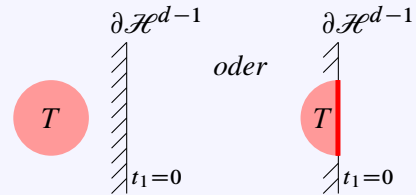
Eine Verallgemeinerung des Begriffs der Hyperfläche:

16.17 Definition Sei $d \geq 2$.

(a) M (**C^1 -**) **Hyperfläche** (möglicherweise) **mit Rand** in $\mathbb{R}^d$: $\iff$

$\forall a \in M \exists V \subseteq M$ offen in der Relativtop. auf M mit $a \in V$ und $\exists$ **Karte** $\varphi : T \rightarrow V$ mit

- T offen in der Relativtopologie auf $\mathcal{H}^{d-1} := \{t \in \mathbb{R}^{d-1} : t_1 \leq 0\}$
- φ ist Homöomorphismus
- φ stetig diff.-bar; für $t_1 = 0$ nur linkss. $\partial/\partial t_1$
- $\text{Rang} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t) \right)_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq k \leq d-1}} = d-1 \quad \forall t \in T$



(b) $a \in M$ ist **Randpunkt** der $\left. \begin{array}{l} \text{Hyperfläche mit Rand } M \end{array} \right\}$: $\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \varphi : T \rightarrow M \text{ Karte mit } a \in \varphi(T) \\ \implies (\varphi^{-1}(a))_1 = 0 \end{array} \right.$

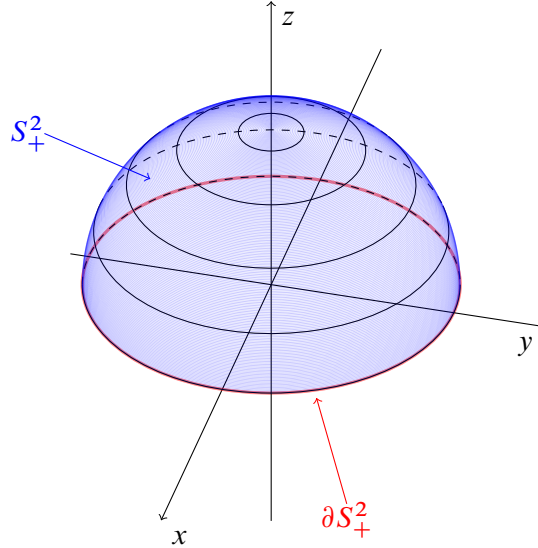
Rand von M : $\partial M := \{a \in M : a \text{ ist Randpunkt von } M\}$ ($\partial M = \emptyset$ möglich)

Achtung: $\partial M \neq$ topologischer Rand von M bzgl. Euklidischer Topologie ($\supseteq M$)

16.18 Bemerkung M Hyperfläche $\implies M$ Hyperfläche mit Rand.

16.19 Beispiel Die Halbsphäre im $\mathbb{R}^3$

$$S_+^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1 \text{ und } v_3 \geq 0\} \implies \partial S_+^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1 \text{ und } v_3 = 0\}.$$



16.20 Satz Sei $d \geq 3$ und M eine Hyperfläche mit Rand $\partial M \neq \emptyset$ im $\mathbb{R}^d$. Dann ist ∂M eine $(d-2)$ -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^d$.

Beweis. Sei φ eine Karte von M mit $T \cap \partial \mathcal{H}^{d-1} \neq \emptyset$, das heißt, $\varphi(T)$ überdeckt Teile von ∂M . Dann ist $\varphi|_{T \cap \partial \mathcal{H}^{d-1}}$ Karte von ∂M (nachprüfen!). ■

16.21 Lemma Sei $d \geq 3$ und (M, σ) eine orientierte Hyperfläche mit Rand $\partial M \neq \emptyset$ in $\mathbb{R}^d$. Sei $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \sigma$ ein orientierter Atlas. Dann ist $\mathcal{A}_\partial := \{\varphi_\alpha|_{T_\alpha \cap \partial \mathcal{H}^{d-1}}\}_{\alpha \in \mathbb{N}: T_\alpha \cap \partial \mathcal{H}^{d-1} \neq \emptyset}$ ein orientierter Atlas von ∂M und (seine Äquivalenzklasse von Atlanten) definiert die **induzierte Orientierung** σ_∂ von ∂M .

Beweis. Betrachte zwei auf ∂M überlappende Karten φ und $\tilde{\varphi}$ von M . Seien $W := \varphi^{-1}(\varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}))$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}))$ und $\psi := (\tilde{\varphi}|_{\tilde{W}})^{-1} \circ \varphi|_W : W \rightarrow \tilde{W}$ der Diffeomorphismus aus Satz 15.6 (b). Da $\psi(W \cap \partial \mathcal{H}^{d-1}) \subseteq \tilde{T} \cap \partial \mathcal{H}^{d-1}$, ist $\psi_\partial := (\tilde{\varphi}|_{\tilde{W} \cap \partial \mathcal{H}^{d-1}})^{-1} \circ \varphi|_{W \cap \partial \mathcal{H}^{d-1}} : W \cap \partial \mathcal{H}^{d-1} \rightarrow \tilde{W} \cap \partial \mathcal{H}^{d-1}$ ein Diffeomorphismus und es gilt für alle $t = (0, \underbrace{\hat{t}}_{\in \mathbb{R}^{d-2}}) \in W \cap \partial \mathcal{H}^{d-1}$

$$(D\psi)(0, \hat{t}) = \begin{pmatrix} \gamma(\hat{t}) & 0 & \cdots & 0 \\ * & (D\psi_\partial)(\hat{t}) & & \end{pmatrix},$$

wobei $\gamma(\hat{t}) > 0$. Es folgt $\varphi, \tilde{\varphi}$ gleichorientiert $\iff \varphi|_{\partial \mathcal{H}^{d-1}}, \tilde{\varphi}|_{\partial \mathcal{H}^{d-1}}$ gleichorientiert. ■

16.3 Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

27

Der hier vorgestellte Beweis beruht auf dem Satz von Green für die Ebene, der seinerseits aus dem Satz von Gauß folgt. Doch zunächst das Kurvenintegral für Vektorfelder in der Sprache von orientierten (1-dimensionalen) Mannigfaltigkeiten.

16.22 Definition Sei (M, σ) eine 1-dim. orientierte C^1 -Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^d$ und $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : T_\alpha \subset \mathbb{R} \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \sigma$ ein zugehöriger orientierter Atlas von M . Weiter sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Borel-messbares Vektorfeld und $|F| \in \mathcal{L}^1(M, \lambda_M)$. Setze

$$\int_M F(x) \cdot d\lambda_M^\sigma(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} F(\varphi_\alpha(t)) \cdot \varphi'_\alpha(t) dt,$$

wobei $U_\alpha \subseteq V_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} U_\alpha = M$.

16.23 Bemerkung Obiges Integral ist wohldefiniert, denn

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} \underbrace{|F(\varphi_\alpha(t)) \cdot \varphi'_\alpha(t)|}_{\leq |F(\varphi_\alpha(t))| \underbrace{|(\varphi'_\alpha(t))|}_{\sqrt{g_\alpha(t)}}} dt &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} (|F \circ \varphi_\alpha|(t)) \underbrace{\sqrt{g_\alpha(t)}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Gram-Det.}}} dt = \int_M |F|(x) d\lambda_M(x). \end{aligned}$$

16.24 Satz (Integralsatz von Stokes) Sei (M, σ) eine kompakte, orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ mit Rand. Sei $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ das bezüglich σ positiv orientierte Einheitsnormalenfeld. Sei $U \supseteq M$ offen in $\mathbb{R}^3$ und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt

$$\int_M (\nabla \times F)(x) \cdot v(x) d\lambda_M(x) = \int_{\partial M} F(x) \cdot d\lambda_{\partial M}^{\sigma_\partial}(x).$$

16.25 Bemerkung Der Satz von Stokes gilt auch dann noch, wenn M nur glatt ist bis auf eine 2-dimensionale Nullmenge und ∂M glatt ist bis auf eine 1-dimensionale Nullmenge. Zum Beispiel, falls M = Oberfläche eines Würfels ohne „Deckel“ in $\mathbb{R}^3$.

Beweis. 1. Schritt: Reduktion auf eine Karte mittels C^∞ -Zerlegung der Eins.

(Analog Schritt (2) im Beweis des Satzes von Gauß.) Sei $\mathcal{A} := \{\varphi_a : T_a \rightarrow V_a\}_{a \in M} \in \sigma$ ein orientierter Atlas von M mit $a \in V_a \forall a \in M$. Durch Verkleinerung sei ohne Einschränkung $T_a = B_{r_a}^{(2)}(\varphi_a^{-1}(a)) \subset \mathcal{H}^2$ von der Form einer Kugel mit Radius $r_a > 0$, falls $a \notin \partial M$, bzw. von der Form einer Halbkugel $T_a = B_{r_a}^{(2)}(\varphi_a^{-1}(a)) \cap \mathcal{H}^2$, falls $a \in \partial M$.

Sei $\ell \in]0, \infty[$ die Lebesgue-Zahl der offenen Überdeckung $M = \bigcup_{a \in M} V_a$ (gemäß Lemma 15.29 für den kompakten metrischen Raum M). Setze $\varepsilon := \frac{\ell}{2\sqrt{3}}$ und betrachte eine C^∞ -Zerlegung der Eins $\{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p \in \mathbb{Z}^3}$ wie in Definition 15.27. Dafür gilt

- $\text{diam}(\text{supp } \gamma_{p,\varepsilon}) = \ell \quad \forall p \in \mathbb{Z}^3,$
- $P := \{p \in \mathbb{Z}^3 : \text{supp } \gamma_{p,\varepsilon} \cap M \neq \emptyset\}$ ist endlich, da M kompakt,
- gemäß Lebesgue-Lemma 15.29: $\forall p \in P \exists a_p \in M : \text{supp } \gamma_{p,\varepsilon} \cap M \subset V_{a_p},$
- $\int_M (\nabla \times \underbrace{F}_{\sum_{p \in \mathbb{Z}^3} \gamma_{p,\varepsilon} F})(x) \cdot \nu(x) d\lambda_M(x) = \sum_{p \in P} \int_M (\nabla \times (\gamma_{p,\varepsilon} F))(x) \cdot \nu(x) d\lambda_M(x),$
- $\int_{\partial M} F(x) \cdot d\lambda_{\partial M}^{\sigma_{\text{ind}}} = \sum_{p \in P} \int_{\partial M} (\gamma_{p,\varepsilon} F)(x) \cdot d\lambda_{\partial M}^{\sigma_{\text{ind}}}.$

Also genügt es, die Behauptung für Vektorfelder F zu zeigen mit der Eigenschaft

$$\exists \text{ eine bzgl. } \sigma \text{ positiv orientierte Karte } \varphi : T \rightarrow V \text{ von } M \text{ mit } (\underbrace{\text{supp } |F| \cap M}_{\substack{\text{kompakt in} \\ \text{Relativtop. von } M}}) \subset \underbrace{V}_{\substack{\text{offen in} \\ \text{Relativtop.} \\ \text{von } M}}. \quad (\star)$$

2. Schritt: Übergang zur Karte. Annahme: $\varphi \in C^2$.

Sei also F und φ wie in $(\star)$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x) d\lambda_M(x) &= \int_V (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x) d\lambda_M(x) \\ &= \int_T (\nabla \times F)(\varphi(t)) \cdot \nu(\varphi(t)) \underbrace{\sqrt{g(t)}}_{\text{Gram-Det.}} d\lambda^2(t). \end{aligned}$$

Mit

- $\nu(\varphi(t)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t)}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t) \right|}$ gemäß Lemma 16.16 und Definition 16.9(b),
- $\sqrt{g(t)} \stackrel{!}{=} \text{Flächeninhalt des von } \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \text{ im } \mathbb{R}^3 \text{ aufgespannten Parallelogramms}$

$$= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t) \right|,$$

¹Wähle ONB $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit $(\partial \varphi / \partial t_1)(t) = a_1 e_1$ und $(\partial \varphi / \partial t_2)(t) = b_1 e_1 + b_2 e_2$. Bzgl. dieser ONB ist

$$(D\varphi)(t) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \sqrt{g(t)} = \underbrace{|a_1| |b_2|}_{\text{Grundlinie} \times \text{Höhe}} = |(\partial \varphi / \partial t_1)(t)| |(\partial \varphi / \partial t_2)(t)| \sin \theta \text{ mit } \theta \text{ Zwischenwinkel.}$$

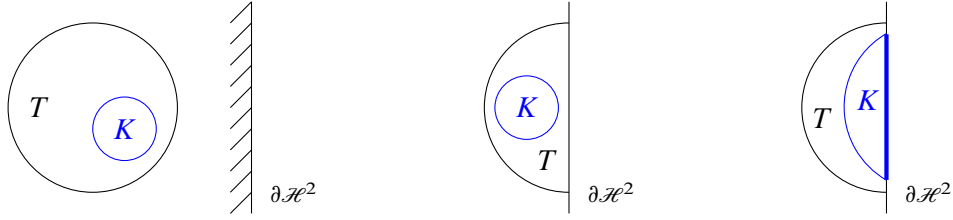


Abbildung 16.4: Der Träger $K := \text{supp } |F| \circ \varphi$ des Vektorfeldes im Definitionsbereich T der Karte.

- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \sum_{1 \leq j < k \leq 3} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{antisymm.}}}{=} \sum_{1 \leq j, k \leq 3} (a_j b_k - a_k b_j) c_j d_k$$

folgt

$$\begin{aligned} (\nabla \times F)(\varphi(t)) \cdot \nu(\varphi(t)) \sqrt{g(t)} &= \sum_{1 \leq j, k \leq 3} (\partial_{x_j} F_k - \partial_{x_k} F_j)(\varphi(t)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_2}(t) \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial t_1} F_k(\varphi(t)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_2}(t) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial t_2} F_j(\varphi(t)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t) \quad (1) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1} \underbrace{\left(F(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t) \right)}_{=: G_2(t)} - \frac{\partial}{\partial t_2} \underbrace{\left(F(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \right)}_{=: G_1(t)}. \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen erfordert $\varphi \in C^2(T)$; siehe 4. Schritt, um diese zusätzliche Annahme wieder loszuwerden.

3. Schritt: Analyse der Integrale.

$\bar{T}$ ist Kompaktum mit (nur) stückweisem C^1 -Rand. Da $K := \text{supp } |F| \circ \varphi$ kompakt in $T \implies K$ hat positiven Abstand zu dem Teil von ∂T , der nicht C^1 , siehe Abbildung 16.4 $\implies \bar{T}$ kann zu einem Kompaktum mit (durchgehendem) C^1 -Rand geglättet werden, ohne dass Integrale von $|F| \circ \varphi$ über T oder ∂T dadurch verändert werden. Dies sei von nun an geschehen $\implies$ Satz von Green für die Ebene (Tutorium, Blatt 11) anwendbar, wobei $\nu^{(T)}$ der äußere Normalenvektor an T ,

$$\int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x) d\lambda_M(x) = \int_T \left[\frac{\partial}{\partial t_1} G_2(t) - \frac{\partial}{\partial t_2} G_1(t) \right] dt \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Green}}}{=} \int_{\partial T} \begin{pmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\nu_2^{(T)}(t) \\ \nu_1^{(T)}(t) \end{pmatrix} d\lambda_{\partial T}(t) \quad (3) \\ &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ K \cap \partial T \subset \partial \mathcal{H}^2 \\ (\text{siehe Abb. 16.4})}}{=} \int_{\partial T \cap \partial \mathcal{H}^2} \begin{pmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\nu_2^{(T)}(t) \\ \nu_1^{(T)}(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \partial \mathcal{H}^2} d\lambda_{\partial T}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\uparrow}{=} \int_{(\partial T)_{t_1=0}} \underbrace{G_2(\psi(t_2))}_{F(\varphi(0, t_2)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(0, t_2)} dt_2 \\
& \stackrel{\uparrow}{=} \int_{\partial M} F(x) \cdot d\lambda_{\partial M}^{\sigma_{\partial}}.
\end{aligned}$$

$\text{Karte } \psi: (\partial T)_{t_1=0} \xrightarrow{t_2 \mapsto (0, t_2)} \partial T \cap \partial \mathcal{H}^2$

$\beta = \varphi|_{\partial \mathcal{H}^2} \text{ gleichorientiert zu } \sigma_{\partial}$

4. Schritt: Verallgemeinerung von 2. und 3. Schritt auf $\varphi \in C^1$.

Ziel: Rechtfertige (3) für $\varphi \in C^1$. Idee: Glättung von φ mittels Mollifier δ_ε aus Aufgabe E8.3.

Sei $\beta \in \{\varphi, \partial\varphi_k/\partial t_2, \partial\varphi_j/\partial t_1\}$. In der linken und mittleren Situation von Abbildung 16.4 $\exists D \supset K$ offen in $\mathbb{R}^2$ mit $\beta \in C_b(D)$. Es folgt wie in Aufgabe E7.2(d), dass

$$\beta = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \delta_\varepsilon * \beta \quad \text{gleichmäßig auf } K. \quad (4)$$

In der rechten Situation wird dies erreicht, indem man zuerst φ von der linken Hälfte auf die ganze Kugel $B_{r_a}^{(2)}(\varphi_a^{-1}(a))$ gemäß $\varphi(t_1, t_2) = 2\varphi(0, t_2) - \varphi(-t_1, t_2)$, wobei $t_1 > 0$ und $(t_1, t_2) \in B_{r_a}^{(2)}(\varphi_a^{-1}(a))$, stetig differenzierbar fortsetzt. Insbesondere ist damit β auf ganz $B_{r_a}^{(2)}(\varphi_a^{-1}(a))$ stetig und damit auf einer offenen Umgebung D von K . Somit gilt für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_k}{\partial t_1} ((\delta_\varepsilon * \varphi)(t)) \underbrace{\left(\delta_\varepsilon * \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_2} \right)(t)}_{\frac{\partial(\delta_\varepsilon * \varphi_k)}{\partial t_2}} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial t_2} ((\delta_\varepsilon * \varphi)(t)) \underbrace{\left(\delta_\varepsilon * \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1} \right)(t)}_{\frac{\partial(\delta_\varepsilon * \varphi_j)}{\partial t_1}} \\
& \stackrel{\text{E7.2(c)}}{\rightarrow} \frac{\partial(\delta_\varepsilon * \varphi_k)}{\partial t_2} - \frac{\partial(\delta_\varepsilon * \varphi_j)}{\partial t_1} \\
& \stackrel{\uparrow}{=} \frac{\partial}{\partial t_1} \underbrace{\left(F(\varphi^{(\varepsilon)}(t)) \cdot \frac{\partial \varphi^{(\varepsilon)}}{\partial t_2}(t) \right)}_{=: G_2^{(\varepsilon)}(t)} - \frac{\partial}{\partial t_2} \underbrace{\left(F(\varphi^{(\varepsilon)}(t)) \cdot \frac{\partial \varphi^{(\varepsilon)}}{\partial t_1}(t) \right)}_{=: G_1^{(\varepsilon)}(t)} \quad (5)
\end{aligned}$$

$\varphi^{(\varepsilon)} := \delta_\varepsilon * \varphi \in C^\infty$

und

$$(\nabla \times F)(\varphi(t)) \cdot v(\varphi(t)) \sqrt{g(t)} \stackrel{(1),(4)}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} G_2^{(\varepsilon)}(t) - \frac{\partial}{\partial t_2} G_1^{(\varepsilon)}(t) \right].$$

Also wird (2) ersetzt durch

$$\begin{aligned}
\int_M (\nabla \times F)(x) \cdot v(x) d\lambda_M(x) &= \int_T \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} G_2^{(\varepsilon)}(t) - \frac{\partial}{\partial t_2} G_1^{(\varepsilon)}(t) \right] dt \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_T \left[\frac{\partial}{\partial t_1} G_2^{(\varepsilon)}(t) - \frac{\partial}{\partial t_2} G_1^{(\varepsilon)}(t) \right] dt, \quad (6)
\end{aligned}$$

wobei die Vertauschung von Limes und Integral nach majorisierter Konvergenz erlaubt ist, da effektiv nur über das Kompaktum $K \subset T$ integriert wird, wegen (5) und

$$(i) \quad \sup_{t \in K} \sup_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[} \left| \frac{\partial F_k}{\partial t_l}(\varphi^{(\varepsilon)}(t)) \right| \stackrel{(4)}{\leq} \sup_{x \in M_{\varepsilon_0}} \left| \frac{\partial F_k}{\partial t_l}(x) \right| \stackrel{F \in C^1(U, \mathbb{R}^d)}{<} \infty, \quad k \in \{1, 2, 3\}, l \in \{1, 2\},$$

für ein Kompaktum $M \subseteq M_{\varepsilon_0} \subset U$ (möglich, da M kompakt in U offen $\implies \text{dist}(M, \partial U) > 0$),

$$(ii) \quad \sup_{t \in K} \sup_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[} \left| \left(\delta_\varepsilon * \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_l} \right)(t) \right| \stackrel{(4)}{<} \infty, \quad k \in \{1, 2, 3\}, l \in \{1, 2\}.$$

Nun Anwendung des Satzes von Green für die Ebene auf (6), wie zu Beginn des 3. Schrittes erläutert,

$$\begin{aligned} \int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x) \, d\lambda_M(x) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial T} \begin{pmatrix} G_1^{(\varepsilon)}(t) \\ G_2^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\nu_2^{(T)}(t) \\ \nu_1^{(T)}(t) \end{pmatrix} d\lambda_{\partial T}(t) \\ &= \int_{\partial T} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \underbrace{\begin{pmatrix} G_1^{(\varepsilon)}(t) \\ G_2^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -\nu_2^{(T)}(t) \\ \nu_1^{(T)}(t) \end{pmatrix} d\lambda_{\partial T}(t), \end{aligned} \quad (7)$$

$\leftarrow \text{wegen (4) und } F \in C^1$

wobei die Vertauschung von Limes und Integral nach majorisierter Konvergenz erlaubt ist, da effektiv nur über das Kompaktum $K \cap \partial \mathcal{H}^2 \subset \partial T$ integriert wird und

$$\sup_{t \in K \cap \partial \mathcal{H}^2} \sup_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[} |G_l^{(\varepsilon)}(t)| \stackrel{(4)}{<} \infty, \quad l \in \{1, 2\},$$

analog zu (i) und (ii).

(7) rechtfertigt (3) für $\varphi \in C^1$ und der Beweis ist komplett. ■

Ende