

Analysis 3

Franz Merkl

(sehr vorläufige Version ¹, 23. Februar 2018)

Inhaltsverzeichnis

1	Maßtheorie	2
1.1	σ -Algebren, Inhalte und Maße	2
1.2	Erzeugendensysteme von σ -Algebren	12
1.3	Dynkin-Systeme	15
1.4	Der Fortsetzungssatz von Carathéodory	21
1.5	Messbare Funktionen	34
1.6	Bildmaße	43
1.7	Das Integral bezüglich eines Maßes.	44
1.8	Integration bezüglich des Bildmaßes	55
1.9	Integrale und Nullmengen	58
1.10	Konvergenzsätze	62
1.11	Dichten	74
1.12	Der Satz von Radon-Nikodym und Zerlegungen von Maßen	79
2	Integralrechnung mehrerer Variablen	95
2.1	Produktmaße und der Satz von Fubini	95
2.2	Asymptotisch Gaußsche Integrale	114
2.3	Die Transformationsformel	119
2.4	Die Faltung	134
2.5	Alternierende Multilinearformen	139
2.6	Differentialformen höheren Grades	146
2.7	Riemannsche Metrik und Oberflächenmaße	153
2.8	Die äußere Ableitung	161
2.9	Entsprechungen der äußeren Ableitung in der klassischen Vektoranalysis: Gradient, Rotation und Divergenz	165
2.10	Der Satz von Stokes	173
2.11	Die Lie-Ableitung von Formen und de-Rham-Kohomologie	192
2.12	Die Räume L^p	200
2.13	L^2 -Theorie von Fourierintegralen	221

¹Dies ist nur ein Entwurf eines Analysis 3 Skripts. Ohne jede Garantie. Für Hinweise auf Fehler aller Art ist der Autor dankbar. Vielen Dank an Herrn T. Simonis und Herrn J. Bartenschlager für Korrekturhinweise!

1 Maßtheorie

1.1 σ -Algebren, Inhalte und Maße

Die Maßtheorie ist aus dem Problem entstanden, möglichst vielen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ein Volumen zuzuordnen. Das “Volumen” misst die “Größe” einer Menge quantitativ.

Zur Problematik der Volumenmessung. Folgendes Paradoxon von Banach und Tarski zeigt, dass es problematisch ist, *allen* Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ in sinnvoller Weise ein Volumen zuzuordnen:

Wir nennen eine Isometrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Gestalt $f(x) = Ax + b$ mit einem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ und einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A = 1$, $A^t A = \text{id}$ eine orientierungstreue Kongruenzabbildung oder kurz eine *Bewegung* von $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wichtige Beispiele dafür sind Translationen und Rotationen.

Banach und Tarski haben 1924 folgende paradox anmutende Aussage bewiesen:²

Es seien $n \geq 3$ und $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Mengen mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und Zerlegungen $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ und $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ in jeweils paarweise disjunkte Mengen sowie Bewegungen $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f[A_j] = B_j$ für alle $j = 1, \dots, m$.

Zum Beispiel kann man *eine* Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ so in endlich viele Teile zerlegen, die Teile bewegen und wieder zusammensetzen, dass daraus *zwei* disjunkte Einheitskugeln werden. Dies ist kontraintuitiv, wenn man sich vorstellt, dass die Teile ein Volumen besitzen sollten, das sich bei den Bewegungen nicht ändert.

Allerdings benötigt der Beweis von Banach und Tarski in essentieller Weise das Auswahlaxiom. Der Beweis ist also *nicht konstruktiv*. Es ist nicht möglich, konstruktiv eine solche paradoxe Zerlegung der Einheitskugel explizit anzugeben.³

Aufgrund dieser Problematik beschränkt man sich meist darauf, nicht *allen* Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einen Zahlenwert, interpretiert als Volumen, zuzuordnen, sondern nur den sogenannten “*messbaren Mengen*”. Im Hinblick auf andere Anwendungen, insbesondere zur Definition von Wahrscheinlichkeiten in der Stochastik, liegt eine Verallgemeinerung nahe: Man möchte auch Teilmengen A allgemeinerer Räume Ω statt nur $\mathbb{R}^n$ ein quantitatives Größenmaß $\mu(A) \in \mathbb{R}_0^+$ zuordnen. Zur Arbeit mit Grenzwerten soll das System der “*messbaren Mengen*” nicht nur abgeschlossen unter endlichen Mengenoperationen sein,

²S. Banach, A. Tarski: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fundamenta Mathematica. **6** (1924), S. 244–277

³R. M. Solovay konstruierte unter der Annahme der Existenz einer unerreichen Kardinalzahl ein Modell der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre, in dem *jeder* Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ in sinnvoller Weise ein Volumen zugeordnet werden kann: R. M. Solovay: *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*. Annals of Mathematics. Series 2, vol. **92** (1970), S. 1–56. In diesem Modell kann das volle Auswahlaxiom natürlich nicht mehr gelten, doch es gilt dort noch eine abgeschwächte Version, “dependent choice” genannt. Die Konstruktion von Solovay benutzt die berühmte “Forcing-Methode” der axiomatischen Mengenlehre von P. Cohen, mit der dieser z.B. die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von den übrigen Axiomen der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre zeigte. Näheres dazu können Sie in fortgeschrittenen Vorlesungen über axiomatische Mengenlehre lernen.

sondern auch unter *abzählbar unendlichen* Mengenoperationen. Dies gibt Anlass zu folgender Definition:

Definition 1.1 (Mengenalgebra, σ -Algebra) Es sei Ω eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ wird *Mengenalgebra* über Ω genannt, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. *Abgeschlossenheit unter Komplementbildung:* Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $A^c \in \mathcal{A}$, wobei $A^c = \Omega \setminus A$ das Komplement von A in Ω bezeichnet.
3. *Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen:* Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Gelten für ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ sogar die Aussagen 1., 2. und die folgende stärkere Aussage 3', so wird $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra über Ω genannt.

- 3'. *Abgeschlossenheit unter abzählbar unendlichen Vereinigungen:* Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}$ gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Die Elemente einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ werden auch *messbare Mengen* (bzgl. $\mathcal{A}$) oder auch *Ereignisse* (bzgl. $\mathcal{A}$) genannt. Ein Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, bestehend aus einer Menge Ω und einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ darüber, wird *messbarer Raum* oder auch *Ereignisraum* genannt.

Die Aussage 3. folgt aus 3'. wegen

$$A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \cup \dots$$

Der Buchstabe “ σ ” symbolisiert hier den Umgang mit abzählbaren Vereinigungen.

Beispiel 1.2 1. Ist Ω eine Menge, so ist ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra über Ω .

2. Ebenso ist $\{\emptyset, \Omega\}$ eine σ -Algebra über Ω . Sie heißt die *triviale σ -Algebra* über Ω .

3. Die einzigen σ -Algebren auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ sind:

- (a) Die triviale σ -Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$ und die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$,
- (b) die drei σ -Algebren $\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{3, 1\}\}$, $\{\emptyset, \Omega, \{3\}, \{1, 2\}\}$.

Übung 1.3 Überlegen Sie sich, dass man den gleichen Begriff von Mengenalgebren bzw. von σ -Algebren erhält, wenn man in der Definition die Forderung “1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ ” durch “1. $\Omega \in \mathcal{A}$ ” ersetzt.

Übung 1.4 Es sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie: $A \cap B, A \setminus B, A \Delta B \in \mathcal{A}$, wobei $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Übung 1.5 Es sei $\Omega =]a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$. Wir betrachten das Mengensystem $\mathcal{A}(]a, b])$, bestehend aus allen endlichen Vereinigungen $\bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j]$, $n \in \mathbb{N}_0$, von halboffenen Intervallen $]a_j, b_j] \subseteq]a, b]$ mit $a \leq a_j < b_j \leq b$.

1. Überzeugen Sie sich davon, dass sich jedes $A \in \mathcal{A}(]a, b])$ als eine endliche Vereinigung $A = \bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j]$, $n \in \mathbb{N}_0$, von paarweise disjunkten Intervallen $]a_j, b_j]$ schreiben lässt.
2. Überzeugen Sie sich auch davon, dass solch eine Darstellung von A eindeutig bestimmt ist, wenn man zusätzlich $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n \leq b$ fordert.
3. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}(]a, b])$ eine Mengenalgebra bildet.
4. Folgern Sie, dass auch $\mathcal{A}(\mathbb{R}) := \{A \cap \mathbb{R} \mid A \in \mathcal{A}(]-\infty, \infty])\}$ eine Mengenalgebra bildet.
5. $\mathcal{A}(]a, b])$ ist keine σ -Algebra. Geben Sie zur Illustration hiervon (ohne Beweis) eine Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}(]a, b])$ an, für die $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \notin \mathcal{A}(]a, b])$ gilt.

Übung 1.6 (Partitionen und σ -Algebren über abzählbaren Mengen) Es sei Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge und $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra darüber. Für jedes $\omega \in \Omega$ sei $A(\omega) := \{\eta \in \Omega \mid \forall B \in \mathcal{A} : \omega \in B \Rightarrow \eta \in B\}$.

1. Berechnen Sie $A(\omega)$ für $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$ und alle $\omega \in \Omega$.
2. Zeigen Sie: Für alle $\omega \in \Omega$ ist $\omega \in A(\omega) \in \mathcal{A}$.
3. Zeigen Sie: Für alle $\omega, \eta \in \Omega$ gilt $A(\omega) = A(\eta)$ oder $A(\omega) \cap A(\eta) = \emptyset$. Das abzählbare Mengensystem $\text{part}(\mathcal{A}) := \{A(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ bildet also eine *Partition* von Ω , also eine Zerlegung von Ω in nichtleere paarweise disjunkte Mengen.
4. Zeigen Sie für alle $B \subseteq \Omega$, dass $B \in \mathcal{A}$ genau dann gilt, wenn B sich als eine Vereinigung von Elementen von $\text{part}(\mathcal{A})$ darstellen lässt.

Übung 1.7 (limsup und liminf für Mengen) Für eine Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Mengen definiert man:

$$\limsup_j A_j := \{\omega \mid \omega \in A_j \text{ für unendlich viele } j \in \mathbb{N}\}$$

$$\liminf_j A_j := \{\omega \mid \omega \in A_j \text{ für alle bis auf endlich viele } j \in \mathbb{N}\}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$\limsup_j A_j = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \geq n} A_j$$

$$\liminf_j A_j = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq n} A_j$$

gilt. Folgern Sie: Ist $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sind alle A_j , $j \in \mathbb{N}$, messbare Mengen darin, so sind auch $\limsup_j A_j$ und $\liminf_j A_j$ messbar bzgl. $\mathcal{A}$.

σ -Algebren spielen als Definitionsbereiche von *Maßen*, z. B. dem Volumenmaß, eine wichtige Rolle.

Definition 1.8 (Inhalte und Maße) 1. Es sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra über einer Menge Ω . Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ wird ein *Inhalt* auf $\mathcal{A}$ genannt, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (b) **endliche Additivität:** $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

2. Nun sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ heißt *Maß* auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wenn gilt:

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (b) **σ -Additivität:** Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

“Paarweise Disjunktheit” bedeutet hier: $A_m \cap A_n = \emptyset$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$.

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wird dann ein *Maßraum* genannt.

3. Nun sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

- (a) Ist $\mu(\Omega) = 1$, so wird μ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein *Wahrscheinlichkeitsraum* genannt.
- (b) Ist $\mu(\Omega)$ endlich, so wird μ ein *endliches Maß* genannt.
- (c) Gibt es dagegen eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt das Maß μ *σ -endlich*.

4. Es sei weiterhin $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein *signiertes Maß* auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wenn gilt:

- (a) **σ -Additivität:** Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(A_n)| < \infty \quad \text{und} \quad \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

In der praktischen Arbeit mit der Maßtheorie sind fast ausschließlich nur σ -endliche Maße von Bedeutung.

Im Hinblick auf die Arbeit mit Limiten ist die Forderung der σ -Additivität über die Forderung der endlichen Additivität hinaus sehr nützlich.

‘**Übung 1.9** Zeigen Sie, dass jedes Maß ein Inhalt ist.

Man beachte, dass es für signierte Maße (und damit auch für endliche Maße) keine Forderung $\mu(\emptyset) = 0$ braucht, da sie wegen $\mu(\emptyset) \in \mathbb{R}$ schon automatisch aus der σ -Additivität mittels

$$\mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \emptyset\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\emptyset)$$

folgt. In der Maßdefinition ist die Forderung $\mu(\emptyset) = 0$ dennoch nicht überflüssig, denn sie dient dazu, den nicht erwünschten Fall $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \infty$ auszuschließen. Man beachte weiter, dass ein signiertes Maß genau dann ein Maß ist, wenn es keine negativen Werte annimmt.

Erinnern Sie sich an die Konvention $a + \infty = \infty + a = \infty$ für $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, während $\infty - \infty$ undefiniert bleibt.

‘**Übung 1.10 (Monotonie von Inhalten)** Es μ ein Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie $\mu(A) \leq \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$.

Übung 1.11 (Elementare Eigenschaften signierter Maße) Es sei μ ein signiertes Maß oder ein Inhalt auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Beweisen Sie für $A, B, C \in \mathcal{A}$:

1. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,
2. $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$,
3. $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A)$, falls $B \subseteq A$,
4. $\mu(A \cup B \cup C) + \mu(A \cap B) + \mu(B \cap C) + \mu(C \cap A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) + \mu(A \cap B \cap C)$.

Übung 1.12 ((σ -)Subadditivität) 1. Es sei μ ein Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

2. Nun sei μ sogar ein Maß auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in $\mathcal{A}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Beispiel 1.13 (Widersprüchlichkeit eines Längenbegriffs auf der Potenzmenge einer Kreislinie) In Ergänzung zum Banach-Tarski-Paradoxon zeigen wir nun, dass es kein rotationssymmetrisches Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(S^1)$ der Einheitskreislinie

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

gibt. Genauer gesagt:

Es gibt kein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(S^1, \mathcal{P}(S^1))$, so dass für alle $A \subseteq S^1$ und $w \in S^1$ gilt: $\mu(wA) = \mu(A)$, wobei $wA := \{wa \mid a \in A\}$.

Beweis: Es sei $Q = \{e^{2\pi it} \mid t \in \mathbb{Q}\}$ die Menge aller Punkte auf dem Einheitskreis, die durch Drehung um 0 um einen rationalen Teil der Volldrehung aus dem Punkt 1 hervorgehen. Man beachte, dass $(Q, \cdot)$ eine Untergruppe von $(S^1, \cdot)$ ist. Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist auch Q abzählbar. Wir betrachten das Quotientengebilde $S^1/Q = \{zQ \mid z \in S^1\}$. Wie jedes Quotientengebilde besteht es aus paarweise disjunkten Klassen. Mit Hilfe des Auswahlaxioms nehmen wir eine Auswahlfunktion $f : S^1/Q \rightarrow S^1$, die aus jeder Klasse $A \in S^1/Q$ ein Element $f(A) \in A$ auswählt, und betrachten deren Bild $B := f[S^1/Q]$. Jedes $z \in S^1$ läßt sich eindeutig in der Form $z = bq$ mit $b \in B$ und $q \in Q$ darstellen.

Begründung zur Existenz: Wählen wir $b := f(zQ) \in B$ und $q = z/b$, so gilt $q^{-1} = b/z \in Q$ und daher auch $q \in Q$, und natürlich $z = bq$.

Zur Eindeutigkeit: Gilt $z = bq = b'q'$ mit $b, b' \in B$ und $q, q' \in Q$, so folgt $bQ = b'Q$ und daher $b = b'$ und damit auch $q = z/b = z/b' = q'$, da jede Klasse bQ nur ein Element von B enthält.

Anders gesagt: Die abzählbare Familie $(qB)_{q \in Q}$ besteht aus paarweise disjunkten Mengen, und es gilt $\bigcup_{q \in Q} qB = S^1$. Wäre nun μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S^1, \mathcal{P}(S^1))$ wie oben beschrieben, so folgte $\mu(qB) = \mu(B)$ für alle $q \in Q$, und daher mit der σ -Additivität von μ :

$$1 = \mu(S^1) = \mu\left(\bigcup_{q \in Q} qB\right) = \sum_{q \in Q} \mu(qB) = \sum_{q \in Q} \mu(B).$$

Wäre $\mu(B) = 0$, so wäre hier die rechte Seite gleich 0, ein Widerspruch. Wäre dagegen $\mu(B) > 0$, so wäre die rechte Seite gleich ∞ , weil Q unendlich ist, ebenfalls ein Widerspruch. Solch ein μ kann es also nicht geben.

□

Beispiel 1.14 1. Hier ein besonders einfaches, aber dennoch wichtiges Beispiel für Wahrscheinlichkeitsmaße: Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein nichtleerer messbarer Raum. Ist $x \in \Omega$, so wird durch

$$\delta_x : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], \quad \delta_x(A) = 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert. Es heißt das *Dirac-Maß* in x . Gewissermaßen ist seine gesamte "Masse" in x konzentriert.

2. Ist Ω eine Menge, so wird durch

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \\ \mu(A) &= \begin{cases} |A| = \text{Anzahl der Elemente von } A, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ definiert. Es wird *Zählmaß* auf Ω genannt. Es ist endlich genau dann, wenn Ω endlich ist, und σ -endlich genau dann, wenn Ω abzählbar ist.

3. Ist Ω eine endliche, nichtleere Menge, so wird durch

$$\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

$$\mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ definiert. Es heißt die (diskrete) *Gleichverteilung* auf Ω . Vom Zählmaß auf Ω unterscheidet es sich nur durch den Normierungsfaktor $1/|\Omega|$.

4. Es sei Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge und $p : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, $i \mapsto p_i$ eine Abbildung. Dann wird durch

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, \infty], \\ \mu(A) &= \sum_{i \in A} p_i = \sum_{i \in \Omega} p_i \delta_i(A) \end{aligned}$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ definiert. In der Tat folgt die σ -Additivität von μ sofort aus dem großen Umordnungssatz der Analysis 1. Die Abbildung p heißt *Zähldichte* des Maßes μ . Wir schreiben auch kurz:

$$\mu = \sum_{i \in \Omega} p_i \delta_i.$$

Das Maß mit Zähldichte μ ist endlich genau dann, wenn $\sum_{i \in \Omega} p_i < \infty$, und σ -endlich genau dann, wenn p nicht den Wert ∞ annimmt. Insbesondere ist das Zählmaß auf der abzählbaren Menge Ω das Maß mit Zähldichte 1, und die Gleichverteilung auf einer endlichen, nichtleeren Menge Ω ist das Maß mit der Zähldichte $1/|\Omega|$.

5. Hier eine Variante des letzten Beispiels: Ist Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge und $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i \mapsto p_i$ eine Abbildung mit

$$\sum_{i \in \Omega} |p_i| < \infty,$$

so wird durch

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \mu(A) &= \sum_{i \in A} p_i = \sum_{i \in \Omega} p_i \delta_i(A) \end{aligned}$$

ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ definiert. Wieder folgt die σ -Additivität von μ sofort aus dem großen Umordnungssatz der Analysis 1. Auch hier heißt die Abbildung p die *Zähldichte* des signierten Maßes μ .

Das folgende Lemma liefert weitere wichtige Beispiele für Inhalte.

Lemma 1.15 (Riemann-Stieltjes-Inhalte) *Es sei $\mathcal{A} := \mathcal{A}([a, b])$ die Mengenalgebra aller endlichen Vereinigungen halboffener Intervalle $]a_j, b_j] \subseteq]a, b]$, $a_j < b_j$, aus Übung 1.5. Weiter sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine monoton steigende Funktion mit $f(x) \in \mathbb{R}$ für $a < x < b$. Gegeben $A \in \mathcal{A}$, dargestellt als Vereinigung*

$$A = \bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j] \in \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2)$$

paarweise disjunkter Intervalle $]a_j, b_j]$, setzen wir

$$\mu_f(A) := \sum_{j=1}^n (f(b_j) - f(a_j)). \quad (3)$$

Dann ist $\mu_f(A)$ wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl der Darstellung (2) ab. Weiter ist $\mu_f : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ ein Inhalt auf $\mathcal{A}$.

Beweis: Man beachte, dass in der Definition von $\mu_f(A)$ nicht der undefinierte Ausdruck $\infty - \infty$ auftaucht, da nach Voraussetzung $f(a_j) < \infty$ für $a_j < b$ und $f(b_j) > -\infty$ für $b_j > a$ gilt. Weiter ist $f(b_j) - f(a_j) \geq 0$ wegen der Monotonie von f , so dass $\sum_{j=1}^n (f(b_j) - f(a_j)) \geq 0$ folgt.

Es sei $A \in \mathcal{A}$ mit einer Darstellung (2) gegeben. Gibt es nun aneinandergrenzende Intervalle darin, d.h. gibt es ein i und ein j in $1, \dots, n$ mit $b_i = a_j$, so können wir die beiden Intervalle $]a_i, b_i]$ und $]a_j, b_j] =]b_i, b_j]$ zu einem einzigen Intervall $]a_i, b_j] =]a_i, b_i] \cup]a_j, b_j]$ zusammenfassen; der Wert der Summe in (3) ändert sich bei dieser Zusammenfassung nicht wegen

$$f(b_j) - f(a_i) = f(b_j) - f(a_j) + f(a_j) - f(a_i) = [f(b_j) - f(a_j)] + [f(b_i) - f(a_i)].$$

Wir wiederholen diese Zusammenfassung von Intervallen rekursiv so lange, bis es kein i und kein j in $1, \dots, n$ mit $b_i = a_j$ mehr gibt. Nach Anordnung der Intervalle nach ihrer Lage auf der Zahlengerade haben wir nach diesen Zusammenfassungen

$$a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n \leq b \quad (4)$$

erreicht, ohne dass sich der Wert der Summe in (3) geändert hat. Nun ist die Darstellung (2) mit der Bedingung (4) eindeutig bestimmt; vgl. Übung 1.5. Jede Darstellung (2) von A mit paarweise disjunkten Intervallen führt also nach der Zusammenfassung aneinandergrenzender Intervalle auf die gleiche Darstellung mit der Bedingung (4). Daher ist $\mu_f(A)$ wohldefiniert.

Nun zeigen wir, dass μ_f ein Inhalt ist. $\mu_f(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ haben wir schon oben aus der Monotonie von f geschlossen. Weiter gilt

$$\mu_f(\emptyset) = \sum_{j=1}^0 (f(b_j) - f(a_j)) = 0,$$

da der Wert der leeren Summe 0 ist.

Zur endlichen Additivität: Es seien disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ gegeben. Wir betrachten Zerlegungen $A = \bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j]$ und $B = \bigcup_{i=1}^m]c_i, d_i]$ in jeweils paarweise disjunkte Intervalle. Dann sind wegen $A \cap B = \emptyset$ auch alle Intervalle $]a_j, b_j]$ disjunkt von allen Intervallen $]c_i, d_i]$, so dass

$$A \cup B = \bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j] \cup \bigcup_{i=1}^m]c_i, d_i]$$

eine Zerlegung von $A \cup B$ in paarweise disjunkte Intervalle ist. Es folgt

$$\mu_f(A \cup B) = \sum_{j=1}^n (f(b_j) - f(a_j)) + \sum_{i=1}^m (f(d_i) - f(c_i)) = \mu_f(A) + \mu_f(B).$$

□

Ein besonderes wichtiges Beispiel ist $f = \text{id}$: Hier wird $A \in \mathcal{A}$ die Gesamtlänge $\mu_{\text{id}}(A)$ seiner Teilintervalle zugeordnet.

Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen und A eine weitere Menge, so verwenden wir die folgende Schreibweisen:

$A_n \uparrow$ (in n) bedeutet: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

$A_n \uparrow A$ für $n \rightarrow \infty$ bedeutet $A_n \uparrow$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$.

$A_n \downarrow$ (in n) bedeutet analog: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

$A_n \downarrow A$ für $n \rightarrow \infty$ bedeutet analog: $A_n \downarrow$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$.

Im Zusammenhang mit Limiten bei Maßen wird folgender Satz sehr oft verwendet.

Satz 1.16 (σ -Stetigkeit von Maßen) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Mengen in $\mathcal{A}$, und $A \in \mathcal{A}$ ein weiteres Ereignis. Dann gilt:

1. σ -Stetigkeit von unten: Aus $A_n \uparrow A$ für $n \rightarrow \infty$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
2. σ -Stetigkeit von oben: Aus $\mu(A_1) < \infty$ und $A_n \downarrow A$ für $n \rightarrow \infty$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Analoges gilt für signierte Maße.

Beweis:

1. Es gelte $A_n \uparrow A$. Wir setzen $B_n = A_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die B_n , $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, und es gilt $\bigcup_{m=1}^n B_m = A_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m = A$. Es folgt aus der endlichen Additivität und der σ -Additivität:

$$\mu(A_n) = \sum_{m=1}^n \mu(B_m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(B_m) = \mu\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m\right) = \mu(A).$$

2. Nun gelte $A_n \downarrow A$. Dann folgt $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus A$, also wegen $\mu(A_1) < \infty$ und der σ -Stetigkeit von oben:

$$\mu(A_1) - \mu(A_n) = \mu(A_1 \setminus A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$$

und daher die Behauptung. □

Beispiel 1.17 Das folgende Beispiel zeigt, dass man auf die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ bei der σ -Stetigkeit von oben nicht verzichten kann. Ist μ das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, so gilt zwar $[n, \infty[\cap \mathbb{N} \downarrow \emptyset$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu([n, \infty[\cap \mathbb{N}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \infty = \infty \neq 0 = \mu(\emptyset)$.

Erinnern Sie sich daran, dass eine Funktion $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ rechtsseitig stetig (oder kurz “rechtsstetig”) genannt wird, wenn für alle $x \in]a, b[$ die Einschränkung von f auf $[x, b]$ stetig in x ist. Äquivalent dazu ist es, dass für jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $]a, b]$ mit Limes $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in]a, b[$ gilt: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Beispiel 1.18 Wir betrachten nochmal die Situation von Lemma 1.15. Wenn es einen Maßraum $(\Omega =]a, b], \mathcal{F}, \lambda_f)$ mit $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{A}(]a, b])$ gibt, so dass das Maß λ_f den Inhalt μ_f fortsetzt, dann ist f rechtsseitig stetig.

In der Tat: Wäre f nicht rechtsseitig stetig, so könnten wir wegen der Monotonie von f ein $x \in]a, b[$ und eine monoton fallende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $]a, b[$ mit Limes x finden, für die $f(x) < \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ gilt. Wir nehmen noch ein beliebiges $y \in]a, x[$. Dann erhalten wir wegen $]y, x_n] \downarrow]y, x]$ für $n \rightarrow \infty$ den folgenden Widerspruch zur σ -Stetigkeit von λ_f von oben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_f([y, x_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - f(y) > f(x) - f(y) = \lambda_f([y, x]).$$

Man beachte hierbei, dass $\lambda_f([y, x_1]) = f(x_1) - f(y)$ nach der Voraussetzung an f endlich ist.

Wir werden umgekehrt später sehen, dass es ein Maß λ_f wie oben beschrieben gibt, wenn f rechtsstetig ist.

***Übung 1.19 (Produkte von Mengenalgebren und Inhalten)** Für $j = 1, 2$ seien Ω_j eine Menge, $\mathcal{A}_j$ eine Mengenalgebra darüber und $\mu_j : \mathcal{A}_j \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Weiter sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und $\mathcal{A}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von Rechtecken $A_1 \times A_2$ mit Seiten $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Zeigen Sie:

1. Jedes Element von $\mathcal{A}$ kann als endliche Vereinigung von *paarweise disjunkten* Rechtecken $A_1 \times A_2$ mit Seiten $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ dargestellt werden.
2. $\mathcal{A}$ ist eine Mengenalgebra über Ω .
3. Es gibt genau einen Inhalt $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ für $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ genau einen Inhalt μ_n auf der Mengenalgebra aller endlichen Vereinigungen von Quadern $\prod_{j=1}^n]a_j, b_j]$, $a_j \leq b_j$ in $[-\infty, \infty]$, mit $\mu(\prod_{j=1}^n]a_j, b_j]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.

1.2 Erzeugendensysteme von σ -Algebren

Ähnlich wie der Begriff des Erzeugendensystems eines Vektorraums in der Linearen Algebra eine wichtige Rolle spielt, spielt auch der folgende Begriff der von einem Mengensystem erzeugten σ -Algebra eine fundamentale Rolle in der Maßtheorie.

Satz 1.20 (Erzeugte σ -Algebra) Gegeben seien eine Menge Ω und ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann ist

$$\sigma(\mathcal{E}, \Omega) := \{A \subseteq \Omega \mid \text{Für jede } \sigma\text{-Algebra } \mathcal{A} \text{ über } \Omega \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \text{ gilt } A \in \mathcal{A}\} \quad (5)$$

eine σ -Algebra über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}, \Omega)$. Es ist die kleinste σ -Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, d.h. für jede σ -Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\sigma(\mathcal{E}, \Omega) \subseteq \mathcal{A}$.

$\sigma(\mathcal{E}, \Omega)$ ist also der Durchschnitt aller σ -Algebren über Ω , die $\mathcal{E}$ umfassen. Falls klar ist, welches "Universum" Ω gemeint ist, schreiben wir auch kurz $\sigma(\mathcal{E})$ statt $\sigma(\mathcal{E}, \Omega)$.

Beweis des Satzes:

1. $\emptyset \in \sigma(\mathcal{E}, \Omega)$ gilt, da $\emptyset \in \mathcal{A}$ für jede σ -Algebra $\mathcal{A}$ über Ω gilt.
2. *Abgeschlossenheit unter Komplementbildung:* Ist $A \in \sigma(\mathcal{E}, \Omega)$, so folgt für jede σ -Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$: $A \in \mathcal{A}$, und deshalb auch $A^c \in \mathcal{A}$. Wir schließen hieraus auch $A^c \in \sigma(\mathcal{E}, \Omega)$.
3. *Abgeschlossenheit unter abzählbarer Vereinigungen:* Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in $\sigma(\mathcal{E}, \Omega)$, so folgt für jede σ -Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$: $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und deshalb auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Wir schließen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{E}, \Omega)$.

□

Definition 1.21 (Erzeugte σ -Algebra, Erzeugendensystem) Die σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E}, \Omega)$ wird die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ -Algebra über Ω genannt. Sind $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra über Ω und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem mit $\sigma(\mathcal{E}, \Omega) = \mathcal{A}$, so wird $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem (oder auch kurz Erzeuger) von $\mathcal{A}$ genannt.

Übung 1.22 Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. Beweisen Sie $\sigma(\mathcal{E}, \Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$. Geben Sie auch alle Elemente von $\sigma(\{\{1, 2\}\}, \Omega)$ an.

Das folgende Kriterium zum Vergleich von erzeugten σ -Algebren ist oft sehr nützlich:

Übung 1.23 (Vergleich erzeugter σ -Algebren) Es seien Ω eine Menge, $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ Mengensysteme über Ω . Beweisen Sie:

1. Aus $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$ folgt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$.
2. Ist $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$ und $\mathcal{E}' \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, so folgt $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}')$.

Hierzu eine erste Anwendung:

Übung 1.24 Es sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$ alle die gleiche σ -Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{R}$ erzeugen:

1. $\mathcal{E}_1 = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, a < b\}$ sei die Menge der offenen Intervalle.
2. $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ sei die Menge der kompakten Intervalle.
3. $\mathcal{E}_3 = \{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ sei die Menge der linksseitig unendlichen abgeschlossenen Intervalle.
4. $\mathcal{E}_4 = \{]a, b] \cap \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$

Definition 1.25 (Borelsche σ -Algebren) Es sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann wird $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T})$ die *Borelsche σ -Algebra* zu $(\Omega, \mathcal{T})$ genannt. Ist speziell $\mathcal{T}$ die Standardtopologie auf einer Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir auch kurz $\mathcal{B}(\Omega)$ dafür. Die Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nennen wir auch *Borelmengen* in $\mathbb{R}^n$.

Übung 1.26 Es sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\Omega' \in \sigma(\mathcal{T}, \Omega)$ und $\mathcal{T}'$ die Teilraumtopologie auf Ω' bezüglich $\mathcal{T}$. Zeigen Sie

$$\mathcal{B}(\Omega', \mathcal{T}') = \{A \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{T}) \mid A \subseteq \Omega'\}.$$

Für $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^n$ definieren wir den “offenen Quader”

$$Q(a, b) :=]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[.$$

Der Quader ist nichtleer, falls $a_i < b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt; hierfür schreiben wir auch kurz $a < b$.

Lemma 1.27 Die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wird von dem Mengensystem $\mathcal{Q}$ aller offenen Quader $Q(a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$ erzeugt.

Insbesondere ist die in Übung 1.24 betrachtete σ -Algebra $\mathcal{A}$ gleich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Beweis: Es bezeichne $\mathcal{T}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$. Wegen $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{T}$ folgt $\sigma(\mathcal{Q}) \subseteq \sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Für die umgekehrte Inklusion sei eine offene Menge $A \in \mathcal{T}$ gegeben. Für jedes $x \in A$ gibt es einen Quader $Q(a, b) \in \mathcal{Q}$ mit rationalen Endpunkten $a, b \in \mathbb{Q}^n$, $a < b$, mit $x \in Q(a, b) \subseteq A$. Setzen wir

$$\mathcal{M} = \{Q(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}^n, a < b, Q(a, b) \subseteq A\} \subseteq \mathcal{Q},$$

so bedeutet das

$$A = \bigcup_{Q \in \mathcal{M}} Q.$$

Weil $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{Q})$ abzählbar ist, folgt aus der Abgeschlossenheit von $\sigma(\mathcal{Q})$ unter abzählbaren Vereinigungen auch $A \in \sigma(\mathcal{Q})$. Damit ist $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\mathcal{Q})$ gezeigt. Wir schließen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\mathcal{Q})$. Zusammen folgt die Behauptung $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{Q})$.

□

Übung 1.28 Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borelmengen sind:

1. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2+1}]$,
3. die Menge A aller Zahlen $x \in [0, 1[$, in deren Dezimaldarstellung eine Ziffer “3” vorkommt,
4. die Menge B aller Zahlen $x \in [0, 1[$, in deren Dezimaldarstellung unendlich oft die Ziffer “3”, aber nur endlich oft die Ziffer “4” vorkommt.

Übung 1.29 (Klassifizierung von σ -Algebren auf abzählbaren Mengen; Fortsetzung von Übung 1.6)

1. Es sei Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge, $\Sigma(\Omega)$ das Mengensystem aller σ -Algebren darüber, und $\Pi(\Omega)$ das Mengensystem aller Partitionen darüber. Beweisen Sie, dass die Abbildung $\text{part} : \Sigma(\Omega) \rightarrow \Pi(\Omega)$, $\mathcal{A} \mapsto \text{part}(\mathcal{A})$ aus Übung 1.6 und die Abbildung $\sigma : \Pi(\Omega) \rightarrow \Sigma(\Omega)$, $\mathcal{E} \mapsto \sigma(\mathcal{E})$ zueinander inverse Bijektionen sind.
2. Zählen Sie alle σ -Algebren auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ auf.

Definition 1.30 (Produkt- σ -Algebra) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ messbare Räume und $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ das zugehörige kartesische Produkt. Die von dem Mengensystem

$$\mathcal{Q} := \{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{A}_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \quad (6)$$

aller Quader mit messbaren Seiten erzeugte σ -Algebra

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \sigma(\mathcal{Q}, \Omega)$$

wird Produkt- σ -Algebra der $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ genannt. Im Spezialfall $\mathcal{A}_1 = \dots = \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$, dass alle Faktoren übereinstimmen, schreiben wir für die Produkt- σ -Algebra auch $\mathcal{A}^{\otimes n}$.

Übung 1.31 Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ messbare Räume, $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ ihr kartesisches Produkt und $\pi_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$, $\pi_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_i$ für $i = 1, \dots, n$ die kanonischen Projektionen. Beweisen Sie

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\{\pi_i^{-1}[A_i] \mid i \in \{1, \dots, n\}, A_i \in \mathcal{A}_i\}).$$

Lemma 1.32 In der Situation von oben sei für jedes $i = 1, \dots, n$ ein Erzeugendensystem $\mathcal{E}_i$ von $\mathcal{A}_i$ mit $\Omega_i \in \mathcal{E}_i$ gegeben. Dann ist das Mengensystem der Quader

$$\mathcal{E} := \{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{E}_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

mit Seiten aus dem jeweiligen Erzeugendensystem ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$.

Beweis: Wir setzen für $j = 0, \dots, n$:

$$\mathcal{F}_j := \{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{A}_i \text{ für } 1 \leq i \leq j, A_i \in \mathcal{E}_i \text{ für } j < i \leq n\}$$

Insbesondere gilt $\mathcal{F}_0 = \mathcal{E}$ und $\mathcal{F}_n = \mathcal{Q}$ mit dem Quadersystem $\mathcal{Q}$ aus (6). Wir zeigen nun für alle $j = 1, \dots, n$, dass $\sigma(\mathcal{F}_{j-1}, \Omega) = \sigma(\mathcal{F}_j, \Omega)$ gilt. Insbesondere folgt hieraus die Behauptung

$$\sigma(\mathcal{E}, \Omega) = \sigma(\mathcal{F}_0, \Omega) = \sigma(\mathcal{F}_n, \Omega) = \sigma(\mathcal{Q}, \Omega) = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n.$$

Gegeben $j \in \{1, \dots, n\}$, beobachten wir zunächst $\sigma(\mathcal{F}_{j-1}, \Omega) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_j, \Omega)$, da $\mathcal{F}_{j-1} \subseteq \mathcal{F}_j$ wegen $\mathcal{E}_j \subseteq \mathcal{A}_j$. Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir das Mengensystem

$$\mathcal{B}_j := \{A_j \in \mathcal{A}_j \mid A_1 \times \dots \times A_j \times \dots \times A_n \in \sigma(\mathcal{F}_{j-1}, \Omega) \text{ falls } A_i \in \mathcal{A}_i \text{ für } 1 \leq i < j \text{ und } A_i \in \mathcal{E}_i \text{ für } j < i \leq n\}$$

Nach Definition von $\mathcal{F}_{j-1}$ und wegen $\mathcal{F}_{j-1} \subseteq \sigma(\mathcal{F}_{j-1}, \Omega)$ gilt $\mathcal{E}_j \subseteq \mathcal{B}_j$. Weiter sieht man, dass $\Omega_j \in \mathcal{B}_j$ gilt und $\mathcal{B}_j$ abgeschlossen unter Komplementbildung ist wegen $\Omega_j \in \mathcal{E}_j$. Das System $\mathcal{B}_j$ ist zudem abgeschlossen unter Bildung abzählbarer Vereinigungen. Es ist also eine σ -Algebra über Ω_j . Es folgt $\mathcal{A}_j = \sigma(\mathcal{E}_j, \Omega_j) \subseteq \mathcal{B}_j$, anders gesagt: $\mathcal{F}_j \subseteq \sigma(\mathcal{F}_{j-1}, \Omega)$. Wir erhalten $\sigma(\mathcal{F}_j, \Omega) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_{j-1}, \Omega)$, also die Behauptung. $\square$

Beispiel 1.33 Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$. Das Mengensystem aller offenen Intervalle $]a, b[$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ erzeugt nämlich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Also wird $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$ von dem System der offenen Quader $]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i = 1, \dots, n$) erzeugt. Dieses System erzeugt jedoch auch $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Dynkin-Systeme

Bekanntlich stimmen zwei lineare Abbildungen $f, g : V \rightarrow W$ überein, wenn sie auf einem Erzeugendensystem ihres Definitionsbereichs übereinstimmen. Für Maße ist jedoch die analoge Aussage im Allgemeinen falsch:

Beispiel 1.34 Die diskrete Gleichverteilung $\mu = (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)/4$ auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, versehen mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, stimmt nicht mit dem Maß $\nu = (\delta_1 + \delta_4)/2$ überein, obwohl die Einschränkungen von μ und ν auf das Erzeugendensystem $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ von $\mathcal{P}(\Omega)$ gleich sind. Das Problem besteht darin, dass der Übereinstimmungsbereich

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\}$$

zweier Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem gleichen Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$ keine σ -Algebra zu sein braucht, denn es ist möglich, dass er nicht abgeschlossen unter endlicher oder abzählbarer Vereinigungsbildung ist.

Diese Beobachtung steht im Kontrast zu der Tatsache aus der linearen Algebra, dass der Übereinstimmungsbereich $\{x \in V \mid f(x) = g(x)\}$ zweier linearer Abbildungen $f, g : V \rightarrow W$ ein Untervektorraum von V ist.

Allerdings ist der Übereinstimmungsbereich zweier Wahrscheinlichkeitsmaße noch ein Dynkin-System im Sinne der folgenden Definition:

Definition 1.35 (Dynkin-System) Es sei Ω eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Dynkin-System* über Ω , wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$
2. Für alle $A \in \mathcal{D}$ folgt $A^c \in \mathcal{D}$.
3. Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D}$ gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Man beachte: Anders als in der Definition von σ -Algebren wird hier in der dritten Bedingung die paarweise Disjunktheit der Mengen A_n , $n \in \mathbb{N}$, vorausgesetzt!

Beispiel 1.36 (Übereinstimmungsbereich von W'-maßen ist Dynkin-System) Sind μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, so ist der Übereinstimmungsbereich

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein Dynkin-System.

In der Tat:

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$ folgt wegen $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$.
2. Gegeben $A \in \mathcal{D}$ folgt $\mu(A^c) = \mu(\Omega) - \mu(A) = 1 - \mu(A) = 1 - \nu(A) = \nu(\Omega) - \nu(A) = \nu(A^c)$, also auch $A^c \in \mathcal{D}$.
3. Ist eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D}$ gegeben und setzen wir $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, so folgt wegen der σ -Additivität von μ und ν :

$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) = \nu(A),$$

also auch $A \in \mathcal{D}$.

□

Analoges gilt natürlich (bei praktisch identischem Beweis), wenn μ und ν signierte Maße mit $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ sind.

Definition 1.37 ($\cap$ -stabile Mengensysteme) Wir nennen ein Mengensystem $\mathcal{E}$ *durchschnittsstabil*, kurz $\cap$ -stabil, wenn für alle $A, B \in \mathcal{E}$ gilt: $A \cap B \in \mathcal{E}$.

Satz 1.38 (Dynkin-Lemma, auch Π - Λ -Theorem genannt) Es sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein durchschnittstabilen Mengensystem und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Dynkin-System über Ω . Dann gilt:

Aus $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ folgt $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$.

Beweis:

1. *Schritt.* Ist $\mathcal{D}_1$ ein Dynkin-System über Ω , so gilt:

Für alle $A, B \in \mathcal{D}_1$ mit $A \subseteq B$ folgt $B \setminus A \in \mathcal{D}_1$.

Beweis hierzu: Die Mengen B^c und A sind disjunkt. Nun gilt $B^c \in \mathcal{D}_1$ wegen $B \in \mathcal{D}_1$. Zusammen mit $A \in \mathcal{D}_1$ folgt

$$(B \setminus A)^c = A \cup B^c \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \in \mathcal{D}_1$$

und damit $B \setminus A \in \mathcal{D}_1$.

2. *Schritt.* Es gibt ein kleinstes Dynkin-System $\mathcal{G}$ über Ω , das $\mathcal{M}$ umfasst, nämlich den Durchschnitt aller Dynkin-Systeme über Ω , die $\mathcal{M}$ umfassen:⁴

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq \Omega \mid \text{Für jedes Dynkin-System } \mathcal{E} \text{ über } \Omega \text{ mit } \mathcal{M} \subseteq \mathcal{E} \text{ gilt } A \in \mathcal{E}\}$$

3. *Schritt.* Wir setzen:

$$\mathcal{G}_1 = \{A \in \mathcal{G} \mid \forall B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{G}\}$$

Dann ist $\mathcal{G}_1$ ein Dynkin-System über Ω , das $\mathcal{M}$ umfasst: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}_1$.

Beweis hierzu:

- Es gilt $\emptyset \in \mathcal{G}_1$, da für alle $B \in \mathcal{M}$ gilt: $\emptyset \cap B = \emptyset \in \mathcal{G}$.
- Ist $A \in \mathcal{G}_1$, so folgt für alle $B \in \mathcal{M}$ mit Hilfe des 1. Schritts:

$$A^c \cap B = B \setminus (A \cap B) \in \mathcal{G},$$

denn es gelten $B \in \mathcal{G}$ wegen $B \in \mathcal{M}$, $A \cap B \in \mathcal{G}$ wegen $A \in \mathcal{G}_1$, und $A \cap B \subseteq B$.

Wir schließen: $A^c \in \mathcal{G}_1$.

- Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente von $\mathcal{G}_1$, so folgt für alle $B \in \mathcal{M}$:

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B) \in \mathcal{G},$$

denn die $A_n \cap B$, $n \in \mathbb{N}$, sind paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{G}$. Wir schließen: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}_1$.

- Es gilt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}_1$. Zum Beweis hiervon sei $A \in \mathcal{M}$ gegeben. Dann folgt für alle $B \in \mathcal{M}$ die Aussage $A \cap B \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$, weil $\mathcal{M}$ durchschnittstabil ist. Das bedeutet $A \in \mathcal{G}_1$.

4. *Schritt.* Weil $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}$ ein Dynkin-System über Ω mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}_1$ ist, folgt auch $\mathcal{G}_1 \supseteq \mathcal{G}$, weil $\mathcal{G}$ das *kleinste* Dynkin-System über Ω ist, das $\mathcal{M}$ als Teilmenge hat. Das bedeutet: $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$. Nach der Definition von $\mathcal{G}_1$ impliziert das für alle $A \in \mathcal{G}$ und alle $B \in \mathcal{M}$ die Aussage $A \cap B \in \mathcal{G}$.

⁴Man beachte die Analogie zu Formel (5).

5. *Schritt.* Wir setzen:

$$\mathcal{G}_2 := \{B \in \mathcal{G} \mid \forall A \in \mathcal{G} : A \cap B \in \mathcal{G}\}$$

Dann ist $\mathcal{G}_2$ ein Dynkin-System über Ω mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}_2$.

Der *Beweis hierzu* ähnelt ein wenig dem Beweis im 3. Schritt:

- Es gilt $\emptyset \in \mathcal{G}_2$, da für alle $A \in \mathcal{G}$ gilt: $A \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{G}$.
- Es sei $B \in \mathcal{G}_2$ gegeben. Dann folgt für alle $A \in \mathcal{G}$ mit Hilfe des 1. Schritts:

$$A \cap B^c = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{G},$$

da $A \cap B \in \mathcal{G}$ wegen $B \in \mathcal{G}_2$. Dies impliziert $B^c \in \mathcal{G}_2$.

- Ist $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente von $\mathcal{G}_2$, so folgt für alle $A \in \mathcal{G}$:

$$A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n) \in \mathcal{G},$$

denn die Mengen $A \cap B_n$, $n \in \mathbb{N}$, sind paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{G}$. Wir schließen: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{G}_2$.

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}_2$ ist klar nach dem vierten Schritt.

6. *Schritt.* Wie im 4. Schritt folgt $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$, also ist das Mengensystem $\mathcal{G}$ durchschnittstabil.

7. *Schritt.* Jedes durchschnittstabile Dynkin-System ist eine σ -Algebra. Insbesondere ist $\mathcal{G}$ eine σ -Algebra.

Beweis hierzu: Es sei $\mathcal{G}'$ ein durchschnittstables Dynkin-System. Weil $\mathcal{G}'$ als Dynkin-System die leere Menge als Element enthält und abgeschlossen unter Komplementbildung ist, bleibt nur zu zeigen, dass $\mathcal{G}'$ auch abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigungsbildung ist. Hierzu sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von $\mathcal{G}'$. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = A_n \cap \bigcap_{m < n} A_m^c.$$

Dann gilt $B_n \in \mathcal{G}'$, weil $\mathcal{G}'$ durchschnittstabil und abgeschlossen unter Komplementbildung ist. Nun sind die B_n , $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, und es gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{G}'.$$

Das Mengensystem $\mathcal{G}'$ ist also in der Tat abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigungsbildung.

8. Schritt. Aus $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$ folgt $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{G}$, weil $\mathcal{G}$ nach dem 7. Schritt eine σ -Algebra ist und $\sigma(\mathcal{M})$ die *kleinste* σ -Algebra ist, die $\mathcal{M}$ umfasst. Weiter wissen wir $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$, weil $\mathcal{G}$ das *kleinste* Dynkin-System ist, das $\mathcal{M}$ umfasst. Es folgt die Behauptung: $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$. $\square$

Korollar 1.39 (Eindeutigkeitssatz für endliche Maße) *Es seien μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, deren Einschränkungen auf einen $\cap$ -stabilen Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ übereinstimmen. Dann gilt $\mu = \nu$. Das gleiche gilt für signierte Maße μ und ν , falls zusätzlich $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ gilt.*

Beweis: Nach Beispiel 1.36 ist der Übereinstimmungsbereich

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein Dynkin-System. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$, also nach dem Dynkin-Lemma auch $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$. Es folgt $\mu = \nu$. $\square$

Beispiel 1.40 (Eindeutigkeitssatz für Verteilungsfunktionen) Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so wird $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $F_\mu(a) = \mu(]-\infty, a])$ die *Verteilungsfunktion* von μ genannt. Weil $\{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ ein $\cap$ -stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist, folgt:

Besitzen zwei Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die gleiche Verteilungsfunktion $F_\mu = F_\nu$, so sind sie gleich: $\mu = \nu$.

Die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathbb{R}$ bestimmt also das Maß eindeutig.

Beispiel 1.41 (Eindeutigkeit des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}^n$) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens ein Maß λ_n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit*

$$\lambda_n([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

für alle $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ in $\mathbb{R}^n$ mit $a < b$.

In der Tat: Sind λ_n, λ'_n zwei solche Maße, so ist

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mid \forall M \in \mathbb{N} : \lambda_n(A \cap]-M, M]^n) = \lambda'_n(A \cap]-M, M]^n)\}$$

ein Dynkinsystem. Es enthält alle halboffenen Quader $]a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ mit $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Das Mengensystem dieser Quader bildet jedoch ein $\cap$ -stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Es folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}$ nach dem Dynkin-Lemma. Wir schließen für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit Hilfe der σ -Stetigkeit von unten wegen $A \cap]-M, M]^n \uparrow A$ für $M \rightarrow \infty$:

$$\lambda_n(A) = \lim_{M \rightarrow \infty} \lambda_n(A \cap]-M, M]^n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \lambda'_n(A \cap]-M, M]^n) = \lambda'_n(A),$$

also $\lambda_n = \lambda'_n$.

□

Das “Beschränken” durch Schneiden mit $] -M, M]^n$ ist nötig, da λ_n kein endliches Maß sein kann.

Wir werden später sehen, dass es ein solches Maß λ_n auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tatsächlich gibt. Es wird n -dimensionales *Volumenmaß* oder *Lebesguemaß* auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ genannt.

Hier eine weitere Anwendung des Dynkin-Lemmas:

Definition 1.42 (Unabhängigkeit) *Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ zwei $\cap$ -stabile Mengensysteme aus Ereignissen in $\mathcal{A}$. Wir nennen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ (voneinander) unabhängig bzgl. μ , wenn gilt:*

$$\forall A \in \mathcal{E} \forall B \in \mathcal{F} : \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Satz 1.43 (Hochheben der Unabhängigkeit auf σ -Algebren) *Sind $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ zwei voneinander unabhängige $\cap$ -stabile Ereignissysteme in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, so sind auch $\sigma(\mathcal{E})$ und $\sigma(\mathcal{F})$ voneinander unabhängig bzgl. μ .*

Beweis: Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \mid \forall B \in \mathcal{F} : \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$. Zudem ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System. In der Tat:

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$ wegen

$$\forall B \in \mathcal{F} : \mu(\emptyset \cap B) = 0 = \mu(\emptyset)\mu(B).$$

2. Ist $A \in \mathcal{D}$, so folgt

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{F} : \mu(A^c \cap B) &= \mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(B) - \mu(A \cap B) \\ &= \mu(B) - \mu(A)\mu(B) = (1 - \mu(A))\mu(B) = \mu(A^c)\mu(B). \end{aligned}$$

3. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D}$, so ist auch $(A_n \cap B)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Ereignisse in $\mathcal{A}$. Aus der σ -Additivität von μ erhalten wir für alle $B \in \mathcal{F}$:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \cap B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\mu(B),$$

also $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Aus dem Dynkin-Lemma schließen wir $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$, d.h. $\sigma(\mathcal{E})$ und $\mathcal{F}$ sind unabhängig bezüglich μ . Mit dem gleichen Argument, diesmal angewandt auf $\mathcal{F}$ statt $\mathcal{E}$ und das Dynkin-System

$$\mathcal{D}' := \{B \in \mathcal{A} \mid \forall A \in \sigma(\mathcal{E}) : \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)\},$$

statt $\mathcal{D}$, schließen wir: $\sigma(\mathcal{E})$ und $\sigma(\mathcal{F})$ sind unabhängig bezüglich μ .

□

Übung 1.44 Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, versehen mit seiner Potenzmenge und der Gleichverteilung μ . Weiter sei $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ und $\mathcal{F} = \{\{1, 4\}\}$. Zeigen Sie:

1. $\mathcal{E}$ ist *nicht* $\cap$ -stabil.
2. $\forall A \in \mathcal{E} \forall B \in \mathcal{F} : \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.
3. $\sigma(\mathcal{E})$ und $\sigma(\mathcal{F})$ sind *nicht* bezüglich μ voneinander unabhängig.

Übung 1.45 Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{A}$ durchschnittstabile Mengensysteme mit $\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wir nennen $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ (voneinander) unabhängig bzgl. μ , wenn gilt:

$$\forall A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_n : \mu\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Zeigen Sie:

1. Sind die Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ von oben (voneinander) unabhängig bzgl. μ , so auch $\sigma(\mathcal{E}_1), \dots, \sigma(\mathcal{E}_n)$.
2. Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass die Aussage von oben falsch werden kann, wenn wir auf die Voraussetzung “ $\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$ ” oben verzichtet hätten. Versehen Sie dazu $\Omega = \{1, 2\}$ mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß und betrachten Sie $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \{\{1\}\}$ und $\mathcal{E}_3 = \{\emptyset\}$.
3. Zeigen Sie: Sind $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4 \subseteq \mathcal{A}$ voneinander bzgl. μ unabhängige Unter- σ -Algebren von $\mathcal{A}$, so sind auch $\sigma(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ und $\sigma(\mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4)$ voneinander unabhängig bzgl. μ .

1.4 Der Fortsetzungssatz von Carathéodory

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, zu entscheiden, wann ein Inhalt μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ zu einem Maß $\hat{\mu}$ auf einer σ -Algebra $\hat{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ fortgesetzt werden kann. Hierzu definieren wir:

Definition 1.46 (σ -Nullstetigkeit und σ -Stetigkeit von unten auf Inhalten) Ein Inhalt μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einer Menge Ω heißt σ -nullstetig, wenn für alle Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}$, $A_n \downarrow \emptyset$ und $\mu(A_1) < \infty$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$. Der Inhalt μ heißt σ -stetig von unten, wenn für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}$ und $A_n \uparrow A \in \mathcal{A}$ gilt: $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Nach Satz 1.16 ist jedes Maß σ -nullstetig und σ -stetig von unten. Wir schließen daraus, dass jeder Inhalt μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$, der zu einem Maß $\hat{\mu}$ auf einer σ -Algebra $\hat{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ fortgesetzt werden kann, σ -nullstetig und σ -stetig von unten sein muß.

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist eine Umkehrung dieser Aussage. Zunächst studieren wir die σ -Nullstetigkeit und deren Beziehung zur σ -Stetigkeit von unten noch etwas genauer:

Lemma 1.47 *Es sei μ ein σ -nullstetiger Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einer Menge Ω . Es gelte mindestens eine der beiden folgenden Voraussetzungen:*

1. $\mu(\Omega) < \infty$,
2. *oder, schwächer:*
Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gibt es eine Folge $\mathcal{A} \ni E_m \uparrow A$ für $m \rightarrow \infty$ mit $\mu(E_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mu(A)$ und $\mu(E_m) < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Dann ist μ σ -stetig von unten.

Man beachte, dass Voraussetzung 2. nur für $\mu(A) = \infty$ nichttrivial ist.

Beweis des Lemmas: Es sei $\mathcal{A} \ni A_n \uparrow A \in \mathcal{A}$ gegeben. Dann folgt $A \setminus A_n \downarrow \emptyset$. Wir nehmen nun die Voraussetzung 1. an: $\mu(\Omega) < \infty$. Dann nimmt μ nur endliche Werte an. Aus der σ -Nullstetigkeit schließen wir $\mu(A) - \mu(A_n) = \mu(A \setminus A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, also $\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)$. Also ist μ in diesem Fall σ -stetig von unten.

Nun nehmen wir die Voraussetzung 2. an; es sei also eine Folge $(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$ wie in der Voraussetzung 2. gegeben. Dann ist die Einschränkung μ_m von μ auf die Mengenalgebra $\mathcal{A}_m := \{B \in \mathcal{A} \mid B \subseteq E_m\}$ über E_m ein σ -nullstetiger Inhalt, also σ -stetig von unten wegen $\mu(E_m) < \infty$ nach dem schon Gezeigten. Nun folgt für festes $m \in \mathbb{N}$ wegen $E_m \subseteq A$ und $A_n \uparrow_{n \rightarrow \infty} A$ auch $E_m \cap A_n \uparrow_{n \rightarrow \infty} E_m$ und damit $\mu(E_m \cap A_n) = \mu_m(E_m \cap A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(E_m)$ wegen der σ -Stetigkeit von unten von μ_m . Wir schließen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_m \cap A_n) = \mu(E_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mu(A)$$

und daher $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \geq \mu(A)$. Wegen $A_n \subseteq A$ folgt auch $\mu(A_n) \leq \mu(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also zusammen $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. □

Übung 1.48 Zeigen Sie folgende Umkehrung des Lemmas 1.47:

Ist ein Inhalt σ -stetig von unten, so ist er auch σ -nullstetig.

Beispiel 1.49 *Der Inhalt $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, \infty\}$ mit $\mu(A) = 0$ falls $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich ist und $\mu(A) = \infty$ sonst ist zwar σ -nullstetig, aber nicht σ -stetig von unten. Offensichtlich sind die Voraussetzungen von Lemma 1.47 hier verletzt.*

Wir zeigen nun folgendes hinreichendes Kriterium für σ -Nullstetigkeit:

Satz 1.50 (Kompaktheitskriterium für σ -Nullstetigkeit) *Es sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum, $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra über Ω und $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Es gebe zu jedem $A \in \mathcal{A}$ und jedem $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x < \mu(A)$ eine bzgl. $\mathcal{T}$ kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ und ein $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq K \subseteq A$ und $\mu(B) \geq x$. Dann ist μ σ -nullstetig.*

Beweis durch Kontraposition:⁵ Gegeben sei eine monoton fallende Folge $A_n \downarrow$ in $\mathcal{A}$ mit $\mu(A_1) < \infty$ und $\delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) > 0$. Zu zeigen ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Hierzu wählen wir rekursiv eine monoton fallende Folge $B_n \downarrow$ in $\mathcal{A}$ und eine monoton fallende Folge $K_n \downarrow$ von kompakten Mengen mit $B_n \subseteq K_n \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_n \setminus B_n) \leq (1 - 2^{-n})\delta$ wie folgt:

Rekursionsanfang, $n = 1$: Nach Voraussetzung können wir ein kompaktes K_1 und ein $B_1 \in \mathcal{A}$ mit $B_1 \subseteq K_1 \subseteq A_1$ und $\mu(B_1) \geq \mu(A_1) - \frac{1}{2}\delta$ wählen. Insbesondere gilt dann $\mu(A_1 \setminus B_1) \leq \frac{1}{2}\delta$

Rekursionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gegeben. Es seien Mengen $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_{n-1}$ in $\mathcal{A}$ und kompakte Mengen $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_{n-1}$ mit $B_i \subseteq K_i \subseteq A_i$ und $\mu(A_i \setminus B_i) \leq (1 - 2^{-i})\delta$ für $i = 1, \dots, n-1$ schon gewählt.

Rekursionsschritt: Es folgt wegen $A_n \subseteq A_{n-1}$:

$$(A_n \cap B_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus B_{n-1}) \supseteq A_n$$

und daher nach der Rekursionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \mu(A_n \cap B_{n-1}) + (1 - 2^{-(n-1)})\delta &\geq \mu(A_n \cap B_{n-1}) + \mu(A_{n-1} \setminus B_{n-1}) \\ &\geq \mu((A_n \cap B_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus B_{n-1})) \geq \mu(A_n) \end{aligned}$$

also

$$\mu(A_n \cap B_{n-1}) \geq \mu(A_n) - (1 - 2^{-(n-1)})\delta > \mu(A_n) - (1 - 2^{-n})\delta > 0,$$

wobei wir im letzten Schritt $\mu(A_n) \geq \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_m) = \delta > 0$ verwendet haben. Nach Voraussetzung können wir also ein kompaktes K_n und ein $B_n \in \mathcal{A}$ mit $B_n \subseteq K_n \subseteq A_n \cap B_{n-1}$ und $\mu(B_n) \geq \mu(A_n) - (1 - 2^{-n})\delta$ wählen. Es folgt $B_n \subseteq K_n \subseteq B_{n-1} \subseteq K_{n-1}$ und $\mu(A_n \setminus B_n) = \mu(A_n) - \mu(B_n) \leq (1 - 2^{-n})\delta$, wie gewünscht. Damit ist die rekursive Wahl der Folgen $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschlossen.

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt $\mu(B_n) > 0$ wegen $\mu(B_n) \geq \mu(A_n) - (1 - 2^{-n})\delta > \delta - \delta = 0$, also $B_n \neq \emptyset$ und daher $K_n \neq \emptyset$ wegen $K_n \supseteq B_n$. Nun ist der Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ einer absteigenden Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nichtleerer kompakter Mengen in einem Hausdorffraum $(\Omega, \mathcal{T})$ nichtleer. (Das Argument dazu kennen Sie schon aus der Analysis 1: Andernfalls wäre $(\Omega \setminus K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K_1 , die keine endliche Teilüberdeckung besitzt, im Widerspruch zur Kompaktheit von K_1 .) Es folgt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset,$$

also die Behauptung. □

Als eine wichtige Anwendung betrachten wir nochmal die Situation aus Lemma 1.15 und Übung 1.5: Gegeben seien $a < b$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\Omega =]a, b]$, die Mengenalgebra $\mathcal{A} := \mathcal{A}(]a, b])$ darüber und eine monoton steigende Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $f(x) \in \mathbb{R}$ für $a < x < b$, sowie der zugehörige Inhalt $\mu_f : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, definiert durch (3).

⁵Gegeben $A_n \downarrow$, lautet die Kontraposition der σ -Nullstetigkeit hierzu, also der Aussage $A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$, so: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) > 0 \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Satz 1.51 *Ist f rechtsstetig und in b linksstetig, so ist μ_f σ -stetig von unten.*

Beweis: Wir versehen Ω mit der Standardtopologie. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes 1.50 erfüllt. In der Tat: Es sei

$$A = \bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j] \quad (7)$$

ein Element von $\mathcal{A}$, dargestellt als endliche Vereinigung paarweise disjunkter nichtleerer Intervalle, sowie $0 < x < \mu_f(A)$. Dann gilt wegen der Rechtsstetigkeit von f

$$\lim_{\alpha_j \downarrow a_j} \mu_f(] \alpha_j, b_j]) = \lim_{\alpha_j \downarrow a_j} f(b_j) - f(\alpha_j) = f(b_j) - f(a_j) = \mu_f(]a_j, b_j]), \quad (j = 1, \dots, n).$$

Wählen wir die $\alpha_j \in]a_j, b_j]$ genügend nahe bei a_j und setzen wir $B = \bigcup_{j=1}^n] \alpha_j, b_j]$ und $K = \bigcup_{j=1}^n [\alpha_j, b_j]$, so folgt $B \subseteq K \subseteq A$ und

$$\mu_f(B) = \sum_{j=1}^n \mu_f(] \alpha_j, b_j]) \geq x.$$

Nach Satz 1.50 ist also μ_f σ -nullstetig. Ausserdem ist die Voraussetzung 2. des Lemmas 1.47 erfüllt. Gegeben $A \in \mathcal{A}$, wählen wir nämlich Folgen $x_m \downarrow a$ und $y_m \uparrow b$ mit $a < x_m < y_m < b$ ($m \in \mathbb{N}$) und setzen $E_m := A \cap]x_m, y_m]$. Wegen der Rechtsstetigkeit von f und der Linksstetigkeit in b von f sieht man

$$\mu_f(E_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mu_f(A).$$

Zudem gilt $\mu_f(E_m) \leq \mu_f(]x_m, y_m]) = f(y_m) - f(x_m) < \infty$ für alle m , da f auf $]a, b[$ nur endliche Werte annimmt. Mit Lemma 1.47 folgt die behauptete σ -Stetigkeit von μ_f von unten.

□

Übung 1.52 (Vererbung des Kompaktheitskriteriums auf Produkte) Für $j = 1, 2$ seien eine Mengenalgebra $\mathcal{A}_j$ auf einer Menge Ω_j , ein Inhalt $\nu_j : \mathcal{A}_j \rightarrow [0, \infty]$ und eine hausdorffsche Topologie $\mathcal{T}_j$ auf Ω_j gegeben, so dass das Kompaktheitskriterium aus Satz 1.50 erfüllt sei. Weiter bezeichne $\mathcal{A}$ die Produkt-Mengenalgebra von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ auf $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ den Produkt-Inhalt dazu aus Übung 1.19 und $\mathcal{T}$ die Produkttopologie zu $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ auf Ω . Zeigen Sie, dass auch ν das Kompaktheitskriterium aus Satz 1.50 bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ erfüllt.

Lemma 1.53 (Äquivalenz von σ -Additivität und σ -Stetigkeit von unten) *Ein Inhalt μ auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ über einer Menge Ω ist genau dann ein Maß, wenn er σ -stetig von unten ist.*

Beweis: “ $\Rightarrow$ ”: Diese Implikation wurde schon in Satz 1.16 gezeigt.

“ $\Leftarrow$ ”: Es sei umgekehrt μ σ -stetig von unten und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$. Wir setzen $A_n := \bigcup_{k=1}^n B_k \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Mit $A_n \uparrow A$ und der vorausgesetzten σ -Stetigkeit schließen wir

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n).$$

Also ist μ σ -additiv und damit ein Maß.

□

Wir setzen nun einen von unten σ -stetigen Inhalt auf die *gesamte* Potenzmenge von Ω fort, schränken dann aber diese Fortsetzung aber wieder so ein, dass sie ein Maß wird:

Definition 1.54 (äußeres Maß) Gegeben sei ein von unten σ -stetiger Inhalt μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einer Menge Ω . Wir definieren das zugehörige *äußere Maß* $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ durch

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine monoton aufsteigende Folge in } \mathcal{A} \text{ mit } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq A \right\}.$$

Weiter definieren wir

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \forall B \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)\}.$$

Trotz seines Namens ist das äußere Maß i.a. *kein* Maß.

“**Übung 1.55** Überlegen Sie sich unter den Voraussetzungen von Definition 1.54: $\mu^*(\emptyset) = 0$. Überlegen Sie sich auch, dass für $A \subseteq B \subseteq \Omega$ gilt: $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.”

Lemma 1.56 (σ -Subadditivität des äußeren Maßes) Unter den Voraussetzungen von Definition 1.54 gilt:

$$\forall A, B \subseteq \Omega : \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Weiter gilt für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von Ω :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Beweis: Die erste Behauptung ist ein Spezialfall der zweiten, wenn wir $A_1 := A$, $A_2 = B$ und $A_n = \emptyset$ für $n \geq 3$ setzen. Wir zeigen nun die zweite Behauptung. Hierzu sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$. Gegeben $\epsilon > 0$, wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Definition von $\mu^*(A_n)$ eine aufsteigende Folge $(B_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}$, so dass gilt: $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_{n,m} \supseteq A_n$ und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_{n,m}) \leq \mu^*(A_n) + 2^{-n}\epsilon; \quad (8)$$

man beachte, dass dies auch im Fall $\mu^*(A_n) = \infty$ möglich ist. Setzen wir für $m \in \mathbb{N}$

$$C_m := \bigcup_{n=1}^m B_{n,m} \in \mathcal{A},$$

so ist die Folge $(C_m)_{m \in \mathbb{N}}$ monoton aufsteigend mit

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_m = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} B_{n,m} \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n;$$

um hier die Gleichheit auf der linken Seite zu sehen, beachte man $B_{n,m} \uparrow$ in m . Wir schließen

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(C_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mu(B_{n,m}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{n \leq m\}} \mu(B_{n,m}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_{n,m}) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + 2^{-n}\epsilon) = \epsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n), \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt die Definition von μ^* , im zweiten Schritt die Subadditivität von μ (siehe Übung 1.12), im vierten Schritt den Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen und im vorletzten Schritt die Ungleichung (8) verwendet haben; bei der Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz beachte man, dass $1_{\{n \leq m\}} \mu(B_{n,m})$ für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ monoton steigend in m ist mit $1_{\{n \leq m\}} \mu(B_{n,m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_{n,m})$. Weil $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Insbesondere folgt

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \forall B \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)\}, \quad (9)$$

denn die umgekehrte Ungleichung $\mu^*(B) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)$ gilt wegen $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ und Lemma 1.56 stets.

Satz 1.57 (Fortsetzungssatz von Carathéodory) Unter den Voraussetzungen von Definition 1.54 gilt:

1. Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$.
2. $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ ist eine σ -Algebra über Ω .
3. $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \hat{\mathcal{A}}_\mu$.
4. Die Einschränkung $\hat{\mu} := \mu^*|_{\hat{\mathcal{A}}_\mu} : \hat{\mathcal{A}}_\mu \rightarrow [0, \infty]$ des äußeren Maßes $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ auf die σ -Algebra $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ ist ein Maß, das den Inhalt $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ fortsetzt.
5. (**Vollständigkeit von $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ bzgl. $\hat{\mu}$**) Für alle $N \subseteq \Omega$ und alle $M \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ mit $\hat{\mu}(M) = 0$ und $N \subseteq M$ gilt $N \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$.
6. Für alle $A \subseteq \Omega$ sind äquivalent:
 - (a) $A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ und $\hat{\mu}(A) < \infty$;
 - (b) $\exists B, N \in \sigma(\mathcal{A}) : A \subseteq B, \hat{\mu}(B) < \infty, \hat{\mu}(N) = 0, B \setminus A \subseteq N$.

Beweis:

1. Es sei $A \in \mathcal{A}$ gegeben. Betrachten wir die konstante Folge $(A)_{n \in \mathbb{N}}$, so folgt nach Definition von $\mu^*(A)$:

$$\mu^*(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A) = \mu(A).$$

Wir zeigen nun umgekehrt $\mu^*(A) \geq \mu(A)$. Hierzu sei eine monoton aufsteigende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq A$ gegeben. Wegen $A_n \cap A \uparrow A$ und der σ -Stetigkeit von unten von μ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cap A) = \mu(A)$. Dies zeigt $\mu^*(A) \geq \mu(A)$, also zusammen $\mu^*(A) = \mu(A)$.

2. Wir zeigen zuerst, dass $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ eine Mengenalgebra ist.

Die Aussagen $\emptyset \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ und $A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu \Rightarrow A^c \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ für $A \subseteq \Omega$ folgen unmittelbar aus den Definitionen; man beachte, dass A und A^c symmetrisch in der Definition der Aussage $A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ auftreten. Gegeben seien nun $A, B \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$. Um $A \cup B \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ zu zeigen, sei $C \subseteq \Omega$ gegeben. Zu zeigen ist nun $\mu^*(C) = \mu^*((A \cup B) \cap C) + \mu^*((A \cup B)^c \cap C)$. Dies folgt so:

$$\begin{aligned} \mu^*(C) &= \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C) \quad \text{wegen } A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu \\ &= \mu^*(A \cap C) + \mu^*(B \cap A^c \cap C) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap C) \quad \text{wegen } B \in \hat{\mathcal{A}}_\mu \\ &= \mu^*(A \cap (A \cup B) \cap C) + \mu^*(A^c \cap (A \cup B) \cap C) + \mu^*((A \cup B)^c \cap C) \\ &= \mu^*((A \cup B) \cap C) + \mu^*((A \cup B)^c \cap C) \quad \text{wegen } A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu. \end{aligned}$$

Also ist $A \cup B \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$. Damit ist gezeigt, dass $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ eine Mengenalgebra ist.

Wir zeigen nun, dass für jedes $D \subseteq \Omega$ die Einschränkung $\hat{\mu}_D = \mu^*_D|_{\hat{\mathcal{A}}_\mu}$ der Abbildung $\mu^*_D : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$, $\mu^*_D(A) = \mu^*(A \cap D)$, auf $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ ein Inhalt ist. Insbesondere ist die

Einschränkung $\hat{\mu} = \hat{\mu}_\Omega$ von μ^* auf $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ ein Inhalt.

$\mu_D^*(\emptyset) = 0$ und $\mu_D^*(A) \geq 0$ für $A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ wissen wir bereits. Zum Nachweis der endlichen Additivität seien disjunkte Mengen $A, B \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ gegeben. Dann folgt

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_D(A \cup B) &= \mu^*((A \cup B) \cap D) \quad \text{wegen } A \cup B \in \hat{\mathcal{A}}_\mu \\ &= \mu^*(A \cap (A \cup B) \cap D) + \mu^*(A^c \cap (A \cup B) \cap D) \quad \text{wegen } A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu \\ &= \mu^*(A \cap D) + \mu^*(B \cap D) \quad \text{wegen } A \cap B = \emptyset, \text{ also } A^c \cap (A \cup B) = B \\ &= \hat{\mu}_D(A) + \hat{\mu}_D(B) \quad \text{wegen } A, B \in \hat{\mathcal{A}}_\mu.\end{aligned}$$

Nun beweisen wir für alle $D \subseteq \Omega$, und jede aufsteigende Folge $C_n \uparrow$ mit Werten in $\hat{\mathcal{A}}_\mu$:

$$\mu_D^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_D^*(C_n). \quad (10)$$

Gegeben solch ein D und eine solche Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, setzen wir $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Weil $C_n \subseteq A$ und damit $C_n \cap D \subseteq A \cap D$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_D^*(C_n) \leq \mu_D^*(A)$. Zum Nachweis der umgekehrten Ungleichung definieren wir $B_n := C_n \setminus C_{n-1} \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei wir noch $C_0 := \emptyset$ ergänzen. Insbesondere sind die B_n , $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, und es gilt $\bigcup_{k=1}^n B_k = C_n \uparrow A$ und daher auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap D) = A \cap D$. Damit folgt die Behauptung so:

$$\begin{aligned}\mu_D^*(A) &= \mu^*(A \cap D) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B_n \cap D) \quad (\text{wegen der } \sigma\text{-Subadditivität von } \mu^* \text{ von Lemma 1.56}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_D^*(B_n) \quad (\text{wegen } B_n \in \hat{\mathcal{A}}_\mu) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu_D^*(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_D^*(C_n) \\ &\quad (\text{wegen } B_k \in \hat{\mathcal{A}}_\mu \text{ und der endlichen Additivität von } \hat{\mu}_D).\end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir, dass $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigungsbildung ist.

Hierzu sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ und $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Zu zeigen ist $A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$. Gegeben $B \subseteq \Omega$, ist also $\mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)$ zu zeigen. Wir setzen $C_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Weil $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ eine Mengenalgebra ist, folgt $C_n \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schließen für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*(C_n \cap B) + \mu^*(C_n^c \cap B) \quad \text{wegen } C_n \in \hat{\mathcal{A}}_\mu \\ &\geq \mu^*(C_n \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \quad \text{wegen } C_n \subseteq A, \text{ also } C_n^c \cap B \supseteq A^c \cap B \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \quad \text{wegen } \hat{\mathcal{A}}_\mu \ni C_n \uparrow A \text{ und (10)}.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde (10) natürlich für μ_D^* mit $D := B$ angewandt.

Damit ist $\mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)$ gezeigt.

Zusammen folgt, dass $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ -Algebra ist.

3. Wir zeigen zunächst $\mathcal{A} \subseteq \hat{\mathcal{A}}_\mu$.

Es seien $A \in \mathcal{A}$ und $B \subseteq \Omega$ gegeben; zu zeigen ist $\mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)$.

Hierzu sei eine monoton aufsteigende Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \supseteq B$ gegeben.

Zu zeigen ist nun $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)$. Weil $(A \cap B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n) \supseteq A \cap B$ ist, folgt

$$\mu^*(A \cap B) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap B_n)$$

aufgrund der Definition von μ^* . Ebenso folgt

$$\mu^*(A^c \cap B) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A^c \cap B_n),$$

weil auch $(A^c \cap B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A^c \cap B_n) \supseteq A^c \cap B$ ist. Wir erhalten die Behauptung so:

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A \cap B_n) + \mu(A^c \cap B_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Es folgt $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \hat{\mathcal{A}}_\mu$, weil $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ -Algebra mit $\mathcal{A} \subseteq \hat{\mathcal{A}}_\mu$ ist.

4. Fassen wir das schon Gezeigte zusammen: Wir wissen schon, dass $\hat{\mu} : \hat{\mathcal{A}}_\mu \rightarrow [0, \infty]$ ein von unten σ -stetiger Inhalt auf der σ -Algebra $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ ist, der den Inhalt $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ fortsetzt. Nach Lemma 1.53 ist $\hat{\mu}$ ein Maß.
5. Gegeben seien $N \subseteq \Omega$ und $M \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ mit $\hat{\mu}(M) = 0$ und $N \subseteq M$, sowie $B \subseteq \Omega$. Wir müssen zeigen: $\mu^*(B) = \mu^*(N \cap B) + \mu^*(N^c \cap B)$. Einerseits gilt $0 \leq \mu^*(N \cap B) \leq \mu^*(M) = \hat{\mu}(M) = 0$ wegen $N \cap B \subseteq N \subseteq M$, also $\mu^*(N \cap B) = 0$. Andererseits gilt $\mu^*(B) = \mu^*(N^c \cap B)$, da

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(M \cap B) + \mu^*(M^c \cap B) \quad \text{wegen } M \in \hat{\mathcal{A}}_\mu \\ &\leq \mu^*(M) + \mu^*(N^c \cap B) \quad \text{wegen } M \cap B \subseteq M \text{ und } M^c \cap B \subseteq N^c \cap B \\ &= \mu^*(N^c \cap B) \leq \mu^*(B) \end{aligned}$$

Zusammen folgt die Behauptung.

6. (a) $\Rightarrow$ (b): Es sei $A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ mit $\hat{\mu}(A) < \infty$ gegeben. Nach der Definition des äußeren Maßes gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge $(B_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}$ mit $B_m := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,m} \supseteq A$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_{n,m}) \leq \hat{\mu}(A) + \frac{1}{m}.$$

Es ist $B_m \in \sigma(\mathcal{A})$ wegen $B_{n,m} \in \mathcal{A}$. Mit der Definition des äußeren Maßes folgt

$$\hat{\mu}(B_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_{n,m}) \leq \hat{\mu}(A) + \frac{1}{m}.$$

Nun setzen wir $B := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m$. Wegen $A \subseteq B_m \in \sigma(\mathcal{A})$ für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt $B \in \sigma(\mathcal{A})$ und $A \subseteq B$. Es folgt

$$\hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(B) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \hat{\mu}(B_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\hat{\mu}(A) + \frac{1}{m} \right) = \hat{\mu}(A),$$

also $\hat{\mu}(A) = \hat{\mu}(B)$. Wir schließen $\hat{\mu}(B \setminus A) = \hat{\mu}(B) - \hat{\mu}(A) = 0$; hier verwenden wir $\hat{\mu}(A) < \infty$, so dass nicht der undefinierte Ausdruck $\infty - \infty$ auftritt. Nach der Definition des äußeren Maßes gibt es also für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge $(C_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}$ mit $B \setminus A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_{n,m} =: C_m \in \sigma(\mathcal{A})$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_{n,m}) \leq \frac{1}{m}$. Mit $N := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m \in \sigma(\mathcal{A})$ schließen wir: $B \setminus A \subseteq N \in \sigma(\mathcal{A})$, und weiter mit der Definition des äußeren Maßes :

$$\hat{\mu}(N) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \hat{\mu}(C_m) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_{n,m}) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$$

und daher $\hat{\mu}(N) = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Gegeben $B, N \in \sigma(\mathcal{A})$ wie in (b), erhalten wir $B \setminus A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ wegen $B \setminus A \subseteq N$, $\hat{\mu}(N) = 0$ und der schon bewiesenen Aussage 5. (Vollständigkeit von $\hat{\mathcal{A}}_\mu$). Es folgt: $A = B \setminus (B \setminus A) \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ wegen $A \subseteq B$ und $B, B \setminus A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$. Schließlich gilt $\hat{\mu}(A) < \infty$ wegen $\hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(B) < \infty$.

□

Wir führen nun einige praktische Sprechweisen ein:

Definition 1.58 (Nullmengen, Vollständigkeit von σ -Algebren) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \subseteq \Omega$ heißt eine *Nullmenge* bzgl. μ (kurz auch μ -Nullmenge), wenn es eine messbare Menge $M \in \mathcal{A}$ mit $N \subseteq M$ und $\mu(M) = 0$ gibt. Die σ -Algebra $\mathcal{A}$ heißt *vollständig* bzgl. μ , wenn jede μ -Nullmenge ein Element von $\mathcal{A}$ ist. Alternativ sagt man dafür auch: “Der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist *vollständig*.” Eine Aussage $\Phi(\omega)$ über Elemente ω von Ω heißt *μ -fast überall gültig* (Synonyme: “für μ -fast alle $\omega \in \Omega$ gültig”, oder auch, vor allem für Wahrscheinlichkeitsmaße verwendet: “ μ -fast sicher gültig”) wenn $\{\omega \in \Omega \mid \Phi(\omega) \text{ gilt nicht}\}$ eine μ -Nullmenge ist.

Die Aussage 5. im Fortsetzungssatz von Carathéodory besagt also in der Tat genau die Vollständigkeit von $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ bezüglich $\hat{\mu}$ im Sinne dieser Definition.

Übung 1.59 (abzählbare Vereinigung von Nullmengen) Es sei μ ein Maß. Zeigen Sie, dass jede abzählbare Vereinigung von μ -Nullmengen wieder eine μ -Nullmenge ist.

Übung 1.60 (Vervollständigung von Maßräumen) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und die σ -Algebra $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ und das Maß $\hat{\mu} : \hat{\mathcal{A}}_\mu \rightarrow [0, \infty]$ hieraus wie im Fortsetzungssatz von Carathéodory konstruiert. Weiter sei

$$\hat{\mathcal{A}} := \{A \Delta N \mid A \in \mathcal{A}, N \subseteq \Omega, N \text{ ist eine } \mu\text{-Nullmenge}\}.$$

Zeigen Sie:

1. $\hat{\mathcal{A}}$ ist eine σ -Algebra über Ω .
2. $\hat{\mathcal{A}} \subseteq \hat{\mathcal{A}}_\mu$.
3. Die Einschränkung von $\hat{\mu}$ auf $\hat{\mathcal{A}}$ ist vollständig.
4. $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}_\mu$, falls μ endlich ist.
5. Zeigen Sie an Hand des Gegenbeispiels $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = \infty$, dass $\hat{\mathcal{A}} \neq \hat{\mathcal{A}}_\mu$ möglich ist.

Der Maßraum $(\Omega, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu}|_{\hat{\mathcal{A}}})$ wird *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ genannt.

“**Übung 1.61** Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und δ_a das Dirac-Maß in einem Punkt $a \in \Omega$ mit $\{a\} \in \mathcal{A}$. Überzeugen Sie sich davon, dass die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_a)$ durch $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_a)$ gegeben wird, wobei wir das Dirac-Maß auf dem vergrößerten Definitionsbereich $\mathcal{P}(\Omega) \supseteq \mathcal{A}$ wieder mit δ_a bezeichnen.

Korollar 1.62 (Approximationssatz von Carathéodory) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine Mengenalgebra über Ω mit $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. Dann gibt es zu jedem $A \in \mathcal{A}$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A \Delta B) < \epsilon$.

Beweis: Es bezeichne $\nu = \mu|_{\mathcal{B}}$ die Einschränkung von μ auf $\mathcal{B}$. Dann ist ν ein von unten σ -stetiger Inhalt. Es sei $\nu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty[$ das zugehörige äußere Maß und $\hat{\nu} = \nu^*|_{\hat{\mathcal{B}}_\nu} : \hat{\mathcal{B}}_\nu \rightarrow [0, \infty[$ die hieraus mit dem Fortsetzungssatz von Carathéodory gewonnene Maßfortsetzung. Wegen $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$ stimmen μ und die Einschränkung $\hat{\nu}|_{\mathcal{A}}$ nach dem Eindeutigkeitssatz für endliche Maße (Korollar 1.39) überein. Gegeben $A \in \mathcal{A}$, gilt also $\mu(A) = \nu^*(A)$. Es sei $\epsilon > 0$. Nach Definition von ν^* gibt es also eine aufsteigende Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}$ mit $C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \supseteq A$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \leq \mu(A) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir erhalten

$$\mu(A) + \frac{\epsilon}{2} \geq \mu(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(C) \geq \mu(A);$$

insbesondere auch $\mu(C) - \mu(A) \leq \epsilon/2$. Wir können also ein $n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass für $B := B_n \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\mu(B) > \mu(C) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Es folgt wegen $A \Delta B \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ und $A, B \subseteq C$:

$$\mu(A \Delta B) \leq \mu(C \setminus A) + \mu(C \setminus B) = \mu(C) - \mu(A) + \mu(C) - \mu(B) < \epsilon.$$

□

Beispiel 1.63 (Lebesgue-Stieltjes-Maße) Gegeben sei eine rechtsstetige, monoton steigende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir erweitern f durch $f(\pm\infty) := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ zu einer in $\pm\infty$ stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Der zugehörige Riemann-Stieltjes-Inhalt $\mu_f : \mathcal{A} := \mathcal{A}(]-\infty, \infty])$ aus Lemma 1.15 mit $\mu_f([a, b]) = f(b) - f(a)$ ist nach Satz 1.51 σ -stetig von unten, kann also nach dem Fortsetzungssatz von Carathéodory zu einem Maß $\hat{\mu}_f : \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f} \rightarrow [0, \infty]$ fortgesetzt werden. Dieses Maß oder auch seine Einschränkungen auf die σ -Algebren $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}(]-\infty, \infty])$ oder auch $\{A \in \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f} | A \subseteq \mathbb{R}\}$ werden das *Lebesgue-Stieltjes-Maß* zu f genannt. Gilt speziell $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, so ist das Lebesgue-Stieltjes-Maß $\hat{\mu}_f$, eingeschränkt auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Verteilungsfunktion f , denn es gilt $\hat{\mu}_f(]-\infty, a]) = f(a) - f(-\infty) = f(a)$ für $a \in \mathbb{R}$ und $\hat{\mu}_f(\mathbb{R}) = \lim_{a \rightarrow \infty} \hat{\mu}_f(]-\infty, a]) = 1$.

Fassen wir zusammen:

Satz 1.64 (Bijektion zwischen W'-maßen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und Verteilungsfunktionen)

Zu jeder rechtsstetigen, monoton steigenden Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion $F_\mu = f$. Umgekehrt ist die Verteilungsfunktion $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $F_\mu(a) = \mu(]-\infty, a])$ jedes Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ rechtsstetig und monoton steigend mit $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\mu(x) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\mu(x) = 0$.

Beweis: Die Aussage des Satzes fasst das vorhergehende Beispiel mit Beispiel 1.40 zusammen. Die Rechtsstetigkeit von Verteilungsfunktionen und die Limiten bei $\pm\infty$ folgen unmittelbar aus der σ -Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes:

$$F_\mu(a_n) = \mu(]-\infty, a_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(]-\infty, a]) = F_\mu(a) \quad \text{für } a_n \downarrow a \in \mathbb{R}$$

wegen $] -\infty, a_n] \downarrow] -\infty, a]$, sowie

$$F_\mu(b_n) = \mu(]-\infty, b_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(\mathbb{R}) = 1 \quad \text{für } b_n \uparrow +\infty$$

wegen $] -\infty, b_n] \uparrow \mathbb{R}$ und

$$F_\mu(c_n) = \mu(]-\infty, c_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(\emptyset) = 0 \quad \text{für } c_n \downarrow -\infty$$

wegen $] -\infty, c_n] \downarrow \emptyset$.

□

Das weitaus wichtigste Beispiel für Lebesgue-Stieltjes-Maße erhalten wir im Fall $f = \text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$:

Definition 1.65 (Lebesguemaß) Das eindeutig bestimmte Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit der Eigenschaft $\lambda([a, b]) = b - a$ für alle reellen Zahlen $a < b$ heißt *eindimensionales Borel-Lebesgue-Maß* oder kurz *Lebesguemaß* auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Das Maß $\hat{\lambda}$ der zugehörigen Vervollständigung $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \hat{\lambda})$ wird ebenfalls Lebesguemaß genannt; die vervollständigte σ -Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ heißt *Lebesguesche σ -Algebra*.

n-dimensionale Variante davon, $n \in \mathbb{N}$: Nach den Übungen 1.19, 1.52, Lemma 1.47, dem Carathéodoryschen Fortsetzungssatz und Beispiel 1.41 gibt es ein eindeutig bestimmtes Maß λ_n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit

$$\lambda_n([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

für alle $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ in $\mathbb{R}^n$ mit $a < b$. Es heißt *n-dimensionales Borel-Lebesgue-Maß* oder kurz *Lebesguemaß* oder auch *n-dimensionales Volumenmaß* auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Seine Vervollständigung wird ebenfalls *n-dimensionales Lebesguemaß* genannt; die zugehörige σ -Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ über $\mathbb{R}^n$ heißt ebenfalls *Lebesguesche σ -Algebra* über $\mathbb{R}^n$. Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nennen wir $\lambda_n(A)$ das *Volumen* von A .

Wir werden später alternativ eine direkte Definition des *n*-dimensionalen Lebesguemaßes λ_n mit Hilfe des eindimensionalen Lebesguemaßes λ geben.

***Übung 1.66 (Regularität der Lebesgue-Stieltjes-Maße)** Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend und rechtsstetig und $\hat{\mu}_f : \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f} \rightarrow [0, \infty]$ das zugehörige (vollständige) Lebesgue-Stieltjes-Maß. Zeigen Sie: Zu jedem $A \in \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\hat{\mu}_f(A) < \infty$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ mit $K \subseteq A \subseteq B$ und $\hat{\mu}_f(B) - \epsilon < \hat{\mu}_f(A) < \hat{\mu}_f(K) + \epsilon$. (Eine analoge Aussage gilt auch für das *n*-dimensionale Lebesguemaß.)

Lassen Sie sich dabei durch Ideen aus dem Beweis des Carathéodoryschen Fortsetzungssatzes motivieren.

Beispiel 1.67 (Eine nicht Borel-messbare Lebesgue-Nullmenge) Es sei $B \subseteq S^1$ die im Beweis in Beispiel 1.13 mit dem Auswahlaxiom ausgewählte Teilmenge der Einheitskreislinie $S^1 \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Die Einheitskreislinie S^1 ist eine Borelmenge mit $\lambda_2(S^1) = 0$; mit Methoden, die wir erst später besprechen, wird der Beweis dieser Aussage fast trivial. (Anschaulich gesprochen hat die Kreislinie den Flächeninhalt 0.) Also ist B eine Nullmenge bezüglich λ_2 und gehört daher zur Lebesgueschen σ -Algebra über $\mathbb{R}^2$. Allerdings ist B keine Borelmenge.

Übung 1.68 (Alternative Darstellungen des äußeren Maßes) Gegeben sei ein von unten σ -stetiger Inhalt μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einer Menge Ω und das zu-

gehörige äußere Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \mu^*(A) = & \\ \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Folge in } \mathcal{A} \text{ mit } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq A \right\} = & \\ \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Folge paarw. disjunkter Mengen in } \mathcal{A} \text{ mit } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq A \right\}. & \end{aligned}$$

1.5 Messbare Funktionen

Ähnlich wie bei stetigen Abbildungen in der Topologie spielt die Urbildbildung bei messbaren Abbildungen in der Maßtheorie eine wichtige Rolle. Zur Erinnerung hier die Definition:

Definition 1.69 (Urbild) Es sei $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung. Für $B \subseteq \Omega'$ wird

$$f^{-1}[B] = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\}$$

das *Urbild* von B unter f genannt.

Man verwechsle die Urbildabbildung nicht mit einer Umkehrabbildung! Die Umkehrabbildung $f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ gibt es nur, wenn $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ bijektiv ist, während die Urbildabbildung $f^{-1}[\cdot] : \mathcal{P}(\Omega') \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ stets existiert, gleichgültig ob f injektiv oder surjektiv oder keines von beiden ist.

¶ **Übung 1.70** Es sei $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$, $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$. Berechnen Sie $f^{-1}[\{5, 6\}]$. Existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : \{4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$?

Die Urbildbildung verhält sich gut mit Mengenoperationen, wie die folgende Aufgabe zeigt:

¶ **Übung 1.71 (Verträglichkeit der Urbildabbildung mit Mengenoperationen)** Es sei $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung, $A, B \subseteq \Omega'$ und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von Ω' . Zeigen Sie:

1. $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$,
2. $f^{-1}[\Omega'] = \Omega$,
3. $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$,
4. $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$,
5. Aus $A \cap B = \emptyset$ folgt $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = \emptyset$,
6. $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$,

7. $f^{-1}[\Omega' \setminus B] = \Omega \setminus f^{-1}[B]$,
8. $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$,
9. $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[A_i]$, falls $I \neq \emptyset$.

Im Gegensatz zur Urbildabbildung verträgt sich die Bildung des Bildes nicht so gut mit Mengenoperationen. Zeigen Sie jeweils an einem Gegenbeispiel, dass $f[C \cap D] \neq f[C] \cap f[D]$ und $f[C \setminus D] \neq f[C] \setminus f[D]$ möglich sind.

Definition 1.72 (Messbare Abbildungen) Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{B})$ zwei messbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar, wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt: $f^{-1}[B] \in \mathcal{A}$.

Wir schreiben dafür auch: “ $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{B})$ ist messbar.” Wenn implizit klar ist, welche σ -Algebren gemeint sind, sagen wir auch “ f ist messbar” statt “ f ist $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar”. Insbesondere bezieht sich Messbarkeit von Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ auf die Borelsche σ -Algebra, wenn nicht explizit etwas anderes festgelegt wird. In diesem Fall sagt man auch “Borel-messbar” statt “ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -messbar”, oder auch im Fall $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ “Borel-messbar” statt “ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar”, wobei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Folgende Sprechweise wird in der Stochastik sehr häufig verwendet: Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ eine messbare Abbildung, so nennt man f eine *Zufallsvariable* auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit Werten in $(\Omega', \mathcal{A}')$.

“**Übung 1.73** Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ -Algebren darüber. Beweisen Sie, dass folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

1. $\text{id} : \Omega \rightarrow \Omega$, $\text{id}(\omega) = \omega$ ist $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar.
2. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

“**Übung 1.74** Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, $B \in \mathcal{A}'$, $\mathcal{B} = \{C \in \mathcal{A}' \mid C \subseteq B\}$ und $f : \Omega \rightarrow B$. Zeigen Sie, dass $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (B, \mathcal{B})$ genau dann messbar ist, wenn $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ messbar ist.

Seien Ω und Ω' jeweils auch mit einer Topologie versehen. Man beachte folgende Analogie:

Analogie zwischen messbaren und stetigen Funktionen

- | | | |
|--|-------------------|---|
| $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ ist stetig | $\Leftrightarrow$ | Urbilder offener Mengen sind offen. |
| $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ ist messbar | $\Leftrightarrow$ | Urbilder messbarer Mengen sind messbar. |

Diese Analogie motiviert folgendes Lemma:

Lemma 1.75 (Messbarkeit stetiger Abbildungen) Es seien $(\Omega, \mathcal{S})$ und $(\Omega', \mathcal{T})$ topologische Räume und $f : (\Omega, \mathcal{S}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{T})$ eine stetige Abbildung. Dann ist f $\sigma(\mathcal{S})$ - $\sigma(\mathcal{T})$ -messbar.

Beispiel 1.76 Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, ist Borel-messbar.

Zum Beweis des Lemmas verwenden wir folgenden Satz:

Satz 1.77 (Überprüfung der Messbarkeit mit Erzeugendensystemen) Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{B})$ messbare Räume und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}$. Weiter sei $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung, so dass für alle $U \in \mathcal{T}$ gilt: $f^{-1}[U] \in \mathcal{A}$. Dann ist f $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar.

Beweis: Es sei

$$\mathcal{C} = \{U \subseteq \Omega' \mid f^{-1}[U] \in \mathcal{A}\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$. Das Mengensystem $\mathcal{C}$ ist eine σ -Algebra über Ω' , denn es gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$, denn $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Aus $U \in \mathcal{C}$ folgt $\Omega' \setminus U \in \mathcal{C}$, denn

$$f^{-1}[\Omega' \setminus U] = \Omega \setminus f^{-1}[U] \in \mathcal{A},$$

da $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist. Es folgt $\Omega' \setminus U \in \mathcal{C}$.

3. Ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}$, so gilt

$$f^{-1}\left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\right] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[U_n] \in \mathcal{A},$$

da aus $U_n \in \mathcal{C}$ auch $f^{-1}[U_n] \in \mathcal{A}$ folgt und da $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist. Es folgt: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \in \mathcal{C}$.

Das Mengensystem $\mathcal{C}$ ist also eine σ -Algebra, die $\mathcal{T}$ umfasst. Wir schließen $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{C}$, d.h. für alle $U \in \mathcal{B}$ gilt: $f^{-1}[U] \in \mathcal{A}$. Das bedeutet: f ist $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar. □

Beweis von Lemma 1.75: Für alle $U \subseteq \mathcal{T}$ gilt:

$$f^{-1}[U] \in \mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{S}),$$

da $f : (\Omega, \mathcal{S}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{T})$ stetig ist. Aus dem Satz 1.77 folgt: f ist $\sigma(\mathcal{S})$ - $\sigma(\mathcal{T})$ -messbar. □

Beispiel 1.78 Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Borel-messbar, wenn gilt:

$$\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}[]-\infty, a] \in \mathcal{A}.$$

Das Mengensystem $\{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist nämlich ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Übung 1.79 (Messbarkeit monotoner Funktionen) Es seien $\Omega, \Omega' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine monoton steigende Funktion. Beweisen Sie, dass $f : (\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \rightarrow (\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$ messbar ist.

Übung 1.80 (Messbarkeit stückweise definierter Abbildungen) Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, I eine abzählbare Indexmenge, $(\Omega_i)_{i \in I}$ eine Familie paarweise disjunkter messbarer Mengen $\Omega_i \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \Omega$ und $\mathcal{A}_i := \{A \in \mathcal{A} \mid A \subseteq \Omega_i\}$. Zeigen Sie:

1. Für $i \in I$ ist $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ein messbarer Raum.
2. Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ ist genau dann $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar, wenn jede Einschränkung $f|_{\Omega_i} : (\Omega_i, \mathcal{A}_i) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$, $i \in I$, messbar ist.

Übung 1.81 (Messbarkeit der Kehrwertbildung) Zeigen Sie, dass die Abbildung $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = 1/x$ für $x \neq 0$, $k(0)$ beliebig, Borel-messbar ist.

Lemma 1.82 (Die Komposition messbarer Abbildungen ist messbar.) Es seien $(A, \mathcal{A})$, $(B, \mathcal{B})$ und $(C, \mathcal{C})$ messbare Räume, $f : A \rightarrow B$ sei $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar, und $g : B \rightarrow C$ sei $\mathcal{B}$ - $\mathcal{C}$ -messbar. Dann ist $g \circ f : A \rightarrow C$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{C}$ -messbar.

Der **Beweis** funktioniert genau wie der Nachweis, dass die Komposition stetiger Abbildungen stetig ist:

Es sei $U \in \mathcal{C}$. Dann gilt $g^{-1}[U] \in \mathcal{B}$, da g messbar ist, also

$$(g \circ f)^{-1}[U] = f^{-1}[g^{-1}[U]] \in \mathcal{A},$$

da f messbar ist. Also ist $g \circ f : A \rightarrow C$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{C}$ -messbar.

□

Beispiel 1.83 (Messbarkeit der kanonischen Projektionen) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ messbare Räume,

$$(\Omega, \mathcal{A}) := (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n).$$

Dann sind die kanonischen Projektionen $\pi_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $\pi_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_i$ für $i = 1, \dots, n$ messbar, denn aus Übung 1.31 folgt $\pi_i^{-1}[A_i] \in \mathcal{A}$ für alle $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Lemma 1.84 (Messbarkeit von Abbildungen in kartesische Produkte) Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega'_1, \mathcal{A}'_1), \dots, (\Omega'_n, \mathcal{A}'_n)$ messbare Räume und

$$\Omega' := \Omega'_1 \times \dots \times \Omega'_n$$

das kartesische Produkt, versehen mit der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A}' := \mathcal{A}'_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}'_n$. Weiter seien $f_i : \Omega \rightarrow \Omega'_i$ für $i = 1, \dots, n$ Abbildungen und $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, $f(\omega) = (f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$ die daraus zusammengesetzte Abbildung. Dann ist $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ genau dann messbar, wenn alle Komponenten $f_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega'_i, \mathcal{A}'_i)$ mit $i = 1, \dots, n$ messbar sind.

Beweis: “ $\Rightarrow$ ”: Da die kanonischen Projektionen $\pi_i : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\Omega'_i, \mathcal{A}'_i)$ alle messbar sind, gilt: Ist $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ messbar, so auch $f_i = \pi_i \circ f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega'_i, \mathcal{A}'_i)$.

“ $\Leftarrow$ ”: Es seien alle $f_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega'_i, \mathcal{A}'_i)$ messbar. Für jeden Quader $Q = A'_1 \times \dots \times A'_n$ mit messbaren Seiten $A'_i \in \mathcal{A}'_i$, $i = 1, \dots, n$, gilt

$$f^{-1}[Q] = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[A'_i] \in \mathcal{A}$$

wegen der vorausgesetzten Messbarkeit aller f_i . Da die Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A}'$ von dem Mengensystem aller dieser Quader erzeugt wird, folgt die Messbarkeit von $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ aus Satz 1.77. □

Im Folgenden sei stets $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

Beispiel 1.85 (Messbarkeit von Zufallsvektoren) Eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n) : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ist genau dann messbar, wenn alle Komponenten $f_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar sind, denn $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$.

Definition 1.86 (Maximum und Minimum) Für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ kürzen wir ab: $a \vee b := \max\{a, b\}$, $a \wedge b := \min\{a, b\}$. Für $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ setzen wir $f \vee g, f \wedge g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x)$, $(f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x)$.

Korollar 1.87 (Messbarkeit vererbt sich unter arithmetischen Operationen) Sind $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ zwei messbare Abbildungen, so sind auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und für $\alpha \in \mathbb{R}$ αf $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. Nimmt g nicht den Wert 0 an, so sind auch $1/g$ und f/g $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar.

Sind $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ zwei messbare Abbildungen, so sind auch $f \vee g, f \wedge g : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar.

Beweis: Nach Lemma 1.84 ist auch die zusammengesetzte Abbildung $(f, g) : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ messbar. Als stetige Abbildung ist auch die Additionsabbildung $+$: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Damit ist auch $f + g$ als Komposition dieser beiden Abbildungen messbar. Analog folgt die Messbarkeit von $f - g$ und $f \cdot g$. Weil jede konstante Abbildung messbar ist, folgt hieraus auch die Messbarkeit von αf . Da die beliebig in 0 fortgesetzte Kehrwertabbildung $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nach Übung 1.81 messbar ist, folgt die Messbarkeit von $1/g = k \circ g$ unter der angegebenen Voraussetzung, und damit auch die Messbarkeit von $f/g = f \cdot (1/g)$. Die Messbarkeit von $f \vee g$ und $f \wedge g$ folgt analog, da die Maximumsabbildung $\vee : \overline{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und die Minimumsabbildung $\wedge : \overline{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ stetig und daher messbar sind. □

Weil auch die Nullabbildung messbar ist, ist damit gezeigt:

Satz/Definition 1.88 (Vektorraum der messbaren Funktionen) Die Menge $M(\Omega, \mathcal{A})$ aller messbaren Abbildungen $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ bildet einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^\Omega$. Mit der Abkürzung $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ bezeichnet $\overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ die Menge aller messbaren Abbildungen $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Falls klar ist, welche σ -Algebra $\mathcal{A}$ gemeint ist, schreiben wir auch kurz $M(\Omega) := M(\Omega, \mathcal{A})$ bzw. $\overline{M}(\Omega) := \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Wir definieren auch

$$\begin{aligned} M_+(\Omega) &= M_+(\Omega, \mathcal{A}) := \{f \in M(\Omega, \mathcal{A}) \mid f \geq 0\} \\ \overline{M}_+(\Omega) &= \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A}) := \{f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A}) \mid f \geq 0\} \\ M_b(\Omega) &= M_b(\Omega, \mathcal{A}) := \{f \in M(\Omega, \mathcal{A}) \mid \exists M \in \mathbb{R} : |f| \leq M\} \end{aligned}$$

‘**Übung 1.89** Es sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar. Zeigen Sie, dass auch $-f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar ist.

Lemma 1.90 (Messbarkeit bleibt unter abzählbaren Grenzoperationen erhalten.)

Es sei $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer Funktionen. Dann sind auch $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ und, falls der Limes existiert, auch $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar. Hierbei sind alle Grenzoperationen punktweise zu verstehen.

Beweis: Es sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt für $s := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$:

$$\begin{aligned} s^{-1}[[-\infty, a]] &= \{x \in \Omega \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq a\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \Omega \mid f_n(x) \leq a\} \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

denn $\{x \in \Omega \mid f_n(x) \leq a\} = f_n^{-1}[[-\infty, a]] \in \mathcal{A}$, da f_n $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar ist. Es folgt die Behauptung für $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, da $\sigma(\{[-\infty, a] \mid a \in \overline{\mathbb{R}}\}, \overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Da $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}} -f_n$, folgt hieraus auch die Behauptung für das Infimum. Wegen

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m: m > n} f_m, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m: m > n} f_m \end{aligned}$$

folgen auch die übrigen Behauptungen. □

Wir führen noch einige praktische Notationen ein:

Definition 1.91 (Auf- und absteigende Funktionenfolgen) Es sei Ω eine Menge, $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung und $(f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen. Wir definieren:

$f_n \uparrow$ (in n), f_n ist aufsteigend in n , bedeutet: $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$f_n \downarrow$ (in n), f_n ist absteigend in n , bedeutet $f_n \geq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$f_n \uparrow f$ (in n) bedeutet $f_n \uparrow$ und $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$ (punktweise zu verstehen).

$f_n \downarrow f$ (in n) bedeutet $f_n \downarrow$ und $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$ (ebenso punktweise gemeint).

Erinnern Sie sich an den Begriff der Indikatorfunktion: Für eine gegebene Menge Ω und $A \subseteq \Omega$ ist die Indikatorfunktion $1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $1_A(\omega) = 1$ für $\omega \in A$ und $1_A(\omega) = 0$ für $\omega \in \Omega \setminus A$.

‘**Übung 1.92** Zeigen Sie:

1. Für alle $A \subseteq \Omega$ gilt die folgende Äquivalenz:

$$A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow 1_A \in M(\Omega, \mathcal{A})$$

2. Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von Ω und jedes $A \subseteq \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} A_n \uparrow &\Leftrightarrow 1_{A_n} \uparrow, \\ A_n \downarrow &\Leftrightarrow 1_{A_n} \downarrow, \\ A_n \uparrow A &\Leftrightarrow 1_{A_n} \uparrow 1_A \text{ und} \\ A_n \downarrow A &\Leftrightarrow 1_{A_n} \downarrow 1_A. \end{aligned}$$

Definition 1.93 (Treppenfunktionen) Der von der Menge $\{1_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ aller messbaren Indikatorfunktionen aufgespannte Untervektorraum $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{A})$ von $M(\Omega, \mathcal{A})$ wird Raum der *Treppenfunktionen* oder auch *elementaren Funktionen* genannt. Er besteht also aus allen Linearkombinationen $\sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$ von Indikatorfunktionen mit $n \in \mathbb{N}_0$, $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{A}$. Der Raum der nichtnegativen Treppenfunktionen wird mit

$$\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A}) := \{f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{A}) \mid f \geq 0\}$$

bezeichnet.

Wir zeigen nun, dass man jede nichtnegative messbare Funktion durch eine aufsteigende Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen approximieren kann.

Lemma 1.94 (Approximation messbarer Funktionen durch Treppenfunktionen)

Zu jedem $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ gibt es eine aufsteigende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $f_n \uparrow f$.

Beweis: Wir setzen für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n} 2^{-n} 1_{\{f \geq 2^{-n}k\}}$$

mit der Abkürzung $\{f \geq 2^{-n}k\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq 2^{-n}k\}$. Das bedeutet, dass $f_n(\omega)$ den Wert y annimmt, falls $y \in [0, n]$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2^{-n} ist und $y \leq f(\omega) < y + 2^{-n}$ gilt, und $f_n(\omega)$ den Wert n annimmt, falls $f(\omega) \geq n$ gilt. Dann ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Tat eine nichtnegative Treppenfunktion, da $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq 2^{-n}k\} = f^{-1}[[2^{-n}k, \infty]] \in \mathcal{A}$, und $f_n \uparrow f$.

□

Der folgende Satz ist oft nützlich, um eine Aussage über Indikatorfunktionen auf beschränkte messbare Funktionen zu erweitern. Man kann ihn als eine Variante des Dynkin-Lemmas auffassen.

Satz 1.95 (Satz über monotone Klassen) *Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ ein $\cap$ -stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ mit $\Omega \in \mathcal{E}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^\Omega$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt $1_A \in M$.*
2. *Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nichtnegative aufsteigende Folge mit Werten in M und ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit $f_n \uparrow f$, so ist $f \in M$.*

Dann enthält M alle beschränkten messbaren Funktionen: $M_b(\Omega, \mathcal{A}) \subseteq M$. Läßt man in der Voraussetzung 2. die Annahme “ f beschränkt” weg, so folgt sogar $M(\Omega, \mathcal{A}) \subseteq M$.

Ein Untervektorraum $M \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ mit der Eigenschaft 2. aus dem Satz wird auch eine *monotone Klasse* genannt.

Beweis des Satzes über monotone Klassen: Wir zeigen zunächst $1_A \in M$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Hierzu betrachten wir das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \mid 1_A \in M\}.$$

Es ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ nach Voraussetzung 1.; insbesondere folgt $\Omega \in M$.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist. Zunächst gilt $\emptyset \in \mathcal{D}$, da $1_\emptyset = 0 = 1_\Omega - 1_\Omega \in M$. Weiter folgt für $A \in \mathcal{D}$: $1_{A^c} = 1_\Omega - 1_A \in M$ wegen $1_\Omega, 1_A \in M$, also $A^c \in \mathcal{D}$. Schliesslich sei eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D}$ gegeben. Wir setzen $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $1_{B_n} = \sum_{k=1}^n 1_{A_k}$ für $n \in \mathbb{N}$ wegen der vorausgesetzten paarweisen Disjunktheit der A_k , und daher $1_{B_n} \in M$. Zusammen mit $B_n \uparrow A$, also $1_{B_n} \uparrow 1_A$ erhalten wir hieraus $1_A \in M$ nach Voraussetzung 2. des Satzes, also $A \in \mathcal{D}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist.

Aus dem Dynkin-Lemma folgt nun $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$, also $1_A \in M$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Da M ein Vektorraum ist, schließen wir hieraus $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{A}) \subseteq M$.

Da jede nichtnegative (beschränkte) Funktion $f \in M_+(\Omega, \mathcal{A})$ als Limes $f_n \uparrow f$ einer aufsteigenden Folge von Treppenfunktionen f_n dargestellt werden kann, folgt $M_+(\Omega, \mathcal{A}) \cap M_b(\Omega, \mathcal{A}) \subseteq M$ bzw. $M_+(\Omega, \mathcal{A}) \subseteq M$, je nach Version der Voraussetzung 2. Nun kann jedes (beschränkte) $f \in M(\Omega, \mathcal{A})$ als Differenz zweier nichtnegativer (beschränkter) messbarer Funktionen dargestellt werden: $f = f_+ - f_-$, wobei $f_+ := f \vee 0$ und $f_- := (-f) \vee 0$. Es folgt die Behauptung. □

Definition 1.96 (Positiv- und Negativteil) *Für $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir den Positivteil $f_+ := f \vee 0$ und den Negativteil $f_- := (-f) \vee 0$.*

Man beachte, dass im Kontrast zu seinem Namen der Negativteil einer Funktion nichtnegativ ist.

Wir verwenden im Folgenden stets die Konvention $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0$ und sogar $\text{UNDEFINIERT} \cdot 0 = 0 \cdot \text{UNDEFINIERT} = 0$.

Übung 1.97 (Variante des Satzes über monotone Klassen) Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ ein $\cap$ -stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ mit $\Omega \in \mathcal{E}$ und $M \subseteq [0, \infty]^\Omega$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt $1_A \in M$.
2. Für alle $A \subseteq \Omega$ mit $1_A \in M$ gilt $1_{A^c} \in M$.
3. Für alle $f, g \in M$ und alle $\alpha \in [0, \infty[$ gilt $f + g \in M$ und $\alpha f \in M$.
4. Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nichtnegative aufsteigende Folge mit Werten in M und ist $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mit $f_n \uparrow f$, so ist $f \in M$.

Zeigen Sie, dass dann $\overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A}) \subseteq M$ gilt.

Übung 1.98 (von einer Abbildung erzeugte σ -Algebra) Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung. Wir definieren

$$\sigma(X) := \{X^{-1}[A'] \mid A' \in \mathcal{A}'\}.$$

Das Mengensystem $\sigma(X)$ wird die von X erzeugte σ -Algebra genannt.

1. Zeigen Sie, dass $\sigma(X)$ in der Tat eine σ -Algebra ist.
2. Zeigen Sie, dass $\sigma(X) \subseteq \mathcal{A}$ äquivalent zur $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -Messbarkeit von X ist.

Übung 1.99 (Faktorisierung messbarer Abbildungen) Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Abbildungen mit $\mathcal{A} = \sigma(Y)$. Zeigen Sie, dass es eine messbare Abbildung $Z : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $X = Z \circ Y$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass X eine Indikatorfunktion ist. Approximieren Sie im allgemeinen Fall X durch Treppenfunktionen.

Übung 1.100 (Abänderung messbarer Funktionen auf Nullmengen) Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ seine Vervollständigung (siehe Übung 1.60) und $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $f \in \overline{M}(\Omega, \hat{\mathcal{A}})$,
2. Es existiert $g \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$, so dass $f(\omega) = g(\omega)$ für μ -fast alle $\omega \in \Omega$ gilt.

Hinweis: Arbeiten Sie mit Approximationen durch Treppenfunktionen.

1.6 Bildmaße

Satz/Definition 1.101 (Bildmaß) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ eine messbare Abbildung. Dann ist die Abbildung

$$\nu : \mathcal{A}' \rightarrow [0, \infty], \quad \nu(A') := \mu(f^{-1}[A'])$$

ein Maß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$. Es heißt *Bildmaß* von μ bezüglich f und wird mit $f[\mu]$ oder auch mit μf^{-1} bezeichnet.

In der Stochastik wird das Bildmaß $X[\mu]$ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ unter einer Zufallsvariablen $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ auch die *Verteilung* (engl.: *law* oder auch *distribution*) von X bzgl. μ genannt und mit $\mathcal{L}_\mu(X) := X[\mu]$ bezeichnet.⁶

Analog wird das Bildmaß eines signierten Maßes definiert; es ist natürlich i.a. nur ein signiertes Maß.

Beweis: ν ist wohldefiniert, da $f^{-1}[A'] \in \mathcal{A}$ für alle $A' \in \mathcal{A}'$ wegen der Messbarkeit von f . Weiter gilt:

$$\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}[\emptyset]) = \mu(\emptyset) = 0,$$

und für jede Folge $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}'$ gilt: $(f^{-1}[A'_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$; also folgt mit der σ -Additivität von μ :

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n\right]\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[A'_n]\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(f^{-1}[A'_n]) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A'_n).$$

Also ist ν ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A}')$. □

Übung 1.102 (Bildmaß unter der Komposition von Abbildungen) Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ und $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ messbare Räume, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ und $g : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\Omega'', \mathcal{A}'')$ messbare Abbildungen und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Beweisen Sie $g[f[\mu]] = (g \circ f)[\mu]$.

Beispiel 1.103 1. **Das Diracmaß als Verteilung konstanter Zufallsvariablen.**

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum. Ist $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine konstante Abbildung mit dem Wert $a \in \Omega'$, so ist $\mathcal{L}_\mu(f) = \delta_a$ das in a konzentrierte Diracmaß. Es gilt nämlich für alle $A' \in \mathcal{A}'$:

$$\mathcal{L}_\mu(A') = \mu(f^{-1}[A']) = \begin{cases} \mu(\Omega) = 1 & \text{falls } a \in A', \\ \mu(\emptyset) = 0 & \text{falls } a \notin A' \end{cases}$$

⁶Man beachte den Unterschied in der Sprechweise: “Bildmaß von μ bzgl. f ”, aber “Verteilung von f bzgl. μ ”.

2. **Translationsinvarianz des Lebesguemaßes.** Es sei λ_n das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $y \in \mathbb{R}^n$ und $T_y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T_y(x) = x + y$ die Translation mit y . Dann gilt $T_y[\lambda_n] = \lambda_n$. In der Tat gilt für jeden halboffenen Quader

$$Q = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i]$$

mit reellen $a_i \leq b_i$:

$$\begin{aligned} T_y[\lambda_n](Q) &= \lambda_n(T_y^{-1}[Q]) = \lambda_n(Q - y) \\ &= \lambda_n\left(\prod_{i=1}^n]a_i - y, b_i - y]\right) = \prod_{i=1}^n ((b_i - y) - (a_i - y)) = \lambda_n(Q). \end{aligned}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Lebesguemaßes folgt die Behauptung. Anschaulich besagt dies, dass das Volumen eines Körpers sich bei Translationen nicht ändert.

Übung 1.104 (Quantilsfunktionen) Es sei $F : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ eine streng monoton steigende stetige Funktion mit $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ und $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ und $X = F^{-1} :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ihre Umkehrfunktion. Weiter sei μ die Einschränkung des Lebesguemaßes auf $\mathcal{B}(]0, 1[)$. Zeigen Sie, dass die Verteilung $\mathcal{L}_\mu(X)$ von X auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die Verteilungsfunktion F besitzt.

Übung 1.105 (Skalierung des Lebesguemaßes) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $S_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $S_a(x) = ax$ die Skalierungsabbildung mit a . Weiter sei λ_n das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie

$$S_a[\lambda_n] = |a|^{-n} \lambda_n \quad \text{für } a \neq 0$$

und $S_0[\lambda_n] = \infty \cdot \delta_0$, wobei δ_0 das Diracmaß in 0 bezeichnet.

Übung 1.106 (Permutationsinvarianz des Lebesguemaßes) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ eine Permutation, also eine Bijektion. Weiter sei $f_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_\sigma((x_i)_{i=1, \dots, n}) = (x_{\sigma(i)})_{i=1, \dots, n}$. Zeigen Sie, dass f_σ Borel-meßbar ist und dass $f_\sigma[\lambda_n] = \lambda_n$ gilt.

1.7 Das Integral bezüglich eines Maßes.

Analog zur Riemann-Theorie definieren wir zunächst ein Maß für Treppenfunktionen. Um keine Probleme mit dem undefinierten Ausdruck $\infty - \infty$ zu bekommen, beschränken wir uns zunächst auf nichtnegative Funktionen. Anschließend erweitern wir das Integral dann auf nichtnegative messbare Funktionen und – falls es keine Probleme mit $\infty - \infty$ gibt – auf messbare Funktionen beliebigen Vorzeichens.

Erinnern Sie sich an die Konvention $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$. Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Lemma 1.107 (Wohldefiniertheit des Integrals von Treppenfunktionen) Sind

$$f = \sum_{i=1}^n y_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^m z_j 1_{B_j}$$

mit $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ und $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m \in [0, \infty[$ zwei Darstellungen der gleichen Treppenfunktion $f \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$, so gilt

$$\sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m z_j \mu(B_j).$$

Etwas allgemeiner gilt:

Lemma 1.108 Sind

$$f = \sum_{i=1}^n y_i 1_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m z_j 1_{B_j}$$

mit $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ und $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m \in [0, \infty[$ zwei Treppenfunktionen $f, g \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $f \leq g$, so gilt

$$\sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) \leq \sum_{j=1}^m z_j \mu(B_j).$$

Lemma 1.107 folgt aus diesem Lemma sofort, wenn man es sowohl auf f, g als auch mit vertauschten Rollen auf g, f anwendet.

Beweis von Lemma 1.108: Es sei $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{A}$ eine Partition von Ω (d.h. die Mengen $C_1, \dots, C_k$ sind nichtleer und paarweise disjunkt mit $\bigcup_{l=1}^k C_l = \Omega$), so dass für alle A_i und C_l gilt:

$$C_l \subseteq A_i \text{ oder } C_l \cap A_i = \emptyset,$$

und für alle B_j und C_l ebenso gilt:

$$C_l \subseteq B_j \text{ oder } C_l \cap B_j = \emptyset.$$

Solch eine Partition existiert: Man nehme zum Beispiel die nichtleeren Mengen unter allen Mengen

$$\tilde{A}_1 \cap \dots \cap \tilde{A}_n \cap \tilde{B}_1 \cap \dots \cap \tilde{B}_m,$$

wobei

$$\tilde{A}_i \in \{A_i, A_i^c\} \text{ und } \tilde{B}_j \in \{B_j, B_j^c\}.$$

Dann gilt für alle $l = 1, \dots, k$:

$$f 1_{C_l} = \sum_{i=1}^n y_i 1_{A_i \cap C_l} = \left(\sum_{i: C_l \subseteq A_i} y_i \right) 1_{C_l}$$

und ebenso

$$g1_{C_l} = \left(\sum_{j: C_l \subseteq A_j} z_j \right) 1_{C_l}.$$

Weil die C_l eine Partition von Ω in nichtleere Mengen bilden und weil $f1_{C_l} \leq g1_{C_l}$ nach Voraussetzung gilt, erhalten wir für $l = 1, \dots, k$:

$$\sum_{i: C_l \subseteq A_i} y_i \leq \sum_{j: C_l \subseteq B_j} z_j. \quad (11)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \sum_{l=1}^k \mu(A_i \cap C_l) \quad [\text{weil } (A_i \cap C_l)_{l=1, \dots, k} \text{ paarw. disj. mit } \bigcup_{l=1}^k (A_i \cap C_l) = A_i] \\ &= \sum_{l=1}^k \sum_{i: C_l \subseteq A_i} y_i \mu(C_l) \quad [\text{weil } \mu(A_i \cap C_l) = \mu(C_l) \text{ für } C_l \subseteq A_i, \text{ und } \mu(A_i \cap C_l) = 0 \text{ sonst}] \\ &\leq \sum_{l=1}^k \sum_{j: C_l \subseteq B_j} z_j \mu(C_l) \quad [\text{wegen (11)}] \\ &\leq \sum_{j=1}^m y_j \mu(B_j) \quad [\text{ebenso wie eben}] \end{aligned}$$

□

Wir definieren nun das Integral bezüglich eines Maßes μ (auch μ -Integral genannt) für nichtnegative Treppenfunktionen:

Definition 1.109 (Integral für nichtnegative Treppenfunktionen) Für $f = \sum_{i=1}^n y_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit allen $A_i \in \mathcal{A}$ und $y_i \geq 0$ setzen wir

$$\int f d\mu = \int f(x) \mu(dx) := \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i).$$

Nach dem eben Bewiesenen ist $\int f d\mu$ wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl der Darstellung von f ab.

Manchmal wird in der Literatur auch die Notation $\int f(x) d\mu(x)$ statt $\int f(x) \mu(dx)$ verwendet.

Notieren wir einige elementare Eigenschaften dieses Integrals:

Lemma 1.110 (elementare Eigenschaften des Integrals für nichtneg. Treppenfkt.)

Es seien $f, g \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ und $\alpha \geq 0$. Dann gilt:

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu, \quad (12)$$

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu, \quad (13)$$

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int f d\mu \leq \int g d\mu. \quad (14)$$

Dieses Lemma folgt unmittelbar aus der Definition bzw. aus den beiden vorher bewiesenen Lemmas 1.107 und 1.108.

□

Das μ -Integral ist gut verträglich mit Grenzübergängen. Das folgende Lemma gibt einen ersten Hinweis darauf:

Lemma 1.111 (Monotone Konvergenz für Integrale von Treppenfunktionen –

1. Version) Es seien $g \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge, $f_n \uparrow$, in $\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit

$$\forall x \in \Omega : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \geq g(x).$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int g d\mu. \quad (15)$$

Insbesondere gilt $\int f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int g d\mu$ im Spezialfall $f_n \uparrow g$.

Man beachte, dass der Limes in der Ungleichung (15) in $[0, +\infty]$ existiert, da die Folge der Integrale $\int f_n d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, monoton wächst.

Beweis des Lemmas: Wir schreiben g in der Form

$$g = \sum_{i=1}^l y_i 1_{A_i}$$

mit paarweise disjunkten $A_i \in \mathcal{A}$, $y_i > 0$. Es sei $\epsilon > 0$. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n,\epsilon} := \{x \in \Omega \mid f_n(x) \geq (1 - \epsilon)g(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Die Folge $(B_{n,\epsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ steigt monoton, weil $f_n \uparrow$, und es gilt $B_{n,\epsilon} \uparrow \Omega$ für $n \rightarrow \infty$, weil $\sup_n f_n(x) \geq g$ (punktweise). Nun ist auch

$$g 1_{B_{n,\epsilon}} = \sum_{i=1}^l y_i 1_{A_i \cap B_{n,\epsilon}} \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gilt $\mu(A_i \cap B_{n,\epsilon}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A_i)$ wegen $A_i \cap B_{n,\epsilon} \uparrow A_i$ für $n \rightarrow \infty$, also

$$\int g 1_{B_{n,\epsilon}} d\mu = \sum_{i=1}^l y_i \mu(A_i \cap B_{n,\epsilon}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l y_i \mu(A_i) = \int g d\mu.$$

Aus

$$f_n \geq f_n 1_{B_{n,\epsilon}} \geq (1 - \epsilon) g 1_{B_{n,\epsilon}}$$

und $f_n 1_{B_{n,\epsilon}} \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ für $n \in \mathbb{N}$ schließen wir

$$\int f_n d\mu \geq \int f_n 1_{B_{n,\epsilon}} d\mu \geq (1 - \epsilon) \int g 1_{B_{n,\epsilon}} d\mu$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq (1 - \epsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} \int g 1_{B_{n,\epsilon}} d\mu = (1 - \epsilon) \int g d\mu.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int g d\mu.$$

Unter den Zusatzvoraussetzung $f_n \uparrow g$ erhalten wir $\int f_n d\mu \leq \int g d\mu$ wegen $f_n \leq g$ für $n \in \mathbb{N}$, also auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int g d\mu.$$

□

Nun erweitern wir das Integral auf nichtnegative messbare Funktionen.

Definition 1.112 (Integral für nichtnegative, messbare Funktionen) Für $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ definieren wir das Integral

$$\int f d\mu = \int f(x) \mu(dx) := \sup \left\{ \int g d\mu \mid g \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A}), g \leq f \right\}.$$

Hierbei bezeichnet $\int g d\mu$ das bereits definierte Integral für Treppenfunktionen.

Bemerkung 1.113 1. Ist $f \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$, so stimmen die alte Definition 1.109 und die neue Definition 1.112 des Integrals $\int f d\mu$ überein. Dies folgt unmittelbar aus der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen; in diesem Fall ist das Supremum in der Definition sogar ein Maximum und wird für $g = f$ angenommen. Damit ist es gerechtfertigt, das gleiche Symbol $\int f d\mu$ zu verwenden.

2. Anders als in der Riemann-Theorie brauchen wir hier keine Approximationen von oben.

3. Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ oder allgemeiner $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und λ_n das n -dimensionale Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, so schreiben wir auch $\int f(x) dx$ statt $\int f(x) \lambda_n(dx)$.
4. Ist $A \in \mathcal{A}$, so schreibt man auch $\int_A f d\mu$ statt $\int f 1_A d\mu$.
5. Aus der Definition des Integrals folgt unmittelbar seine Monotonie: $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ für $f, g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $f \leq g$.

Das folgende Lemma zeigt, dass man nicht wirklich alle $g \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $g \leq f$ zur Definition von $\int f d\mu$ braucht; eine monoton wachsende, punktweise konvergente Folge $f_n \uparrow f$ von Treppenfunktionen genügt.

Lemma 1.114 (Monotone Konvergenz für Integrale von Treppenfunktionen – 2. Version) *Es seien $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ und $f_n \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert: $f_n \uparrow f$. Dann gilt*

$$\int f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu.$$

Beweis: Es sei $g \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $g \leq f$. Dann gilt punktweise

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f \geq g.$$

Mit Lemma 1.111 folgt hieraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int g d\mu.$$

Bilden wir das Supremum über alle solchen g , folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int f d\mu.$$

Andererseits gilt $f_n \leq f$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu,$$

folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Zusammen folgt die Behauptung. □

Lemma 1.94 garantiert, dass es stets eine Folge von Treppenfunktionen wie in der Voraussetzung des Lemmas 1.114 gibt.

Wir zeigen nun einige einfache Eigenschaften des Integrals

Lemma 1.115 (Linearität des Integrals für nichtnegative messbare Funktionen) Für alle $f, g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ und $\alpha \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\int (f + g) d\mu &= \int f d\mu + \int g d\mu, \\ \int \alpha f d\mu &= \alpha \int f d\mu\end{aligned}$$

Beweis: Es seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen $f_n, g_n \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $f_n \uparrow f$ und $g_n \uparrow g$. Dann gilt auch $f_n + g_n \uparrow f + g$ und $\alpha f_n \uparrow \alpha f$, also

$$\begin{aligned}\int (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n d\mu + \int g_n d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int \alpha f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \alpha f_n d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \int f_n d\mu \\ &= \alpha \int f d\mu.\end{aligned}$$

□

Beispiel 1.116 1. Es sei Ω eine Menge und μ das Zählmaß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Für jede Familie $(a_\omega)_{\omega \in \Omega} \in [0, \infty]^\Omega$ gilt dann:

$$\sum_{\omega \in \Omega} a_\omega = \int_{\Omega} a_\omega \mu(d\omega).$$

In diesem Sinn verallgemeinert das μ -Integral den Reihenbegriff.

2. Ist λ das Lebesguemaß auf $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$, $a \leq b$, und ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\underbrace{\int_{[a, b]} f d\lambda}_{\text{Lebesgue-Integral}} = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Riemann-Integral}}.$$

In diesem Sinn verallgemeinert die Lebesgue-Theorie die Riemann-Theorie.

Nun erweitern wir den Integralbegriff auf Funktionen, die auch negative Werte annehmen dürfen. Erinnern Sie sich an die Definition 1.96 des Positivteils $f_+ = f \vee 0$ und Negativteils $f_- = (-f) \vee 0$ einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Für sie gilt: $f = f_+ - f_-$ und $f_+, f_- \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ für $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$.

Definition 1.117 (Integral, allgemeine Definition) Für $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ mit

$$\int f_+ d\mu < \infty \quad \text{oder(!)} \quad \int f_- d\mu < \infty \quad (16)$$

definieren wir das μ -Integral durch

$$\int f d\mu := \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu.$$

Die Einschränkung (16) ist nötig, um den undefinierten Ausdruck $\infty - \infty$ zu vermeiden. Gilt sogar $\int f_+ d\mu < \infty$ und $\int f_- d\mu < \infty$, so heißt f μ -integrierbar oder kurz *integrierbar*, wenn klar ist, welches Maß μ gemeint ist. Wir setzen

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f \in M(\Omega, \mathcal{A}) \mid f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\}.$$

Wenn klar ist, welche σ -Algebra $\mathcal{A}$ und welches Maß μ gemeint sind, schreiben wir auch kurz $\mathcal{L}^1(\Omega)$ dafür.

Ist nun $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ eine messbare Funktion, deren Realteil und Imaginärteil μ -integrierbar sind, so nennen wir auch f μ -integrierbar, in Zeichen $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{C})$ oder auch kurz $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{C})$, so definieren wir

$$\int f d\mu := \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu.$$

Ist μ sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so wird $\int_{\Omega} f d\mu$ in der Stochastik auch der *Erwartungswert* von f bezüglich μ genannt und mit

$$E_{\mu}(f) := \int f d\mu$$

bezeichnet.

Bemerkung 1.118 Wir haben damit das μ -Integral in mehreren Schritten konstruiert:

1. Maß (= Integral für *Indikatorfunktionen*),
2. für *Treppenfunktionen*,
3. für *nichtnegative messbare Funktionen*,
4. für *integrierbare Funktionen beliebigen Vorzeichens*.

Diese schrittweise Erweiterung ist eine typische Vorgehensweise in der Maßtheorie und wird auch *maßtheoretische Induktion* genannt.

Übung 1.119 (Integralvariante der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag)

Es sei $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ oder auch $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ messbar mit $\int |f| d\mu < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $\int f d\mu$ existiert und dass gilt:

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Übung 1.120 (Integral mit dem Dirac-Maß = Auswertungsfunktional) Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $a \in \Omega$, δ_a das Dirac-Maß in a , und $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie

$$\int f d\delta_a = f(a).$$

Satz 1.121 (Linearität des Integrals) $\mathcal{L}^1(\Omega)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^\Omega$, und die Integralabbildung

$$I : \mathcal{L}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) = \int f d\mu$$

ist linear.

Beweis: Es seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir setzen $h = f + g \in M(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gilt

$$0 \leq h_+ \leq f_+ + g_+ \quad \text{und} \quad 0 \leq h_- \leq f_- + g_-,$$

also

$$\int h_+ d\mu \leq \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu < \infty$$

und

$$\int h_- d\mu \leq \int f_- d\mu + \int g_- d\mu < \infty.$$

Es folgt $h \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Weiter gilt

$$h_+ - h_- = h = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

also

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+;$$

demnach

$$\int h_+ d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- d\mu = \int h_- d\mu + \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu,$$

folglich

$$\begin{aligned}\int h \, d\mu &= \int h_+ \, d\mu - \int h_- \, d\mu \\ &= \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu + \int g_+ \, d\mu - \int g_- \, d\mu \\ &= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$(\alpha f)_\pm = \alpha f_\pm \text{ für } \alpha \geq 0$$

und

$$(\alpha f)_\pm = |\alpha| f_\mp \text{ für } \alpha < 0;$$

insbesondere gilt $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Es folgt für $\alpha \geq 0$:

$$\int \alpha f \, d\mu = \underbrace{\int \alpha f_+ \, d\mu}_{<\infty} - \underbrace{\int \alpha f_- \, d\mu}_{<\infty} = \alpha \int f \, d\mu$$

und ebenso für $\alpha < 0$:

$$\int \alpha f \, d\mu = \underbrace{\int |\alpha| f_- \, d\mu}_{<\infty} - \underbrace{\int |\alpha| f_+ \, d\mu}_{<\infty} = \alpha \int f \, d\mu.$$

Zusammen mit $0 \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ folgt die Behauptung. □

Übung 1.122 Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{C})$ ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist und dass die Integralabbildung $I : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto \int f \, d\mu$ $\mathbb{C}$ -linear ist.

Lemma 1.123 (Monotonie des Integrals) Für alle $f, g \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$, für die $\int f \, d\mu$ und $\int g \, d\mu$ existiert, gilt

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Beweis: Aus der Voraussetzung $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+$ und $f_- \geq g_-$ und daher $\int f_+ \, d\mu \leq \int g_+ \, d\mu$ und $\int f_- \, d\mu \geq \int g_- \, d\mu$. Wir schließen

$$\int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu \leq \int g_+ \, d\mu - \int g_- \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

□

Übung 1.124 Es sei $\Omega = \mathbb{R}$, versehen mit dem Lebesguemaß $\hat{\lambda}$ auf der Lebesgueschen σ -Algebra $\hat{\mathcal{A}}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}_0$

$$A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid 2^n x - \lfloor 2^n x \rfloor \in [0, 2^{-n}]\},$$

wobei $\lfloor y \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq y\}$, sowie rekursiv

$$B_0 = \emptyset, \quad B_{n+1} = A_n \Delta B_n$$

und schließlich

$$C := \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n, \quad D := \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n.$$

Zeigen Sie:

1. $C, D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Es gilt $x \in C \Leftrightarrow x \in D$ für $\hat{\lambda}$ -fast alle $x \in \mathbb{R}$
- *3. Ist $E \subseteq \Omega$ eine Menge mit $x \in C \Leftrightarrow x \in E$ für $\hat{\lambda}$ -fast alle $x \in \mathbb{R}$, so ist E dicht in $\mathbb{R}$ und besitzt leeres Inneres.
- *4. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = 1_C(x)$ für $\hat{\lambda}$ -fast alle $x \in \mathbb{R}$, so ist f auf keinem Intervall $[a, b]$ mit reellen Zahlen $a < b$ Riemann-integrierbar.
- *5. Berechnen Sie $\int_{[0,1]} 1_C d\hat{\lambda}$.

Übung 1.125 (Linearität des Integrals im Integrator) 1. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\alpha \geq 0$. Weiter sei $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$, und es existiere $\int f d\mu$. Beweisen Sie, dass dann auch $\int f d(\alpha\mu)$ existiert, und dass $\int f d(\alpha\mu) = \alpha \int f d\mu$ gilt. Hierbei sei $\alpha\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, $(\alpha\mu)(A) = \alpha(\mu(A))$.

2. Nun sei ν ein weiteres Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, und es existiere auch $\int f d\nu$ sowie $\int f d\mu + \int f d\nu$. Zeigen Sie, dass dann auch $\int f d(\mu + \nu)$ existiert, und dass $\int f d(\mu + \nu) = \int f d\mu + \int f d\nu$ gilt.

Hinweis: Maßtheoretische Induktion.

Übung 1.126 (Integration und Maßfortsetzung) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter- σ -Algebra und $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{B})$. Zeigen Sie, dass $\int f d\mu$ genau dann existiert, wenn $\int f d(\mu|_{\mathcal{B}})$ existiert, und dass in diesem Fall die beiden Integrale übereinstimmen.

Übung 1.127 (Inklusions-Exklusions-Formel) Es sei μ ein endliches Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse.

1. Zeigen Sie:

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{I: \emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \quad (17)$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Gleichung

$$1 - 1_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i}).$$

Multiplizieren Sie die rechte Seite dieser Gleichung aus und integrieren Sie dann über μ .

2. Was erhält man aus der Inklusions-Exklusions-Formel (17) in den Spezialfällen $n = 2$ und $n = 3$? Vergleichen Sie mit den Teilaufgaben 1. und 4. der Übung 1.11.

1.8 Integration bezüglich des Bildmaßes

Wir untersuchen jetzt den Zusammenhang zwischen Integration bezüglich des Bildmaßes und bezüglich des Ausgangsmaßes.

Satz 1.128 (Integral bezüglich des Bildmaßes) *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum, $\Phi : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ messbar und $f \in \overline{M}(\Omega', \mathcal{A}')$. Dann existiert $\int_{\Omega'} f d\Phi[\mu]$ genau dann, wenn $\int_{\Omega} f \circ \Phi d\mu$ existiert, und es gilt dann*

$$\int_{\Omega'} f d\Phi[\mu] = \int_{\Omega} f \circ \Phi d\mu.$$

Beweis: Wir bauen den Beweis nach dem Prinzip der “maßtheoretischen Induktion” auf. Weil f und Φ messbar sind, ist auch $f \circ \Phi$ messbar.

1. *Schritt:* Es sei $f = 1_{A'}$ eine Indikatorfunktion, wobei $A' \in \mathcal{A}'$. Weil Φ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar ist, folgt $A := \Phi^{-1}[A'] \in \mathcal{A}$, also

$$f \circ \Phi = 1_{A'} \circ \Phi = 1_A \in M_+(\Omega, \mathcal{A}).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \circ \Phi d\mu &= \int_{\Omega} 1_A d\mu = \mu(A) = \mu(\Phi^{-1}[A']) = \Phi[\mu](A') \\ &= \int_{\Omega'} 1_{A'} d\Phi[\mu] = \int_{\Omega'} f d\Phi[\mu]. \end{aligned}$$

2. *Schritt:* Ist

$$f = \sum_{i=1}^n y_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+(\Omega', \mathcal{A}')$$

mit $y_i \geq 0$ und $A_i \in \mathcal{A}'$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \circ \Phi \, d\mu &= \sum_{i=1}^n y_i \int_{\Omega} 1_{A_i} \circ \Phi \, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \int_{\Omega'} 1_{A_i} \, d\Phi[\mu] \quad \text{nach dem 1. Schritt} \\ &= \int_{\Omega'} f \, d\Phi[\mu]. \end{aligned}$$

3. *Schritt*: Für jedes $f \in \overline{M}_+(\Omega', \mathcal{A}')$ und eine aufsteigende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}_+(\Omega', \mathcal{A}')$ mit $f_n \uparrow f$ folgt $f \circ \Phi \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ und

$$\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A}) \ni f_n \circ \Phi \uparrow f \circ \Phi.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \circ \Phi \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \circ \Phi \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} f_n \, d\Phi[\mu] \quad \text{nach dem 2. Schritt} \\ &= \int_{\Omega'} f \, d\Phi[\mu]. \end{aligned}$$

4. *Schritt*: Gegeben $f \in \overline{M}(\Omega', \mathcal{A}')$, gilt

$$(f \circ \Phi)_+ = f_+ \circ \Phi \quad \text{und} \quad (f \circ \Phi)_- = f_- \circ \Phi;$$

beides sind Funktionen in $\overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Nach dem 3. Schritt gilt:

$$\int_{\Omega} (f \circ \Phi)_{\pm} \, d\mu = \int_{\Omega} f_{\pm} \circ \Phi \, d\mu = \int_{\Omega'} f_{\pm} \, d\Phi[\mu].$$

Also existiert $\int_{\Omega} f \circ \Phi \, d\mu = \int_{\Omega} f_+ \circ \Phi \, d\mu - \int_{\Omega} f_- \circ \Phi \, d\mu$ genau dann, wenn $\int_{\Omega'} f \, d\Phi[\mu] = \int_{\Omega'} f_+ \, d\Phi[\mu] - \int_{\Omega'} f_- \, d\Phi[\mu]$ existiert, und in diesem Fall gilt $\int_{\Omega} (f \circ \Phi)_{\pm} \, d\mu = \int_{\Omega'} f_{\pm} \, d\Phi[\mu]$. $\square$

Beispiel 1.129 (Translation und Skalierung bei Integralen)

1. Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ und $T_y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T_y(x) = x + y$ die Translation mit y . Wegen $T_y[\lambda_n] = \lambda_n$ folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x + y) \, \lambda_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T_y \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dT_y[\lambda_n] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \lambda_n(dx)$$

2. Es sei f wie oben, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $S_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $S_a(x) = ax$ die Skalierungsabbildung mit a . Wegen $S_a[\lambda_n] = |a|^{-n}\lambda_n$ (vgl. Übung 1.105) folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(ax) \lambda_n(dx) &= \int_{\mathbb{R}^n} f \circ S_a d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} f dS_a[\lambda_n] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f d(|a|^{-n}\lambda_n) = |a|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lambda_n(dx) \end{aligned}$$

Beispiel 1.130 (Lebesgue-Stieltjes-Integral) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rechtsstetig und monoton steigend, und $\hat{\mu}_f : \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f} \rightarrow [0, \infty]$ das zugehörige Lebesgue-Stieltjes-Maß; siehe Beispiel 1.63. Für $g \in \overline{M}(\mathbb{R}, \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f})$ wird

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) df(x) := \int_{\mathbb{R}} g d\hat{\mu}_f$$

das *Lebesgue-Stieltjes-Integral* genannt.

Im Spezialfall, dass f differenzierbar ist, kann man $\int g(x) df(x)$ natürlich auch anders, nämlich als Integral über eine 1-Form, lesen. Natürlich sind diese beiden Lesarten konsistent miteinander, was die Verwendung des gleichen Symbols rechtfertigt.

“**Übung 1.131** Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d1_{[a, \infty[}(x)$$

für $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Übung 1.132 (Linearität des Lebesgue-Stieltjes-Integrals in der Integratorfunktion)

Es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei rechtsstetige und monoton steigende Funktionen und $h \in \overline{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zeigen Sie

1. $\int_{\mathbb{R}} h(x) d(f+g)(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x) df(x) + \int_{\mathbb{R}} h(x) dg(x)$,
2. $\int_{\mathbb{R}} h(x) d(\alpha f)(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}} h(x) df(x)$ für $0 \leq \alpha < \infty$.

Übung 1.133 (Die Jensensche Ungleichung) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in M(I, \mathcal{B}(I))$ eine konvexe Funktion, d.h.

$$\forall x, y \in I \forall t \in [0, 1] : f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y). \quad (18)$$

1. Zeigen Sie für alle $x \in I$, dass die links- und rechtsseitige Ableitung

$$\begin{aligned} f'_l(x) &:= \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \\ f'_r(x) &:= \lim_{z \downarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \end{aligned}$$

existieren und endlich sind, und dass für alle $y, z \in I$ mit $y < x < z$ gilt:

$$-\infty < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_l(x) \leq f'_r(x) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} < \infty.$$

Folgern Sie für alle $t \in I$:

$$f(t) \geq f(x) + (t - x)f'_l(x). \quad (19)$$

2. Nun sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(I, \mathcal{B}(I))$ mit $\int_I t \mu(dt) \in I$. Zeigen Sie die folgende “*Jensensche Ungleichung*”:

$$f\left(\int_I t \mu(dt)\right) \leq \int_I f(t) \mu(dt) \quad (20)$$

Hinweis: Setzen Sie in der Ungleichung (19) den Erwartungswert $x = \int_I t \mu(dt)$ ein und integrieren Sie. Überlegen Sie sich, dass das Integral $\int_I f(t) \mu(dt)$ in der Tat existiert.

- *3. **Multidimensionale Variante:** Nun sei $n \in \mathbb{N}$ und $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ konvex (d.h. $\forall x, y \in I \ \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x + ty \in I$), und $f \in M(I, \mathcal{B}(I))$ eine konvexe Funktion, d.h. es gelte wieder (18). Weiter sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(I, \mathcal{B}(I))$ mit $\int_I t \mu(dt) \in I^\circ$ (Inneres von I). Zeigen Sie die Jensensche Ungleichung (20) auch in diesem multidimensionalen Fall.

Übung 1.134 (Transformation der Fouriertransformierten unter linearen Abbildungen) Es sei μ ein endliches Maß über $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$. Die *Fouriertransformierte* $\hat{\mu}$ von μ wird durch

$$\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \mu(dx)$$

definiert, wobei

$$\langle k, x \rangle = \sum_{j=1}^n k_j x_j$$

das euklidische Skalarprodukt bezeichnet. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L_A(x) = Ax$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{R}^n$:

$$\widehat{L_A[\mu]}(k) = \hat{\mu}(A^t k)$$

1.9 Integrale und Nullmengen

Erinnern Sie sich an die Definition 1.58 von Nullmengen. Wie wir in diesem Abschnitt sehen werden, kommt es bei der Integration nicht auf Nullmengen an.

Beispiel 1.135 (Abzählbare Mengen sind Lebesgue-Nullmengen) Jede abzählbare Menge $Q \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge, denn es gilt aufgrund der σ -Additivität des Lebesguemaßes λ_1 :

$$\lambda_1(Q) = \sum_{q \in Q} \lambda_1(\{q\}) = 0,$$

da einpunktige Mengen die Länge 0 besitzen. Insbesondere ist z.B. die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eine Lebesgue-Nullmenge.

Das folgende Beispiel zeigt, dass es auch überabzählbare Lebesgue-Nullmengen gibt:

Beispiel 1.136 (Cantorsches Diskontinuum) Wir entfernen aus dem Einheitsintervall $I_0 = [0, 1]$ das mittlere Drittel $] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} [$, aus den verbleibenden Intervallen $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ wieder jeweils das mittlere Drittel $] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} [$ und $] \frac{7}{9}, \frac{8}{9} [$, usw. Formaler gesagt setzen wir rekursiv für $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n := I_{n-1} \setminus \bigcup_{i=1}^{3^{n-1}} \left] \frac{3i-2}{3^n}, \frac{3i-1}{3^n} \right[.$$

Das Cantorsche Diskontinuum wird dann durch

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_n$$

definiert. Es ist kompakt, denn es ist beschränkt und abgeschlossen als Komplement einer Vereinigung von offenen Mengen. Zudem ist es überabzählbar, denn die Abbildung

$$f : \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow C, \quad f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$$

ist eine Injektion (sogar eine Bijektion), und $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar. Weiter gilt $\lambda_1(I_n) = (\frac{2}{3})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, da in jedem Rekursionsschritt $1/3$ der Gesamtlänge der verbleibenden Teilintervalle entfernt wird. Es folgt mit der σ -Stetigkeit von λ_1 von oben wegen $I_n \downarrow C$:

$$\lambda_1(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(I_n) = 0.$$

Das Cantorsche Diskontinuum C ist also eine überabzählbare Lebesgue-Nullmenge.

Es sei wieder $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Lemma 1.137 (Integrale sehen Nullmengen nicht) 1. Es sei $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$; insbesondere gelte $f \geq 0$. Dann sind äquivalent:

- (a) $\int f d\mu = 0$,
- (b) $f = 0$ μ -fast überall, d.h. es gibt eine μ -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass $f(\omega) = 0$ für alle $\omega \in N^c$ gilt.

2. Es seien $f, g \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$, und es gelte $f = g$ μ -fast überall, d.h. $\{f \neq g\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}$ sei eine μ -Nullmenge. Dann existiert $\int f d\mu$ genau dann, wenn $\int g d\mu$ existiert, und in diesem Fall stimmen die beiden Integrale überein.

Beweis:

1. “(a) $\Rightarrow$ (b)” Es gelte $\int f d\mu = 0$, $f \geq 0$. Mit der Abkürzung

$$A := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}$$

zeigen wir nun $\mu(A) = 0$. Die Folge der

$$A_n := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ist monoton steigend mit $A_n \uparrow A$ für $n \rightarrow \infty$. Es folgt

$$\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A).$$

Andererseits gilt $\frac{1}{n}1_{A_n} \leq f$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$0 \leq \frac{1}{n}\mu(A_n) = \int \frac{1}{n}1_{A_n} d\mu \leq \int f d\mu = 0$$

und daher $\mu(A_n) = 0$. Wir schließen $\mu(A) = 0$.

“(b) $\Rightarrow$ (a)” Es gelte $f = 0$ μ -fast überall und $f \geq 0$. Es sei N eine μ -Nullmenge, so dass $f(\omega) = 0$ für alle $\omega \in N^c$ gilt. Ist nun $f_n \uparrow f$ eine Folge in $\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ so gilt auch $f_n|_{N^c} = 0$. Fixieren wir für einen Moment $n \in \mathbb{N}$. Ist

$$f_n = \sum_{i=1}^k y_i 1_{A_i}$$

mit $y_i > 0$ und $A_i \in \mathcal{A}$ für alle i , so folgt: $A_i \subseteq N$ für alle i , also $\mu(A_i) = 0$ und damit

$$\int f_n d\mu = \sum_{i=1}^k y_i \mu(A_i) = 0.$$

Wir schließen

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = 0.$$

2. Im folgenden Beweis soll man entweder überall das obere Vorzeichen “+” oder das untere Vorzeichen “−” lesen. Aus $f = g$ μ -fast überall folgt $f_{\pm} = g_{\pm}$ μ -fast überall. Wir brauchen nur zu zeigen:

$$\int f_{\pm} d\mu = \int g_{\pm} d\mu.$$

Das folgt so: Aus $|f_{\pm} - g_{\pm}| = 0$ μ -fast überall und $|f_{\pm} - g_{\pm}| \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ folgt

$$\int |f_{\pm} - g_{\pm}| d\mu = 0.$$

Wegen $g_{\pm} \leq f_{\pm} + |f_{\pm} - g_{\pm}|$ erhalten wir

$$\int g_{\pm} d\mu \leq \int f_{\pm} d\mu + \int |f_{\pm} - g_{\pm}| d\mu = \int f_{\pm} d\mu$$

und analog

$$\int f_{\pm} d\mu \leq \int g_{\pm} d\mu,$$

also zusammen die Behauptung $\int f_{\pm} d\mu = \int g_{\pm} d\mu$.

□

Bemerkung 1.138 1. Die Kontraposition von (a) $\Rightarrow$ (b) in Teil 1. des Lemmas 1.137 in der Riemann-Theorie lautet leicht abgeschwächt:

$$f > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx > 0$$

für $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Obwohl wir diese anschaulich plausible Aussage schon in der Analysis 1 hätten formulieren können, haben wir sie erst jetzt im Rahmen der Lebesgue-Theorie in allgemeinerer Form bewiesen, denn ein Beweis der Aussage nur mit Mitteln der Analysis 1, ohne Verwendung der Lebesgue-Theorie, ist nicht einfach.

2. Lemma 1.137 rechtfertigt es, die Notation $\int f d\mu$ auch für Funktionen zu verwenden, die auf einer Nullmenge undefiniert sein können und die erst nach Abänderung auf einer Nullmenge messbar werden und ein wohldefiniertes Integral besitzen. Gelegentlich vereinfacht das die Sprechweise etwas.

Übung 1.139 (Riemann-Integral als Spezialfall des Lebesgue-Integrals) Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall, $\hat{\mathcal{A}}$ die Lebesguesche σ -Algebra (= Vervollständigung der Borelschen σ -Algebra bezüglich des Lebesguemaßes) darüber und $\hat{\lambda}$ das Lebesguemaß auf $\hat{\mathcal{A}}$. Zeigen Sie: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt $f \in M([a, b], \hat{\mathcal{A}})$ und

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f(x) \hat{\lambda}(dx)}_{\text{Lebesgue-Integral}} = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Riemann-Integral}}.$$

Das Riemann-Integral stimmt also nicht nur auf stetigen Funktionen, sondern auch auf Riemann-integrierbaren Funktionen mit dem Lebesgue-Integral überein, wenn man die Lebesguesche σ -Algebra statt der Borelschen σ -Algebra verwendet. Dies gilt selbst dann, wenn f nicht Borel-messbar ist.

Das Riemann-Integral eignet sich (insbesondere aufgrund des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung) gut zum Berechnen des Integrals für konkret gegebene Funktionen, während das Lebesgue-Integral besser mit Grenzüperationen verträglich ist. Letzteres thematisieren wir im folgenden Abschnitt.

1.10 Konvergenzsätze

Eine der schönsten und wichtigsten Eigenschaften des μ -Integrals, insbesondere im Vergleich mit der Riemann-Theorie, ist die gute Verträglichkeit des Integrals mit Grenzübergängen. Wir formulieren drei Konvergenzsätze: den Satz von der monotonen Konvergenz, das Lemma von Fatou und den Satz von der dominierten Konvergenz. Im Spezialfall, dass das zugrundeliegende Maß das Zählmaß auf einer abzählbaren Menge Ω ist, führen diese Konvergenzsätze auf die gleichnamigen Sätze für Reihen aus der Analysis 1 zurück. Ähnlich wie die Konvergenzsätze für Reihen in der Analysis 1 und 2 oft nützlich beim Studium von Grenzübergängen bei Reihen waren, sind die hier betrachteten Verallgemeinerungen die wichtigsten Werkzeuge zur Analyse von Grenzübergängen bei Integralen. Wie immer sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Satz 1.140 (Satz von der monotonen Konvergenz, auch: Satz von Beppo Levi) *Es sei $f_n \uparrow f$ eine monoton steigende Folge in $\overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit Grenzfunktion $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gilt* WICHTIG!

$$\int f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu \quad \text{in } \overline{\mathbb{R}}.$$

Es genügt sogar, dass $f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ nur für μ -fast alle $\omega \in \Omega$ gilt.

Beweis: Wir nehmen zunächst $f_n \uparrow f$ an. Für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen wir monoton steigende Folgen $(g_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $g_{n,k} \uparrow f_n$ für $k \rightarrow \infty$. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n := \max\{g_{l,n} | l = 1, \dots, n\}$$

(punktweise gemeint). Als Maximum von endlich vielen nichtnegativen Treppenfunktionen ist h_n wieder eine nichtnegative Treppenfunktion. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Weil $g_{l,n} \leq f_l \leq f_n$ für $l = 1, \dots, n$ gilt, folgt $h_n \leq f_n$, und wegen $g_{l,n} \leq g_{l,n+1}$ erhalten wir

$$h_n \leq \max\{g_{l,n+1} | l = 1, \dots, n\} \leq \max\{g_{l,n+1} | l = 1, \dots, n+1\} = h_{n+1},$$

also $h_n \uparrow$. Weiter gilt punktweise für alle $l, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq l$: $h_n \geq g_{l,n}$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} g_{l,n} = f_l$$

und daher auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \geq \lim_{l \rightarrow \infty} f_l = f.$$

Wegen $h_n \leq f_n$ folgt auch umgekehrt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f,$$

also zusammen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = f.$$

Wir schließen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu && (\text{wegen } f_n \geq h_n) \\ &= \int f d\mu && (\text{wegen } h_n \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A}), h_n \uparrow f \text{ und Lemma 1.114}) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu && (\text{wegen } f \geq f_n, \text{ also } \int f d\mu \geq \int f_n d\mu). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

gezeigt.

Falls nur $f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ für μ -fast alle $\omega \in \Omega$ gilt, wählen wir eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, mit $f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ für alle $\omega \in N^c$ und erhalten $f_n 1_{N^c} \uparrow f 1_{N^c}$. Aus $f_n 1_{N^c}(\omega) = f_n(\omega)$ und $f 1_{N^c}(\omega) = f(\omega)$ für μ -fast alle $\omega \in \Omega$, Lemma 1.137 und dem schon Gezeigten folgt

$$\int f_n d\mu = \int f_n 1_{N^c} d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f 1_{N^c} d\mu = \int f d\mu.$$

Damit ist der allgemeinere Fall “ $f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ für μ -fast alle ω ” auf den spezielleren Fall “ $f_n \uparrow f$ punktweise” zurückgeführt.

□

Beispiel 1.141 1. Im Spezialfall $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu = \text{Zählmaß auf } \mathbb{N}$ besagt der Satz:

Ist $(f_n(\omega))_{\omega, n \in \mathbb{N}}$, $f_n(\omega) \geq 0$, eine Doppelfolge, monoton steigend in n , so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\omega=0}^{\infty} f_n(\omega) = \sum_{\omega=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega).$$

Das ist der aus der Analysis 1 bekannte Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen.

2. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und uneigentlich Riemann-integrierbar, $f \geq 0$, so gilt $f 1_{[-n,n]} \uparrow f$ für $n \rightarrow \infty$, also

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{\text{uneigentl. Riemann-Integral}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f 1_{[-n,n]} d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f 1_{[-n,n]} d\lambda \quad \text{wegen monotoner Konvergenz} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f d\lambda. \end{aligned}$$

Nimmt dagegen f Werte mit beiden Vorzeichen an, so kann f zwar uneigentlich Riemann-integrierbar mit endlichem uneigentlichem Riemann-Integral sein, aber nicht Lebesgue-integrierbar. Ein Beispiel ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \text{ als uneigentliches Riemann-Integral,}$$

(wobei der Integrand in 0 stetig durch 1 fortgesetzt werden soll), aber

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)_{\pm} dx = +\infty \text{ als Lebesgue-Integral,}$$

so dass $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ als Lebesgue-Integral undefiniert bleibt.

3. Ist $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ und $\mathcal{A} \ni A_n \uparrow A$, so gilt $f 1_{A_n} \uparrow f 1_A$ für $n \rightarrow \infty$ und folglich

$$\int_{A_n} f d\mu = \int f 1_{A_n} d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f 1_A d\mu = \int_A f d\mu$$

nach dem Satz von der monotonen Konvergenz.

Wir formulieren nun den zweiten wichtigen Konvergenzsatz, das Lemma von Fatou. Es dient zum Beispiel dazu, das Integral eines punktwweisen Limes nichtnegativer Funktionen f_n abzuschätzen.

Satz 1.142 (Lemma von Fatou) *Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gilt* WICHTIG!

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis: Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$f_k \geq \inf_{n: n \geq k} f_n \uparrow_{k \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n,$$

also wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz:

$$\int f_k d\mu \geq \int \inf_{n: n \geq k} f_n d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Hieraus folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int \inf_{n: n \geq k} f_n d\mu = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

□

Der Vorteil des Lemmas von Fatou gegenüber den anderen Konvergenzsätzen ist, dass es nur so schwache Voraussetzungen benötigt: Messbarkeit und Nichtnegativität der Integranden. Dafür behauptet es nur eine Ungleichung; Gleichheit gilt manchmal nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 1.143 (Gleichheit im Lemma von Fatou gilt nicht immer.)

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} 1_{[n, n+1]}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0 < 1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{[n, n+1]}(x) dx.$$

‘Übung 1.144 (Es gibt keine Variante des Lemmas von Fatou für $\limsup$.)

1. Es sei $f_n = 1_{[0,1]} \geq 0$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ und $f_n = 1_{[1,2]} \geq 0$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_{[0,2]} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx > \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,2]} f_n(x) dx.$$

2. Nun sei $g_n = 1_{[n, n+1]} \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}} \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx < \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx.$$

Wir kommen jetzt zum wichtigsten Konvergenzsatz der Lebesgueschen Integrationstheorie.

Satz 1.145 (Satz von der dominierten Konvergenz, auch: Satz von Lebesgue von der majorisierten Konvergenz) Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen **WICHTIG!** $f_n \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ und $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Es gelte

$$f_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\omega) \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

Weiter existiere eine integrierbare Majorante g , d.h. ein μ -integrierbares $g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$,

$$\int g \, d\mu < \infty,$$

mit

$$|f_n| \leq g \quad \mu\text{-fast überall für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind alle f_n und f μ -integrierbar, und es gilt

$$\int f_n \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mu.$$

Analoges gilt für komplexwertige $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Beweis: Wir dürfen annehmen, dass $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ und $|f_n| \leq g$ punktweise gilt, nicht nur μ -fast überall, indem wir f_n und f wenn nötig auf einer geeigneten Nullmenge N abändern. Ersetzen von f_n bzw. von f, g durch $f_n 1_{N^c}$ bzw. durch $f 1_{N^c}, g 1_{N^c}$ ändert nämlich die Integrale nicht, bewirkt aber $f_n 1_{N^c} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f 1_{N^c}$ punktweise. Aus $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise schließen wir auch $|f| \leq g$. Insbesondere gilt

$$\int (f_n)_\pm \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\int f_\pm \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty,$$

also sind f_n und f μ -integrierbar. Weiter wissen wir

$$0 \leq f_n + g \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f + g \quad \text{punktweise,}$$

also nach dem Lemma von Fatou:

$$\begin{aligned} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \right) + \int g \, d\mu &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n \, d\mu + \int g \, d\mu \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g) \, d\mu \\ &\geq \int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n + g) \, d\mu = \int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu, \end{aligned}$$

also wegen $\int g \, d\mu < \infty$:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \geq \int f \, d\mu.$$

Ebenso folgt

$$0 \leq g - f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g - f \quad \text{punktweise,}$$

also genau wie eben:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int -f_n d\mu + \underbrace{\int g d\mu}_{< \infty} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g - f_n) d\mu \\ &\geq \int (g - f) d\mu \quad \text{mit dem Lemma von Fatou} \\ &= \int g d\mu - \int f d\mu, \end{aligned}$$

also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = - \liminf_{n \rightarrow \infty} \int -f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Zusammen folgt die Behauptung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Der Satz von der dominierten Konvergenz für komplexwertige Funktionen folgt hieraus, indem wir die Variante für reellwertige Funktionen auf Real- und Imaginärteil getrennt anwenden.

□

Im Spezialfall $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{Zählmaß})$ erhalten wir den aus der Analysis 1 bekannten Satz von der dominierten Konvergenz für Reihen.

Beispiel 1.146 1. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

Begründung: Aus der Analysis 1 wissen wir

$$\forall y \in \mathbb{R} : \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^y,$$

also

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x^2}.$$

Um eine integrierbare Majorante zu finden, schätzen wir mit der Bernoullischen Ungleichung ab:

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{x^2}{n} = 1 + x^2,$$

also

$$\left| \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} \right| \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Die obere Schranke $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ist integrierbar, denn

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi < \infty.$$

Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt die Behauptung.

2. Es gilt zwar

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{a}{a^2 + x^2} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0,$$

aber für $a > 0$ erhalten wir mit der Substitution $x = au$, $dx = a du$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1 + u^2} = \pi \not\xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Dies ist kein Widerspruch zum Satz von der dominierten Konvergenz, denn die Majorantenbedingung ist verletzt: In der Tat ist für alle $m > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \sup_{a \geq m} \left| \frac{a}{a^2 + x^2} \right| dx = \infty,$$

denn es gilt für $x \geq m$:

$$\sup_{a \geq m} \left| \frac{a}{a^2 + x^2} \right| = \frac{1}{2x};$$

das Supremum wird für $a = x$ angenommen. Es folgt in der Tat

$$\int_{\mathbb{R}} \sup_{a \geq m} \left| \frac{a}{a^2 + x^2} \right| dx \geq \int_{[m, \infty[} \sup_{a \geq m} \left| \frac{a}{a^2 + x^2} \right| dx = \int_m^{\infty} \frac{dx}{2x} = \infty.$$

3. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x/n)}{x^2 + 1} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left| \frac{\sin(x/n)}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi < \infty.$$

Damit ist die Majorantenbedingung im Satz von der dominierten Konvergenz erfüllt. Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

da $\sin$ in 0 stetig mit dem Wert 0 ist. Aus dem Satz von Lebesgue folgt die Behauptung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x/n)}{x^2 + 1} dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x/n)}{x^2 + 1} dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0.$$

Übung 1.147 (Stetigkeit der Fouriertransformierten endlicher Maße) Es sei μ ein endliches Maß über $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte

$$\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \mu(dx)$$

eine stetige Funktion ist.

Hinweis: Zeigen Sie Folgenstetigkeit von $\hat{\mu}$ mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz.

Übung 1.148 (Fourierreihen als Fouriertransformierte) Es sei $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$, und $\hat{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dessen Fouriertransformierte. Überzeugen Sie sich davon, dass μ ein endliches Maß ist und dass $\hat{\mu}$ die Fourierreihe zu a ist.

Korollar 1.149 (Satz von Lebesgue zur Vertauschung von Integral und Ableitung) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$, so dass für alle $t \in I$ die Abbildung

$$f(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad \omega \mapsto f(\omega, t)$$

μ -integrierbar ist, und für μ -fast alle $\omega \in \Omega$ die Abbildung

$$f(\omega, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(\omega, t)$$

differenzierbar ist. Es existiere $g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit

$$\int g d\mu < \infty,$$

so dass für μ -fast alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\forall t \in I : \left| \frac{\partial}{\partial t} f(\omega, t) \right| \leq g(\omega).$$

Dann gilt für alle $t \in I$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(\omega, t) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} f(\omega, t) \mu(d\omega),$$

wobei hier beide Seiten wohldefiniert und endlich sind; der Integrand $\frac{\partial f}{\partial t}$ ist ja μ -fast überall definiert.

Beweis: Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass f reellwertig ist, indem wir Realteil und Imaginärteil von f einzeln betrachten. Weiter dürfen wir – wenn nötig nach Abänderung auf einer Nullmenge – annehmen, dass die Voraussetzungen für *alle* $\omega \in \Omega$, nicht nur für fast alle ω , gelten. Es sei $t \in I$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen t konvergente Folge in I , $t_n \neq t$. Wir untersuchen die Differenzenquotienten

$$h_n(\omega) := \frac{f(\omega, t_n) - f(\omega, t)}{t_n - t}.$$

Die h_n sind messbar, und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$$\forall \omega \in \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N} : |h_n(\omega)| \leq \sup_{\xi \in I} |D_2 f(\omega, \xi)| \leq g(\omega).$$

Weiter gilt

$$\forall \omega \in \Omega : h_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D_2 f(\omega, t).$$

Also ist der Satz von der dominierten Konvergenz anwendbar und liefert $D_2 f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t_n - t} \left(\int f(\omega, t_n) \mu(d\omega) - \int f(\omega, t) \mu(d\omega) \right) \\ &= \int h_n(\omega) \mu(d\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int D_2 f(\omega, t) \mu(d\omega), \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Beispiel 1.150 Wir definieren

$$g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = \int_0^\infty e^{-x-tx^3} dx.$$

Dann ist g differenzierbar mit

$$g'(t) = - \int_0^\infty e^{-x-tx^3} x^3 dx.$$

Beweis: Wir überprüfen die Voraussetzungen des Korollars:

$$f : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, t) = e^{-x-tx^3}$$

ist in x messbar, nach t partiell differenzierbar, und es gilt für alle $x > 0$:

$$\sup_{t>0} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = \sup_{t>0} | -x^3 e^{-x-tx^3} | \leq x^3 e^{-x}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^+} x^3 e^{-x} dx < \infty.$$

Das Korollar liefert die Behauptung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x-tx^3} dx = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial}{\partial t} e^{-x-tx^3} dx = \int_{\mathbb{R}^+} -x^3 e^{-x-tx^3} dx.$$

□

Übung 1.151 Zeigen Sie für $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^4+tx^2} dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^4+tx^2} dx.$$

Übung 1.152 (Die Wärmeleitungsgleichung mit $\mathcal{L}^1$ -Anfangsdaten) Es sei $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ und

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, t) = (2\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|_2^2}{2t}} g(y) \lambda_n(dy).$$

Beweisen Sie, dass f zweimal stetig differenzierbar nach x und stetig differenzierbar nach t ist, und dass gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta f,$$

wobei sich der Laplaceoperator nur auf die x -Koordinaten bezieht.

Beispiel 1.153 (Fouriertransformierte einer Gaußfunktion)

Wir zeigen für $k \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-x^2/2} dx = e^{-k^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx. \quad (21)$$

Zusammen mit der Formel

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}, \quad (22)$$

die wir erst später beweisen werden, erhalten wir die wichtige Formel:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-x^2/2} dx = e^{-k^2/2}}$$

Beweis: Es gilt

$$\frac{d}{dk} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-x^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial k} e^{ikx} e^{-x^2/2} dx = i \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} x e^{-x^2/2} dx$$

Hier ist die Vertauschung von Ableitung und Integral nach Korollar 1.149 zulässig, denn $x \mapsto |e^{ikx} e^{-x^2/2}| = e^{-x^2/2}$ und auch

$$x \mapsto \sup_{k \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial k} e^{ikx} e^{-x^2/2} \right| = |x| e^{-x^2/2}$$

sind über $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar wegen des superexponentiell schnellen Abfalls von $e^{-x^2/2}$ für $|x| \rightarrow \infty$.

Nun folgt mit partieller Integration:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} x e^{-x^2/2} dx = - \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx} e^{ikx} \right) e^{-x^2/2} dx = ik \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-x^2/2} dx,$$

Zusammen erhalten wir, dass die Funktion

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad y(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-x^2/2} dx$$

die Differentialgleichung

$$y'(k) = -ky(k)$$

erfüllt. Wir schließen

$$\frac{d}{dk} (e^{k^2/2} y(k)) = \frac{d}{dk} (e^{k^2/2}) y(k) + e^{k^2/2} y'(k) = k e^{k^2/2} y(k) - k e^{k^2/2} y(k) = 0,$$

so dass die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \mapsto e^{k^2/2} y(k)$ konstant ist. Es folgt $y(0) = e^{k^2/2} y(k)$ für alle $k \in \mathbb{R}$, also die Behauptung. □

Übung 1.154 (Gaußsches Integral im Komplexen)

Es gilt für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a > 0$:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \exp \frac{b^2}{4a}}, \quad (23)$$

wobei $\sqrt{a}$ den Hauptwert der Quadratwurzel bezeichnet, also diejenige komplexe Zahl $w = \sqrt{a}$ mit $\operatorname{Re} w > 0$ und $w^2 = a$. In dieser Aufgabe dürfen Sie die erst später bewiesene Formel (22) voraussetzen.

1. Zeigen Sie die Formel (23) zuerst im Spezialfall $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Verwenden Sie dazu eine quadratische Ergänzung, Translation und Skalierung.
- *2. Zeigen Sie die Formel (23) dann im Spezialfall $b = 0$. Beweisen Sie hierzu, dass für die Funktion

$$f : \{a \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} a > 0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(a) = \sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx$$

gilt: $df = 0$. Begründen und verwenden Sie hierbei

$$d\sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} da,$$

(zu lesen als $d\sqrt{\cdot}_a(z) = z/(2\sqrt{a})$ für $a, z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a > 0$), zum Beispiel mit Hilfe des Satzes von den impliziten Funktionen, angewandt auf die Gleichung $w^2 = a$ für $w = \sqrt{a}$. Vertauschen Sie Integral und Ableitung mit Hilfe des Satzes von Lebesgue und integrieren Sie geeignet partiell.

3. Zeigen Sie schließlich die Formel (23) allgemein, indem Sie

$$\frac{d}{dt} \left[\exp\left(-\frac{(bt)^2}{4a}\right) \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bt x} dx \right] = 0$$

für $t \in \mathbb{R}$ zeigen. Lassen Sie sich dabei vom Beweis des Beispiels 1.153 inspirieren.

Übung 1.155 (Momente der Standardnormalverteilung) 1. Zeigen Sie mit Hilfe der Formel (21) aus Beispiel 1.153 für alle $k \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(ik)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2/2} dx = e^{-k^2/2},$$

indem Sie zeigen, dass sich hier Summe und Integral vertauschen lassen.

2. Folgern Sie für alle $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2m} e^{-x^2/2} dx &= \frac{(2m)!}{2^m m!}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2m+1} e^{-x^2/2} dx &= 0. \end{aligned}$$

Übung 1.156 (Beispiel einer divergenten asymptotischen Reihe) Es sei

$$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-\alpha x^4} dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k x^{4k} e^{-x^2} dx.$$

Zeigen Sie:

1. f ist auf $\mathbb{R}^+$ glatt.
2. Für alle $\alpha > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k x^{4k} e^{-x^2} \right| dx = \infty$$

3. Für alle $\alpha > 0$ divergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k \int_{\mathbb{R}} x^{4k} e^{-x^2} dx$$

über $\mathbb{R}$.

4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k \int_{\mathbb{R}} x^{4k} e^{-x^2} dx - f(\alpha) = O(\alpha^{n+1}) \quad \text{für } \alpha \downarrow 0.$$

1.11 Dichten

Lemma 1.157 (mit einer Dichte definiertes Maß) *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ ist die Abbildung*

$$\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nu(A) = \int_A f d\mu \tag{24}$$

ein Maß. Ist dagegen $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, so ist ν , gegeben durch (24), ein signiertes Maß.

Beweis:

1. $\nu(\emptyset) = \int f 1_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$.
2. Wir betrachten zuerst den Fall $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Es sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ und $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n f 1_{A_k} \uparrow f 1_A \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int f 1_{A_k} d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{k=1}^n f 1_{A_k} d\mu = \int f 1_A d\mu = \nu(A). \end{aligned} \tag{25}$$

Der Fall $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wird analog behandelt; nur wird statt dem Satz von der monotonen Konvergenz der Satz von der dominierten Konvergenz verwendet: Für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie oben erhalten wir

$$\sum_{k=1}^n f 1_{A_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f 1_A \text{ punktweise,}$$

und wir haben die integrierbare Majorante $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^n f 1_{A_k} \right| \leq |f|$$

Die Rechnung (25) bleibt nun ebenso richtig; nur wird sie diesmal mit dem Satz von der dominierten Konvergenz begründet. Zudem gilt wegen $\sum_{k=1}^n \int |f| 1_{A_k} \leq \int |f|$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\nu(A_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{A_k} f d\mu \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{k=1}^n |f| 1_{A_k} d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty.$$

□

Definition 1.158 (Dichte eines Maßes) Es seien μ und ν zwei Maße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Wir sagen, ν hat eine Dichte f bzgl. μ , in Zeichen $d\nu = f d\mu$ oder $\nu(d\omega) = f(\omega) \mu(d\omega)$ oder auch $\nu = f\mu$, wenn ν durch die Gleichung (24) gegeben wird. Die gleichen Sprech- und Schreibweisen verwendet man im Fall $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, also wenn ν nur ein signiertes Maß ist.

Beispiel 1.159 Es sei Ω abzählbar. Die Zähldichte p eines Maßes $\nu = \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega} \delta_{\omega}$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ist die Dichte bezüglich des Zählmaßes $\mu = \sum_{\omega \in \Omega} \delta_{\omega}$. In Formeln: $d\nu = p d\mu$.

Übung 1.160 (Likelihoodquotienten im Diskreten) Es sei Ω abzählbar. Weiter seien ν und $\tilde{\nu}$ zwei Maße auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ mit Zähldichten $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ bzw. $\tilde{p} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Zeigen Sie:

$$d\tilde{\nu} = \frac{\tilde{p}}{p} d\nu.$$

Es seien μ und ν zwei Maße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ eine Dichte: $d\nu = f d\mu$. Weil Integrale Nullmengen nicht sehen, ist auch jedes $g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $f = g$ μ -fast überall eine Dichte. Es ist manchmal auch möglich, dass die Dichten mehr als auf Nullmengen abgeändert werden können: Zum Beispiel ist sowohl 1 als auch 2 eine Dichte des Maßes $\mu = \infty \delta_0$ auf $(\Omega, \mathcal{A}) = (\{0\}, \{\emptyset, \{0\}\})$ bezüglich μ selbst. Dagegen gilt:

Lemma 1.161 (Eindeutigkeit f.ü. von Dichten σ -endlicher Maße) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und ν ein σ -endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Es seien $f, g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ zwei Dichten von ν bezüglich μ :

$$d\nu = f d\mu = g d\mu.$$

Dann gilt $f = g$ μ -fast überall.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung zuerst im Fall, dass ν endlich ist. Dann gilt sowohl $f < \infty$ μ -fast überall als auch $g < \infty$ μ -fast überall. Wir kürzen ab:

$$\{\infty > f > g\} := \{\omega \in \Omega \mid \infty > f(\omega) > g(\omega)\}.$$

Dann folgt (mit der Konvention “undefiniert $\cdot 0 := 0$ ”)

$$\begin{aligned} 0 &= \nu(\{\infty > f > g\}) - \nu(\{\infty > f > g\}) \\ &= \int 1_{\{\infty > f > g\}} f \, d\mu - \int 1_{\{\infty > f > g\}} g \, d\mu = \int 1_{\{\infty > f > g\}} (f - g) \, d\mu, \end{aligned}$$

also $\mu(\{\infty > f > g\}) = 0$ wegen Lemma 1.137, da $1_{\{\infty > f > g\}}(f - g) \geq 0$ auf $\{\infty > f > g\}$ strikt positive Werte annimmt. Damit ist gezeigt: $f \leq g$ μ -fast überall. Mit vertauschten Rollen von f und g folgt $g \leq f$ μ -fast überall, also zusammen $f = g$ μ -fast überall.

Nun nehmen wir an, dass ν σ -endlich ist. Wir wählen eine aufsteigende Folge $\mathcal{A} \ni \Omega_n \uparrow \Omega$ mit $\nu(\Omega_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $\mathcal{A}_n := \{A \in \mathcal{A} \mid A \subseteq \Omega_n\}$ und $\mu_n := \mu|_{\mathcal{A}_n}$ und $\nu_n := \nu|_{\mathcal{A}_n}$, so dass ν_n ein endliches Maß auf $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ ist. Dann gilt nach dem schon Bewiesenen $f|_{\Omega_n} = g|_{\Omega_n}$ μ_n -fast überall, weil für alle $A \in \mathcal{A}_n$ gilt:

$$\int_{\Omega_n} f 1_A \, d\mu_n = \nu_n(A) = \int_{\Omega_n} g 1_A \, d\mu_n.$$

Anders gesagt: $\{\omega \in \Omega_n \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine μ -Nullmenge. Wegen $\Omega_n \uparrow \Omega$ folgt $f = g$ μ -fast überall, weil jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. □

Das Lemma bleibt auch gültig, wenn man statt der σ -Endlichkeit von ν die σ -Endlichkeit von μ voraussetzt:

Übung 1.162 (Eindeutigkeit f.ü. von Dichten σ -endlicher Maße – Variante) *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum und ν ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Es seien $f, g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ zwei Dichten von ν bezüglich μ . Zeigen Sie, dass $f = g$ μ -fast überall gilt.*

Definition 1.163 (Radon-Nikodym-Ableitung) Sind μ, ν zwei Maße auf dem gleichen messbaren Raum, so dass ν eine μ -fast überall eindeutige Dichte $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ bezüglich μ besitzt, so nennen wir f , genauer gesagt seine Äquivalenzklasse

$$\{g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A}) \mid f = g \text{ } \mu\text{-fast überall}\}$$

“die” *Dichte* oder auch *Radon-Nikodym-Ableitung* (in der Mathematischen Statistik auch: “*Likelihoodquotient*”) von ν bezüglich μ und schreiben

$$f = \frac{d\nu}{d\mu} \text{ } \mu\text{-fast überall.}$$

Die gleiche Schreib- und Sprechweise verwenden wir, wenn ν nur ein signiertes Maß ist, also im Fall $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Lemma 1.164 (Integration bezüglich eines Maßes mit Dichte) Es seien μ, ν zwei Maße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Weiter sei $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ eine Dichte von ν bezüglich μ , also

$$d\nu = f d\mu.$$

Weiter sei $g \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Dann folgt:

1. Falls $g \geq 0$, so gilt $\int g d\nu = \int gf d\mu$.
2. Das Integral $\int g d\nu$ existiert genau dann, wenn das Integral $\int gf d\mu$ existiert. In diesem Fall gilt $\int g d\nu = \int gf d\mu$.

Dieses Lemma liefert uns die Motivation für die Schreibweise $d\nu = f d\mu$, denn damit liest es sich wie ein Assoziativgesetz:

$$\int g (f d\mu) = \int (gf) d\mu.$$

Beweis des Lemmas durch maßtheoretische Induktion über g :

1. Schritt: Für $g = 1_A$, $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\int g d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int 1_A f d\mu = \int gf d\mu.$$

2. Schritt: Für $g = \sum_{i=1}^n y_i 1_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{A}$, $y_i \geq 0$ folgt hieraus

$$\int g d\nu = \sum_{i=1}^n y_i \int 1_{A_i} d\nu = \sum_{i=1}^n y_i \int 1_{A_i} f d\mu = \int gf d\mu$$

3. Schritt: Für $g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{A}) \ni g_n \uparrow g$ folgt

$$\begin{aligned} \int g d\nu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\nu \text{ (wg. Satz v. d. mon. Konvergenz)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n f d\mu \text{ (wg. 2. Schritt)} \\ &= \int gf d\mu \text{ (wg. Satz v. d. mon. Konvergenz und } g_n f \uparrow gf) \end{aligned}$$

Damit ist Teil 1. gezeigt.

4. Schritt: Für $g \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ gilt $(gf)_\pm = g_\pm f$ wegen $f \geq 0$, also

$$\int (gf)_\pm d\mu = \int g_\pm f d\mu = \int g_\pm d\nu,$$

wobei wir bei der letzten Gleichheit den 3. Schritt verwendet haben. Hieraus folgt die Behauptung 2.:

$$\int g d\nu = \int g_+ d\nu - \int g_- d\nu = \int (gf)_+ d\mu - \int (gf)_- d\mu = \int gf d\mu,$$

wobei hier die linke Seite genau dann definiert ist (kein undefinierter Wert " $\infty - \infty$ "), wenn die rechte Seite definiert ist.

□

Übung 1.165 (Likelihoodquotienten allgemein) Es seien μ, ν, κ drei Maße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f, g \in M_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $g > 0$. Es gelte $d\nu = f d\mu$ und $d\kappa = g d\mu$. Zeigen Sie

$$d\nu = \frac{f}{g} d\kappa.$$

Man kann das (im σ -endlichen Fall) auch in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{d\nu}{d\kappa} = \frac{d\nu/d\mu}{d\kappa/d\mu} \mu\text{-f.ü.}$$

Übung 1.166 (Berechnung von Erwartungswerten) ^{1.} Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine abzählbare Menge und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (I, \mathcal{P}(I))$ eine Zufallsvariable. Es sei $p = (p_x)_{x \in I}$ die Zähldichte der Verteilung $\mathcal{L}_\mu(X)$. Weiter sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$E_\mu(f(X)) = \sum_{x \in I} f(x) p_x,$$

wobei damit auch gemeint ist, dass die linke Seite genau dann definiert ist, wenn die rechte Seite definiert ist. Insbesondere gilt im Fall $I \subseteq \mathbb{R}$, $f = \text{id}$:

$$E_\mu(X) = \sum_{x \in I} x p_x.$$

2. Berechnen Sie die Erwartungswerte $E_\mu(X)$ und $E_\mu(X^2)$ für eine “geometrisch verteilte” Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit der Verteilung

$$\mathcal{L}_\mu(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (1-p) p^n \delta_n,$$

wobei $0 < p < 1$.

^{3.} Wieder sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine Zufallsvariable. Es sei $\rho \in M_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine Dichte der Verteilung $\mathcal{L}_\mu(X)$ bezüglich des Lebesguemaßes $\lambda(dx) = dx$. Weiter sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$E_\mu(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \rho(x) dx,$$

wobei wieder auch gemeint ist, dass die linke Seite genau dann definiert ist, wenn die rechte Seite definiert ist. Insbesondere gilt im Fall $f = \text{id}$:

$$E_\mu(X) = \int_{\mathbb{R}} x \rho(x) dx.$$

4. Berechnen Sie die Erwartungswerte $E_\mu(X)$ und $E_\mu(X^2)$ für eine “exponentialverteilte” Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Verteilung

$$\mathcal{L}_\mu(X)(dx) = ae^{-ax}1_{\{x>0\}} dx,$$

wobei $a > 0$.

1.12 Der Satz von Radon-Nikodym und Zerlegungen von Maßen

Wir geben nun im σ -endlichen Fall eine Charakterisierung, wann ein Maß eine Dichte bezüglich eines anderen Maßes besitzt. Hierzu definieren wir:

Definition 1.167 (Absolutstetigkeit) Es seien μ, ν zwei Maße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Das Maß ν heißt *absolutstetig* bezüglich μ , in Zeichen $\nu \ll \mu$, wenn jede μ -Nullmenge auch eine ν -Nullmenge ist.

Erinnern Sie sich auch an den Begriff der σ -Endlichkeit:

“**Übung 1.168 (Charakterisierungen der σ -Endlichkeit)** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

1. μ ist σ -endlich.
2. Es gibt eine Folge $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $\Omega_n \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$ und $\mu(\Omega_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3. Es gibt eine aufsteigende Folge $B_n \uparrow \Omega$ in $\mathcal{A}$ mit $\mu(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Übung 1.169 (Vererbung der σ -Endlichkeit auf Summen) Es seien μ und ν zwei σ -endliche Maße auf einem gemeinsamen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mu + \nu$ ein σ -endliches Maß ist. Insbesondere kann man für μ und ν die gleiche Folge $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Aussage 2. in Übung 1.168 wählen.

Satz 1.170 (Satz von Radon-Nikodym) Es seien μ und ν zwei Maße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Das Maß μ sei σ -endlich. Dann sind äquivalent:

1. $\nu \ll \mu$,
2. ν besitzt eine Dichte in $\overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ bezüglich μ .

Zusatz: Ist auch ν σ -endlich, so kann man die Dichte in 2. sogar in $M_+(\Omega, \mathcal{A})$ wählen.

Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass die Voraussetzung der σ -Endlichkeit von μ nötig ist: Wählen wir $\Omega = \{0\}$, $\mu = \infty \delta_0$ und $\nu = \delta_0$, so haben zwar μ und ν die gleichen Nullmengen (nämlich nur $\emptyset$), aber ν besitzt keine Dichte bezüglich μ .

Beweis des Satzes von Radon-Nikodym: “2. $\Rightarrow$ 1.”: Besitzt ν eine Dichte $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$, so gilt für jede μ -Nullmenge $A \in \mathcal{A}$:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = 0,$$

da Integrale nach Lemma 1.137 Nullmengen nicht sehen. Also ist jede μ -Nullmenge $N \subseteq A$ auch eine ν -Nullmenge.

“1. $\Rightarrow$ 2.”:

1. Schritt: Wir beweisen die Behauptung zuerst unter der Zusatzannahme $\mu(\Omega) < \infty$ und $\nu(\Omega) < \infty$. Die Idee ist es, $d\nu$ von unten durch Maße $f d\mu$ zu approximieren. Hierzu betrachten wir folgende Menge von Funktionen:

$$M := \{f \in M_+(\Omega, \mathcal{A}) \mid \forall A \in \mathcal{A} : \int_A f d\mu \leq \nu(A)\}.$$

Für alle $f, g \in M$ folgt dann auch $f \vee g \in M$, denn $f \vee g \in M_+(\Omega, \mathcal{A})$ und für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt mit den Abkürzungen $\{f \leq g\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\}$ und $\{f > g\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > g(\omega)\} = \{f \leq g\}^c$:

$$\begin{aligned} \int_A f \vee g d\mu &= \int_{A \cap \{f \leq g\}} f \vee g d\mu + \int_{A \cap \{f > g\}} f \vee g d\mu \\ &= \int_{A \cap \{f \leq g\}} g d\mu + \int_{A \cap \{f > g\}} f d\mu \\ &\leq \nu(A \cap \{f \leq g\}) + \nu(A \cap \{f > g\}) \quad (\text{wegen } f, g \in M) \\ &= \nu(A). \end{aligned}$$

Wegen $0 \in M$ ist M nichtleer. Wir setzen

$$s := \sup \left\{ \int f d\mu \mid f \in M \right\}. \quad (26)$$

Insbesondere ist $0 \leq s \leq \nu(\Omega) < \infty$ nach der Definition von M und aufgrund der Zusatzannahme. Wir wählen eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in M mit

$$\int f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$$

und setzen

$$g_n := f_1 \vee \dots \vee f_n \in M$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $g_n \uparrow$ und wegen $g_n \geq f_n$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$s \geq \int g_n d\mu \geq \int f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s,$$

wobei wir $g_n \in M$ und die Definition von s im ersten Schritt verwendet haben. Wir erhalten

$$\int g_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s.$$

Wir setzen $\tilde{g} := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ (punktweise). Es folgt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz aus $0 \leq g_n \uparrow \tilde{g}$:

$$\int \tilde{g} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = s < \infty,$$

also $\tilde{g} < \infty$ μ -fast überall. Wir kürzen ab:

$$\{\tilde{g} < \infty\} := \{\omega \in \Omega \mid \tilde{g}(\omega) < \infty\}.$$

Setzen wir $g := 1_{\{\tilde{g} < \infty\}} \tilde{g}$ so erhalten wir $g = \tilde{g}$ μ -fast überall. Wir schließen $g \in M$, da $g \in M_+(\Omega, \mathcal{A})$ und da für alle $A \in \mathcal{A}$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz wegen $g_n 1_A \uparrow \tilde{g} 1_A$ gilt:

$$\int_A g d\mu = \int_A \tilde{g} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \leq \nu(A),$$

wobei wir bei der letzten Ungleichung $g_n \in M$ verwendet haben. Insbesondere ist

$$\int_{\Omega} g d\mu = s < \infty. \quad (27)$$

Unser Ziel ist es nun, $d\nu = g d\mu$ zu zeigen. Gegeben $A \in \mathcal{A}$, müssen wir also $\int_A g d\mu = \nu(A)$ zeigen. $\int_A g d\mu \leq \nu(A)$ wissen wir schon. Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir setzen

$$\mathcal{A}_\epsilon := \{A \in \mathcal{A} \mid \nu(A) \leq \int_A g d\mu + \epsilon \mu(A)\}. \quad (28)$$

Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von messbaren Mengen und eine Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zahlen $c_n \geq 0$ wie folgt:

Rekursionsanfang: $A_1 := \Omega$. *Rekursionsschritt:* Gegeben $n \in \mathbb{N}$, sei A_n schon gegeben. Wir setzen

$$c_n := \sup\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{A}_\epsilon, B \subseteq A_n\} \geq 0, \quad (29)$$

wobei man für die letzte Ungleichung $B = \emptyset$ verwendet. Insbesondere können wir ein $B_n \in \mathcal{A}_\epsilon$ mit $B_n \subseteq A_n$ mit $\mu(B_n) \geq \frac{1}{2}c_n$ wählen. Um das zu sehen, unterscheiden wir zwei Fälle:

1. *Fall:* $c_n = 0$. Hier wählen wir $B_n = \emptyset$.
2. *Fall:* $c_n > 0$. In diesem Fall gibt es nach Definition von c_n und wegen $\frac{1}{2}c_n < c_n$ ein B_n wie gewünscht.

Schließlich setzen wir

$$A_{n+1} = A_n \setminus B_n.$$

Damit ist die rekursive Definition der Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vollendet. Nach Konstruktion gilt $A_n \downarrow$, $B_n \in \mathcal{A}_\epsilon$, und die B_n , $n \in \mathbb{N}$, sind paarweise disjunkt, da für alle natürlichen Zahlen $m > n$ gilt:

$$B_m \subseteq A_m \subseteq A_{n+1} = A_n \setminus B_n.$$

Da μ nach unserer Zusatzannahme ein endliches Maß ist, erhalten wir

$$\infty > \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$$

und daher

$$\mu(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wegen

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \frac{1}{2} c_n \leq \mu(B_n)$$

folgt hieraus auch

$$c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{30}$$

Setzen wir nun

$$A_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)^c. \tag{31}$$

Wir zeigen nun, dass für alle $C \in \mathcal{A}$ mit $C \subseteq A_\infty$ gilt:

$$\nu(C) \geq \int_C g d\mu + \epsilon \mu(C). \tag{32}$$

Gegeben solch ein C , unterscheiden wir zwei Fälle:

1. *Fall:* Es gelte $C \in \mathcal{A}_\epsilon$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $C \subseteq A_n$ wegen $C \subseteq A_\infty$, also $\mu(C) \leq c_n$ nach der Definition (29) von c_n . Wir schließen $\mu(C) = 0$ wegen (30). Nach der Voraussetzung $\nu \ll \mu$ folgt hieraus $\nu(C) = 0$. Insbesondere folgt die Ungleichung (32) im betrachteten Fall, denn beide Seiten in dieser Ungleichung sind hier gleich 0.

2. *Fall:* Es gelte $C \notin \mathcal{A}_\epsilon$. Aus dieser Annahme und der Definition (28) von $\mathcal{A}_\epsilon$ schließen wir, dass in diesem Fall sogar

$$\nu(C) > \int_C g d\mu + \epsilon \mu(C),$$

also erst recht die Ungleichung (32) gilt.

Damit ist die Ungleichung (32) in allen Fällen gezeigt. Wir erhalten für alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu(A \setminus A_\infty) + \nu(A \cap A_\infty) \\
&\geq \int_{A \setminus A_\infty} g \, d\mu + \int_{A \cap A_\infty} g \, d\mu + \epsilon\mu(A \cap A_\infty) \quad (\text{wegen } g \in M \text{ und (32)}) \\
&= \int_A (g + \epsilon 1_{A_\infty}) \, d\mu.
\end{aligned}$$

Das bedeutet $g + \epsilon 1_{A_\infty} \in M$, also

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g \, d\mu + \epsilon\mu(A_\infty) &= \int_\Omega (g + \epsilon 1_{A_\infty}) \, d\mu \\
&\leq s \quad (\text{nach der Definition (26) von } s) \\
&= \int_\Omega g \, d\mu < \infty \quad (\text{wegen (27)}),
\end{aligned}$$

also $\epsilon\mu(A_\infty) \leq 0$ und damit $\mu(A_\infty) = 0$ und somit $\nu(A_\infty) = 0$, wieder nach der Voraussetzung $\nu \ll \mu$ des Satzes. Es folgt für alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu(A \cap A_\infty) + \nu(A \setminus A_\infty) \leq \nu(A_\infty) + \nu(A \setminus A_\infty) = \nu(A \setminus A_\infty) \\
&= \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n)\right) \quad (\text{nach der Def. (31) von } A_\infty) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A \cap B_n) \quad (\text{da die } B_n \text{ paarw. disjunkt sind}).
\end{aligned} \tag{33}$$

Für den n -ten Summanden in der letzten Summe gilt:

$$\nu(A \cap B_n) = \nu(B_n) - \nu(B_n \setminus A) \leq \nu(B_n) - \int_{B_n \setminus A} g \, d\mu,$$

denn $\nu(B_n \setminus A) \geq \int_{B_n \setminus A} g \, d\mu$ wegen $g \in M$. Da $B_n \in \mathcal{A}_\epsilon$ nach Konstruktion der B_n gilt, haben wir

$$\nu(B_n) \leq \int_{B_n} g \, d\mu + \epsilon\mu(B_n),$$

also eingesetzt

$$\nu(A \cap B_n) \leq \int_{B_n} g \, d\mu + \epsilon\mu(B_n) - \int_{B_n \setminus A} g \, d\mu = \int_{A \cap B_n} g \, d\mu + \epsilon\mu(B_n).$$

Man beachte, dass wegen (27) und wegen der Zusatzvoraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$ alle in der letzten Ungleichung auftretenden Zahlen endlich sind. In (33) eingesetzt:

$$\begin{aligned}\nu(A) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A \cap B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{A \cap B_n} g \, d\mu + \epsilon \mu(B_n) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A \cap B_n} g \, d\mu + \epsilon \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \\ &\leq \int_A g \, d\mu + \epsilon \mu(\Omega),\end{aligned}$$

da die B_n , $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt sind. Wegen $\mu(\Omega) < \infty$ und da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\nu(A) \leq \int_A g \, d\mu,$$

was noch zu zeigen war. Damit ist der Satz von Radon-Nikodym unter der Zusatzvoraussetzung, dass μ und ν endliche Maße sind, bewiesen.

2. Schritt: Wir beweisen die Behauptung nun unter der Zusatzannahme $\mu(\Omega) < \infty$ und $\nu(\Omega) = \infty$. Es sei

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{A} \mid \nu(A) < \infty\} \quad (34)$$

und

$$c := \sup\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{F}\}. \quad (35)$$

Wegen $\emptyset \in \mathcal{F}$ und $\mu(\Omega) < \infty$ ist $0 \leq c < \infty$. Wir wählen eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ mit $\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ und setzen

$$B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere steigt die Folge der B_n auf: $B_n \uparrow$. Aufgrund der Subadditivität von ν ist auch $B_n \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit $A_n \subseteq B_n$ schließen wir

$$c \geq \mu(B_n) \geq \mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c,$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = c$. Wir setzen noch $\Omega_n := B_n \setminus B_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann sind die Ω_n , $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, und wegen $\Omega_n \in \mathcal{A}$ und $\Omega_n \subseteq B_n \in \mathcal{F}$ folgt auch $\Omega_n \in \mathcal{F}$. Für eine spätere Verwendung halten wir noch fest:

$$\bigcup_{k=1}^n \Omega_k = B_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Omega_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = c. \quad (36)$$

Gegeben $n \in \mathbb{N}$, betrachten wir nun die folgende σ -Algebra über Ω_n :

$$\mathcal{A}_n := \{A \in \mathcal{A} \mid A \subseteq \Omega_n\},$$

sowie die Einschränkungen μ_n bzw. ν_n von μ bzw. ν auf $\mathcal{A}_n$. Wegen $\mu \ll \nu$ ist auch $\mu_n \ll \nu_n$. Wegen $\mu_n(\Omega_n) = \mu(\Omega_n) < \infty$ und $\nu_n(\Omega_n) = \nu(\Omega_n) < \infty$ sind μ_n und ν_n endliche Maße. Nach dem schon bewiesenen 1. Schritt gibt eine Dichte $g_n \in M_+(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ von ν_n bzgl. μ_n . Wir definieren

$$\Omega_\infty := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \right)^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c.$$

Dann ist $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ eine Partition von Ω in paarweise disjunkte messbare Mengen. Wir setzen die Dichten g_n zu einer einzigen Dichte $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ zusammen:

$$g(\omega) := \begin{cases} g_n(\omega) & \text{für } \omega \in \Omega_n, n \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{für } \omega \in \Omega_\infty. \end{cases}$$

Dann ist $g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$; siehe Übung 1.80. Wir zeigen nun $d\nu = g d\mu$. Hierzu sei $C \in \mathcal{A}$ gegeben. Wir setzen

$$C_n := C \cap \Omega_n \text{ für } n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Die C_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ bilden also eine messbare Partition von C . Unser Ziel ist es nun,

$$\nu(C_n) = \int_{C_n} g d\mu \tag{37}$$

für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ zu zeigen, denn dann folgt die Behauptung

$$\nu(C) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \nu(C_n) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \int_{C_n} g d\mu = \int \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} g 1_{C_n} d\mu = \int_C g d\mu,$$

wobei wir hier zur Vertauschung von Integral und Reihe den Satz von der monotonen Konvergenz verwendet haben. Zum Beweis der verbleibenden Behauptung (37) unterscheiden wir drei Fälle:

1. *Fall:* $n \in \mathbb{N}$. Hier folgt die Behauptung so:

$$\nu(C_n) = \nu_n(C_n) = \int_{C_n} g_n d\mu_n = \int_{C_n} g d\mu.$$

2. *Fall:* $n = \infty$ und $\mu(C_\infty) = 0$. Dann folgt auch $\nu(C_\infty) = 0$ aufgrund der Voraussetzung $\nu \ll \mu$. In diesem Fall gilt die Behauptung (37) trivialerweise, denn beide Seiten in der Gleichung (37) sind hier gleich 0.

3. *Fall:* $n = \infty$ und $\mu(C_\infty) > 0$. Wir zeigen nun indirekt, dass $\nu(C_\infty) = \infty$ gelten muß. Angenommen, $\nu(C_\infty) < \infty$. Erinnern Sie sich an die Definitionen (34): $\mathcal{F} = \{A \in$

$\mathcal{A} \mid \nu(A) < \infty\}$ und (35): $c = \sup\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$. Nach unserer Annahme gilt $C_\infty \in \mathcal{F}$, also auch für alle $n \in \mathbb{N}$

$$C_\infty \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n \in \mathcal{F} \quad (38)$$

wegen $\Omega_k \in \mathcal{F}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und da $\mathcal{F}$ abgeschlossen unter endlicher Vereinigungsbildung ist. Da die Mengen in (38) paarweise disjunkt sind, erhalten wir den folgenden Widerspruch:

$$\begin{aligned} c &< \mu(C_\infty) + c = \mu(C_\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Omega_k) \quad (\text{wegen (36)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_\infty \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n) \leq c, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Ungleichung (38) und die Definition von c verwendet haben. Damit ist unsere Annahme widerlegt, also $\nu(C_\infty) = \infty$ indirekt gezeigt. Es folgt wegen $g|_{C_\infty} = \infty$ und der Fallannahme $\mu(C_\infty) > 0$:

$$\nu(C_\infty) = \infty = \int_{C_\infty} g \, d\mu.$$

Damit ist die Behauptung (37) auch im Fall $n = \infty$ und $\mu(C_\infty) > 0$ gezeigt. Fassen wir zusammen: Damit ist $d\nu = g \, d\mu$ bewiesen.

Ist nun ν sogar σ -endlich, so folgt $\nu(\Omega_\infty) = 0$. Dies sieht man so: Für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq \Omega_\infty$ und $\nu(A) > 0$ gilt $\mu(A) > 0$ wegen $\nu \ll \mu$, also

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu = \infty \mu(A) = \infty.$$

Alle messbaren Teilmengen A von Ω_∞ besitzen also entweder das Maß $\nu(A) = 0$ oder das Maß $\nu(A) = \infty$. Für jede Folge von Ereignissen $A_n \uparrow \Omega_\infty$ mit $\nu(A_n) < \infty$ gilt also $\nu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $\nu(\Omega_\infty) = 0$ wegen der σ -Stetigkeit von ν . Es folgt: $d\nu = 1_{\Omega_\infty^c} d\nu = 1_{\Omega_\infty^c} g \, d\mu = 1_{\{g < \infty\}} g \, d\mu$ so dass hier $1_{\{g < \infty\}} g$ eine endliche Dichte von ν bezüglich μ ist.

3. Schritt: Wir beweisen nun den Satz in dem Fall, dass μ σ -endlich mit $\mu(\Omega) = \infty$ ist. Nach Übung 1.168 finden wir eine Folge $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter messbarer Mengen mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$ und $\mu(\Omega_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist auch ν σ -endlich, so kann man zusätzlich sogar $\nu(\Omega_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ fordern; siehe Übung 1.169. Gegeben $n \in \mathbb{N}$, bezeichne μ_n bzw. ν_n die Einschränkung von μ bzw. von ν auf die σ -Algebra $\mathcal{A}_n := \{A \in \mathcal{A} \mid A \subseteq \Omega_n\}$. Insbesondere ist $\nu_n \ll \mu_n$ wegen $\nu \ll \mu$, und $\mu_n(\Omega_n) < \infty$. Nach dem schon Bewiesenen finden wir ein $g_n \in \overline{M}_+(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ (sogar $g_n \in M_+(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ nach dem 1. Schritt im Fall $\nu(\Omega_n) < \infty$) mit $d\nu_n = g_n \, d\mu_n$. Wir setzen wieder die Dichten g_n zu einer einzigen Dichte $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ zusammen:

$$g(\omega) := g_n(\omega) \text{ für } \omega \in \Omega_n, \, n \in \mathbb{N}$$

Dann ist $g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ (sogar $g \in M_+(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, falls auch ν σ -endlich ist), und es gilt $d\nu = g d\mu$, da für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_A g d\mu &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A \cap \Omega_n} g d\mu \text{ (wg. mon. Konvergenz)} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A \cap \Omega_n} g_n d\mu_n \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_n(A \cap \Omega_n) \text{ (wg. } d\nu_n = g_n d\mu_n) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A \cap \Omega_n) \\
&= \nu(A) \text{ (wg. } \sigma\text{-Additivität von } \nu)
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz von Radon-Nikodym inkl. Zusatz in allen Fällen bewiesen. □

Übung 1.171 (ϵ - δ -Charakterisierung der Absolutstetigkeit) Es seien μ, ν zwei endliche Maße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

1. $\nu \ll \mu$,
2. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{A} : [\mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \epsilon]$.

Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel auch, dass die Äquivalenz falsch werden kann, wenn zwar μ endlich ist, ν hingegen nur σ -endlich.

Als eine Anwendung des Satzes von Radon-Nikodym besprechen wir:

Korollar 1.172 (Bedingte Erwartungen für nichtnegative Zufallsvariablen) Es sei μ ein endliches Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Weiter sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter- σ -Algebra. Dann gibt es ein $g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{F})$, so dass für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\int_A g d\mu = \int_A f d\mu. \quad (39)$$

Zusätze:

1. Die Funktion g ist μ -fast überall eindeutig bestimmt im folgenden Sinn: Ist $g' \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{F})$ eine weitere solche Funktion, so ist

$$\{g \neq g'\} := \{\omega \in \Omega \mid g(\omega) \neq g'(\omega)\} \in \mathcal{F}$$

eine μ -Nullmenge.

2. Gilt auch $\int f d\mu < \infty$, so kann man zusätzlich auch $g \in M_+(\Omega, \mathcal{F})$ erreichen.

Ist μ sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so wird jede solche Funktion g eine *bedingte Erwartung* von f gegeben $\mathcal{F}$ genannt.

Man beachte, dass man im Allgemeinen nicht $g = f$ wählen kann, weil f nicht $\mathcal{F}$ -messbar zu sein braucht.

Beweis von Korollar 1.172: Wir betrachten das Maß $d\nu := f d\mu$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ sowie seine Einschränkung $\nu|_{\mathcal{F}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Nach der einfachen Richtung im Satz von Radon-Nikodym gilt $\nu \ll \mu$, also erst recht $\nu|_{\mathcal{F}} \ll \mu|_{\mathcal{F}}$. Zudem ist $\mu|_{\mathcal{F}}$ endlich, da μ nach Voraussetzung endlich ist. Aus der schwierigen Richtung im Satz von Radon-Nikodym folgt, dass $\nu|_{\mathcal{F}}$ eine Dichte $g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{F})$ bezüglich $\mu|_{\mathcal{F}}$ besitzt; im Fall $\int f d\mu < \infty$ kann man sogar noch fordern, dass g nicht den Wert ∞ annimmt. Wir schließen für alle $A \in \mathcal{F}$ mit Übung 1.126:

$$\int_A g d\mu = \int_A g d\mu|_{\mathcal{F}} = \nu|_{\mathcal{F}}(A) = \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Die Eindeutigkeit von g fast überall folgt nun aus der Eindeutigkeit f.ü. von Dichten aus Übung 1.162.

□

‘**Übung 1.173** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < 1$. Weiter sei $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass

$$g := \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} 1_A + \frac{\int_{A^c} f d\mu}{\mu(A^c)} 1_{A^c}$$

eine bedingte Erwartung von f gegeben $\sigma(\{A\})$ ist.

Zerlegungen von Maßen.

Definition 1.174 (orthogonale Maße) Wir nennen zwei Maße μ und ν auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ *singulär* oder auch *orthogonal* zueinander, in Zeichen $\mu \perp \nu$, wenn es eine messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ und $\nu(A^c) = 0$ gibt.

Man sagt auch, ein Maß μ habe *alle Masse in* $A \in \mathcal{A}$, wenn $\mu(A^c) = 0$ gilt. Zueinander orthogonale Maße haben also alle Masse auf einer Nullmenge des jeweils anderen Maßes.

Beispiel 1.175 Das Lebesguemaß λ und das Diracmaß δ_0 auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sind zueinander singulär: $\lambda \perp \delta_0$, denn $\lambda(\{0\}) = 0$ und $\delta_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$.

Als eine Anwendung des Satzes von Radon-Nikodym beweisen wir:

Satz 1.176 (Zerlegung eines Maßes in einen absolutstetigen und einen singulären Teil) Es seien μ und ν zwei σ -endliche Maße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zerlegung $\nu = \nu_a + \nu_s$ von ν in zwei Maße ν_a, ν_s auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\nu_a \ll \mu$ und $\nu_s \perp \mu$.

Beweis: Zur Existenz der Zerlegung: Nach Übung 1.169 ist $\mu + \nu$ wieder ein σ -endliches Maß. Nun gilt $\nu \ll \mu + \nu$, so dass ν nach dem Satz von Radon-Nikodym eine Dichte

$$f := \frac{d\nu}{d(\mu + \nu)}$$

besitzt. Wir dürfen evtl. nach Abänderung von f auf einer $\mu + \nu$ -Nullmenge annehmen, dass $f \leq 1$ gilt, denn mit der Abkürzung

$$\{f > 1\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 1\}$$

gilt für alle messbaren $B \subseteq \{f > 1\}$ mit $(\mu + \nu)(B) < \infty$:

$$0 \leq \mu(B) = (\mu + \nu)(B) - \nu(B) = \int_{\{f > 1\}} (1 - f) d(\mu + \nu) \leq 0$$

(hier tritt kein undefinierter Ausdruck $\infty - \infty$ auf!), also $\int_B (1 - f) d(\mu + \nu) = 0$ und daher $(\mu + \nu)(B) = 0$ nach Lemma 1.137. Weil $\mu + \nu$ σ -endlich ist, folgt hieraus $(\mu + \nu)(\{f > 1\}) = 0$. Wir setzen

$$A := \{f < 1\} = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < 1\}$$

und

$$d\nu_a := f 1_A d(\mu + \nu), \quad d\nu_s := f 1_{A^c} d(\mu + \nu).$$

Es gilt $\nu_a + \nu_s = \nu$ wegen

$$d(\nu_a + \nu_s) = (f 1_A + f 1_{A^c}) d(\mu + \nu) = f d(\mu + \nu) = d\nu.$$

Es gilt

$$\nu_a(A^c) = \int_{A^c} f 1_A d(\mu + \nu) = 0.$$

Weiter folgt für alle $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$:

$$0 = \mu(N) = (\nu + \mu)(N) - \nu(N) = \int (1 - f) 1_N d(\mu + \nu),$$

also $(1 - f) 1_N = 0$ $\mu + \nu$ -fast überall wegen Lemma 1.137 und $(1 - f) 1_N \geq 0$. Anders gesagt: $(\mu + \nu)(N \cap A) = 0$ wegen $A = \{f < 1\}$. Wir erhalten

$$\nu_a(N) = \int_N f 1_A d(\mu + \nu) = 0.$$

Damit ist $\nu_a \ll \mu$ gezeigt.

Zur Eindeutigkeit der Zerlegung: Es sei $\nu = \nu_a + \nu_s$ eine Zerlegung von ν in zwei Maße mit $\nu_a \ll \mu$ und $\nu_s \perp \mu$, sagen wir $\nu_s(A) = 0 = \mu(A^c)$ mit geeignetem $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt $d\nu_a = 1_A d\nu$, denn für alle $B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned} \nu_a(B) &= \nu_a(B \cap A) \quad (\text{wegen } \nu_a \ll \mu \text{ und } \mu(A^c) = 0) \\ &= \nu_a(B \cap A) + \underbrace{\nu_s(B \cap A)}_{=0} \quad (\text{wegen } \nu_s(A) = 0) \\ &= \nu(B \cap A) = \int_B 1_A d\nu. \end{aligned}$$

Weiter gilt $d\nu_s = 1_{A^c} d\nu$, denn für alle $B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned}\nu_s(B) &= \nu_s(B \cap A^c) \quad (\text{wegen } \nu_s(A) = 0) \\ &= \int_B 1_{A^c} d\nu.\end{aligned}$$

Es sei nun $\nu = \nu'_a + \nu'_s$ eine weitere Zerlegung von ν in zwei Maße mit $\nu'_a \ll \mu$ und $\nu'_s \perp \mu$ und analog $\nu'_s(A') = 0 = \mu(A'^c)$ mit geeignetem $A' \in \mathcal{A}$. Dann gilt ebenso $d\nu'_a = 1_{A'} d\nu$ und $d\nu'_s = 1_{A'^c} d\nu$. Wir erhalten:

$$\nu(A \setminus A') = \nu(A \cap A'^c) = \nu_a(A'^c) = 0$$

wegen $\nu_a \ll \mu$ und $\mu(A'^c) = 0$. Ebenso folgt mit vertauschten Rollen von A und A' : $\nu(A' \setminus A) = 0$. Es folgt für alle $B \in \mathcal{A}$:

$$\nu_a(B) = \nu(B \cap A) = \nu(B \cap A') - \underbrace{\nu(B \cap (A' \setminus A))}_{=0} + \underbrace{\nu(B \cap (A \setminus A'))}_{=0} = \nu(B \cap A') = \nu'_a(B)$$

und ebenso

$$\nu_s(B) = \nu(B \cap A^c) = \nu(B \cap A'^c) + \underbrace{\nu(B \cap (A' \setminus A))}_{=0} - \underbrace{\nu(B \cap (A \setminus A'))}_{=0} = \nu(B \cap A'^c) = \nu'_s(B).$$

Damit ist $\nu_a = \nu'_a$ und $\nu_s = \nu'_s$ gezeigt.

□

Übung 1.177 (Zerlegung eines Maßes in einen Punktanteil und einen kontinuierlichen Teil) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum mit $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ für alle $\omega \in \Omega$. Es sei

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \mu(\{\omega\}) > 0\}.$$

Zeigen Sie:

1. A ist abzählbar, $A \in \mathcal{A}$.
2. Setzen wir $d\mu_p = 1_A d\mu$ und $d\mu_c = 1_{A^c} d\mu$, so gilt $\mu = \mu_p + \mu_c$ und $\mu_c(\{\omega\}) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$ sowie $\mu_p = \sum_{\omega \in A} \mu(\{\omega\})\delta_\omega$, zu lesen als

$$\forall B \in \mathcal{A}: \mu_p(B) = \sum_{\omega \in A} \mu(\{\omega\})\delta_\omega(B).$$

Wir nennen μ_p den Punktanteil von μ und μ_c den kontinuierlichen Anteil von μ .

Betrachten wir nun ein beliebiges σ -endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, so erhalten wir zunächst eine eindeutige Zerlegung

$$\mu = \mu_a + \mu_s$$

in einen bezüglich dem Lebesguemaß λ_n absolutstetigen Teil μ_a und einen bezüglich λ_n singulären Teil μ_s . Der singuläre Teil μ_s kann weiter in einen Punktanteil μ_p und einen *singulär-kontinuierlichen* Teil μ_{sc} (auch *singulär-stetiger* Teil genannt, engl.: “*singular-continuous part*”) zerlegt werden:

$$\mu_s = \mu_p + \mu_{sc}$$

Damit erhalten wir eine eindeutige Zerlegung

$$\mu = \mu_a + \mu_p + \mu_{sc}$$

von μ in seinen absolutstetigen Teil, seinen Punktanteil und seinen singulär-stetigen Teil. Dabei nennen wir ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ singulär-stetig, wenn es orthogonal zum Lebesguemaß ist, aber den Punktanteil 0 besitzt.

Übung 1.178 Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion jedes singulär-stetigen Wahrscheinlichkeitsmaßes über $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ stetig ist.

Wir studieren nun Zerlegungen signierter Maße als Differenz zweier endlicher Maße:

Satz/Definition 1.179 (Hahn-Zerlegung: Positiv- und Negativteil eines signierten Maßes) Es sei μ ein signiertes Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte endliche Maße μ_+ und μ_- auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:

1. $\mu = \mu_+ - \mu_-$.
2. $\mu_+ \perp \mu_-$.

Es existiert ein $N \in \mathcal{A}$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu_+(A) = \mu(N^c \cap A), \quad (40)$$

$$\mu_-(A) = -\mu(N \cap A). \quad (41)$$

Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt zudem:

$$\mu_+(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{A}, B \subseteq A\}, \quad (42)$$

$$\mu_-(A) = \sup\{-\mu(B) \mid B \in \mathcal{A}, B \subseteq A\}. \quad (43)$$

μ_+ bzw. μ_- wird Positivteil bzw. Negativteil des signierten Maßes μ genannt; die Zerlegung $\mu = \mu_+ - \mu_-$ heißt die *Hahn-Zerlegung* von μ .

Veranschaulichung des Satzes: Stellen wir uns ein signiertes Maß μ als eine Verteilung elektrischer Ladungen im Raum Ω vor, wobei $\mu(B)$ die Ladungsbilanz in einem Gebiet $B \in \mathcal{A}$ bedeuten soll. Dann kann man den Raum Ω so in zwei Gebiete N und N^c aufteilen,

dass in N^c nur positive elektrische Ladungen und in N nur negative elektrische Ladungen sitzen.

Beweis des Satzes 1.179: *Zur Existenz der Hahn-Zerlegung:* Definieren wir $\mu_{\pm}$ durch (42)/(43).

Wir zeigen zunächst, dass $\mu_+ : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß ist.

$\mu_+(A) \geq 0$ folgt wegen $\mu(\emptyset) = 0$. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ und setzen wir $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, so folgt für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq A$:

$$\mu(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B \cap A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_+(A_n),$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition von $\mu_+(A_n)$ und $\mathcal{A} \ni B \cap A_n \subseteq A_n$ verwendet haben. Es folgt

$$\mu_+(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_+(A_n).$$

Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung:

$$\mu_+(A) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_+(A_n). \quad (44)$$

Hierzu wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(C_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ aus, so dass $C_{n,m} \subseteq A_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq \mu(C_{n,m}) \uparrow \mu_+(A_n)$ für $m \rightarrow \infty$ gilt. Insbesondere gilt $C_{n_1,m} \cap C_{n_2,m} = \emptyset$ für alle $n_1, n_2, m \in \mathbb{N}$. Setzen wir

$$B_m := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_{n,m} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A,$$

so folgt mit der σ -Additivität von μ und dem Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen:

$$\mu_+(A) \geq \mu(B_m) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_{n,m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_+(A_n),$$

wobei wir im ersten Schritt die Definition von $\mu_+(A)$, im zweiten Schritt die σ -Additivität von μ und im dritten Schritt den Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen verwendet haben. Damit ist die Behauptung (44) gezeigt.

Wegen $\mu_- = (-\mu)_+$ zeigt das gleiche Argument, dass auch μ_- ein Maß ist.

Wir zeigen nun $\mu_{\pm}(\Omega) < \infty$.

Es genügt, dies für μ_+ zu zeigen, denn mit dem gleichen Argument, angewandt auf $\mu_- = (-\mu)_+$, folgt dann auch die Behauptung für μ_- . Wir setzen $\mathcal{I} := \{A \in \mathcal{A} \mid \mu_+(A) = \infty\}$. Für jedes $A \in \mathcal{I}$ und jedes $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq A$ gilt $B \in \mathcal{I}$ oder $A \setminus B \in \mathcal{I}$ wegen $\infty = \mu_+(A) = \mu_+(B) + \mu_+(A \setminus B)$. Wir gehen indirekt vor und nehmen daher $\mu_+(\Omega) = \infty$ an. Wir definieren nun rekursiv eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$, so dass mit

$$B_n := \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

gilt: $|\mu(A_n)| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mu_+(B_n) = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Rekursionsanfang: $B_0 = \Omega$. Nach unserer Annahme gilt $\mu_+(B_0) = \infty$.

Rekursionsvoraussetzung: Gegeben sei $n \in \mathbb{N}$, und es seien alle A_k mit $k < n$, $k \in \mathbb{N}$, schon wie gewünscht gewählt, und es gelte $\mu_+(B_{n-1}) = \infty$.

Rekursionsschritt: Es gibt ein $C_n \in \mathcal{A}$ mit $C_n \subseteq B_{n-1}$ und $\mu(C_n) \geq |\mu(B_{n-1})| + 1$; man beachte $|\mu(B_{n-1})| < \infty$. Wegen $\mu(C_n) + \mu(B_{n-1} \setminus C_n) = \mu(B_{n-1})$ folgt $|\mu(B_{n-1} \setminus C_n)| \geq 1$, und natürlich gilt auch $|\mu(C_n)| \geq 1$. Wegen $B_{n-1} \in \mathcal{I}$ erhalten wir $C_n \in \mathcal{I}$ oder $B_{n-1} \setminus C_n \in \mathcal{I}$. Wir setzen $A_n := B_{n-1} \setminus C_n$ falls $C_n \in \mathcal{I}$, und $A_n := C_n$ falls $C_n \notin \mathcal{I}$; insbesondere ist dann A_n disjunkt von allen A_k mit $k < n$, $|\mu(A_n)| \geq 1$, und es gilt $B_n = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = B_{n-1} \setminus A_n \in \mathcal{I}$. Damit ist die rekursive Definition der A_n beendet.

Wir erhalten

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(A_n)| = \infty,$$

im Widerspruch dazu, dass die A_n , $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt sind und μ ein signiertes Maß ist. Damit ist $\mu_+(\Omega) < \infty$ gezeigt. μ_+ und μ_- sind also endliche Maße.

Wir zeigen nun $\mu = \mu_+ - \mu_-$.

In der Tat gilt für alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mu_-(A) &= \sup\{-\mu(B) \mid B \in \mathcal{A}, B \subseteq A\} \\ &= \sup\{\mu(A \setminus B) - \mu(A) \mid B \in \mathcal{A}, B \subseteq A\} \\ &= \sup\{\mu(C) - \mu(A) \mid C \in \mathcal{A}, C \subseteq A\} \\ &= \mu_+(A) - \mu(A). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun $\mu_+ \perp \mu_-$. Es sei $\mu_- = \mu_{-,a} + \mu_{-,s}$ die Zerlegung von μ_- in einen bezüglich μ_+ absolutstetigen Teil $\mu_{-,a}$ und einen zu μ_+ orthogonalen Teil $\mu_{-,s}$ nach Satz 1.176. Wir haben insbesondere ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu_{-,a}(N) = \mu_+(N) = 0 = \mu_{-,s}(N^c)$ und eine Dichte $f := d\mu_{-,a}/d\mu_+ \in M_+(\Omega, \mathcal{A})$ von $\mu_{-,a}$. Wir müssen $\mu_{-,a} = 0$ zeigen, oder gleichwertig: $f = 0$ μ_+ -fast überall. Hierzu setzen wir

$$B := \{f > 0\} \setminus N = \{\omega \in N^c \mid f(\omega) > 0\}.$$

Dann gilt für alle $C \in \mathcal{A}$ mit $C \subseteq B$:

$$\begin{aligned} \mu_+(B) - \mu(C) &= \mu_+(B) + \mu_-(C) - \mu_+(C) \\ &= \mu_+(B \setminus C) + \mu_-(C) \\ &= \mu_+(B \setminus C) + \mu_{-,a}(C) \\ &= \int \underbrace{(1_{B \setminus C} + f 1_C)}_{\geq (1 \vee f) 1_B} d\mu_+ \quad (\text{wegen } d\mu_{-,a} = f d\mu_+) \\ &\geq \int_B 1 \wedge f d\mu_+. \end{aligned}$$

Nehmen wir hier das Infimum über alle solchen C , folgt

$$0 = \inf_{C: C \in \mathcal{A}, C \subseteq B} (\mu_+(B) - \mu(C)) \geq \int_B 1 \wedge f d\mu_+ \geq 0,$$

also $(1 \wedge f)1_B = 0$ μ_+ -fast überall und daher $\mu_+(B) = 0$. Wegen $\mu_+(N) = 0$ folgt hiermit die Behauptung $f = 0$ μ_+ -fast überall.

Wir zeigen nun die Behauptungen (40) und (41).

Mit $N \in \mathcal{A}$ von eben wissen wir $\mu_-(N^c) = 0 = \mu_+(N)$ und daher die Behauptungen (40) und (41):

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A} : \mu_+(A) &= \mu_+(N^c \cap A) = \mu(N^c \cap A), \\ \mu_-(A) &= \mu_-(N \cap A) = -\mu(N \cap A). \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit der Hahn-Zerlegung: Es seien $\mu = \mu_+ - \mu_- = \mu'_+ - \mu'_-$ zwei Hahn-Zerlegungen des signierten Maßes μ , und $A, A' \in \mathcal{A}$ mit $\mu_+(A^c) = \mu_-(A) = \mu'_+(A'^c) = \mu'_-(A') = 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu_+(A \setminus A') &= \mu_+(A \setminus A') - \underbrace{\mu_-(A \setminus A')}_{=0} = \mu(A \setminus A') \\ &= \underbrace{\mu'_+(A \setminus A')}_{=0} - \mu'_-(A \setminus A') = -\mu'_-(A \setminus A') \leq 0 \end{aligned}$$

und daher $\mu_+(A \setminus A') = \mu'_-(A \setminus A') = 0$. Nun gilt auch $\mu_-(A \setminus A') = \mu'_+(A \setminus A') = 0$ wegen $\mu_-(A) = \mu'_+(A'^c) = 0$, also ist $A \setminus A'$ eine Nullmenge bezüglich aller vier Maße $\mu_{\pm}, \mu'_{\pm}$. Ebenso folgt mit vertauschten Rollen, dass auch $A' \setminus A$ eine Nullmenge bezüglich aller vier Maße $\mu_{\pm}, \mu'_{\pm}$ ist. Es folgt für alle $B \in \mathcal{A}$:

$$\mu_+(B) = \mu(B \cap A) = \mu(B \cap A') + \underbrace{\mu(B \cap (A \setminus A'))}_{=0} - \underbrace{\mu(B \cap (A' \setminus A))}_{=0} = \mu(B \cap A') = \mu'_+(B)$$

und daher auch $\mu_-(B) = \mu'_-(B)$. Dies zeigt die Eindeutigkeit der Hahn-Zerlegung. □

.

Übung 1.180 (Die Menge der signierten Maße als normierter Raum) Es sei $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ die Menge der signierten Maße über einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ ist, der durch die Menge $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ der endlichen Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ aufgespannt wird, und dass durch

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|\mu\| := \mu_+(\Omega) + \mu_-(\Omega)$$

eine Norm auf $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben ist.

Wir erweitern nun die Integraldefinition auf signierte Maße:

Definition 1.181 (Integral bezüglich signierter Maße) Es sei μ ein signiertes Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Falls die Integrale $\int f d\mu_+$ und $\int f d\mu_-$ beide definiert sind und auch die Differenz $\int f d\mu_+ - \int f d\mu_-$ definiert ist (also nicht einer der undefinierten Ausdrücke $\infty - \infty$ oder $(-\infty) - (-\infty)$ auftritt), so definieren wir das Integral

$$\int f d\mu := \int f d\mu_+ - \int f d\mu_-.$$

Diese Definition stimmt im Fall, dass μ sogar ein endliches Maß ist, mit der bisherigen Definition überein; daher ist es gerechtfertigt, die gleiche Notation zu verwenden.

Übung 1.182 (Die kanonische Isometrie $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\iota : (\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}), \|\cdot\|), \quad \iota(f) = f d\mu$$

(zu lesen als $\iota(f)(A) = \int_A f d\mu$ für $A \in \mathcal{A}$) eine isometrische lineare Abbildung ist. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die Norm aus Übung 1.180 und $\|\cdot\|_1$ die Halbnorm

$$\|f\|_1 := \int |f| d\mu.$$

Übung 1.183 (Das Integral als stetige Bilinearform) Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ der Raum der signierten Maße darüber, versehen mit der Norm aus Übung 1.180, und $M_b(\Omega, \mathcal{A})$ der Raum der beschränkten messbaren reellwertigen Funktionen darüber, versehen mit der Norm $\|f\|_{\sup} := \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$. Zeigen Sie, dass die Integralabbildung

$$I : M_b(\Omega, \mathcal{A}) \times \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f, \mu) = \int f d\mu$$

bilinear und bezüglich der zugehörigen Produktmetrik stetig ist. Zeigen Sie hierzu für $f \in M_b(\Omega, \mathcal{A})$ und $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$:

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \|f\|_{\sup} \|\mu\|.$$

2 Integralrechnung mehrerer Variablen

2.1 Produktmaße und der Satz von Fubini

Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ zwei messbare Räume.

Erinnern Sie sich an den Begriff der Produkt- σ -Algebra aus Definition 1.30:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}, \Omega_1 \times \Omega_2)$$

ist die kleinste σ -Algebra auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, die alle Rechtecke mit messbaren Seiten enthält.

Übung 2.1 (Produkt- σ -Algebra wird von den Projektionen erzeugt.) 1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die kleinste σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, bezüglich der die beiden kanonischen Projektionen

$$X_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_i, \quad X_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i \quad (i = 1, 2)$$

$\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_i$ meßbar sind.

2. Zeigen Sie, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Übung 2.2 (Verkleinerung von Produkt- σ -Algebren) Gegeben messbare Räume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, und $\Omega'_1 \in \mathcal{A}_1, \Omega'_2 \in \mathcal{A}_2$ setzen wir für $i = 1, 2$:

$$\mathcal{A}'_i := \{A_i \in \mathcal{A}_i \mid A_i \subseteq \Omega'_i\} = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{P}(\Omega'_i).$$

Zeigen Sie

$$\mathcal{A}'_1 \otimes \mathcal{A}'_2 = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \cap \mathcal{P}(\Omega'_1 \times \Omega'_2).$$

Satz/Definition 2.3 (Produktmaß) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume. Dann gibt es genau ein Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, so dass für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt:

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2).$$

$\mu_1 \otimes \mu_2$ wird das *Produktmaß* von μ_1 und μ_2 genannt.

Für den Beweis stellen wir zunächst einige Hilfsmittel bereit:

Definition 2.4 (Schnitt) Für $\omega_1 \in \Omega_1, A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ definieren wir den ω_1 -Schnitt von A durch

$$A_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A\}.$$

Lemma 2.5 (Messbarkeitsaussagen zum Schnitt) Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.3 sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $\omega_1 \in \Omega_1$. Dann ist der ω_1 -Schnitt von A messbar, d.h. $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$. Weiter ist die Abbildung

$$\phi_A : \Omega_1 \rightarrow [0, \infty], \quad \omega_1 \mapsto \mu_2(A_{\omega_1})$$

$\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{B}([0, \infty])$ -messbar.

Beweis: Weil μ_2 σ -endlich ist, können wir eine aufsteigende Folge $B_n \uparrow \Omega_2$ in $\mathcal{A}_2$ mit $\mu_2(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen. Wir definieren das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid \forall \omega_1 \in \Omega_1 : A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2, \forall n \in \mathbb{N} : \phi_{A \cap (\Omega_1 \times B_n)} \in M_+(\Omega_1, \mathcal{A}_1)\}.$$

Man beachte hierbei für $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$\phi_{A \cap (\Omega_1 \times B_n)}(\omega_1) = \mu_2((A \cap (\Omega_1 \times B_n))_{\omega_1}) = \mu_2(A_{\omega_1} \cap B_n).$$

Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist.

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$, denn für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ gilt $\emptyset_{\omega_1} = \emptyset \in \mathcal{A}_2$ und $\phi_{\emptyset} = 0 \in M_+(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$.
2. Es gelte $A \in \mathcal{D}$. Dann folgt $A^c = (\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus A \in \mathcal{D}$.
Begründung: Erstens gilt für alle $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$((\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus A)_{\omega_1} = \Omega_2 \setminus A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2,$$

da $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ nach Voraussetzung gilt.

Zweitens gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$\begin{aligned} \phi_{A^c \cap (\Omega_1 \times B_n)}(\omega_1) &= \mu_2((A^c \cap (\Omega_1 \times B_n))_{\omega_1}) \\ &= \mu_2(B_n \setminus A_{\omega_1}) \\ &= \mu_2(B_n) - \mu_2(B_n \cap A_{\omega_1}) \\ &= \mu_2(B_n) - \phi_{A \cap (\Omega_1 \times B_n)}(\omega_1); \end{aligned}$$

insbesondere ist

$$\phi_{A^c \cap (\Omega_1 \times B_n)} = \mu_2(B_n) - \phi_{A \cap (\Omega_1 \times B_n)} \in M_+(\Omega_1, \mathcal{A}_1).$$

3. Es sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D}$ und $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.
Dann folgt $A \in \mathcal{D}$.
Begründung: Erstens gilt für alle $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$A_{\omega_1} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{(A_k)_{\omega_1}}_{\in \mathcal{A}_2} \in \mathcal{A}_2,$$

und zweitens gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$\begin{aligned} \phi_{A \cap (\Omega_1 \times B_n)}(\omega_1) &= \mu_2((A \cap (\Omega_1 \times B_n))_{\omega_1}) \\ &= \mu_2 \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{(A_k)_{\omega_1} \cap B_n}_{\text{paarw. disj.}} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_2((A_k)_{\omega_1} \cap B_n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi_{A_k \cap (\Omega_1 \times B_n)}(\omega_1), \end{aligned}$$

also $\phi_{A \cap (\Omega_1 \times B_n)} \in M_+(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$.

Weiter gilt:

$$\mathcal{R} := \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\} \subseteq \mathcal{D}.$$

Es gilt nämlich für solche $A_1 \times A_2$ und $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A}_2 & \text{für } \omega_1 \in \Omega_1 \setminus A_1, \\ A_2 \in \mathcal{A}_2 & \text{für } \omega_1 \in A_1, \end{cases}$$

sowie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\phi_{(A_1 \times A_2) \cap (\Omega_1 \times B_n)} &= \phi_{A_1 \times (A_2 \cap B_n)} \\ &= \mu_2(A_2 \cap B_n) \cdot 1_{A_1} \in M_+(\Omega_1, \mathcal{A}_1),\end{aligned}$$

denn

$$\phi_{A_1 \times (A_2 \cap B_n)}(\omega_1) = \begin{cases} \mu_2(A_2 \cap B_n) & \text{für } \omega_1 \in A_1, \\ \mu_2(\emptyset) = 0 & \text{für } \omega_1 \in \Omega_1 \setminus A_1. \end{cases}$$

Fassen wir zusammen: $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System, das das $\cap$ -stabile Erzeugendensystem $\mathcal{R}$ von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ umfaßt. Aus dem Dynkin-Lemma folgt:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{D}.$$

Wir schließen für alle $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$: Für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ gilt $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\phi_{A \cap (\Omega_1 \times B_n)} \in M_+(\Omega_1, \mathcal{A}_1).$$

Hieraus folgt auch

$$\phi_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{A \cap (\Omega_1 \times B_n)} \in \overline{M}_+(\Omega_1, \mathcal{A}_1),$$

wobei hier der Limes punktweise gemeint ist, denn wegen $B_n \uparrow \Omega_2$ gilt für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ die Aussage $A_{\omega_1} \cap B_n \uparrow A_{\omega_1}$, also

$$\phi_A(\omega_1) = \mu_2(A_{\omega_1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(A_{\omega_1} \cap B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{A \cap (\Omega_1 \times B_n)}(\omega_1).$$

□

Zur Existenz des Produktmaßes. Für $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ definieren wir

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) := \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1}) \mu_1(d\omega_1). \quad (45)$$

$\mu_1 \otimes \mu_2$ ist nach dem vorhergehenden Lemma wohldefiniert. Weiter ist es ein Maß, denn es gilt:

$$\mu_1 \otimes \mu_2(\emptyset) = \int_{\Omega_1} \mu_2(\emptyset) \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_1} 0 \, d\mu_1 = 0,$$

und für jede Folge A_n , $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_1 \otimes \mu_2 \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \int_{\Omega_1} \mu_2 \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)_{\omega_1} \right) \mu_1(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \mu_2 \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(A_n)_{\omega_1}}_{\text{paarw. disj.}} \right) \mu_1(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2((A_n)_{\omega_1}) \mu_1(d\omega_1) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega_1} \mu_2((A_n)_{\omega_1}) \mu_1(d\omega_1) \quad (\text{wegen monotoner Konvergenz}) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1 \otimes \mu_2(A_n).
\end{aligned}$$

Weiter gilt für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$:

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1} = \begin{cases} A_2 & \text{für } \omega_1 \in A_1, \\ \emptyset & \text{für } \omega_1 \in \Omega_1 \setminus A_1. \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned}
\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) &= \int_{\Omega_1} \mu_2((A_1 \times A_2)_{\omega_1}) \mu_1(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \mu_2(A_2) 1_{A_1} d\mu_1 \\
&= \mu_2(A_2) \mu_1(A_1).
\end{aligned}$$

Damit ist die Existenz des Produktmaßes gezeigt.

Zur Eindeutigkeit des Produktmaßes. Wir zeigen die Eindeutigkeit zunächst in dem Fall, dass μ_1 und μ_2 endliche Maße sind. Wir betrachten wieder das $\cap$ -stabile Erzeugendensystem

$$\mathcal{R} = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Nach dem Eindeutigkeitssatz für endliche Maße (Satz 1.39) stimmen zwei Maße $\mu, \nu : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, die eingeschränkt auf $\mathcal{R}$ gleich sind, überein.

Sind nun μ_1 und μ_2 nur σ -endlich, so wählen wir aufsteigende Folgen $\Omega_1^{(n)} \uparrow \Omega_1$ und $\Omega_2^{(n)} \uparrow \Omega_2$ in $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ mit $\mu_1(\Omega_1^{(n)}) < \infty$ und $\mu_2(\Omega_2^{(n)}) < \infty$. Setzen wir für $i = 1, 2$:

$$\mathcal{A}_i^{(n)} := \{A_i \in \mathcal{A}_i \mid A_i \subseteq \Omega_i^{(n)}\} = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{P}(\Omega_i^{(n)}),$$

so ist nach dem schon Gezeigten die Einschränkung jedes Kandidaten $\mu_1 \times \mu_2$ für das Produktmaß auf

$$\mathcal{A}_1^{(n)} \otimes \mathcal{A}_2^{(n)} = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \cap \mathcal{P}(\Omega_1^{(n)} \times \Omega_2^{(n)})$$

(siehe Übung 2.2 für die letzte Gleichheit) für alle $n \in \mathbb{N}$ schon eindeutig bestimmt. Wegen $\Omega_1^{(n)} \times \Omega_2^{(n)} \uparrow \Omega_1 \times \Omega_2$ folgt für alle $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$:

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 \otimes \mu_2(\underbrace{A \cap (\Omega_1^{(n)} \times \Omega_2^{(n)})}_{\in \mathcal{A}_1^{(n)} \otimes \mathcal{A}_2^{(n)}}),$$

so dass auch $\mu_1 \otimes \mu_2$ eindeutig bestimmt ist. □

Für das iterierte Produktmaß mit n gleichen Faktoren verwendet man auch folgende Potenznotationen:

$$\mu^n := \mu^{\otimes n} := \underbrace{\mu \otimes \dots \otimes \mu}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Beispiel 2.6 (n -dimensionales Lebesguemaß – alternative Definition) Mit

$$\lambda_n := \lambda^{\otimes n} = \underbrace{\lambda \otimes \dots \otimes \lambda}_{n \text{ Faktoren}}$$

erhalten wir eine alternative Definition des n -dimensionalen Lebesguemaßes λ_n , $n \in \mathbb{N}$, mit dem eindimensionalen Lebesguemaß λ , unabhängig von der (kombinatorisch etwas aufwändigen) Konstruktion des Produkts von Inhalten aus Übung 1.19. Insbesondere gilt für $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m},$$

wobei wir identifizieren: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. In der Tat ordnen sowohl $\lambda_n \otimes \lambda_m$ als auch λ_{n+m} Quadern vom Typ

$$\prod_{i=1}^n]a_i, b_i] \times \prod_{j=n+1}^{n+m}]a_j, b_j]$$

ihr elementargeometrisches Volumen

$$\prod_{i=1}^{n+m} (b_i - a_i)$$

zu.

Übung 2.7 (Das Integral als Fläche unter dem Graphen) Es sei $f \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$, und

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

der Bereich zwischen dem Graph von f und der Abszisse. Zeigen Sie:

1. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$,
2. $\lambda_{n+1}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n$.

Dies gibt im Spezialfall $n = 1$ der Veranschaulichung von Integralen als Flächen, die man schon in der Schule zur Motivation des Riemann-Integrals verwendet, eine rigorose Basis.

Übung 2.8 (Das Cavalierische Prinzip) 1. Überzeugen Sie sich auch von folgendem *Cavalierischen Prinzip*:

Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sind $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ mit

$$\lambda_m(\{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\}) = \lambda_m(\{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in B\}),$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so folgt $\lambda_{n+m}(A) = \lambda_{n+m}(B)$.

2. Insbesondere gilt folgender Spezialfall:

Es seien $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ zwei messbare Bereiche im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$. Es gelte für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_2(\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in A\}) = \lambda_2(\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in B\}),$$

d.h. Schnitte von A und von B mit den parallelen Ebenen zur y - z -Ebene besitzen die gleiche Fläche. Dann besitzen A und B das gleiche Volumen:

$$\lambda_3(A) = \lambda_3(B).$$

Zeigen Sie mit diesem Prinzip, dass die Einheitskugel

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

und das Differenzgebilde “Zylinder minus Doppelkegel”

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leq y^2 + z^2 \leq 1\}$$

das gleiche Volumen besitzen.

Beispiel 2.9 (Fläche der Einheitskreisscheibe) Die offene Einheitskreisscheibe

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$$

hat das Lebesguemaß $\lambda_2(D) = \pi$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \lambda_2(D) &= \lambda_1 \otimes \lambda_1(D) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(\{y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < 1\}) dx \\ &= \int_{]-1, 1[} \lambda_1(]-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}[) dx \\ &= \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right]_{x=-1}^{x=1} = \pi. \end{aligned}$$

Integration bezüglich des Produktmaßes

Satz 2.10 (Satz von Fubini – Version für nichtnegative meßbare Funktionen)

Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume und $f \in \overline{M}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Dann gilt für alle $\omega_1 \in \Omega_1$: WICHTIG!

$$f(\omega_1, \cdot) \in \overline{M}_+(\Omega_2, \mathcal{A}_2).$$

Weiter ist die Funktion

$$g : \Omega_1 \rightarrow [0, \infty], \quad g(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)$$

$\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{B}([0, \infty])$ -meßbar, und es gilt:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega) \mu_1 \otimes \mu_2(d\omega).$$

Beweis durch maßtheoretische Induktion:

1. Schritt: Ist $f = 1_A$ für ein $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, so folgt nach Lemma 2.5 für alle $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$f(\omega_1, \cdot) = 1_{A_{\omega_1}} \in \overline{M}_+(\Omega_2, \mathcal{A}_2),$$

und

$$\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} 1_A(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) = \mu_2(A_{\omega_1})$$

ist $\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{B}([0, \infty])$ -meßbar. Weiter folgt nach der Definitionsgleichung (45) des Produktmaßes:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) &= \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1}) \mu_1(d\omega_1) \\ &= \mu_1 \otimes \mu_2(A) \\ &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega) \mu_1 \otimes \mu_2(d\omega). \end{aligned}$$

2. Schritt: Ist

$$f = \sum_{i=1}^n y_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$$

mit $y_i \in \mathbb{R}_0^+$ und $A_i \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, so folgt für alle $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$f(\omega_1, \cdot) = \sum_{i=1}^n y_i 1_{(A_i)_{\omega_1}} \in \overline{M}_+(\Omega_2, \mathcal{A}_2),$$

da $1_{(A_i)_{\omega_1}} \in \overline{M}_+(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ für $i = 1, \dots, n$ nach dem 1. Schritt gilt. Weiter ist

$$\begin{aligned}\Omega_1 \ni \omega_1 &\mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \int_{\Omega_2} 1_{A_i}(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{B}([0, \infty])$ -meßbar, da alle Funktionen $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} 1_{A_i}(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)$ nach dem 1. Schritt $\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{B}([0, \infty])$ -meßbar sind. Schließlich gilt

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^n y_i \int_{\Omega_2} 1_{A_i}(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_1} y_i \int_{\Omega_2} 1_{A_i}(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} 1_{A_i}(\omega) \mu_1 \otimes \mu_2(d\omega) \quad (\text{nach dem 1. Schritt}) \\ &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2).\end{aligned}$$

3. Schritt: Ist $f \in \overline{M}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ beliebig, $f_n \in \mathcal{E}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen mit $f_n \uparrow f$, so folgt für alle $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$f(\omega_1, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega_1, \cdot) \in \overline{M}_+(\Omega_2, \mathcal{A}_2),$$

und

$$\begin{aligned}\Omega_1 \ni \omega_1 &\mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \\ &= \int_{\Omega_2} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} f_n(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2); \quad (\text{wegen mon. Konvergenz})\end{aligned}$$

man beachte hierbei, dass $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_n(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)$ $\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{B}([0, \infty])$ -messbar nach dem

2. Schritt ist. Wir schließen:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} f_n(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_n(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) \quad (\text{wegen mon. Konvergenz}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_n d(\mu_1 \otimes \mu_2) \quad (\text{mit dem 2. Schritt}) \\
&= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) \quad (\text{wegen mon. Konvergenz}).
\end{aligned}$$

□

Übung 2.11 (Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei nichtnegativen messbaren Integranden) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume. Weiter sei $\tau : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_2 \times \Omega_1$, $\tau(\omega_1, \omega_2) = (\omega_2, \omega_1)$ die Vertauschungsabbildung. Zeigen Sie:

1. τ ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ - $\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_1$ -meßbar.
2. $\tau[\mu_1 \otimes \mu_2] = \mu_2 \otimes \mu_1$.
3. Folgern Sie mit dem Satz von Fubini: Für alle $f \in \overline{M}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ gilt:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2)$$

Bemerkung 2.12 (Großer Umordnungssatz = Satz von Fubini für Zählmaße)

Man kann die oben bewiesene Version des Satzes von Fubini im Spezialfall, dass μ_1 und μ_2 die Zählmaße auf abzählbaren Mengen Ω_1 bzw. Ω_2 sind, als eine alternative Formulierung des großen Umordnungssatzes für nichtnegative Funktionen aus der Analysis 1 auffassen. Man beachte, dass $\mu_1 \otimes \mu_2$ dann das Zählmaß auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist.

Beispiel 2.13 (σ -Endlichkeit ist im Satz von Fubini nötig.) Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass man über nicht σ -endlichen Maßräumen selbst bei nichtnegativen Integranden manchmal die Integrationsreihenfolge *nicht* vertauschen kann:

Es sei $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mit dem Lebesguemaß λ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{Zählmaß})$. Weiter sei

$$f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \{0, 1\}, \quad f(x, y) = 1_{\{x=y\}} = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y, \\ 0 & \text{für } x \neq y. \end{cases}$$

Dann ist $f \in \overline{M}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ und

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) \mu_2(dy) \mu_1(dx) = \int_{\Omega_1} 1 \mu_1(dx) = \infty,$$

aber

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) \mu_1(dx) \mu_2(dy) = \int_{\Omega_2} 0 \mu_2(dy) = 0.$$

Beispiel 2.14 (Integral von in Produkte zerfallenden Integranden) Sind $f_1 \in \overline{M}_+(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $f_2 \in \overline{M}_+(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ und setzen wir

$$f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty], \quad f(\omega_1, \omega_2) = f_1(\omega_1) f_2(\omega_2),$$

so ist $f \in \overline{M}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, und es gilt:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} f_1 d\mu_1 \cdot \int_{\Omega_2} f_2 d\mu_2$$

wegen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_1(\omega_1) f_2(\omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) \quad (\text{mit dem Satz von Fubini}) \\ &= \int_{\Omega_1} f_1(\omega_1) \underbrace{\int_{\Omega_2} f_2(\omega_2) \mu_2(d\omega_2)}_{\text{aus } \int_{\Omega_1} \text{-Integral herausziehen}} \mu_1(d\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_1} f_1 d\mu_1 \cdot \int_{\Omega_2} f_2 d\mu_2. \end{aligned}$$

Als eine Anwendung berechnen wir das berühmte Gaußsche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$, $a > 0$, das wir schon öfter benutzt haben:

Satz 2.15 (Gaußsches Integral) Für alle $a > 0$ gilt:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

WICHTIG!

Beweis: Mit der Skalierung $t = \sqrt{a}x$, also $dt = \sqrt{a} dx$ erhalten wir

$$\sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt,$$

so dass es genügt, den Spezialfall $a = 1$ zu beweisen.

Nach dem Satz von Fubini gilt:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|v\|_2^2} \lambda_2(dv) \quad (\text{mit Fubini und } \lambda_1 \otimes \lambda_1 = \lambda_2) \\ &= \lambda_3(A), \end{aligned}$$

wobei

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < e^{-x^2-y^2}\}.$$

Nun betrachten wir die Permutationsabbildung $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(x, y, z) = (z, x, y)$. Sie läßt das Lebesguemaß invariant: $\sigma[\lambda_3] = \lambda_3$; siehe Übung 1.106. Es folgt mit $A = \sigma^{-1}[\sigma[A]]$:

$$\begin{aligned} \lambda_3(A) &= \lambda_3(\sigma[A]) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(v, z) \lambda_2(dv) \lambda_1(dz). \end{aligned}$$

Nun gilt für $v \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$ und die offene Einheitskreisscheibe

$$D = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \|w\|_2 < 1\}$$

folgendes:

$$1_A(v, z) = \begin{cases} 1_{\sqrt{|\log z|}D}(v) & \text{für } 0 < z < 1, \\ 0 & \text{für } z \leq 0 \text{ oder } z \geq 1, \end{cases}$$

denn $0 < z < e^{-x^2-y^2}$ ist äquivalent zu $\|(x, y)\|_2 < \sqrt{|\log z|}$ für $0 < z < 1$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_3(A) &= \int_{]0,1[} \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\sqrt{|\log z|}D}(v) \lambda_2(dv) \lambda_1(dz) \\ &= \int_0^1 \lambda_2(\sqrt{|\log z|}D) dz \\ &= \int_0^1 |\log z| \lambda_2(D) dz = -\pi \int_0^1 \log z dz = \pi. \end{aligned}$$

Zusammen folgt die Behauptung:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\lambda_3(A)} = \sqrt{\pi}.$$

□

Verallgemeinerung auf n Dimensionen. Die Methode, die wir eben angewandt haben, um das Gaußsche Integral mit Hilfe der Fläche des Einheitskreises zu berechnen, läßt sich auch auf beliebige Dimensionen n verallgemeinern. Hier dient sie umgekehrt dazu, das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel mit Hilfe des Gaußschen Integrals zu berechnen:

Satz 2.16 (Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt die n -dimensionale Einheitskugel*

$$B_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\}$$

das folgende Volumen:

$$\boxed{\lambda_n(B_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}}$$

Erinnern Sie sich aus der Analysis 1 daran, dass die Gammafunktion durch

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

gegeben ist, und dass sie die Funktionalgleichung

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (46)$$

für $s > 0$ erfüllt.

Beweis von Satz 2.16: Es sei

$$A_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 < y < e^{-\|x\|_2^2}\}.$$

Wir berechnen das Volumen $\lambda_{n+1}(A_n)$ auf zwei verschiedene Weisen:

(a)

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}(A_n) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} 1_{]0, e^{-\|x\|_2^2}[}(y) \lambda_1(dy) \lambda_n(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2} \lambda_n(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2} \lambda_n(dx) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n \quad (\text{mit dem Satz von Fubini}) \\ &= \pi^{n/2}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}(A_n) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{1_{A_n}(x, y)}_{=0 \text{ für } y \notin]0, 1[} \lambda_n(dx) \lambda_1(dy) \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\|_2^2 < -\log y\}}(x) \lambda_n(dx) \lambda_1(dy) \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\sqrt{|\log y|} B_n}(x) \lambda_n(dx) \lambda_1(dy) \\ &= \int_0^1 \lambda_n(\sqrt{|\log y|} B_n) dy \\ &= \int_0^1 |\log y|^{\frac{n}{2}} \lambda_n(B_n) dy \\ &= \lambda_n(B_n) \int_0^1 |\log y|^{\frac{n}{2}} dy \\ &= \lambda_n(B_n) \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}} e^{-t} dt \quad (\text{mit der Subst. } t = |\log y|, dy = e^{-t} dt) \\ &= \lambda_n(B_n) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

Zusammen folgt die Behauptung.

□

Beispiel 2.17 (Kugelvolumen in niedrigen Dimensionen) Betrachten wir die n -dimensionale Kugel

$$rB_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$$

mit einem Radius $r > 0$. Werten wir ihr Volumen explizit aus: Mit Skalierung erhalten wir

$$\lambda_n(rB_n) = r^n \lambda_n(B_n) = \frac{r^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Berechnen wir nun

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt \quad (\text{Substitution } x = t^2, x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 dt) \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

also

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

Mit der Funktionalgleichung (46) der Gammafunktion und $\Gamma(1) = 1$ erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \begin{cases} \frac{n!}{2} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \sqrt{\pi} \prod_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{2} - j\right) = 2^{-\frac{n+1}{2}} \sqrt{\pi} \prod_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} (n - 2j) & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Wir erhalten für das Volumen einer n -dimensionalen Kugel mit Radius $r > 0$:

$$\lambda_n(rB_n) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\frac{n!}{2}} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} r^n}{\prod_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} (n - 2j)} & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Das bedeutet zum Beispiel:

Für $n = 1$: $\lambda_1(rB_1) = 2r$, konsistent mit der Länge $2r$ des Intervalls $rB_1 =]-r, r[$.

Für $n = 2$: $\lambda_2(rB_2) = \pi r^2$. Das ist die bekannte Formel für die Kreisfläche.

Für $n = 3$: $\lambda_3(rB_3) = \frac{4}{3} \pi r^3$. Das ist die bekannte Formel für das Kugelvolumen.

Für $n = 4$: $\lambda_4(rB_4) = \frac{1}{2} \pi^2 r^4$.

Übung 2.18 (Normierung der multidimensionalen Standardnormalverteilung)

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2} \lambda_n(dx) = 1$$

Übung 2.19 (Volumen eines Simplex) 1. Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$ das n -dimensionale Simplex

$$\Delta_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{k=1}^n x_k \leq 1 \right\}.$$

Beweisen Sie, dass es das Volumen

$$\lambda_n(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$$

besitzt.

2. Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ das Volumen

$$V_n(t) := \lambda_n(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < t\}).$$

Nun beweisen wir eine Version des Satzes von Fubini für Funktionen, deren Werte beide Vorzeichen annehmen dürfen.

Satz 2.20 (Satz von Fubini – Version für integrierbare Funktionen) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume und

WICHTIG!

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2).$$

Dann existiert für μ_1 -fast alle $\omega_1 \in \Omega_1$ das Integral

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)$$

und ist endlich. Die Funktion

$$g : \Omega_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad g(\omega_1) = \begin{cases} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2), & \text{falls dieses Integral existiert,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist μ_1 -integrierbar, und es gilt:

$$\int_{\Omega_1} g d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\mu_1 \otimes \mu_2.$$

Verwenden wir die Integralnotation auch für nur fast überall definierte Integranden, so können wir das auch in der folgenden Form schreiben:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega) \mu_1 \otimes \mu_2(d\omega)$$

Beweis: Es gilt $f_{\pm} \in M_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ mit

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_{\pm} d\mu_1 \otimes \mu_2 < \infty.$$

Nach der Version 2.10 des Satzes von Fubini für nichtnegative messbare Funktionen ist

$$\infty > \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_{\pm} d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\Omega_1} \underbrace{\int_{\Omega_2} f_{\pm}(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)}_{\geq 0} \mu_1(d\omega_1),$$

also

$$\int_{\Omega_2} f_{\pm}(\cdot, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) < \infty \quad \mu_1\text{-fast überall.}$$

Wir setzen

$$N := \left\{ \omega_1 \in \Omega_1 \mid \int_{\Omega_2} f_+(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) = \infty = \int_{\Omega_2} f_-(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \right\}$$

Die Menge N ist also eine μ_1 -Nullmenge. Definieren wir

$$h := f 1_{N^c \times \Omega_2},$$

so gilt $f = h$ $\mu_1 \otimes \mu_2$ -fast überall,

$$g = \int_{\Omega_2} h(\cdot, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)$$

und

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} h_{\pm}(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} h_{\pm} d\mu_1 \otimes \mu_2 \quad (\text{wg. Version 2.10 des Satzes von Fubini}) \\ &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_{\pm} d\mu_1 \otimes \mu_2 \quad (\text{da } f_{\pm} = h_{\pm} \mu_1 \otimes \mu_2\text{-f.ü.}) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

also ist

$$\int_{\Omega_2} h_{\pm}(\cdot, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)$$

μ_1 -integrierbar und damit auch

$$g = \int_{\Omega_2} h_+(\cdot, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) - \int_{\Omega_2} h_-(\cdot, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)$$

μ_1 -integrierbar mit

$$\int g d\mu_1 = \int f_+ d\mu_1 \otimes \mu_2 - \int f_- d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int f d\mu_1 \otimes \mu_2.$$

□

Im Spezialfall, dass für $j = 1, 2$ die Menge Ω_j abzählbar ist, $\mathcal{A}_j$ deren Potenzmenge und μ_j das Zählmaß darauf, kann man die Version 2.20 des Satzes von Fubini als eine alternative Formulierung des großen Umordnungssatzes für absolut konvergente Reihen aus der Analysis 1 auffassen.

“**Übung 2.21** Formulieren und beweisen Sie eine Version des Satzes von Fubini für komplexwertige integrierbare Funktionen.

Übung 2.22 (Vertauschbarkeit und Nichtvertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume.

“1. Es sei

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2). \quad (47)$$

Zeigen Sie:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2).$$

“2. Nun sei

$$f \in M(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$$

mit

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f(\omega_1, \omega_2)| \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) < \infty.$$

Überlegen Sie sich, dass in diesem Fall die Integrierbarkeitsvoraussetzung (47) des Teils 1. gilt.

3. Nun sei

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda_1|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)})$$

und

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 1_{\{x < y < x+1\}} - 1_{\{x-1 < y < x\}}.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} f d\mu_1 \otimes \mu_2$$

undefiniert ist. Zeigen Sie insbesondere

$$f \notin \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2).$$

Zeigen Sie auch

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} f(x, y) dy dx \neq \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} f(x, y) dx dy,$$

indem Sie beide Integrale berechnen.

Übung 2.23 (Produktmaße und Unabhängigkeit) Es seien $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ für $i = 1, \dots, n$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und

$$X = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n), \quad \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

der daraus gebildete Zufallsvektor. Erinnern Sie sich an die Definitionen

$$\sigma(X_i) := \sigma(\{X_i^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{A}_i\})$$

aus Übung 1.98 und an die Definition der Unabhängigkeit aus Übung 1.45. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

1. $\mathcal{L}_\mu(X) = \mathcal{L}_\mu(X_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_\mu(X_n)$,
2. $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ sind voneinander unabhängig bezüglich μ .

Gelten diese beiden Aussagen, so nennt man $X_1, \dots, X_n$ voneinander *unabhängig* bezüglich μ .

Übung 2.24 (i.i.d. Bernoulli-Variablen) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = ([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[), \lambda|_{\mathcal{B}([0, 1[)})$. Für fixiertes $p \in]0, 1[$ definieren wir die Zufallsvariablen

$$X := 1_{[0, p[} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$$

und

$$Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{A}), \quad Y(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{p} & \text{für } 0 \leq \omega < p, \\ \frac{\omega - p}{1 - p} & \text{für } p \leq \omega < 1, \end{cases}$$

sowie rekursiv $X_1 := X$ und $X_{n+1} := X_n \circ Y$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

1. $\mathcal{L}_\mu(X, Y) = (p\delta_1 + (1 - p)\delta_0) \otimes \mu$,
2. $\mathcal{L}_\mu(X_1, \dots, X_n) = (p\delta_1 + (1 - p)\delta_0)^{\otimes n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen mit dieser Eigenschaft 2. nennt man auch eine Folge von *unabhängigen, identisch verteilten* (engl.: *independent, identically distributed*; kurz: i.i.d.) *Bernoulli-Variablen* mit dem Parameter p .

Die folgende Übung liefert zwei Beispiele für singulär-stetige Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

***Übung 2.25 (Beispiele für singulär-stetige Wahrscheinlichkeitsmaße)** Für fixiertes $0 < p < 1$ sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die i.i.d. Folge von Bernoulli-Variablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit

$$\mathcal{L}_\mu(X_1, \dots, X_n) = (p\delta_1 + (1 - p)\delta_0)^n, \quad (n \in \mathbb{N})$$

aus Übung 2.24. Weiter seien

$$Z := \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n} X_n, \quad U := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n.$$

Zeigen Sie:

1. $\mathcal{L}_\mu(Z)$ ist singulär-stetig.
2. Die Verteilungsfunktion von $\mathcal{L}_\mu(U)$ steigt streng monoton auf dem Intervall $[0, 1]$.
3. Für $p = 1/2$ besitzt $\mathcal{L}_\mu(U)$ die Dichte $1_{[0,1]}$ bezüglich des Lebesguemaßes.
4. Für $p \neq 1/2$ ist $\mathcal{L}_\mu(U)$ singulär-stetig.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis aus der Stochastik folgendes “*Starke Gesetz der großen Zahlen*” verwenden:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \quad \mu\text{-fast sicher.}$$

Übung 2.26 Es sei M eine m -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, wobei $m < n$. Zeigen Sie $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda_n(M) = 0$.

Insbesondere ist die Kreislinie $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge bezüglich λ_2 ; siehe Beispiel 1.67.

Übung 2.27 (Randverteilungen und Randdichten) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume, $\pi_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_i$, $\pi_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i$ für $i = 1, 2$ die beiden kanonischen Projektionen und ν ein Maß auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Für $i = 1, 2$ heißt das Bildmaß $\pi_i[\nu]$ die i -te *Randverteilung*⁷ (engl.: *marginal*) von ν . Zeigen Sie: Besitzt ν eine Dichte $f = d\nu/d(\mu_1 \otimes \mu_2)$ $\mu_1 \otimes \mu_2$ -fast überall, so besitzt die Randverteilung $\pi_1[\nu]$ die Dichte

$$f_1 = \frac{d\pi_1[\nu]}{d\mu_1}, \quad f_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \quad \mu_1\text{-f.ü.}$$

Ebenso besitzt $\pi_2[\nu]$ die Dichte

$$f_2 = \frac{d\pi_2[\nu]}{d\mu_2}, \quad f_2(\omega_2) = \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \quad \mu_2\text{-f.ü.}$$

f_1 und f_2 werden die beiden *Randdichten* (engl.: *marginal density*) von ν bzgl. μ_1 und μ_2 genannt.

Übung 2.28 (Randdichten einer Gleichverteilung) Die Gleichverteilung auf dem Dreieck

$$\Delta := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

ist das Maß

$$\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nu(A) = \frac{\lambda_2(A \cap \Delta)}{\lambda_2(\Delta)}.$$

Berechnen Sie die beiden Randdichten von ν bezüglich des Lebesguemaßes.

⁷Vorwiegend wird diese Sprechweise in der Stochastik verwendet, wenn ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Übung 2.29 (Randverteilungen von Produkten) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Wahrscheinlichkeitsräume. Zeigen Sie: $\mu_1 \otimes \mu_2$ besitzt die beiden Randverteilungen μ_1 und μ_2 .

Übung 2.30 (Produktdichten) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume und ρ_1 bzw. ρ_2 σ -endliche Maße auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ bzw. $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ mit $\mu_1 \ll \rho_1$ und $\mu_2 \ll \rho_2$. Zeigen Sie:

$$\frac{d(\mu_1 \otimes \mu_2)}{d(\rho_1 \otimes \rho_2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{d\mu_1}{d\rho_1}(\omega_1) \frac{d\mu_2}{d\rho_2}(\omega_2)$$

für $\rho_1 \otimes \rho_2$ -fast alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

2.2 Asymptotisch Gaußsche Integrale

Gaußsche Integrale treten oft als Näherungsformeln auf. Hierzu ein Beispiel:

Beispiel 2.31 Betrachten wir das Integral

$$\int_0^\infty (xe^{1-x})^n dx$$

in der Asymptotik $n \rightarrow \infty$. (Zunächst ist $n \in \mathbb{N}$ gemeint; man kann sich jedoch ebenso $n \in \mathbb{R}^+$ vorstellen.) Der Integrand

$$(xe^{1-x})^n = \exp[n(\log x + 1 - x)]$$

besitzt bei $x = 1$ ein globales Maximum, das für $n \rightarrow \infty$ im Graphen eine immer “schärfere Spitze” wird. Um das genauer zu studieren, “zoomen” wir die Umgebung von $x = 1$ heraus: Hierzu betrachten wir die Transformation

$$y = \sqrt{n}(x - 1), \quad x = 1 + \frac{y}{\sqrt{n}}.$$

Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$n \left[\log \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) + 1 - \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) \right] = n \left[\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{y}{\sqrt{n}} \right] = -\frac{1}{2} y^2 + o(1),$$

wobei wir die Taylorapproximation

$$\log(1 + s) = s - \frac{s^2}{2} + o(s^2) \quad \text{für } s \rightarrow 0$$

verwendet haben. Setzen wir nun

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f_n(y) := \left[\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{y}{\sqrt{n}}} \right]^n 1_{\{y/\sqrt{n} > -1\}} = \exp \left(n \left[\log \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) - \frac{y}{\sqrt{n}} \right] \right) 1_{\{y/\sqrt{n} > -1\}},$$

so folgt für alle $y \in \mathbb{R}$:

$$f_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

Um den Satz von der dominierten Konvergenz anwenden zu können, brauchen wir noch eine Majorante von f_n . Dazu beweisen wir folgende Ungleichung:

$$\exists c > 0 \forall s > -1 : s - \log(1 + s) \geq c \min\{|s|, s^2\}. \quad (48)$$

Begündung: Wegen $\log(1 + s) \ll s$ für $s \rightarrow \infty$ gilt

$$\exists M > 0 \forall s \geq : s - \log(1 + s) \geq \frac{1}{2}s.$$

Wir wählen so ein $M > 0$ und untersuchen nun den Fall $-1 < s < M$: Wir entwickeln $g(s) := s - \log(1 + s)$ nach der Taylorformel um $s_0 = 0$: Für ein ξ zwischen 0 und s gilt:

$$g(s) = g(0) + g'(0)s + \frac{1}{2}g''(\xi)s^2 = \frac{1}{2(1 + \xi)^2}s^2 \geq \frac{1}{2(1 + M)^2}s^2,$$

denn für $x > -1$ gilt:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x}, \quad g''(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}.$$

Fassen wir die beiden Fälle $s > M$ und $-1 < s \leq M$ zusammen: Für alle $s > -1$ gilt:

$$g(s) \geq \min \left\{ \frac{1}{2}|s|, \frac{1}{2(1 + M)^2}s^2 \right\} \geq \underbrace{\frac{1}{2(1 + M)^2}}_{=:c} \min\{|s|, s^2\}.$$

Damit ist die Ungleichung (48) gezeigt.

Es folgt für alle $y \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} |f_n(y)| &= f_n(y) = \exp \left[-ng \left(\frac{y}{\sqrt{n}} \right) \right] 1_{\{y/\sqrt{n} > -1\}} \leq \exp \left[-nc \min \left\{ \frac{|y|}{\sqrt{n}}, \frac{y^2}{n} \right\} \right] \\ &\leq \exp[-nc \min\{|y|, y^2\}] \leq e^{-c|y|} + e^{-cy^2}, \end{aligned}$$

was integrierbar in y ist. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \int_0^\infty (xe^{1-x})^n dx &= \int_{\mathbb{R}} f_n(y) dy \quad (\text{mit der Transf. } x = 1 + \frac{y}{\sqrt{n}}, \sqrt{n} dx = dy) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (\text{mit } \forall y \in \mathbb{R} : f_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-y^2/2}, \sup_n |f_n| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \text{ und Lebesgue}) \\ &= \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Schreiben wir die Formel nochmal anders:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} \frac{\infty \leftarrow n}{\leftarrow} \sqrt{n} \int_0^\infty (xe^{1-x})^n dx &= \sqrt{n} e^n \int_0^\infty x^n e^{-nx} dx \\
&= \frac{e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty (nx)^n e^{-nx} n dx \\
&= \frac{e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \quad (\text{mit der Subst. } t = nx) \\
&= \frac{e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \Gamma(n+1) \\
&= \frac{e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} n! \quad (\text{für } n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

Stirling-Formel:

$$\boxed{\frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}$$

Für beliebige $s > 0$ statt $n \in \mathbb{N}$ funktioniert der Beweis wörtlich genauso. Zur Anwendung des Satzes von Lebesgue ersetzt man hier $n \in \mathbb{N}$ durch eine beliebige reellwertige Folgenglieder $s_n > 0$ mit $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Wir erhalten:

Stirling-Formel für die Gammafunktion:

$$\boxed{\frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{2\pi} s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s}} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1}$$

Die Methode läßt sich verallgemeinern:

Lemma 2.32 (Laplace-Methode für asymptotisch Gaußsche Integrale) *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ zweimal differenzierbar mit $f'(a) = 0$ und*

$$\sup_{x \in I} (\log f)''(x) < 0,$$

so dass f bei a ein globales Maximum besitzt. Weiter sei $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig bei a , Borel-messbar und beschränkt. Dann gilt:

$$\frac{\sqrt{n}}{f(a)^n} \int_I f(x)^n g(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2\pi}{b}} g(a),$$

wobei

$$b := |(\log f)''(a)|.$$

Beweis: Wir setzen $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h_n(y) = \begin{cases} \left(\frac{f\left(\frac{y}{\sqrt{n}} + a\right)}{f(a)} \right)^n g\left(\frac{y}{\sqrt{n}} + a\right) & \text{für } \frac{y}{\sqrt{n}} + a \in I, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der Taylorformel folgt für $x \rightarrow a$:

$$\log f(x) = \log f(a) + \underbrace{(\log f)'(a)(x-a)}_{=0} + \frac{1}{2}(\log f)''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2),$$

also

$$\frac{f(x)}{f(a)} = \exp \left[-\frac{b}{2}(x-a)^2(1+o(1)) \right], \quad x \rightarrow a.$$

Demnach gilt für alle $y \in \mathbb{R}$ für $n \rightarrow \infty$:

$$h_n(y) = \exp \left[-\frac{nb}{2} \left(\frac{y}{\sqrt{n}} \right)^2 (1+o(1)) \right] g(a+o(1)) = e^{-\frac{b}{2}y^2(1+o(1))} g(a+o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{b}{2}y^2} g(a),$$

wobei wir auch die Stetigkeit von g in a verwendet haben. Um für die Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz eine integrierbare Majorante zu finden, setzen wir

$$C := -\sup_{x \in I} (\log f)''(x) > 0.$$

Dann gilt für alle $x \in I$ nach der Taylorformel: Es gibt ein ξ zwischen x und a mit

$$\begin{aligned} \log f(x) &= \log f(a) + \underbrace{(\log f)'(a)(x-a)}_{=0} + \frac{1}{2}(\log f)''(\xi)(x-a)^2 \\ &\leq \log f(a) - \frac{1}{2}C(x-a)^2, \end{aligned}$$

also

$$0 \leq \frac{f(x)}{f(a)} \leq e^{-\frac{C}{2}(x-a)^2},$$

und damit für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $M := \sup_{x \in I} |g(x)| < \infty$:

$$|h_n(y)| \leq M \left[e^{-\frac{C}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^2} \right]^n = M e^{-\frac{C}{2}y^2},$$

und die Integrierbarkeitsbedingung

$$\int_{\mathbb{R}} M e^{-\frac{C}{2}y^2} dy = M \sqrt{\frac{2\pi}{C}} < \infty$$

ist erfüllt. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{b}{2}y^2} g(a) dy = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} g(a).$$

Weil

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(y) dy = \frac{\sqrt{n}}{f(a)^n} \int_I f(x)^n g(x) dx,$$

folgt hieraus die Behauptung. □

Bemerkung 2.33 1. Die Annahme $n \in \mathbb{N}$ spielt keine Rolle; wir können ebenso reelle $n > 0$ wählen.

2. Es gibt eine Variante der Methode im Komplexen; dort sind die Stellen a mit $f'(a) = 0$ *Sattelpunkte* von f . Deshalb heißt die Methode auch *Sattelpunktmethode*, obwohl man die Sattelpunkte hier im Reellen als Maxima sieht.

Übung 2.34 (Das Wallis-Produkt) Erinnern Sie sich daran, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}. \quad (49)$$

(Dies folgt durch Einsetzen von $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, Ausmultiplizieren mit der binomischen Formel und der Fourier-Orthonormalitätsrelation.)

1. Zeigen Sie mit der Laplace-Methode

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx \xrightarrow{\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty} 2. \quad (50)$$

Hinweis: Zerlegen Sie das Integrationsgebiet $]0, 2\pi[$ in drei Bereiche: $I_1 =]\pi/2 - \epsilon, \pi/2 + \epsilon[$, $I_2 =]3\pi/2 - \epsilon, 3\pi/2 + \epsilon[$ und $I_3 =]0, 2\pi[\setminus (I_1 \cup I_2)$ mit einem beliebig fixierten $\epsilon \in]0, \pi/2[$.

2. Folgern Sie aus (49) und (50):

$$\frac{\sqrt{n\pi}}{4^n} \binom{2n}{n} \xrightarrow{\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty} 1. \quad (51)$$

Schreiben Sie diese Formel in der folgenden Form um:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)^2}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

Diese Formel für die Kreiszahl π heißt *Wallissches Produkt*. Zur numerischen Berechnung von π ist es praktisch ohne Nutzen, da es recht langsam konvergiert.

3. Finden Sie einen alternativen Beweis der Asymptotik (51) und damit des Wallisschen Produkts mit Hilfe von

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

und der Stirlingformel.

Übung 2.35 (Modifizierte Besselfunktionen) Für $n \in \mathbb{N}_0$ werden die *modifizierten Besselfunktionen* $I_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $K_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos t} \cos(nt) dt,$$

$$K_n(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x \cosh t} \cosh(nt) dt$$

definiert. Zeigen Sie:

1. Sowohl I_n als auch K_n erfüllt die modifizierte Besselsche Differentialgleichung, die durch

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + n^2)y(x) = 0$$

gegeben wird. Achten Sie bei der Begründung sorgfältig auf die Rechtfertigung der Vertauschung von Integral und Ableitung.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die folgende Asymptotik:

$$\sqrt{2\pi x} e^{-x} I_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1,$$

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} e^x K_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.$$

Übung 2.36 Beweisen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$n^{m/2} \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^m} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \cos x_k \right)^n \lambda_m(dx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (2\pi m)^{m/2}.$$

Hinweis: Übertragen Sie die Idee hinter der Laplace-Methode auf den vorliegenden multidimensionalen Fall.

2.3 Die Transformationsformel

In diesem Abschnitt besprechen wir eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel

$$\int f(y) dy = \int f(y(x)) \frac{dy}{dx} dx$$

aus der Analysis 1 auf höhere Dimensionen. Wir beginnen mit linearen Transformationen im $\mathbb{R}^n$:

Es bezeichne

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

die Menge der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über $\mathbb{R}$. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichnen wir die Multiplikationsabbildung mit A mit

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad L_A(x) = Ax.$$

Wir schreiben auch $AM := L_A[M] = \{Ax \mid x \in M\}$ für $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aus der Linearen Algebra kennen Sie die Interpretation der Determinante als Volumen eines Parallelepipeds. Der folgende Satz gibt dieser heuristischen Interpretation einen rigorosen Sinn:

Satz 2.37 *Es sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, eine invertierbare Matrix mit den Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und*

$$\Pi_A = A[0, 1]^n = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k a_k \mid x_1, \dots, x_n \in [0, 1] \right\}$$

das davon aufgespannte Spat (= Parallelepipeds). Dann gilt:

1. **(Determinante als Spatvolumen)** *Das Spat Π_A besitzt das Volumen*

$$\lambda_n(\Pi_A) = |\det A|. \quad (52)$$

2. **(Volumentransformation bei invertierbaren linearen Abbildungen)** *Es gilt*

$$L_A[\lambda_n] = |\det A|^{-1} \lambda_n. \quad (53)$$

Das Gleiche anders geschrieben:

$$\boxed{\lambda_n[AM] = |\det A| \lambda_n[M]} \quad (54)$$

für alle $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Man beachte $\Pi_A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, denn $\Pi_A = L_{A^{-1}}^{-1}[0, 1]^n$ ist das Urbild des Einheitswürfels unter der Borel-messbaren Abbildung $L_{A^{-1}}$.

Die Volumenformel (52) für Spate ist natürlich ein Spezialfall der allgemeineren Formel (54). Trotzdem ist sie für uns nützlich, denn umgekehrt folgt auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Formel (54) aus dem Spezialfall (52), wie wir jetzt zeigen:

Gegeben $n \in \mathbb{N}$, nehmen wir (52) für alle $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ an. Wir betrachten einen nicht-leeren Quader

$$Q = \prod_{k=1}^n]a_k, b_k]$$

mit reellen Zahlen $a_k < b_k$ Setzen wir $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ und betrachten die Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}((b_k - a_k)_{k=1, \dots, n}) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})..$$

Dann gilt $Q = a + D[0, 1]^n$ und

$$\lambda_n(Q) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k) = \det D.$$

Gegeben $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, erhalten wir

$$L_A^{-1}[Q] = A^{-1}Q = A^{-1}a + A^{-1}D[0, 1]^n$$

und daher

$$\begin{aligned} L_A[\lambda_n](Q) &= \lambda_n(L_A^{-1}[Q]) \\ &= \lambda_n(A^{-1}a + A^{-1}D[0, 1]^n) = \lambda_n(A^{-1}D[0, 1]^n) = |\det(A^{-1}D)| \\ &= \frac{\det D}{|\det A|} = \frac{\lambda_n(Q)}{|\det A|}, \end{aligned}$$

wobei wir die Annahme (52) für $A^{-1}D$ statt A verwendet haben. Aufgrund der Eindeutigkeit des Lebesguemaßes aus Beispiel 1.41 schließen wir $|\det A|L_A[\lambda_n] = \lambda_n$, also die Behauptung.

Nun zeigen wir die Spatvolumenformel (52) durch vollständige Induktion über die Dimension n .

Der *Induktionsanfang* $n = 1$ ist klar, denn für $A \in \text{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $A[0, 1[$ ein Intervall der Länge $\lambda_1(A[0, 1[) = |A|$.

Als *Induktionsvoraussetzung* nehmen wir für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, an, dass die Spatvolumenformel (52) für alle invertierbaren Matrizen in der Dimension $n - 1$ gelte.

Induktionsschluss: Wir schreiben $e_1, \dots, e_n$ für die kanonischen Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$, $a_{i,j}$ für die Einträge von A , also $a_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$. Da weder das Spat Π_A noch $|\det A|$ von der Reihenfolge der $a_1, \dots, a_n$ abhängen und da $\det A \neq 0$, dürfen wir nach einer Permutation der Spalten o.B.d.A. $a_{n,n} \neq 0$ annehmen.

Wir betrachten die eindeutige Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $La_n = a_{n,n}e_n$ und $Le_j = e_j$ für $j = 1, \dots, n - 1$. Wegen $La_n \in a_n + \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ besitzt sie die Determinante $\det L = 1$, so dass auch $B := LA$ die Determinante

$$\det A = \det B$$

besitzt. Wir identifizieren $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ und schreiben $\mathbb{R}^n \ni x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^t$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})^t$ und $x'' = x_n$. Nun gilt für alle $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und alle $x'' \in \mathbb{R}$:

$$\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x', x'') \in M\} = \frac{x''}{a_{n,n}}a'_n + \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x', x'') \in LM\}.$$

Dies sieht man mit der folgenden Kette von Äquivalenzen, die für alle $x' = (x'_1, \dots, x'_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ gelten:

$$\begin{aligned}
& (x', x'') \in LM \\
\iff & \sum_{j=1}^{n-1} x'_j e_j + x'' e_n \in LM \\
\iff & \sum_{j=1}^{n-1} x'_j L e_j + \frac{x''}{a_{n,n}} L a_n \in LM \quad (\text{mit der Def. von } L) \\
\iff & \sum_{j=1}^{n-1} x'_j e_j + \frac{x''}{a_{n,n}} a_n \in M \quad (\text{da } L \text{ invertierbar}) \\
\iff & (x', 0) + \frac{x''}{a_{n,n}} \underbrace{(a'_n, a_{n,n})}_{=a_n} \in M \\
\iff & \left(x' + \frac{x''}{a_{n,n}} a'_n, x'' \right) \in M
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\lambda_{n-1}(\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x', x'') \in M\}) = \lambda_{n-1}(\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x', x'') \in LM\})$$

wegen der Translationsinvarianz von λ_{n-1} . Es folgt $\lambda_n(M) = \lambda_n(LM)$ nach dem Cavalierischen Prinzip. Speziell für $M = \Pi_A$, $LM = \Pi_B$:

$$\lambda_n(\Pi_A) = \lambda_n(\Pi_B).$$

Nun seien $b_1 = La_1, \dots, b_n = La_n$ die Spalten von B ; insbesondere gilt $b_n = a_{n,n}e_n$.

Der nun folgende Schritt ähnelt etwas dem schon durchgeführten Schritt: Wir betrachten die eindeutige Matrix $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $Kb_n = b_n$ und $(Kb_j)' = b'_j$, $(Kb_j)'' = 0$ für $j = 1, \dots, n-1$. Auch für sie gilt $\det K = 1$, da $Kb_j \in b_j + \mathbb{R}b_n$ für $j = 1, \dots, n-1$. Wir setzen $C := KB$. Die Matrix C besitzt also die Spalten $c_j = Kb_j$, wobei $c_n = b_n = a_{n,n}e_n$ und für alle $j = 1, \dots, n-1$: $c_j = (c'_j, 0) = (b'_j, 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. In Blockmatrix-Notation bedeutet das

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C' & 0 \\ \hline 0 & a_{n,n} \end{array} \right),$$

wobei $C' \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix mit den Spalten $c'_1, \dots, c'_{n-1}$ bezeichnet. Die Matrix C besitzt wegen $\det K = 1$ ebenfalls die Determinante

$$\det C = \det B = \det A.$$

Es gilt für alle $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und alle $x = (x', 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$:

$$\{z'' \in \mathbb{R} \mid (x', z'') \in KM\} = (Kx)'' + \{z'' \in \mathbb{R} \mid (x', z'') \in M\},$$

also

$$\lambda_1(\{z'' \in \mathbb{R} \mid (x', z'') \in KM\}) = \lambda_1(\{z'' \in \mathbb{R} \mid (x', z'') \in M\})$$

wieder wegen der Translationsinvarianz von λ_1 . Es folgt $\lambda_n(KM) = \lambda_n(M)$, wieder nach dem Cavalierischen Prinzip. Speziell für $M = \Pi_B$, $KM = \Pi_C$ bedeutet das:

$$\lambda_n(\Pi_C) = \lambda_n(\Pi_B) = \lambda_n(\Pi_A).$$

Das von C aufgespannte Spat Π_C ist ein kartesisches Produkt:

$$\Pi_C = \Pi_{C'} \times a_{n,n}]0, 1]$$

so dass wir erhalten:

$$\lambda_n(\Pi_C) = \lambda_{n-1}(\Pi_{C'})\lambda_1(a_{n,n}]0, 1]) = |a_{n,n}|\lambda_{n-1}(\Pi_{C'}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\lambda_{n-1}(\Pi_{C'}) = |\det C'|;$$

man beachte, dass C' wegen

$$0 \neq \det C = a_{n,n} \det C'$$

nichtsingulär ist. Zusammen erhalten wir die Behauptung so:

$$\lambda_n(\Pi_A) = \lambda_n(\Pi_C) = |a_{n,n}|\lambda_{n-1}(\Pi_{C'}) = |a_{n,n} \det C'| = |\det C| = |\det A|.$$

□

Übung 2.38 *Vollziehen Sie den Beweis des Satzes 2.37 elementargeometrisch am Beispiel*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nach: Berechnen Sie hierzu (mit Notationen wie im Beweis des Satzes) die Matrizen L, B, K, C und zeichnen Sie Π_A , Π_B und Π_C auf kariertes Papier, am besten farbig. Überlegen Sie sich auch elementargeometrisch, dass Π_A , Π_B und Π_C den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Übung 2.39 (Transformationsformel für lineare Abbildungen) *Zeigen Sie für alle $A \in \text{GL}(n\mathbb{R})$, $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in M_+(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$:*

$$\int_{AM} f(y) \lambda^n(dy) = \int_M f(Ax) |\det A| \lambda_n(dx)$$

Symbolisch (und etwas unpräzise) kann man sich das mit der folgenden Merkregel einprägen:

$$\lambda_n(dy) = |\det A| \lambda_n(dx) \quad \text{für } y = Ax$$

Übung 2.40 (echte Unterräume und singuläre Parallelepipede sind Nullmengen)

1. Es sei U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, der Dimension $\dim U < n$. Zeigen Sie $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda_n(U) = 0$.
2. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A = 0$ und $M = A[0, 1]^n$. Zeigen Sie, dass M eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Beispiel 2.41 (Normierung der multidimensionalen Normalverteilung) Es sei $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Sigma = \Sigma^t$, eine positiv definite Matrix. Dann ist auch Σ^{-1} positiv definit. Die (zentrierte) *multidimensionale Normalverteilung* zur Kovarianzmatrix Σ wird durch $\nu_\Sigma : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$,

$$\nu_\Sigma(dx) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^t \Sigma^{-1}x\right) \lambda_n(dx)$$

definiert. Hierbei wird $x \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektor aufgefaßt.

Wir zeigen: ν_Σ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h. es gilt die Normierung⁸

$$\nu_\Sigma(\mathbb{R}^n) = 1.$$

Beweis: Wir wählen, z.B. mit dem Cholesky-Verfahren, eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\Sigma^{-1} = A^t A$. Dann folgt: $\det \Sigma^{-1} = \det A^t \det A = (\det A)^2$, also

$$\frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} = |\det A|.$$

Mit der Transformation $y = L_A(x) = Ax$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}x^t \Sigma^{-1}x} \lambda_n(dx) \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(Ax)^t Ax} \lambda_n(dx) \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|Ax\|_2^2} \lambda_n(dx) \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|y\|_2^2} L_A[\lambda_n](dy) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|y\|_2^2} \lambda_n(dy) = 1, \end{aligned}$$

wobei wir die Volumentransformationsformel (53) und die Normierung der multidimensionalen Standardnormalverteilung aus Übung 2.18 verwendet haben.

⁸Man beachte, dass diese Formel das Gaußsche Integral aus Satz 2.15 als Spezialfall $n = 1$ und die Normierung der multidimensionalen Standardnormalverteilung aus Übung 2.18 als Spezialfall $\Sigma = \text{Id}$ enthält.

□

Beispiel 2.42 (Lineare Transformation einer multidimensionalen Normalverteilung)

Sind ν_Σ die multidimensionale zentrierte Normalverteilung zu einer gegebenen positiv definiten Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix und $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L_A(x) = Ax$ die zugehörige Multiplikationsabbildung, so gilt:

$$\boxed{L_A[\nu_\Sigma] = \nu_{A\Sigma A^t}} \quad (55)$$

Beweis: Für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erhalten wir mit der Transformationsformel für lineare Abbildungen:

$$\begin{aligned} L_A[\nu_\Sigma](B) &= \nu_\Sigma(A^{-1}B) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \int_{A^{-1}B} e^{-\frac{1}{2}y^t \Sigma^{-1}y} \lambda_n(dy) \\ &= \frac{|\det A^{-1}|}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \int_B e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}y)^t \Sigma^{-1}A^{-1}y} \lambda_n(dy) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(A\Sigma A^t)}} \int_B e^{-\frac{1}{2}y^t (A\Sigma A^t)^{-1}y} \lambda_n(dy) \\ &= \nu_{A\Sigma A^t}(B). \end{aligned}$$

□

Übung 2.43 (Fouriertransformierte der multidimensionalen Normalverteilung)

Es sei $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Sigma = \Sigma^t$, eine positiv definite Matrix und ν_Σ die zentrierte multidimensionale Normalverteilung zur Kovarianzmatrix Σ . Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der Formel (21) aus Beispiel 1.153:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \nu_\Sigma(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2}k^t \Sigma k\right) \quad (56)$$

Übung 2.44 (Produkte von Normalverteilungen) Es seien $\nu_{\Sigma_1} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ und $\nu_{\Sigma_2} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \rightarrow [0, 1]$ die multidimensionalen zentrierten Normalverteilungen zu gegebenen positiv definiten Kovarianzmatrizen $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\nu_{\Sigma_1} \otimes \nu_{\Sigma_2} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) \rightarrow [0, 1]$ ist die multidimensionale zentrierte Normalverteilung mit der Kovarianzmatrix (in Blocknotation)

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}.$$

Lemma 2.45 (Randverteilungen der multidimensionalen Normalverteilung) Es sei ν_Σ die multidimensionale zentrierte Normalverteilung zu einer gegebenen positiv definiten Kovarianzmatrix (in Blocknotation)

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{12}^t & \Sigma_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

wobei $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Es sei $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n)$ die kanonische Projektion auf die ersten n Koordinaten. Dann besitzt ν_Σ die Randverteilung

$$\pi[\nu_\Sigma] = \nu_{\Sigma_1}.$$

Beweis: Wir betrachten die Matrizen (in Blocknotation)

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \text{Id}_n & 0 \\ \hline -\Sigma_{12}^t \Sigma_1^{-1} & \text{Id}_m \end{array} \right), \quad A^t = \left(\begin{array}{c|c} \text{Id}_n & -\Sigma_1^{-1} \Sigma_{12} \\ \hline 0 & \text{Id}_m \end{array} \right),$$

man beachte, dass $\Sigma_1 = \Sigma_1^t$ invertierbar ist, da Σ positiv definit ist. Hierbei bezeichnet Id_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Es gilt

$$A \Sigma A^t = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & \Pi \end{array} \right) \quad \text{mit } \Pi := \Sigma_2 - \Sigma_{12}^t \Sigma_1^{-1} \Sigma_{12}.$$

Mit Σ ist auch $A \Sigma A^t$ und daher auch Π positiv definit. Bezeichnet L_A wieder die Multiplikationsabbildung mit A , so folgt: $\pi \circ L_A = \pi$ und daher

$$\pi[\nu_\Sigma] = \pi[L_A[\nu_\Sigma]] = \pi[\nu_{A \Sigma A^t}] = \nu_{\Sigma_1},$$

wobei wir erst die Formel (55) und dann Übung 2.44 verwendet haben. □

Übung 2.46 (Dimensionsreduzierende lineare Transformation von Normalverteilungen) Es seien $m \leq n$ zwei natürliche Zahlen, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix vom Rang m und $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $L_A(x) = Ax$ die zugehörige Multiplikationsabbildung. Beweisen Sie $L_A[\nu_\Sigma] = \nu_{A \Sigma A^t}$.

Hinweis: Der Spezialfall $m = n$ ist Ihnen aus Beispiel 2.42 schon bekannt. Reduzieren Sie den allgemeinen Fall mit Hilfe von Lemma 2.45 auf diesen Spezialfall.

Übung 2.47 (Kovarianzen der multidimensionalen Normalverteilung) Zeigen Sie in der Situation von Übung 2.43 für $l, m \in \{1, \dots, n\}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_l x_m \nu_\Sigma(dx) = \Sigma_{l,m},$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ und $\Sigma_{l,m}$ den (l, m) -Eintrag der Matrix Σ bezeichnet.

Hinweis: Leiten Sie die Fouriertransformierte (56) der multidimensionalen Normalverteilung nach k_l und k_m ab.

***Übung 2.48 (Die Formel von Wick für Momente der multidimensionalen Normalverteilung)** Es sei $\Pi_{\leq 2}(m)$ die Menge aller Partitionen der Menge $\{1, \dots, m\}$ in 1- oder 2-elementige Mengen, und $\Pi_2(m)$ die Menge aller Partitionen von $\{1, \dots, m\}$ in genau

2-elementige Mengen. Zum Beispiel ist $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\} \in \Pi_{\leq 2}(4)$ und $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\} \in \Pi_2(4)$. Gegeben

$$\iota : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\},$$

$k \in \mathbb{R}^n$ und eine positiv definite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definieren wir für jede 1-elementige Teilmenge $I = \{j\} \subseteq \{1, \dots, m\}$:

$$\phi(I, \iota, k, \Sigma) := (\Sigma k)_{\iota(j)}$$

und für jede 2-elementige Teilmenge $I = \{l, m\} \subseteq \{1, \dots, m\}$:

$$\phi(I, \iota, k, \Sigma) := \Sigma_{l,m}.$$

1. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^m x_{\iota(j)} \right) e^{i\langle k, x \rangle} \nu_{\Sigma}(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2} k^t \Sigma k\right) \sum_{P \in \Pi_{\leq 2}(m)} \prod_{I \in P} \phi(I, \iota, k, \Sigma)$$

Hinweis: Leiten Sie die Fouriertransformierte (56) der multidimensionalen Normalverteilung nach $k_{\iota(1)}, \dots, k_{\iota(m)}$ ab.

2. Folgern Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^m x_{\iota(j)} \right) \nu_{\Sigma}(dx) = \sum_{P \in \Pi_2(m)} \prod_{I \in P} \phi(I, \iota, k, \Sigma)$$

Schreiben Sie diese Summe im Fall $m = 4$, also für

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_{\iota(1)} x_{\iota(2)} x_{\iota(3)} x_{\iota(4)} \nu_{\Sigma}(dx)$$

explizit aus.

3. Überlegen Sie sich, dass die Formeln für die Momente der Standardnormalverteilung aus Übung 1.155 als Spezialfall $n = 1$, $\Sigma = 1$ enthalten sind.

Die folgende Transformationsformel verallgemeinert die Substitutionsregel für Integrale aus der Analysis 1 auf höhere Dimensionen. Sie ist auch eine Verallgemeinerung der Transformationsformel für lineare Abbildungen.

Satz 2.49 (Transformationsformel) *Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen und λ_U bzw. λ_V die Einschränkung des Lebesguemaßes λ_n auf $\mathcal{B}(U)$ bzw. auf $\mathcal{B}(V)$. Weiter sei $f : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann besitzt das Bildmaß $f^{-1}[\lambda_V]$ des Lebesguemaßes λ_V unter der Umkehrabbildung $f^{-1} : V \rightarrow U$ die Dichte $|\det Df|$ bezüglich λ_U :*

$$\boxed{df^{-1}[\lambda_V] = |\det Df| d\lambda_U} \quad (57)$$

Insbesondere gilt für alle $g \in \overline{M}(V, \mathcal{B}(V))$:

$$\boxed{\int_V g(y) \lambda_V(dy) = \int_U g(f(x)) |\det Df(x)| \lambda_U(dx)} \quad (58) \quad \text{WICHTIG!}$$

wobei hiermit auch gemeint ist, dass das linke Integral genau dann existiert, wenn das rechte Integral existiert.

Als Merksregel kann man dies (etwas unpräziser) für die Transformation $y = f(x)$ auch in der Form

$$\lambda_n(dy) = \left| \det \frac{\partial y}{\partial x} \right| \lambda_n(dx)$$

schreiben, in Analogie zur stenographischen Notation der Substitutionsregel aus der Analysis 1:

$$dy = \frac{dy}{dx} dx.$$

Die Determinante $\det Df$ der Jacobimatrix Df wird *Jacobideterminante* genannt. Ihr Absolutbetrag $|\det Df(x)|$ wird also als das lokale Volumenverzerrungsverhältnis der Abbildung f bei x interpretiert.

Beweis der Transformationsformel: *Beweisidee:* Wir schreiben sowohl die linke Seite als auch die rechte Seite der Transformationsformel als ein Doppelintegral über $x \in U$ und $y \in V$, wobei nur Werte (x, y) beitragen sollen, die nahe beim Graphen $\{(x, y) \in U \times V \mid y = f(x)\}$ liegen, z.B.⁹ im Gebiet

$$\{(x, y) \in U \times V \mid f^{-1}(y) - x \in]0, \epsilon]^n\}.$$

In linearisierter Näherung ist dieses Gebiet für kleine $\epsilon > 0$ ungefähr dasselbe wie

$$\{(x, y) \in U \times V \mid y - f(x) \in Df(x) \cdot]0, \epsilon]^n\}.$$

Die Jacobideterminante tritt also als das linearisierte Volumenverzerrungsverhältnis zwischen x -Integration und y -Integration nahe beim Graphen auf.

Präziser: Es sei $E =]0, 1]^n$ der Einheitswürfel, $E^\circ =]0, 1[^n$ sein Inneres, und $\overline{E} = [0, 1]^n$ sein Abschluß. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $g = 1_{\tilde{V}}$ die Indikatorfunktion einer endlichen Vereinigung

$$\tilde{V} = \bigcup_{k=1}^m \prod_{j=1}^n [a_{j,k}, b_{j,k}] \subset V \quad (59)$$

von kompakten Quadern in V ist. Dann ist auch $K := f^{-1}[\tilde{V}]$ kompakt, da f^{-1} stetig ist. Zudem ist der Rand $\partial K = f^{-1}[\partial \tilde{V}]$ von K eine λ_n -Nullmenge, denn er ist aus endlich

⁹Andere Wahlen oder auch Testfunktionen statt der Spatgebiete wären auch möglich. Die hier vorgestellte Wahl des Integrationsbereichs soll geometrisch möglichst anschaulich sein.

vielen Stücken von C^1 -Hyperflächen (= 1-kodimensionalen C^1 -Untermannigfaltigkeiten) zusammengesetzt, die nach Übung 2.26 Nullmengen sind.

Wir setzen $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort. Wir wählen nun $\epsilon_0 > 0$ so klein, dass $K - \epsilon_0 \bar{E} + \epsilon_0 \bar{E} \subseteq U$ gilt; dies ist möglich, da die abgeschlossene Menge $\mathbb{R}^n \setminus U$ positiven Abstand von der kompakten Menge K hat. Wir setzen $\tilde{U} := K - \epsilon_0 \bar{E}$. Wegen der Kompaktheit von K und von $\bar{E}$ ist auch $\tilde{U} \subseteq U$ kompakt.

Wir schreiben nun die linke Seite in der Transformationsformel (58) als Doppelintegral:

$$\int_V g(y) \lambda_V(dy) = \int_{\tilde{V}} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} 1_E(t) \lambda_n(dt) \lambda_n(dy)$$

Gegeben $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, führen wir nun der Reihe nach folgende Transformationen aus:

$$\begin{aligned} (y, t) &\mapsto (y, x) \text{ mit } x = f^{-1}(y) - \epsilon t, \text{ also } y = f(x + \epsilon t) \\ (y, x) &\mapsto (s, x) \text{ mit } s = \epsilon^{-1}(y - f(x)), \text{ also } y = f(x) + \epsilon s \end{aligned}$$

Man beachte insbesondere $x \in \tilde{U}$ für $y \in \tilde{V}$, $t \in \bar{E}$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{V}} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} 1_E(t) \lambda_n(dt) \lambda_n(dy) \\ &= \epsilon^{-n} \int_{\tilde{V}} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} 1_{f^{-1}(y) - \epsilon E}(x) \lambda_n(dx) \lambda_n(dy) \text{ (wg. Skalierung)} \\ &= \epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\tilde{U}} 1_{f[x + \epsilon E]}(y) \lambda_n(dx) \lambda_n(dy) \\ &= \epsilon^{-n} \int_{\tilde{U}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) 1_{f[x + \epsilon E]}(y) \lambda_n(dy) \lambda_n(dx) \text{ (mit dem Satz von Fubini)} \\ &= \int_{\tilde{U}} \int_{\mathbb{R}^n} g(f(x) + \epsilon s) 1_{\epsilon^{-1}(f[x + \epsilon E] - f(x))}(s) \lambda_n(ds) \lambda_n(dx) \text{ (wg. Skalierung)} \quad (60) \end{aligned}$$

Im letzten Integral wollen wir nun mit dem Satz von der dominierten Konvergenz den Limes $\epsilon \downarrow 0$ bilden. Hierzu untersuchen wir zunächst Konvergenz fast überall des Integranden: Wir haben

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} g(f(x) + \epsilon s) = g(f(x))$$

für alle $s \in \mathbb{R}^n$ und λ_n -fast alle $x \in \tilde{U}$; genauer gesagt gilt dies für x außerhalb der Nullmenge ∂K . Weiter gilt

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} 1_{\epsilon^{-1}(f[x + \epsilon E] - f(x))}(s) = 1_{Df(x) \cdot E}(s)$$

für alle $x \in \tilde{U}$ und λ_n -fast alle $s \in \mathbb{R}^n$; genauer gesagt gilt dies für alle s ausserhalb der Nullmenge $\partial(Df(x) \cdot E) = Df(x) \cdot \partial E$.

Beweis hierzu: Wir zerlegen das Komplement des Spatrandes in zwei Teile:

$$\mathbb{R}^n \setminus \partial(Df(x) \cdot E) = \underbrace{Df(x) \cdot E^\circ}_{\text{Inneres}} \cup \underbrace{Df(x) \cdot (\mathbb{R}^n \setminus \bar{E})}_{\text{Äußeres}}.$$

Gegeben beliebige $x \in \tilde{U}$ und $s = Df(x) \cdot t \in Df(x) \cdot E^\circ$, folgt

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^{-1} [f^{-1}(f(x) + \epsilon s) - x] = Df(x)^{-1} s = t \in E^\circ$$

wegen $D(f^{-1})(f(x)) = Df(x)^{-1}$, und daher $\epsilon^{-1} [f^{-1}(f(x) + \epsilon s) - x] \in E^\circ$ für alle genügend kleinen $\epsilon > 0$. In diesem Fall folgt

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} 1_{\epsilon^{-1}(f[x+\epsilon E]-f(x))}(s) = 1 = 1_{Df(x) \cdot E}(s).$$

Ist andererseits $s = Df(x) \cdot t \in Df(x) \cdot (\mathbb{R}^n \setminus \overline{E})$, so folgt ebenso

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^{-1} [f^{-1}(f(x) + \epsilon s) - x] = Df(x)^{-1} s = t \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$$

und daher

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} 1_{\epsilon^{-1}(f[x+\epsilon E]-f(x))}(s) = 0 = 1_{Df(x) \cdot E}(s).$$

Damit ist

$$g(f(x) + \epsilon s) 1_{\epsilon^{-1}(f[x+\epsilon E]-f(x))}(s) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} g(f(x)) 1_{Df(x) \cdot E}(s)$$

für $\lambda_n \otimes \lambda_n$ -fast alle $(s, x) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$ gezeigt.

Zur Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz brauchen wir auch noch eine Majorante des Integranden rechts in (60): Für alle $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, $x \in \tilde{U}$ und $s \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) + \epsilon s \in \tilde{V}$ und $s \in \epsilon^{-1}(f[x + \epsilon E] - f(x))$ gilt $f(x) + \epsilon s \in f[x + \epsilon E]$. Nun ist (mit einer beliebigen Norm auf $\mathbb{R}^n$)

$$\{\|\epsilon^{-1}(f(x + \epsilon t) - f(x))\| \mid x \in \tilde{U}, t \in E\}$$

beschränkt durch das Maximum der Werte der zugehörigen Matrixnormen

$$\max\{\|Df(z)\| \mid z \in \tilde{U} + \epsilon_0 \overline{E}\} < \infty;$$

wir verwenden hier, dass $\tilde{U} + \epsilon_0 \overline{E} \subseteq U$ kompakt ist. Der Integrand rechts in (60) verschwindet also für (x, s) außerhalb einer kompakten Menge und ist beschränkt durch 1.

Der Satz von der dominierten Konvergenz liefert nun

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{U}} \int_{\mathbb{R}^n} g(f(x) + \epsilon s) 1_{\epsilon^{-1}(f[x+\epsilon E]-f(x))}(s) \lambda_n(ds) \lambda_n(dx) \\ & \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} \int_{\tilde{U}} \int_{\mathbb{R}^n} g(f(x)) 1_{Df(x) \cdot E}(s) \lambda_n(ds) \lambda_n(dx) \\ & = \int_U \int_{\mathbb{R}^n} g(f(x)) 1_{Df(x) \cdot E}(s) \lambda_n(ds) \lambda_n(dx) \\ & = \int_U g(f(x)) \lambda_n(Df(x) \cdot E) \lambda_n(dx) \\ & = \int_U g(f(x)) |\det Df(x)| \lambda_n(dx), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Spatvolumenformel (52) verwendet haben. Zusammen folgt die Behauptung (58) im Fall von Indikatorfunktionen $g = 1_{\tilde{V}}$ endlicher Vereinigungen kompakter Quader wie in (59). Nun ist das Mengensystem $\mathcal{Q}$ aller dieser endlichen Vereinigungen von Quadern ein $\cap$ -stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(V)$ (Übung). Das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{B}(V) \mid \text{Behauptung (58) gilt für alle } g = 1_{A \cap \tilde{V}}, \tilde{V} \in \mathcal{Q}\} \quad (61)$$

ist nun ein Dynkinsystem (Übung). Aus dem Dynkin-Lemma folgt $\mathcal{B}(V) \subseteq \mathcal{D}$. Nun gibt es eine aufsteigende Folge $\tilde{V}_j \uparrow V$ in $\mathcal{Q}$. Für alle $A \in \mathcal{B}(V)$ gilt also $1_{A \cap \tilde{V}_j} \uparrow 1_A$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz vererbt sich die Gültigkeit der Behauptung (58) für alle $g = 1_{A \cap \tilde{V}_j}$ auch auf alle $g = 1_A$. Damit ist die Behauptung (58) für Indikatorfunktionen, also die Behauptung (57), gezeigt. Die Behauptung (58) in allen noch verbleibenden Fällen folgt nun mit dem Satz 1.128 zur Integration bezüglich des Bildmaßes. □

‘**Übung 2.50** Zeigen Sie, dass das Mengensystem (61) ein Dynkinsystem bildet.

Übung 2.51 Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass das Mengensystem aller endlichen Vereinigungen kompakter Quader in V einen $\cap$ -stabilen Erzeuger von $\mathcal{B}(V)$ bildet.

Beispiel 2.52 (Beziehung zwischen Gamma- und Betafunktion) Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$f : \mathbb{R}^+ \times]0, 1[\rightarrow (\mathbb{R}^+)^2, \quad f(s, t) = (st, s(1-t))$$

und für gegebene $a, b > 0$ die Funktion

$$g : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^{a-1} y^{b-1} e^{-x-y}.$$

Die Funktion f besitzt die Jacobimatrix

$$Df(s, t) = \begin{pmatrix} t & s \\ 1-t & -s \end{pmatrix}$$

mit der Jacobideterminante

$$\det Df(s, t) = -s.$$

Nach der Transformationsformel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \int_0^\infty y^{b-1} e^{-y} dy \\
&= \int_{(\mathbb{R}^+)^2} x^{a-1} y^{b-1} e^{-x-y} \lambda_2(d(x, y)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^+ \times]0, 1[} (st)^{a-1} (s(1-t))^{b-1} e^{-st-s(1-t)} s \lambda_2(d(s, t)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^+ \times]0, 1[} s^{a+b-1} e^{-s} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \lambda_2(d(s, t)) \\
&= \int_0^\infty s^{a+b-1} e^{-s} ds \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \\
&= \Gamma(a+b) B(a, b)
\end{aligned}$$

mit der Betafunktion

$$B : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

Damit erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen Gamma- und Betafunktion:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Beispiel 2.53 (Gaußsches Integral – Variante der Herleitung) Wir rechnen das Gaußsche Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2} \lambda_2(dz)$$

mit der Transformationsformel in Polarkoordinaten um. Hierzu betrachten wir den Diffeomorphismus

$$f : \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_0^+ \times \{0\}, \quad f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Er besitzt die Jacobideterminante

$$\det Df(r, \phi) = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = r.$$

Wir erhalten mit der Abkürzung $dx dy = \lambda_2(d(x, y))$, da die Halbgerade $\mathbb{R}_0^+ \times \{0\}$ eine

λ_2 -Nullmenge ist:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_0^+ \times \{0\}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = 2\pi \int_0^\infty e^{-t} dt = 2\pi,
\end{aligned}$$

wobei wir $t = r^2/2$, $dt = r dr$ gesetzt haben. Es folgt das bekannte Ergebnis:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Übung 2.54 (Volumentransformation mit der Riemannschen Metrik) Es seien $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Weiter sei $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $g(x) = Df(x)^t Df(x)$. (Man nennt g die mit f zurückgezogene Riemannsche Metrik zum euklidischen Skalarprodukt.) Zeigen Sie:

$$\lambda_n(V) = \int_U \sqrt{\det g} d\lambda_n$$

Übung 2.55 (Integration in Kugelkoordinaten) 1. Zeigen Sie für alle $f \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f d\lambda_3 = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$$

2. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \frac{e^{-\|x\|_2}}{\|x\|_2} \lambda_3(dx)$$

***Übung 2.56 (Das normierte Oberflächenmaß auf der Einheitssphäre)** Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\nu_{n+1}(dx) = (2\pi)^{-(n+1)/2} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2} \lambda_{n+1}(dx), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

die $n+1$ -dimensionale Standardnormalverteilung, eingeschränkt auf $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}))$. Weiter sei $N : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$, $N(x) = x/\|x\|_2$, die Normierungsabbildung auf die n -Sphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}.$$

Das normierte Oberflächenmaß auf $(S^n, \mathcal{B}(S^n))$ wird definiert als das Bildmaß $\Omega_n := N[\nu_{n+1}]$.

1. Berechnen Sie die Dichte $d\pi[\Omega_n]/d\lambda_n$ des Bildmaßes von Ω_n unter der Projektion $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.
2. Zeigen Sie für alle $f \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f d\lambda_{n+1} = \frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \int_0^\infty \int_{S^n} f(rx) \Omega_n(dx) r^n dr \quad (62)$$

Hinweis: Lassen Sie sich von der Herleitung des $n+1$ -dimensionalen Kugelvolumens inspirieren. Man nennt den Vorfaktor $\frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} = (n+1)\lambda_{n+1}(B_{n+1})$ auch die *Oberfläche* der Einheitssphäre S^n .

Übung 2.57 (Die Chi-Quadrat-Verteilung) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\nu_n(dx) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2} \lambda_n(dx), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

die n -dimensionale Standardnormalverteilung. Die Chi-Quadrat-Verteilung χ_n^2 mit n Freiheitsgraden wird definiert als das Bildmaß $\chi_n^2 := q[\nu_n]$ von ν_n unter der Norm-Quadrat-Abbildung $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $q(x) = \|x\|_2^2$. Zeigen Sie:

$$\chi_n^2(dt) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2} dt, \quad t \geq 0.$$

Übung 2.58 (vom Ortsvektor in Polarkoordinaten überstrichene Fläche) Für gegebenes $f \in \overline{M}_+([0, 2\pi[, \mathcal{B}([0, 2\pi[))$ definieren wir die Menge

$$M = \{(r \cos \phi, r \sin \phi) \mid 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq r < f(\phi)\}.$$

Zeigen Sie:

$$\lambda_2(M) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\phi)^2 d\phi.$$

Dies gibt der in der Analysis 1 heuristisch-anschaulich begründeten Formel für die vom Ortsvektor in Polarkoordinaten überstrichene Fläche einen rigorosen Sinn.

2.4 Die Faltung

Definition 2.59 (Faltung von Maßen) Es seien μ und ν zwei σ -endliche Maße oder auch zwei signierte Maße¹⁰ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Das Bildmaß

$$\mu * \nu := +[\mu \otimes \nu]$$

des Produktmaßes $\mu \otimes \nu$ unter der Additionsabbildung $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x + y$ wird *Faltung* (engl. *convolution*) von μ mit ν genannt.

¹⁰Das signierte Produktmaß zweier solcher signierter Maße wird natürlich durch $\mu \otimes \nu := \mu_+ \otimes \nu_+ - \mu_+ \otimes \nu_- - \mu_- \otimes \nu_+ + \mu_- \otimes \nu_-$ definiert.

Übung 2.60 Es sei $\mu = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Berechnen Sie $\mu * \mu$. Zeichnen Sie den Graphen von $a \mapsto \mu * \mu(\{a\})$, $a \in \mathbb{Z}$, und veranschaulichen Sie sich seine Entstehung an Hand einer Graphik des Quadrats $\{0, 1, 2\}^2$.

Lemma 2.61 (Faltung von Dichten) Sind μ und ν zwei σ -endliche Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit Dichten $f = d\mu/d\lambda_n$ und $g = d\nu/d\lambda_n$ λ_n -f.ü., so besitzt die Faltung $\mu * \nu$ die Dichte

$$f * g = \frac{d(\mu * \nu)}{d\lambda_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty],$$

$$f * g(z) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(z-x) \lambda_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z-y)g(y) \lambda_n(dy)$$

Die durch diese Formel gegebene Abbildung $f * g \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ wird ebenfalls die Faltung der beiden Funktionen $f, g \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ genannt.

Beweis: Nach Übung 2.30 besitzt $\mu \otimes \nu$ die Dichte $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$, $F(x, y) = f(x)g(y)$ bezüglich $\lambda_n \otimes \lambda_n$. Wir betrachten die lineare Transformation $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $T(x, y) = (x, x + y)$; sie besitzt die Inverse $T^{-1}(x, z) = (x, z - x)$ und die Determinante $\det T = 1$. Nach der Transformationsformel für lineare Abbildungen besitzt das Bildmaß $T[\mu \otimes \nu]$ die Dichte

$$F \circ T^{-1} : (x, z) \mapsto f(x)g(z-x)$$

bezüglich $\lambda_{2n} = \lambda_n \otimes \lambda_n$. Nun sei $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x, z) = z$ die zweite kanonische Projektion; insbesondere ist $+$ $= \pi \circ T$ die Additionsabbildung. Die Faltung

$$\mu * \nu = +[\mu \otimes \nu] = \pi[T[\mu \otimes \nu]]$$

besitzt nach Übung 2.27 dann die (f.ü. eindeutige) Dichte

$$\mathbb{R}^n \ni z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dT[\mu \otimes \nu]}{d(\lambda_n \otimes \lambda_n)}(x, z) \lambda_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(z-x) \lambda_n(dx).$$

Die zweite Formel für die Faltung von Dichten folgt analog, wenn man statt der Transformation T die Transformation $(x, y) \mapsto (z, y) = (x + y, y)$ betrachtet. □

Übung 2.62 (Faltung einer Dichte mit einem Maß) Es seien μ und ν zwei σ -endliche Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Das Maß ν besitze eine Dichte $g = d\nu/d\lambda_n$. Beweisen Sie

$$\frac{d(\mu * \nu)}{d\lambda_n}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} g(z-x) \mu(dx) \quad \text{für } \lambda_n\text{-fast alle } z \in \mathbb{R}^n.$$

Analoges gilt auch für signierte Maße μ, ν . Wir setzen

$$g * \mu(z) = \mu * g(z) := \int_{\mathbb{R}^n} g(z-x) \mu(dx).$$

für alle Stellen $z \in \mathbb{R}^n$, für die dieses Integral existiert.

Übung 2.63 (Rechenregeln für die Faltung) Es seien μ, ν, κ drei endliche Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Zeigen Sie:

1. *Kommutativgesetz:* $\mu * \nu = \nu * \mu$,
2. *Assoziativgesetz:* $\mu * (\nu * \kappa) = (\mu * \nu) * \kappa$,
3. *Distributivgesetz:* $\mu * (\nu + \kappa) = \mu * \nu + \mu * \kappa$.

Lemma 2.64 (Faltung multidimensionaler Normalverteilungen) Es seien $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei positiv definite Matrizen und $\nu_{\Sigma_1}, \nu_{\Sigma_2} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ die zugehörigen multidimensionalen zentrierten Normalverteilungen. Dann gilt:

$$\boxed{\nu_{\Sigma_1} * \nu_{\Sigma_2} = \nu_{\Sigma_1 + \Sigma_2}} \quad (63)$$

Die Faltung von Normalverteilungen ergibt also wieder eine Normalverteilung, und es addieren sich die zugehörigen Kovarianzmatrizen.

Beweis: Es gilt nach Übung 2.44: $\nu_{\Sigma_1} \otimes \nu_{\Sigma_2} = \nu_{\Sigma}$ mit

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(2n) \times (2n)}.$$

Es sei (in $n \times n$ -Blockmatrixnotation)

$$A = \left(\text{Id}_n \mid \text{Id}_n \right) \in \mathbb{R}^{n \times (2n)}.$$

Diese Matrix hat den Rang n . Multiplikation mit A ist die Additionsabbildung

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$

Mit Übung 2.46 und $A\Sigma A^t = \Sigma_1 + \Sigma_2$ folgt die Behauptung:

$$\nu_{\Sigma_1} * \nu_{\Sigma_2} = +[\nu_{\Sigma_1} \otimes \nu_{\Sigma_2}] = +[\nu_{\Sigma}] = \nu_{A\Sigma A^t} = \nu_{\Sigma_1 + \Sigma_2}.$$

□

Übung 2.65 Beweisen Sie Lemma 2.64 noch einmal im Spezialfall $n = 1$ durch direkte Rechnung mit der Faltungsformel für Dichten. Zeigen Sie also für alle $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ und $z \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

Vergleichen Sie Ihre Rechnung mit den verschiedenen Schritten im Beweis von Lemma 2.64 und dessen Zutat Beispiel 2.42, Übung 2.44, Lemma 2.45 und Übung 2.46 im Spezialfall $n = 1$.

Hinweis: Quadratische Ergänzung im Exponenten.

Lemma 2.66 (Faltung $\xrightarrow{\text{Fourier}}$ Produkt) Es seien μ, ν zwei endliche Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ und $\hat{\mu}, \hat{\nu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ deren Fouriertransformierte,

$$\hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \mu(dx).$$

Dann gilt:

$$\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{\nu}$$

Analoges gilt für signierte Maße μ, ν .

Beweis Wir beweisen das für endliche Maße; für signierte Maße folgt es hieraus mit der Hahn-Zerlegung. Es gilt für $k \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu * \nu}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, z \rangle} (\mu * \nu)(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x+y \rangle} (\mu \otimes \nu)(dx dy) \quad (\text{mit der Integrationsformel bezüglich des Bildmaßes}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} e^{i\langle k, y \rangle} \mu(dx) \nu(dy) \quad (\text{mit Fubini, } \mu(\mathbb{R}^n)\nu(\mathbb{R}^n) < \infty \text{ und } |e^{i\langle k, x+y \rangle}| = 1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \mu(dx) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, y \rangle} \nu(dy) \\ &= \hat{\mu}(k) \hat{\nu}(k) \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.67 (Faltung und Fouriertransformation bei Normalverteilungen) Sind $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei positiv definite Matrizen und $\nu_{\Sigma_1}, \nu_{\Sigma_2}$ die zugehörigen multidimensionalen zentrierten Normalverteilungen, so gilt nach Übung 2.43 für die dazugehörigen Fouriertransformierten an beliebiger Stelle $k \in \mathbb{R}^n$:

$$\widehat{\nu_{\Sigma_1} * \nu_{\Sigma_2}}(k) = \hat{\nu}_{\Sigma_1}(k) \hat{\nu}_{\Sigma_2}(k) = e^{-\frac{1}{2}k^t \Sigma_1 k} e^{-\frac{1}{2}k^t \Sigma_2 k} = e^{-\frac{1}{2}k^t (\Sigma_1 + \Sigma_2) k} = \hat{\nu}_{\Sigma_1 + \Sigma_2}(k)$$

Beispiel 2.68 (Wärmeleitungskern und Wärmeleitungshalbgruppe) Für $n \in \mathbb{N}$ und $t > 0$ nennen wir

$$K_t(x) := (2\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}} = \frac{d\nu_t \text{Id}_n}{d\lambda_n}(x) \text{ f.ü.}$$

den n -dimensionalen Wärmeleitungskern zur Zeit t . Er besitzt die Fouriertransformierte

$$\hat{K}_t(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} K_t(x) \lambda_n(dx) = e^{-t\|k\|^2/2}, \quad k \in \mathbb{R}^n,$$

und die Halbgruppeneigenschaft

$$K_s * K_t = K_{s+t}$$

für $s, t > 0$. Die Lösung f der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta f$$

zu den “Anfangsdaten” $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ aus Übung 1.152 können damit in der Form

$$f(\cdot, t) = g * K_t$$

schreiben; sie besitzt ebenfalls die Halbgruppeneigenschaft

$$f(\cdot, s+t) = f(\cdot, s) * K_t$$

für $s, t > 0$. Für die Fouriertransformierten

$$\begin{aligned}\hat{f}(k, t) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} f(x, t) \lambda_n(dx), \\ \hat{g}(k) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} g(x) \lambda_n(dx), \quad k \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

erhalten wir die einfache Multiplikation

$$\hat{f}(k, t) = e^{-t\|k\|^2/2} \hat{g}(k).$$

Übung 2.69 (Rechteck*Rechteck=Dreieck) 1. Zeigen Sie:

$$\frac{1_{[-1,1]}}{2} * \frac{1_{[-1,1]}}{2} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{2}(1 - |x/2|)_+ \quad (64)$$

Veranschaulichen Sie sich diese Formel graphisch.

2. Beweisen Sie

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} (1 - |x/2|)_+ dx = \begin{cases} \frac{\sin^2 k}{k^2} & \text{für } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

auf zwei verschiedene Weisen:

- (a) direkt mit Techniken aus der Analysis 1,
- (b) mit der Faltungsformel (64) und Lemma 2.66.

Übung 2.70 (Faltungseigenschaft der Chi-Quadrat-Verteilung) Zeigen Sie

$$\chi_m^2 * \chi_n^2 = \chi_{m+n}^2$$

für $m, n \in \mathbb{N}$.

Übung 2.71 (Die Cauchyverteilung) Die Cauchyverteilung Cau_a zum Parameter $a > 0$ ist das durch

$$\text{Cau}_a(dx) = \frac{1}{\pi} \frac{a \, dx}{a^2 + x^2}$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. **(Skalierungseigenschaft)** Für $t > 0$ sei $m_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m_t(x) = tx$ die Multiplikation mit t . Zeigen Sie für $a, t > 0$:

$$m_t[\text{Cau}_a] = \text{Cau}_{ta}$$

- *2. **(Faltungseigenschaft)** Beweisen Sie für $a, b > 0$:

$$\text{Cau}_a * \text{Cau}_b = \text{Cau}_{a+b}$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

2.5 Alternierende Multilinearformen

Für eine Integrationstheorie auf “niedrigerdimensionalen Objekten” im $\mathbb{R}^n$, z.B. auf Untermannigfaltigkeiten, brauchen wir “niedrigdimensionale Verwandte” der Determinante, die ja als Jacobideterminante in der Transformationsformel auftritt. Hierzu führen wir alternierende Differentialformen ein; das sind Verallgemeinerungen von 1-Formen auf höhere Grade. Hierzu verallgemeinern wir den Linearformbegriff zunächst rein algebraisch. Obwohl wir fast ausschließlich am Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ interessiert sind, entwickeln wir die algebraische Theorie über einem beliebigen Körper¹¹ $\mathbb{K}$ der Charakteristik $\text{char } \mathbb{K} = 0$, d.h. $n \cdot 1 \neq 0$ in $\mathbb{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.72 (Alternierende Multilinearformen) Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine *alternierende Multilinearform* vom Grad $p \in \mathbb{N}$ auf V ist eine multilineare Abbildung

$$\omega : V^p \rightarrow \mathbb{K},$$

d.h. ω ist in jedem der p Argumente eine Linearform, mit folgender Eigenschaft: Für jede Permutation σ von $1, \dots, p$ und alle $v_1, \dots, v_p \in V$ gilt

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \text{sign}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_p).$$

Den $\mathbb{K}$ -Untervektorraum von $\mathbb{K}^{V^p}$ aller alternierenden Multilinearformen vom Grad $p \in \mathbb{N}$ auf V bezeichnen wir mit $\bigwedge^p V'$. Er wird p -tes *äußeres Produkt* von V' genannt (Synonyme: *Dachprodukt*, *Grassmannprodukt*). Formal setzen wir noch¹² $\bigwedge^0 V' := \mathbb{K}$.

¹¹Die meisten Formeln in diesem Abschnitt gelten sogar über beliebigen Körpern. Nur gelegentlich brauchen wir $\text{char } \mathbb{K} = 0$, z.B. bei der Division durch $p!$, $p \in \mathbb{N}$.

¹²Wer will, kann $\mathbb{K}$ als die Menge aller Abbildungen $\mathbb{K}^{V^0} = \mathbb{K}^{\{0\}}$ mit der leeren Klammer $()$ auffassen.

Beispiel 2.73 (Determinante und Dachprodukt von Linearformen) 1. $\bigwedge^1 V' = V'$ ist der Dualraum von V .

2. Die Determinante $\det : (\mathbb{K}^n)^n \rightarrow \mathbb{K}$ ist eine alternierende Multilinearform vom Grad n . In der linearen Algebra wird gezeigt: Jede alternierende Multilinearform vom Grad n auf $\mathbb{K}^n$ ist ein Vielfaches der Determinante. Das bedeutet:

$$\bigwedge^n (\mathbb{K}^n)' = \{\alpha \det \mid \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

3. Sind $\omega_1, \dots, \omega_p \in V'$ Linearformen auf V , so ist die Abbildung

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p : V^p \rightarrow \mathbb{K}, \quad \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p(v_1, \dots, v_p) := \det(\omega_i(v_j))_{i,j=1,\dots,p}$$

eine alternierende Multilinearform. Sie wird das *Dachprodukt* von $\omega_1, \dots, \omega_p$ genannt. Insbesondere gilt für jede Permutation σ von $1, \dots, p$:

$$\omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(p)} = \text{sign}(\sigma) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p.$$

Lemma 2.74 (Basis des Dachprodukts) Ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $\omega_1, \dots, \omega_n$ die zugehörige Dualbasis von V' , also

$$\omega_i(b_j) = \delta_{ij}$$

für $i, j = 1, \dots, n$, so bildet

$$(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p})_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$$

eine Basis von $\bigwedge^p V'$. Insbesondere gilt

$$\dim \bigwedge^p V' = \binom{n}{p}$$

für alle¹³ $p \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere bedeutet das

$$\bigwedge^p V' = \{0\} \quad \text{für } p > n.$$

Beweis: Lineare Unabhängigkeit: Es seien $\alpha_{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{K}$ mit

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} = 0.$$

Dann folgt für alle $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$:

$$0 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}(b_{j_1}, \dots, b_{j_p}) = \alpha_{j_1 \dots j_p},$$

¹³Das leere Dachprodukt für $p = 0$ wird als $1 \in \mathbb{K}$ definiert.

denn für solche $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ gilt

$$\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}(b_{j_1}, \dots, b_{j_p}) = \det(\omega_{i_k}(b_{j_l}))_{k,l=1,\dots,p} = \det(\delta_{i_k, j_l})_{k,l=1,\dots,p} = 1_{\{(i_1, \dots, i_p) = (j_1, \dots, j_p)\}}.$$

Erzeugendensystem: Es sei $\varphi \in \bigwedge^p V'$ gegeben. Wir setzen für $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$:

$$\alpha_{i_1 \dots i_p} := \varphi(b_{i_1}, \dots, b_{i_p}).$$

Dann gilt

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}.$$

Dies sieht man so: Es seien $v_1, \dots, v_p \in V$ gegeben. Dann haben wir für alle $j = 1, \dots, p$ die Basisdarstellung

$$v_j = \sum_{i=1}^n \beta_{ji} b_i \quad \text{mit} \quad \beta_{ji} = \omega_i(v_j).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, \dots, v_p) &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \left(\prod_{j=1}^p \beta_{ji_j} \right) \varphi(b_{i_1}, \dots, b_{i_p}) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ \text{alle verschieden}}} \left(\prod_{j=1}^p \beta_{ji_j} \right) \varphi(b_{i_1}, \dots, b_{i_p}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \det(\beta_{ji_k})_{j,k=1,\dots,p} \varphi(b_{i_1}, \dots, b_{i_p}) \quad (\text{mit der Def. der Det., da } \varphi \text{ alternierend}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}(v_1, \dots, v_p), \end{aligned}$$

wobei wir die Definition der Determinante als alternierende Summe über Permutationen verwendet haben. Es folgt die Behauptung. □

Beispiel 2.75 Ist $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ eine Basis von $(\mathbb{R}^3)'$, so ist $\omega_1 \wedge \omega_2, \omega_2 \wedge \omega_3, \omega_1 \wedge \omega_3$ eine Basis von $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)'$, ebenso auch $\omega_1 \wedge \omega_2, \omega_2 \wedge \omega_3, \omega_3 \wedge \omega_1$ wegen $\omega_1 \wedge \omega_3 = -\omega_3 \wedge \omega_1$.

Das Dachprodukt von Linearformen wird in natürlicher Weise zu einem Dachprodukt zwischen alternierenden Multilinearformen erweitert:

Definition 2.76 (Dachprodukt alternierender Multilinearformen) Für $p, q \in \mathbb{N}_0$ sei $S(p, q)$ die Menge aller Permutationen (= Bijektionen) $\sigma : \{1, \dots, p+q\} \rightarrow \{1, \dots, p+q\}$ mit $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p)$ und $\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \dots < \sigma(p+q)$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \wedge : \bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' &\rightarrow \bigwedge^{p+q} V', \\ \omega \wedge \chi(v_1, \dots, v_{p+q}) &:= \sum_{\sigma \in S(p, q)} \text{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \chi(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

für $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$.

Wegen $\text{char } \mathbb{K} = 0$ und da ω und χ alternieren, können wir das auch in der Form

$$\omega \wedge \chi(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \chi(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \quad (65)$$

schreiben, wobei S_{p+q} die Menge aller Permutationen $\sigma : \{1, \dots, p+q\} \rightarrow \{1, \dots, p+q\}$ (ohne Nebenbedingungen) bezeichnet. Man beachte, dass alle $p!q!$ Summanden mit gleichem $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p)\}$ und gleichem $\{\sigma(p+1), \sigma(p+2), \dots, \sigma(p+q)\}$ den gleichen Betrag liefern. Offensichtlich ist das Dachprodukt $\wedge : \bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \rightarrow \bigwedge^{p+q} V'$ bilinear, und aus der Darstellung (65) folgt auch, dass es alternierend ist. Weiter gilt für alle $\omega_1, \dots, \omega_{p+q} \in V'$:

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \wedge (\omega_{p+1} \wedge \dots \wedge \omega_{p+q}) = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{p+q}, \quad (66)$$

wobei hier in den Klammern und auf der rechten Seite das “alte” Dachprodukt aus Definition 2.72 gemeint ist, in der Mitte der linken Seite jedoch das “neue” Dachprodukt aus Definition 2.76. Zum Beweis der Formel (66) setzen wir

$$\tilde{S}(p, q) = \{\sigma \in S(p+q) \mid \sigma[\{1, \dots, p\}] = \{1, \dots, p\}, \sigma[\{p+1, \dots, p+q\}] = \{p+1, \dots, p+q\}\}.$$

Unter Verwendung der Bijektion $S(p, q) \times \tilde{S}(p, q) \rightarrow S_{p+q}$, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau$ berechnen wir für $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$:

$$\begin{aligned} & (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \wedge (\omega_{p+1} \wedge \dots \wedge \omega_{p+q})(v_1, \dots, v_{p+q}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(p, q)} \text{sign}(\sigma) \det(\omega_i(v_{\sigma(j)}))_{i,j=1,\dots,p} \det(\omega_{p+i}(v_{\sigma(p+j)}))_{i,j=1,\dots,q} \\ &= \sum_{\sigma \in S(p, q)} \sum_{\tau \in \tilde{S}(p, q)} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) \left(\prod_{i=1}^p \omega_i(v_{\sigma(\tau(i))}) \right) \left(\prod_{i=1}^q \omega_{p+i}(v_{\sigma(\tau(p+i))}) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{p+q} \omega_i(v_{\sigma(i)}) \\ &= \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{p+q}(v_1, \dots, v_{p+q}). \end{aligned}$$

Fassen wir die wichtigsten Rechenregeln für das Dachprodukt zusammen:

Lemma 2.77 (Rechenregeln für das Dachprodukt) Es gilt für $\omega, \tilde{\omega} \in \bigwedge^p V'$, $\chi, \tilde{\chi} \in \bigwedge^q V'$ und $\varphi \in \bigwedge^r V'$ mit $p, q, r \in \mathbb{N}_0$:

1. *Bilinearität:*

$$\begin{aligned} (\omega + \tilde{\omega}) \wedge \chi &= \omega \wedge \chi + \tilde{\omega} \wedge \chi, \\ \omega \wedge (\chi + \tilde{\chi}) &= \omega \wedge \chi + \omega \wedge \tilde{\chi} \\ (a\omega) \wedge \chi &= \omega \wedge (a\chi) = a(\omega \wedge \chi) \quad \text{für } a \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

2. *Assoziativität*: $(\omega \wedge \chi) \wedge \varphi = \omega \wedge (\chi \wedge \varphi)$

3. *Antikommutativität*: $\omega \wedge \chi = (-1)^{pq} \chi \wedge \omega$

Beweis: Die Bilinearität ist unmittelbar klar nach der Definition des Dachprodukts. Es genügt wegen der Bilinearität, das Assoziativgesetz und das Antikommutativgesetz auf der Basis des Dachprodukts aus Lemma 2.74 nachzurechnen. In der Tat gilt für $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_{p+q+r}} \in V'$:

$$\begin{aligned} & ((\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}) \wedge (\omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{p+q}})) \wedge (\omega_{i_{p+q+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{p+q+r}}) \\ &= \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{p+q+r}} \\ &= (\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}) \wedge ((\omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{p+q}}) \wedge (\omega_{i_{p+q+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{p+q+r}})) \end{aligned}$$

und

$$(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}) \wedge (\omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{p+q}}) = \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{p+q}} = (-1)^{pq} \omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{p+q}} \wedge \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p};$$

man beachte hierbei, dass die Permutation, die $(1, \dots, p, p+1, \dots, p+q)$ in $(p+1, \dots, p+q, 1, \dots, p)$ umordnet, das Signum $(-1)^{pq}$ besitzt, denn mit pq Transpositionen, die zwei benachbarte Einträge miteinander vertauschen, kann diese Umordnung vorgenommen werden.

□

Bemerkung 2.78 (Grassmannalgebra) Manchmal fasst man allen p -ten Dachprodukte mittels direkter Summe zu einem einzigen Raum

$$\bigwedge V' := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}_0} \bigwedge^p V' = \bigoplus_{p=0}^{\dim V} \bigwedge^p V'$$

zusammen. Das Dachprodukt $\wedge : \bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \rightarrow \bigwedge^{p+q} V'$ wird dann bilinear zu einem assoziativen Produkt $\wedge : \bigwedge V' \times \bigwedge V' \rightarrow \bigwedge V'$ fortgesetzt. Damit wird $(\bigwedge V', \wedge)$ zu einer Algebra; sie wird *äußere Algebra* oder auch *Grassmannalgebra* über V' genannt. Wir werden diese Zusammenfassung verschiedener Grade zu einem einzigen Raum im Folgenden praktisch nicht verwenden.

‘**Übung 2.79** Zeigen Sie $\dim \bigwedge V' = 2^{\dim V}$.

Wir verallgemeinern nun den aus der Analysis wohlbekannten Rückzug (duale Abbildung) von Linearformen auf alternierende Multilinearformen:

Definition 2.80 (Rückzug) Es seien V und W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$ -Vektorräume, $p \in \mathbb{N}_0$, $\omega \in \bigwedge^p W'$ und $f : V \rightarrow W$ linear. Wir definieren den *Rückzug* (engl.: *pull-back*) $f^* \omega \in \bigwedge^p V'$ durch

$$f^* \omega(v_1, \dots, v_p) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_p))$$

für $v_1, \dots, v_p \in V$. Offensichtlich ist $f^* \omega$ in der Tat alternierend und multilinear.

Wir formulieren hier einige einfache Eigenschaften des Rückzugs:

Lemma 2.81 (Rechenregeln für den Rückzug) 1. Die Abbildung $f^* : \bigwedge^p W' \rightarrow \bigwedge^p V'$ ist linear.

2. **Funktorialität:** Sind U, V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$ -Vektorräume und

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$$

linear, so gilt

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* : \bigwedge^p W' \rightarrow \bigwedge^p U'$$

Das Gleiche anders gesagt: Ist

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & V \\ & \searrow h & \swarrow f \\ & W & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm linearer Abbildungen, so kommutiert auch folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^p U' & \xleftarrow{g^*} & \bigwedge^p V' \\ & \nwarrow h^* \quad \nearrow f^* & \\ & \bigwedge^p W' & \end{array}$$

3. $(\text{id}_V)^* = \text{id}_{\bigwedge^p V'}$

4. Für $\omega \in \bigwedge^p V'$ und $\chi \in \bigwedge^q V'$ gilt:

$$f^*(\omega \wedge \chi) = f^*\omega \wedge f^*\chi$$

Wir nennen ein Diagramm von Abbildungen *kommutativ*, wenn die Komposition der Abbildungen entlang eines beliebigen Pfades nur von Anfangs- und Endobjekt abhängen, nicht jedoch vom gewählten Weg dazwischen.

Übung 2.82 Beweisen Sie Lemma 2.81.

Beispiel 2.83 (Rückzug im höchsten Grad = Multiplikation mit Determinante)

Ist $f : V \rightarrow V$ linear, $\dim V = n$, so gilt für alle $\omega \in \bigwedge^n V'$:

$$f^*\omega = (\det f)\omega$$

Das bedeutet:

$$f^* : \bigwedge^{\dim V} V' \rightarrow \bigwedge^{\dim V} V' \text{ ist die Multiplikation mit } \det f.$$

Beweis: Es sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $\omega_1, \dots, \omega_n$ die zugehörige Dualbasis von V' . Dann ist $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ eine Basis von $\bigwedge^n V'$, und es gilt

$$\begin{aligned} & f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n)(b_1, \dots, b_n) \\ &= \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n(f(b_1), \dots, f(b_n)) \\ &= \det(\omega_i(f(b_j)))_{i,j=1,\dots,n} \\ &= \det f \\ &= (\det f) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n(b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

denn bezüglich der Basis $b_1, \dots, b_n$ wird $f : V \rightarrow V$ durch die Matrix $(\omega_i(f(b_j)))_{i,j=1,\dots,n}$ dargestellt. Es folgt

$$f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) = (\det f) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$$

und hieraus die Behauptung. □

Definition 2.84 (Einsetzen von Vektoren in Multilinearformen) Gegeben $\omega \in \bigwedge^p V'$ mit $p \in \mathbb{N}$ und $v \in V$ definieren wir

$$i_v \omega : V^{p-1} \rightarrow \mathbb{K}, \quad i_v \omega(w_1, \dots, w_{p-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{p-1}).$$

$i_v \omega$ ist eine alternierende Multilinearform vom Grad $p-1$: $i_v \omega \in \bigwedge^{p-1} V'$. Die Operation i_v wird Einsetzen von v in ω (synonym: Kontraktion oder auch Verjüngung von ω mit v) genannt.

Übung 2.85 (Rechenregeln für die Einsetzoperation) Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $p, q \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie, dass die Einsetzoperation

$$i : V \times \bigwedge^p V' \rightarrow \bigwedge^{p-1} V', \quad (v, \omega) \mapsto i_v \omega$$

bilinear ist.

2. Zeigen Sie

$$i_v i_w \omega = -i_w i_v \omega$$

für alle $v, w \in V$ und $\omega \in \bigwedge^p V'$ mit $p \geq 2$.

3. **(Antikommutative Produktregel)** Zeigen Sie für $v \in V$, $\omega \in \bigwedge^p V'$ und $\chi \in \bigwedge^q V'$:

$$i_v(\omega \wedge \chi) = (i_v \omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (i_v \chi)$$

Beispiel 2.86 Es sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n)$ und $dx_1, \dots, dx_n$ die zugehörige Dualbasis. Weiter seien $i_1, \dots, i_p$ paarweise verschiedene Indizes in $\{1, \dots, n\}$, wobei $1 \leq p \leq n$. Dann gilt:

$$i_{e_{i_1}}(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad (67)$$

wobei die rechte Seite im Fall $p = 1$ als leeres Produkt $= 1$ zu lesen ist. Ist dagegen $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_p\}$, so gilt

$$i_{e_j}(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = 0. \quad (68)$$

Zum Beispiel gilt also im Fall $n = 3$ mit den Koordinatennamen $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} i_{(x,y,z)}(dx \wedge dy \wedge dz) &= xi_{e_1}(dx \wedge dy \wedge dz) + yi_{e_2}(dx \wedge dy \wedge dz) + zi_{e_3}(dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= xi_{e_1}(dx \wedge dy \wedge dz) - yi_{e_2}(dy \wedge dx \wedge dz) + zi_{e_3}(dz \wedge dx \wedge dy) \\ &= x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Übung 2.87 Es sei $dx_1, \dots, dx_n$ die Standardbasis von $(\mathbb{R}^n)'$ und

$$\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Weiter sei x ein Punkt auf der Einheitssphäre S^{n-1} . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\chi: (T_x S^{n-1})^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(x, v_1, \dots, v_{n-1})$$

eine Basis von $\bigwedge^{n-1}(T_x S^{n-1})'$ bildet.

2.6 Differentialformen höheren Grades

Wir verallgemeinern nun die aus der Analysis 2 bekannte Theorie der 1-Formen auf höhere Grade. Ab nun betrachten wir den Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definition 2.88 (p -Formen) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $p \in \mathbb{N}_0$. Eine *Differentialform vom Grad p* , kurz *p -Form* über U ist eine Abbildung

$$\omega: U \rightarrow \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)'.$$

ω läßt sich also eindeutig in der Form

$$\omega_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1, \dots, i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

schreiben.

Verallgemeinerung auf Untermannigfaltigkeiten: Es sei M eine m -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Eine *p -Form* ω über M ist eine Familie $(\omega_x)_{x \in M}$ mit $\omega_x \in \bigwedge^p(T_x M)'$ für alle $x \in M$.

Hierbei bezeichnet $dx_i \in (\mathbb{R}^n)'$ die aus der Analysis 2 wohlbekannte Ableitung der i -ten Koordinatenfunktion $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, also die Projektion auf die i -te Koordinate:

$$dx_i(y_1, \dots, y_n) = y_i.$$

Die p -Form ω auf U heißt *glatt* (bzw. *stetig*, C^k , d.h. k -mal stetig differenzierbar, (*Borel*-*messbar*, etc.)), wenn alle Koeffizientenfunktionen $f_{i_1, \dots, i_p} : U \rightarrow \mathbb{R}$ die entsprechende Eigenschaft besitzen. Mit $C^\infty(U, \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)')$ (bzw. $C(U, \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)')$, $C^k(U, \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)')$, $M(U, \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)')$) bezeichnen wir den Raum aller glatten (bzw. stetigen, C^k , messbaren) p -Formen auf U . Wir kürzen auch ab:

$$\mathcal{D}^p(U) := C^\infty(U, \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)').$$

Variante auf Untermannigfaltigkeiten: Eine p -Form ω über M heißt *stetig* (C^k , glatt, messbar, etc.) wenn für jede Parametrisierung $\phi : U \rightarrow M$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, die p -Form

$$\phi^* \omega := ((d\phi_z)^* \omega_{\phi(z)})_{z \in U}$$

die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Definition 2.89 (Rückzug von p -Formen) Es sei $f : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\omega : V \rightarrow \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)'$, $y \mapsto \omega_y$ eine p -Form, $p \in \mathbb{N}_0$. Der Rückzug $f^* \omega : U \rightarrow \bigwedge^p(\mathbb{R}^m)'$ wird durch

$$(f^* \omega)_x = (df_x)^* \omega_{f(x)}$$

für $x \in U$ definiert. Ausführlich geschrieben:

$$(f^* \omega)_x(v_1, \dots, v_p) = \omega_{f(x)}(df_x(v_1), \dots, df_x(v_p))$$

für $x \in U$ und $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^m$. Wir erhalten für glatte f so eine Abbildung

$$f^* : \mathcal{D}^p(V) \rightarrow \mathcal{D}^p(U).$$

Beispiel 2.90 1. Im Fall $p = 1$ heißt das

$$(f^* \omega)_x(v) = \omega_{f(x)}(df_x(v))$$

für $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\omega} (\mathbb{R}^n)'$. Das ist der aus der Analysis 2 bekannte Rückzug von 1-Formen.

2. **Rückzug im Grad 0 = Komposition:** Im Fall $p = 0$ (kein Vektor-Argument: 0-Formen sind Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$) reduziert sich der Rückzug auf

$$f^* \omega = \omega \circ f \text{ für } U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}.$$

3. **Rückzug im höchsten Grad = Einsetzen und Multiplikation mit der Jacobideterminante:** Im Fall $p = m = n$ erhalten wir

$$(f^*\omega)_x = (df_x)^*\omega_{f(x)} = \det(Df(x)) \cdot \omega_{f(x)}.$$

Diese Formel erinnert natürlich stark an die Transformationsformel, die uns zur Motivation des Differentialformenkalküls diente.

4. **Rückzug vertauscht mit Ableitung:** Ist $\omega = dh$ für ein $h \in C^1(V)$, so gilt für $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}(f^*\omega)_x(v) &= dh_{f(x)}(df_x(v)) \\ &= d(h \circ f)_x(v)\end{aligned}$$

wegen der Kettenregel. Das bedeutet:

$$\boxed{f^*dh = d(h \circ f) = df^*h}$$

Übung 2.91 (Rückzug vertauscht mit Dachprodukt) Es sei $f : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ω eine p -Form und χ eine q -Form auf V , $p, q \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

$$f^*(\omega \wedge \chi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\chi).$$

Beispiel 2.92 Wir berechnen $f^*(dy_1 \wedge dy_2)$ für die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_2x_3, x_1x_2)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}f^*(dy_1 \wedge dy_2) &= (f^*dy_1) \wedge (f^*dy_2) = df^*y_1 \wedge df^*y_2 \\ &= d(x_2x_3) \wedge d(x_1x_2) \\ &= (x_2 dx_3 + x_3 dx_2) \wedge (x_1 dx_2 + x_2 dx_1) \\ &= x_2x_1 \underbrace{dx_3 \wedge dx_2}_{=-dx_2 \wedge dx_3} + x_2^2 \underbrace{dx_3 \wedge dx_1}_{=-dx_1 \wedge dx_3} + x_3x_1 \underbrace{dx_2 \wedge dx_2}_{=0} + x_3x_2 \underbrace{dx_2 \wedge dx_1}_{=-dx_1 \wedge dx_2} \\ &= -x_2x_3 dx_1 \wedge dx_2 - x_2^2 dx_1 \wedge dx_3 - x_1x_2 dx_2 \wedge dx_3.\end{aligned}$$

Abstrahieren wir aus dem Beispiel: Wie aus der Analysis 2 schon im Spezialfall von 1-Formen bekannt ist, wird also der Rückzug einer p -Form

$$\omega_y = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 \dots i_p}(y_1, \dots, y_n) dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}$$

unter einer differenzierbaren Abbildung

$$f : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (y_1, \dots, y_n) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

in praktischen Rechnungen durch *Einsetzen* von

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m), \quad i = 1, \dots, n$$

und Vereinfachung mit den Rechenregeln für Ableitung und Dachprodukt gebildet:

$$(f^*\omega)_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 \dots i_p}(f(x_1, \dots, x_m)) df_{i_1}(x_1, \dots, x_m) \wedge \dots \wedge df_{i_p}(x_1, \dots, x_m).$$

In diesem Sinne ist der Rückzug – wie schon in der Analysis 2 – identisch mit der *Einsetz-* oder *Substitutionsoperation*.

Übung 2.93 1. Es sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) = g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ die Polarkoordinatenabbildung. Zeigen Sie:

$$g^*(dx \wedge dy) = r dr \wedge d\varphi.$$

Wir nennen $r dr \wedge d\varphi$ das “*Flächenelement* in Polarkoordinaten”.

2. Es sei $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = g(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$ die Kugelkoordinatenabbildung. Zeigen Sie:

$$g^*(dx \wedge dy \wedge dz) = r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi.$$

Wir nennen dies das “*Volumenelement* in Kugelkoordinaten”.

Lemma 2.94 (Funktorialität des Rückzugs) *Es seien $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ differenzierbare Abbildungen zwischen offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^l$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\omega : W \rightarrow \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)'$ eine p -Form über W , $p \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\boxed{f^*(g^*\omega) = (g \circ f)^*\omega},$$

also

$$\boxed{f^* \circ g^* = (g \circ f)^*}$$

Insbesondere gilt: Ist

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & V \\ & \searrow h & \swarrow f \\ & W & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm glatter Abbildungen zwischen offenen Mengen, so kommutiert auch folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^p(U) & \xleftarrow{g^*} & \mathcal{D}^p(V) \\ & \nwarrow h^* & \nearrow f^* \\ & \mathcal{D}^p(W) & \end{array}$$

Man beachte, dass die Pfeilrichtungen beim Rückzug umgedreht werden.

Beweis: Es seien $x \in U$ und $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^l$. Dann folgt mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} & (f^*(g^*\omega))_x(v_1, \dots, v_p) \\ &= (g^*\omega)_{f(x)}(df_x(v_1), \dots, df_x(v_p)) \\ &= \omega_{g(f(x))}(dg_{f(x)}(df_x(v_1)), \dots, dg_{f(x)}(df_x(v_p))) \\ &= \omega_{g \circ f(x)}(d(g \circ f)_x(v_1), \dots, d(g \circ f)_x(v_p)) \\ &= ((g \circ f)^*\omega)_x(v_1, \dots, v_p). \end{aligned}$$

□

Das Integral einer n -Form über $\mathbb{R}^n$ wird einfach als das Integral ihres Koeffizienten bzgl. der Standardvolumenform (= Determinante) definiert:

Definition 2.95 (Integral über Formen vom höchsten Grad) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\omega : U \rightarrow \bigwedge^n(\mathbb{R}^n)'$ messbar,

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

und $A \in \mathcal{B}(U)$. Dann definieren wir

$$\int_A \omega := \int_A f d\lambda_n,$$

also

$$\boxed{\int_A f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \int_A f(x) \lambda_n(dx)}$$

wobei damit auch gemeint ist, dass die linke Seite genau dann definiert sein soll, wenn die rechte Seite definiert ist (kein undefinierter Ausdruck " $\infty - \infty$ "). Wir nennen ω integrierbar, wenn f integrierbar ist.

In missbräuchlicher Notation (unter Ignorierung des Typproblems, dass Maße und Formen völlig verschiedene Typen haben) kann man sich das symbolisch so merken:

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \text{ "}" \lambda_n(dx)$$

integrierbare n -Formen $\cong$ signierte Maße mit Dichte

Mit dieser Definition des Integrals können wir die Transformationsformel nun so schreiben:

Satz 2.96 (Transformationsformel in Differentialformnotation) Es sei $g : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. Weiter sei ω eine messbare n -Form auf V und $A \in \mathcal{B}(V)$. Wir nehmen an, dass die Jacobideterminante $\det Dg$ ein einheitliches Vorzeichen auf A besitzt. Dann gilt

$$\boxed{\int_{g^{-1}[A]} g^*\omega = \pm \int_A \omega}$$

mit den Vorzeichen "+" für $\det Dg > 0$ und "-" für $\det Dg < 0$. Die Formel ist wieder so gemeint, dass das linke Integral genau dann existiert, wenn das rechte Integral existiert.

Beweis: Es sei

$$\omega_y = f(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$$

mit $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$. Dann gilt für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$:

$$(g^*\omega)_x = f(g(x)) \cdot (g^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n))_x = (f \circ g)(x) \cdot \det Dg(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

also nach der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_{g^{-1}[A]} g^*\omega &= \int_{g^{-1}[A]} f \circ g(x) \det Dg(x) \lambda_n(dx) \\ &= \operatorname{sgn}(\det Dg) \int_{g^{-1}[A]} f \circ g(x) |\det Dg(x)| \lambda_n(dx) \\ &= \operatorname{sgn}(\det Dg) \int_A f(y) \lambda_n(dy) \\ &= \operatorname{sgn}(\det Dg) \int_A \omega. \end{aligned}$$

□

Definition 2.97 (Orientierungstreue) Ein Diffeomorphismus $g : U \rightarrow V$ heißt *orientierungstreue*, wenn $\det Dg > 0$ gilt, und *orientierungsumkehrend*, wenn $\det Dg < 0$ gilt.

Für orientierungstreue Diffeomorphismen $g : U \rightarrow V$ gilt also

$$\int_{g^{-1}[A]} g^*\omega = \int_A \omega$$

für messbare $A \subseteq V$.

Wir definieren nun eine p -dimensionale Verallgemeinerung des Kurvenintegrals:

Definition 2.98 (Integral über Formen) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω eine messbare p -Form auf V und $\varphi : U \rightarrow V$ stetig differenzierbar. Wir definieren

$$\boxed{\int_{\varphi} \omega := \int_U \varphi^* \omega}$$

falls das rechte Integral definiert ist.

Im Spezialfall $p = 1$ ist das das aus der Analysis 2 bekannte Kurvenintegral.¹⁴

Das Integral ändert sich nicht bei einer orientierungstreuen Umparametrisierung:

¹⁴Im Spezialfall $p = 0$, $U = \mathbb{R}^0 = \{()\}$, $\varphi \in V^{\{()\}} \equiv V$, der so trivial ist, dass er paradoxerweise schwierig aussieht, ist es einfach die Auswertung $\omega(\varphi)$.

Lemma 2.99 (Invarianz des Integrals unter orientierungstreuer Umparametrisierung)

In der Situation von oben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi[U] \subseteq \mathbb{R}^n \\ \cong \uparrow g & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ \tilde{U} & & \end{array}$$

also $\tilde{\varphi} = \varphi \circ g$ mit einem orientierungstreuen Diffeomorphismus g zwischen offenen Mengen $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^p$ gegeben. Dann gilt

$$\int_{\tilde{\varphi}} \omega = \int_{\varphi} \omega.$$

Beweis: Nach der Transformationsformel gilt:

$$\int_{\tilde{\varphi}} \omega = \int_{\tilde{U}} (\varphi \circ g)^* \omega = \int_{\tilde{U}} g^* \varphi^* \omega = \int_U \varphi^* \omega = \int_{\varphi} \omega.$$

□

Beispiel 2.100 Es sei $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$, $g : U \rightarrow V$, $g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ die Polarkoordinatenabbildung und $A \in \mathcal{B}(V)$. Nach Übung 2.93 gilt

$$g^*(dx \wedge dy) = r \, dr \wedge d\varphi.$$

Es folgt

$$\lambda_2(A) = \int_A dx \wedge dy = \int_{g^{-1}[A]} r \, dr \wedge d\varphi.$$

Dies rechtfertigt den Namen “Flächenelement in Polarkoordinaten” für $r \, dr \wedge d\varphi$.

Übung 2.101 (Volumen eines Kugelschalensektors) Berechnen Sie für $0 < a < b$ und $c > 0$ das Volumen $\lambda_3(S)$ des Kugelschalensektors

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, a^2 < x^2 + y^2 + z^2 < b^2, z^2 < c^2(x^2 + y^2)\}$$

Versuchen Sie sich S anschaulich vorzustellen.

Hinweis: Transformieren Sie in Kugelkoordinaten.

Übung 2.102 (Fläche eines Hyperbelsektors) Berechnen Sie für $a > 0$ den Flächeninhalt $\lambda_2(A)$ des Hyperbelsektors

$$A = \{(r \cosh s, r \sinh s) \mid 0 < r < 1, 0 < s < a\}$$

und vergleichen Sie mit der (damals anschaulich-heuristischen) Rechnung aus der Analysis 1.

‘**Übung 2.103** Überzeugen Sie sich davon, dass das Volumenelement in beliebigen krummlinigen Koordinaten $y = (y_1, \dots, y_n)$, $x = f(y)$ mit einem Diffeomorphismus $f : U \rightarrow V$, $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, durch

$$\omega_y = \sqrt{\det g(y)} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$$

gegeben wird, wobei $g = Df^t Df : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ die zugehörige ‘Riemannsche Metrik’ bezeichnet:

$$\lambda_n(f[A]) = \int_A \sqrt{\det g(y)} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n, \quad A \in \mathcal{B}(U)$$

2.7 Riemannsche Metrik und Oberflächenmaße

Um Oberflächenmaße auf Untermannigfaltigkeiten einführen zu können, brauchen wir einen Volumenbegriff in jedem Tangentialraum. Ein solcher wird durch die Wahl eines Skalarprodukts in jedem Tangentialraum festgelegt. Aus diesem Grund studieren wir zunächst ortsveränderliche Skalarprodukte und, etwas allgemeiner, Bilinearformfelder:

Ist V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so bezeichne $\text{Bilin}(V)$ den Vektorraum aller Bilinearformen $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Hat V die Dimension $n \in \mathbb{N}$ mit einer Basis $b_1, \dots, b_n$, so ist $\text{Bilin}(V)$ n^2 -dimensional, und jedes $g \in \text{Bilin}(V)$ wird durch die zugehörige Matrix

$$G = (g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,n} = (g(b_\mu, b_\nu)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

dargestellt. Anders gesagt: Bezeichnet $b'_1, \dots, b'_n$ die Dualbasis von V' zu $b_1, \dots, b_n$ und

$$\otimes : V' \times V' \rightarrow \text{Bilin}(V), \quad \omega \otimes \chi(v, w) = \omega(v)\chi(w)$$

($\omega, \chi \in V'$, $v, w \in V$) das Tensorprodukt von Linearformen, so gilt:

$$g = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n g_{\mu\nu} b'_\mu \otimes b'_\nu$$

Mit $\text{Bilin}^+(V) \subset \text{Bilin}(V)$ bezeichnen wir die Teilmenge aller Skalarprodukte, also aller positiv definiten symmetrischen Bilinearformen auf V . Ist $f : W \rightarrow V$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen, so wird der *Rückzug* von Bilinearformen durch

$$\begin{aligned} f^* : \text{Bilin}(V) &\rightarrow \text{Bilin}(W) \\ f^*g(w_1, w_2) &:= g(f(w_1), f(w_2)) \end{aligned}$$

für $g \in \text{Bilin}(V)$, $w_1, w_2 \in W$ definiert. Im Spezialfall, dass g alternierend ist, kennen Sie diesen Rückzug natürlich schon.

‘**Übung 2.104** Zeigen Sie: Ist $f : W \rightarrow V$ eine injektive lineare Abbildung und $g \in \text{Bilin}^+(V)$ ein Skalarprodukt, so ist auch $f^*g \in \text{Bilin}^+(W)$ ein Skalarprodukt.

Übung 2.105 (Rückzug von Bilinearformen in Matrixdarstellung) Es sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = Fx$ eine lineare Abbildung, dargestellt durch eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Weiter sei $g \in \text{Bilin}(\mathbb{R}^n)$ eine Bilinearform, dargestellt bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ durch eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass f^*g durch die Matrix $F^tGF \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dargestellt wird.

Ein ortsabhängiges Skalarprodukt nennt man eine Riemannsche Metrik:

Definition 2.106 (Riemannsche Metrik) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine *Riemannsche Metrik* auf U ist eine stetige Abbildung $g : U \rightarrow \text{Bilin}^+(\mathbb{R}^n)$.

Ist allgemeiner U eine C^1 -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so wird eine auf U definierte Abbildung g mit $g_x \in \text{Bilin}^+(T_x U)$ für alle $x \in U$ eine Riemannsche Metrik auf U genannt, wenn alle Koeffizienten von g in einer Koordinatendarstellung stetig sind. Hierbei bezeichnet $T_x U$ den Tangentialraum von U in x .

In Matrixdarstellung wird eine Riemannsche Metrik also durch eine Abbildung $G = (g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,n} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Werten im Raum der positiv definiten symmetrischen Matrizen dargestellt:

$$g = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n g_{\mu\nu} dx_\mu \otimes dx_\nu$$

Für uns sind fast ausschließlich *glatte* Riemannsche Metriken interessant.

Ist $f : V \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und g eine Riemannsche Metrik auf U , so wird der *Rückzug* von g mit f durch

$$f^*g : V \rightarrow \text{Bilin}(\mathbb{R}^m), \quad (f^*g)_x := (df_x)^* g_{f(x)}$$

definiert.

Der Rückzug einer Riemannschen Metrik unter einer stetig differenzierbaren Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten wird analog definiert.

Übung 2.107 Zeigen Sie: Es seien $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : V \rightarrow U$ eine *Immersion*, d.h. f sei stetig differenzierbar und df_x besitze an jeder Stelle $x \in V$ den Rang m . Zeigen Sie: Der Rückzug f^*g einer Riemannschen Metrik g auf U ist eine Riemannsche Metrik auf V . Wird g durch $G = (g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,n} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt, so wird f^*g durch

$$V \ni x \mapsto Df(x)^t \cdot G(f(x)) \cdot Df(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

dargestellt.

Übung 2.108 (Stereographische Projektion und hyperbolische Ebene) 1. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$$

die (inverse) stereographische Projektion. Überzeugen Sie sich davon, dass $f(x_1, x_2)$ der zweite Schnittpunkt der Geraden durch $(0, 0, -1) \in S^2$ und $(x_1, x_2, 0)$ mit der Sphäre S^2 ist.

Berechnen Sie f^*g für die euklidische Metrik

$$g = dy_1 \otimes dy_1 + dy_2 \otimes dy_2 + dy_3 \otimes dy_3.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$f^*g = \alpha \cdot (dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$$

für ein $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt. Man sagt hierzu: f ist *konform* oder auch *winkeltreu*.

2. Hyperbolische Variante: Gegeben sei die indefinite symmetrische Bilinearform

$$h = dy_1 \otimes dy_1 + dy_2 \otimes dy_2 - dy_3 \otimes dy_3$$

und das zweischalige Hyperboloid

$$H = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid h(y, y) = -1\} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = -1\}$$

sowie die (inverse) hyperbolische stereographische Projektion $f : D \rightarrow H$,

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2} \right),$$

wobei $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ die Einheitskreisscheibe bezeichnet. Überzeugen Sie sich davon, dass $f(x_1, x_2)$ der zweite Schnittpunkt der Geraden durch $(0, 0, -1) \in H$ und $(x_1, x_2, 0)$ mit dem Hyperboloid H ist.

Berechnen Sie $g := f^*h$ und überzeugen Sie sich davon, dass

$$g = \alpha \cdot (dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$$

für ein $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt. Insbesondere ist g positiv definit, also eine Riemannsche Metrik auf der Einheitskreisscheibe.

g wird die *Poincaré-Metrik* auf D genannt. Die Einheitskreisscheibe D , versehen mit dieser Riemannschen Metrik, wird *Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene* genannt.

Anschaulich gesagt legt eine Riemannsche Metrik einen “Längenbegriff” fest. Dieser ist nötig, um Längen von Kurven, Flächeninhalte von (gekrümmten) Flächen und allgemeiner *Oberflächenmaße* zu definieren.

Motiviert durch die Übung 2.54 definieren wir:

Definition 2.109 (Riemannsche Volumenform) Es sei $g : U \rightarrow \text{Bilin}^+(\mathbb{R}^n)$,

$$g = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n g_{\mu\nu} dx_\mu \otimes dx_\nu$$

eine stetig differenzierbare Riemannsche Metrik auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Mit der (leicht missbräuchlichen) Notation $\det g := \det(g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,n}$ definieren wir die *Riemannsche Volumenform* zu g durch

$$\omega^g := \sqrt{\det g} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Das zugehörige Maß auf $\mathcal{B}(U)$ wird mit dem gleichen Symbol bezeichnet:

$$\omega^g(dx) := \sqrt{\det g_x} \lambda_n(dx), \quad x \in U.$$

In Verallgemeinerung der Übung 2.103 erhalten wir:

Lemma 2.110 (Kovarianz der Riemannschen Volumenform) *Es seien $V, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, g eine Riemannsche Metrik auf U und $f : V \rightarrow U$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus. Dann gilt¹⁵*

$$f^* \omega^g = \omega^{f^*g}.$$

Für die zugehörigen Riemannschen Volumenmaße gilt also

$$f[\omega^{f^*g}] = \omega^g.$$

Beweis: Die Riemannsche Metrik g bzw. f^*g werde durch $G : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ bzw. $\tilde{G} : V \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt. Wegen

$$\tilde{G}(x) = Df(x)^t \cdot G(f(x)) \cdot Df(x), \quad x \in V$$

folgt mit der Abkürzung $y = f(x)$:

$$\det(f^*g)_x = \det \tilde{G}(x) = \det(Df(x))^2 \det G(y) = \det(Df(x))^2 \det g_y$$

also wegen $\det Df > 0$:

$$\begin{aligned} \omega_x^{f^*g} &= \sqrt{\det(f^*g)_x} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sqrt{\det g_y \det Df(x)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sqrt{\det g_y} f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) \\ &= (f^* \omega^g)_x. \end{aligned}$$

Die Behauptung für die zugehörigen Riemannschen Volumenmaße folgt hieraus mit der Transformationsformel.

¹⁵Für orientierungsumkehrende Diffeomorphismen gilt eine analoge Formel mit umgekehrtem Vorzeichen. Bei den zugehörigen Riemannschen Volumenmaßen ist dagegen auch für orientierungsumkehrende Diffeomorphismen *kein* Minuszeichen nötig.

□

Korollar 2.111 (Oberflächenmaß auf Untermannigfaltigkeiten) *Es sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$ und σ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$ (oder auch eine beliebige Riemannsche Metrik auf M).*

1. Sind $\phi_j : U_j \rightarrow \phi_j[U_j] = V_j \subseteq M$, $j = 1, 2$, $U_j \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, zwei Parametrisierungen von in M offenen Mengen, dann stimmen die Bildmaße $\phi_j[\omega^{\phi_j^* \sigma}]$ der Riemannschen Volumenmaße $\omega^{\phi_j^* \sigma}$ über $V_1 \cap V_2$ überein:

$$\phi_1[\omega^{\phi_1^* \sigma}](A) = \phi_2[\omega^{\phi_2^* \sigma}](A) \text{ für } A \in \mathcal{B}(V_1 \cap V_2)$$

2. Es gibt genau ein Maß ω^M auf $(M, \mathcal{B}(M))$, so dass für alle Parametrisierungen $\phi : U \rightarrow \phi[U] = V \subseteq M$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) und alle $A \in \mathcal{B}(M)$ mit $A \subseteq V$ gilt:

$$\omega^M(A) = \phi[\omega^{\phi^* \sigma}](A).$$

Dieses Maß ω^M heißt *Oberflächenmaß* (bzgl. σ) auf M .

Beweis: Teil 1.: O.B.d.A. dürfen wir $V_1 = V_2$ annehmen; sonst verkleinern wir U_j und V_j wenn nötig. Es sei $f = \phi_2^{-1} \circ \phi_1 : U_1 \rightarrow U_2$ der Kartenwechsel; insbesondere gilt $\phi_1 = \phi_2 \circ f$ und daher

$$\phi_1^* \sigma = f^* \phi_2^* \sigma.$$

Es folgt für die zugehörigen Volumenmaße:

$$f[\omega^{\phi_1^* \sigma}] = f[\omega^{f^* \phi_2^* \sigma}] = \omega^{\phi_2^* \sigma}$$

nach Lemma 2.110. Die Behauptung ergibt sich daraus so:

$$\phi_2[\omega^{\phi_2^* \sigma}] = \phi_2[f[\omega^{\phi_1^* \sigma}]] = \phi_1[\omega^{\phi_1^* \sigma}].$$

Teil 2. folgt unmittelbar aus Teil 1. und aus den folgenden beiden Übungsaufgaben: Abzählbar viele Parametrisierungen reichen zur Überdeckung von M aus, denn jede offene Überdeckung von M enthält eine abzählbare Teilüberdeckung.

□

Übung 2.112 (Zusammensetzen eines Maßes aus Stücken) Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von messbaren Mengen $V_i \in \mathcal{A}$, die eine abzählbare Überdeckung $(V_i)_{i \in J}$ von M umfaßt: $J \subseteq I$ abzählbar, $\bigcup_{i \in J} V_i = M$. Für jedes $i \in I$ sei μ_i ein Maß auf $(V_i, \mathcal{A}_i)$, wobei $\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subseteq V_i\}$. Weiter gelte $\mu_i(A) = \mu_j(A)$ für alle $i, j \in I$ und alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq V_i \cap V_j$. Zeigen Sie, dass es genau ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ gibt, so dass $\mu(A) = \mu_i(A)$ für alle $i \in I$ und $A \in \mathcal{A}_i$ gilt.

‘**Übung 2.113** Zeigen Sie: Jede offene Überdeckung einer beliebigen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ enthält eine abzählbare Teilüberdeckung.

Hinweis: Verwenden Sie, dass es nur abzählbar viele Quader in $\mathbb{R}^n$ mit rationalen Eckpunkten gibt.

Bemerkung: Im wichtigen Spezialfall, dass schon eine einzige Parametrisierung $\phi : U \rightarrow V = M$ genügt, die ganze Mannigfaltigkeit M zu parametrisieren, erhält man also die Oberflächenformel

$$\omega^M(A) = \int_{\phi^{-1}[A]} \sqrt{\det G(x)} \lambda_n(dx), \quad A \in \mathcal{B}(M),$$

wobei

$$G(x) = Df(x)^t \text{Id} Df(x) = Df(x)^t Df(x), \quad x \in U$$

die darstellende Matrix des mit f zurückgezogenen euklidischen Standardskalarprodukts $f^*\sigma$ bezeichnet. $G(x)$ ist also Gramsche Matrix der Jacobimatrix $Df(x)$ von f .

Definition 2.114 (Orientierbarkeit) Eine Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^m$ heißt *orientierbar*, wenn sie einen Atlas (= Überdeckung mit Karten) besitzt, deren Kartenwechsel alle positive Jacobideterminante besitzen. Eine *Orientierung* von M ist ein maximaler solcher Atlas. Zeichnet man eine Orientierung von M aus, nennt man M und auch Karten (und ihre Inverse) in dieser Orientierung *orientiert*.

Für orientierte glatte Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ können wir eine Oberflächenform ω^M auszeichnen, also Familie von Formen $\omega_x^M \in \bigwedge^{\dim M} (T_x M)'$, $x \in M$ mit $(d\phi_x)^* \omega_y^M = \omega_x^{\phi^* \sigma}$ für jede orientierte Parametrisierung $\phi : U \rightarrow M$ mit $x \in U$, $y = \phi(x)$. Für nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten ist das so nicht möglich wegen des Vorzeichenproblems beim Kartenwechsel. Obwohl auch nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten ein Oberflächenmaß besitzen, kommt das *nicht* von einer stetigen Volumenform.

Beispiel 2.115 Die Sphären $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$ sind orientierbar, das Möbiusband $M = \{(\cos(2x), \sin(2x), y \cos x, y \sin x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ jedoch nicht.

Übung 2.116 (Oberflächenform aus Volumenform durch Einsetzen von Normalenvektoren) Es sei M eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$, also 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit. Weiter sei $\phi : U \rightarrow M$ eine surjektive Parametrisierung von M , $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Schließlich sei $N : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein normiertes Normalenvektorfeld auf M , d.h. $N(y) \perp T_y M$ (Orthogonalität bezüglich des Standardskalarprodukts gemeint) und $\|N(y)\|_2 = 1$ für alle $y \in M$. Es gelte $\det(N(\phi(x)), D\phi(x)) > 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie für alle $A \in \mathcal{B}(M)$:

$$\omega^M(A) = \int_{\phi^{-1}[A]} \phi^*(i_N \lambda_n),$$

wobei $\lambda_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ die Standardvolumenform bezeichnet und $\phi^*(i_N \lambda_n)_x = d\phi_x^*(i_{N(\phi(x))} \lambda_n)$ für $x \in U$.

Beispiel 2.117 (Kugeloberfläche) Wir parametrisieren die Einheitssphäre S^2 bis auf eine ω^{S^2} -Nullmenge durch

$$\begin{aligned} f : U :=]0, \pi[\times]-\pi, \pi[&\rightarrow V := S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 \mid y = 0, x \leq 0\}, \\ f(\theta, \phi) &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} f^* \sigma_{(\theta, \phi)} &= f^*(dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz) \\ &= d(\sin \theta \cos \phi) \otimes d(\sin \theta \cos \phi) + d(\sin \theta \sin \phi) \otimes d(\sin \theta \sin \phi) + d \cos \theta \otimes d \cos \theta \\ &= d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi \end{aligned}$$

und daher wegen $0 < \theta < \pi$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(f^* \sigma)_{(\theta, \phi)}} &= |\sin \theta| = \sin \theta, \\ \omega_{(\theta, \phi)}^{f^* \sigma} &= \sin \theta d\theta \wedge d\phi. \end{aligned}$$

Integration liefert die Kugeloberfläche

$$\omega^{S^2}(S^2) = \omega^{S^2}(V) = \int_U \omega^{f^* \sigma} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi.$$

Definition 2.118 (Integral über Formen auf orientierten Untermannigfaltigkeiten)

Es sei M eine m -dimensionale orientierte C^1 -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und ω eine messbare m -Form über M . Wir nennen ω *nichtnegativ* (manchmal etwas unpräzise auch *positiv*), wenn für jede orientierte Karte $\phi : U \rightarrow M$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, einer in M offenen Teilmenge $V = \phi[U] \subseteq M$ die Koeffizientenfunktion $f_\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ in der Koordinatendarstellung

$$\phi^* \omega = f_\phi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

nichtnegativ ist: $f_\phi \geq 0$. Ist nun $(\phi_i^{-1} : V_i \rightarrow U_i)_{i \in I}$ ein abzählbarer Atlas von M , also $(\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i[U_i] = V_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Familie von Parametrisierungen mit $\bigcup_{i \in I} V_i = M$, und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von paarweise disjunkten messbaren Mengen $A_i \subseteq V_i$, die M überdeckt, so definieren wir für nichtnegative messbare m -Formen ω über M :

$$\int_M \omega := \sum_{i \in I} \int_{\phi_i^{-1}[A_i]} \phi_i^* \omega.$$

Offensichtlich hängt diese Definition weder von der Wahl der Parametrisierungen ϕ_i noch von der Wahl der A_i ab.

Ist ω nur messbar, aber nicht notwendig positiv, so zerlegen wir ω in “Positiv- und Negativteil” (bezüglich der vorgegebenen Orientierung von M):

$$\omega = \omega_+ - \omega_-,$$

wobei $\omega_\pm$ nichtnegativ sein soll und $(\omega_+)_x = 0$ oder $(\omega_-)_x = 0$ für alle $x \in M$, damit die

Zerlegung eindeutig wird, und ist $\int_M \omega_+$ oder $\int_M \omega_-$ endlich, so setzen wir¹⁶

$$\int_M \omega := \int_M \omega_+ - \int_M \omega_-,$$

Sind sowohl $\int_M \omega_+$ als auch $\int_M \omega_-$ endlich, so nennen wir die Form ω auf M *integrierbar*. Wir setzen für $A \in \mathcal{B}(M)$ auch

$$\int_A \omega := \int_M 1_A \omega,$$

wann immer das Integral rechts wohldefiniert ist.

Übung 2.119 (Flächen von Kreisscheiben in der hyperbolischen Ebene) Berechnen Sie die Flächenform (= 2-dimensionale Volumenform) zur Poincaré-Metrik. Berechnen Sie die Fläche A_r der Kreisscheibe $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\}$ und die Länge R_r ihres Radius $C_r = \{(x, 0) \mid 0 < x < r\}$ für $0 < r < 1$ im Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene, also nicht im euklidischen Sinn. Berechnen Sie $\lim_{r \rightarrow 0} \pi_r$ und $\lim_{r \rightarrow 1} \pi_r$ für $\pi_r := A_r / R_r^2$.

Übung 2.120 (Kartenwechsel zwischen Poincaré-Modell und Kleinschem Modell der hyperbolischen Ebene) Aus Teil 2. der Übung 2.108 seien gegeben: das Hyperboloid H , seine positive Schale $H_+ := \{(y_1, y_2, y_3) \in H \mid y_3 > 0\}$, die indefinite symmetrische Bilinearform h und die hyperbolische stereographische Projektion $f : D \rightarrow H_+$ auf der Einheitskreisscheibe D . Weiter sei

$$k : D \rightarrow H_+, \quad k(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}(x_1, x_2, 1).$$

Berechnen Sie die Riemannsche Metrik k^*h auf D und die zugehörige Flächenform ω^{k^*h} , dargestellt bezüglich der Standardbasis auf $\text{Bilin}(\mathbb{R}^2)$ bzw. auf $\bigwedge^2(\mathbb{R}^2)'$. Berechnen Sie den Kartenwechsel $\phi := f^{-1} \circ k : D \rightarrow D$ explizit. Bestätigen Sie die Aussagen $\phi^* f^* h = k^* h$ und $\phi^* \omega^{f^* h} = \omega^{k^* h}$ auf zwei Weisen:

- a) Abstrakt mit den Eigenschaften des Rückzugs,
- b) Rechnerisch mit der expliziten Darstellung von ϕ .

Das Paar (D, k^*h) wird *Kleinsches Modell der hyperbolischen Ebene* genannt.

¹⁶Man beachte, dass die Darstellung

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{\phi_i^{-1}[A_i]} \phi_i^* \omega$$

stets gilt, wenn die linke Seite definiert ist, aber es möglich ist, dass hier die rechte Seite zwar definiert und endlich ist, die linke Seite jedoch undefiniert. In diesem Fall hängt die rechte Seite von der Wahl der ϕ_i und A_i ab, so dass eine Definition von $\int_M \omega$ dann nicht sinnvoll ist.

Übung 2.121 a) Es sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ eine glatte Abbildung. Der Graph von f werde im Raum um die x -Achse rotiert:

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = f(x)^2, a < x < b\}.$$

Zeigen Sie, dass M den Flächeninhalt

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie Parametrisierungen der Gestalt $k(x, t) = (x, f(x) \cos t, f(x) \sin t)$.

b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Rotationsellipsoids

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 + b^{-2}z^2 = 1\}$$

für gegebene $a, b > 0$. Was erhält man für festes $b > 0$ in den Limiten $a \rightarrow 0$ bzw. $a \rightarrow b$?

Hinweis: Arbeiten Sie dabei *entweder* mit der Formel aus a) *oder* mit geeignet skalierten Kugelkoordinaten *oder* mit einer geeignet skalierten stereographischen Projektion.

Übung 2.122 (Integral über Blätterungen durch Hyperflächen) 1. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $df_x \neq 0$ für alle $x \in U$, so dass die Niveaugebilde $M_t := f^{-1}[\{t\}]$, $t \in \mathbb{R}$ Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$ (oder leer) sind. Zeigen Sie für alle $g \in \overline{M}_+(U, \mathcal{B}(U))$:

$$\int_U g d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} \int_{M_t} \frac{g(x)}{\|\nabla f(x)\|_2} \omega^{M_t}(dx) dt.$$

2. Überzeugen Sie sich davon, dass man im Spezialfall $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) = \|x\|_2$ hieraus wieder die Formel (62) aus Übung 2.56 erhält.

2.8 Die äußere Ableitung

Erinnern Sie sich an die Analysis 2: Die Ableitung f von Funktionen liefert eine Abbildung

$$d : C^\infty(U) = \mathcal{D}^0(U) \rightarrow \mathcal{D}^1(U),$$

$$f \mapsto df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j,$$

($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen). Einer Idee von Cartan folgend, verallgemeinern wir nun die Ableitung auf p -Formen. Hierbei verwenden wir die Abkürzung

$$dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad (69)$$

für $I = (i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p$, $p \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. Weiter setzen wir

$$J_{p,n} := \{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p \mid i_1 < \dots < i_p\}, \quad (70)$$

so dass $(dx_I)_{I \in J_{p,n}}$ eine Basis von $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)'$ bildet.

Definition 2.123 (Äußere Ableitung) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $p \in \mathbb{N}_0$ und $\omega : U \rightarrow \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)'$ eine stetig differenzierbare p -Form mit der Basisdarstellung

$$\omega = \sum_{I \in J_{p,n}} f_I dx_I.$$

Wir definieren die *äußere Ableitung*:

$$d\omega := \sum_{I \in J_{p,n}} df_I \wedge dx_I = \sum_{I \in J_{p,n}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$$

Damit erhalten wir eine Abbildung

$$d : \mathcal{D}^p(U) \rightarrow \mathcal{D}^{p+1}(U)$$

Man verwechsle diese äußere Ableitung für $p \geq 1$ nicht mit der in der Analysis 2 definierten Ableitung, trotz des gleichen Symbols!

Im Spezialfall $p = 0$ stimmt die äußere Ableitung zwar mit der in der Analysis 2 definierten Ableitung $d\omega$ überein (daher das gleiche Symbol), nicht jedoch für $p \geq 1$. Bezeichnen wir vorübergehend die in der Analysis 2 definierte Ableitung mit

$$\tilde{d}\omega : U \rightarrow \text{Hom}\left(\mathbb{R}^n, \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)'\right).$$

Für $p \geq 1$ ist sie in ihren $1 + p$ Argumenten i.a. *nicht* alternierend. Es gilt aber für $x \in U$, $v_0, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$:

$$d\omega_x(v_0, \dots, v_p) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \tilde{d}\omega_x(v_k)(v_0, \dots, \cancel{v_k}, \dots, v_p), \quad (71)$$

wobei das gestrichene k -te Argument rechts weggelassen wird, so dass die äußere Ableitung $d\omega$ eine “alternierend gemachte Variante” der “alten” Ableitung $\tilde{d}\omega$ ist. Wir werden die “alte” Ableitung $\tilde{d}\omega$ für $p \geq 1$ im Folgenden nicht verwenden, so dass keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Übung 2.124 Beweisen Sie die Gleichung (71).

Hinweis: Laplace-Entwicklung von Determinanten

Beispiel 2.125 Es sei $\omega = x_1 dx_2 - x_2 dx_1$ auf $\mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$d\omega = dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_1 = 2 dx_1 \wedge dx_2.$$

Im Folgenden formulieren wir viele Aussagen über die äußere Ableitung nur für glatte Formen, um die “Buchhaltung”, wie viele Ableitungsstufen wirklich nötig sind, zu vermeiden. Das erlaubt uns oft eine einfachere Formulierung. Meist gelten die Aussagen dennoch auch mit weniger starken Regularitätsvoraussetzungen, ohne dass wir das hier genauer thematisieren.

Lemma 2.126 (Grundlegende Eigenschaften der äußere Ableitung) *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p, q \in \mathbb{N}_0$.*

1. $d : \mathcal{D}^p(U) \rightarrow \mathcal{D}^{p+1}(U)$ ist linear.
2. Die Komposition $d \circ d : \mathcal{D}^p(U) \rightarrow \mathcal{D}^{p+2}(U)$ verschwindet: ¹⁷

$$\boxed{d \circ d = 0}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}^p(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^{p+1}(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^{p+2}(U) \\ & \searrow \text{dotted} & & \nearrow \text{dotted} & \\ & & 0 & & \end{array}$$

3. **Produktregel:** *Es gilt die folgende “antikommutative” Produktregel für $\omega \in \mathcal{D}^p(U)$, $\chi \in \mathcal{D}^q(U)$:*

$$\boxed{d(\omega \wedge \chi) = (d\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge d\chi}$$

4. **Äußere Ableitung vertauscht mit Rückzug:** *Ist $f : U \rightarrow V$ eine glatte Abbildung in eine weitere offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$, so gilt für alle $\omega \in \mathcal{D}^p(V)$:*

$$\boxed{df^*\omega = f^*d\omega}$$

Beweis: Teil 1. folgt unmittelbar aus der Definition, weil sowohl das “alte” $d : C^\infty(U) \rightarrow \mathcal{D}^1(U)$ als auch das Dachprodukt $\cdot \wedge dx_I$ linear sind.

Zu Teil 2.: Es genügt wegen der Linearität von d ,

$$dd(f_I dx_I) = 0$$

für $f_I \in C^\infty(U)$, $I \in J_{p,n}$ zu zeigen. Das folgt so:

$$d(f_I dx_I) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I,$$

also

$$\begin{aligned} dd(f_I dx_I) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_I \\ &= -dd(f_I dx_I) \end{aligned}$$

¹⁷Diese Aussage und Varianten davon spielen eine fundamentale Rolle für die algebraische Topologie, insbesondere in verschiedenen Kohomologietheorien.

wegen $D_k D_j f_I = D_j D_k f_I$ und $dx_k \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_k$. Wir schließen: $dd(f_I dx_I) = 0$.
 Zu Teil 3.: Wegen der Linearität von d und der Bilinearität von $\wedge$ genügt es, die Behauptung für den Spezialfall

$$\omega = f_I dx_I, \quad \chi = g_J dx_J$$

für $I \in J_{p,n}$, $J \in J_{p,n}$ und $f_I, g_J \in C^\infty(U)$ zu zeigen. Hier gilt:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \chi) &= d(f_I g_J dx_I \wedge dx_J) \\ &= d(f_I g_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (f_I dg_J + g_J df_I) \wedge dx_I \wedge dx_J \text{ (mit der "gewöhnlichen" Produktregel)} \\ &= f_I \underbrace{dg_J}_{1\text{-Form}} \wedge \underbrace{dx_I}_{p\text{-Form}} \wedge dx_J + g_J df_I \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (-1)^p (f_I dx_I) \wedge (dg_J \wedge dx_J) + (df_I \wedge dx_I) \wedge (g_J dx_J) \\ &= (-1)^p \omega \wedge d\chi + (d\omega) \wedge \chi. \end{aligned}$$

Zu Teil 4.: Wegen der Linearität von d und von f^* genügt es, die Aussage im Spezialfall $\omega = g dx_I$ mit $g \in C^\infty(V)$, $I = (i_1, \dots, i_p) \in J_{p,n}$ zu zeigen. Es seien $f_j = x_j \circ f$, $j = 1, \dots, n$, die Komponenten von f . Dann gilt

$$f^* dx_j = d(x_j \circ f) = df_j,$$

also

$$f^* dx_I = f^*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p}$$

und

$$\begin{aligned} d(f^* dx_I) &= d(df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p}) \\ &= \sum_{l=1}^p (-1)^{l-1} df_{i_1} \wedge \dots \wedge \underbrace{ddf_{i_l}}_{l\text{-te Stelle}} \wedge \dots \wedge df_{i_p} = 0 \end{aligned}$$

Ebenso gilt $d(dx_I) = 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned} df^* \omega &= df^*(g dx_I) = d((g \circ f) \cdot f^* dx_I) \\ &= d(g \circ f) \wedge f^* dx_I + (g \circ f) \cdot \underbrace{d(f^* dx_I)}_{=0} \\ &= (f^* dg) \wedge (f^* dx_I) = f^*(dg \wedge dx_I) = f^* d\omega. \end{aligned}$$

□

Man nennt die Folge von Abbildungen

$$\mathcal{D}^0(U) \xrightarrow{d} \mathcal{D}^1(U) \xrightarrow{d} \mathcal{D}^2(U) \xrightarrow{d} \mathcal{D}^3(U) \xrightarrow{d} \dots$$

auch den *de-Rham-Komplex*, wobei das Wort "*Komplex*" dafür steht, dass die Komposition je zwei aufeinanderfolgender Abbildungen verschwindet: $d \circ d = 0$.

Beispiel 2.127 Es sei $\omega = x_1 dx_2$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(u_1, u_2) = (u_2, u_1 u_2)$. Dann gilt einerseits

$$f^* \omega = f^*(x_1 dx_2) = u_2 d(u_1 u_2) = u_2^2 du_1 + u_1 u_2 du_2$$

und daher

$$\begin{aligned} df^* \omega &= d(u_2^2) \wedge du_1 + d(u_1 u_2) \wedge du_2 \\ &= -2u_2 du_1 \wedge du_2 + u_1 \underbrace{du_2 \wedge du_2}_{=0} + u_2 du_1 \wedge du_2 \\ &= -u_2 du_1 \wedge du_2. \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} d\omega &= dx_1 \wedge dx_2, \\ f^* d\omega &= du_2 \wedge d(u_1 u_2) \\ &= du_2 \wedge (u_1 du_2 + u_2 du_1) \\ &= u_1 \underbrace{du_2 \wedge du_2}_{=0} + u_2 du_2 \wedge du_1 = -u_2 du_1 \wedge du_2. \end{aligned}$$

Es gilt also $df^* \omega = f^* d\omega$, wie es nach dem Lemma sein muss.

‘**Übung 2.128** Es seien $\omega = ye^{-x^2} dx + e^{-x^2} dz$ und $\lambda = x dy + dz$. Berechnen Sie zunächst $\omega \wedge \lambda$, $d\omega$ und $d\lambda$. Berechnen Sie daraus $d(\omega \wedge \lambda)$ unter Verwendung der Produktregel und auch ohne diese; versuchen Sie, auf beiden Wegen übereinstimmende Ergebnisse zu erreichen.

‘**Übung 2.129** Berechnen Sie $d\omega$, $f^* \omega$, $f^*(d\omega)$ und $d(f^* \omega)$ für die 1-Form $\omega = x dy - y dx$ auf $\mathbb{R}^2$ und die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi).$$

2.9 Entsprechungen der äußeren Ableitung in der klassischen Vektoranalysis: Gradient, Rotation und Divergenz

In der klassischen Vektoranalysis, insbesondere über $\mathbb{R}^3$, arbeitet man eher mit Vektorfeldern statt mit p -Formen. In diesem Abschnitt übersetzen wir die Formen-Sprechweise in die traditionelle Sprache. Dabei verwenden wir den Isomorphismus zwischen Vektoren und 1-Formen, der von einem Skalarprodukt kommt:

Erinnerung an die Lineare Algebra:

Ist $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraum V , so ist

$$\flat_g : V \rightarrow V', \quad \flat_g(v) = g(v, \cdot), \quad \text{also } \flat_g(v)(w) = g(v, w)$$

ein Isomorphismus.¹⁸

Beispiel 2.130 Ist $g = \sigma$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, also

$$\sigma(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v^t w,$$

so ist

$$\flat_\sigma(v) = \sum_{i=1}^n v_i dx_i.$$

In Komponentenschreibweise entspricht dem die Transposition:

$$\cdot^t : \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^t = (v_1, \dots, v_n).$$

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf das Standardskalarprodukt $g = \sigma$.
Erinnern Sie sich an die Analysis 2:

Definition 2.131 (Vektorfeld) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein *Vektorfeld* über U ist eine Abbildung $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$: Jedem Ortspunkt wird ein Vektor zugeordnet.

Anwendungsbeispiele für Vektorfelder:

- Geschwindigkeitsfeld, z.B. Windfeld auf Wetterkarten,
- elektrisches Feld,
- magnetisches Feld.

¹⁸*Zur Notation:* Das Zeichen “ $\flat$ ” soll an die Notenschrift in der Musik erinnern, in der es das “*Herunterziehen*” eines Tons um einen Halbton bedeutet. Dies hat folgenden Hintergrund: In der klassischen Riemannschen Geometrie und in der Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein, die darauf aufbaut, schreibt man Koeffizienten eines Vektors bezüglich einer Basis mit *oberen* Indizes, also z.B. x^μ , während man Koeffizienten einer Linearform bezüglich der zugehörigen Dualbasis mit *unteren* Indizes, also z.B. x_μ , schreibt. Dem Isomorphismus $\flat_g : V \rightarrow V'$ entspricht dann das “*Herunterziehen*” eines Index, etwa

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^n g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{für} \quad \flat_g(x) = g(x, \cdot)$$

wobei $g_{\mu\nu}$ die Koeffizienten von g in der zugehörigen Basisdarstellung bezeichnet. Einer Konvention von Einstein folgend, läßt man auch noch das Summenzeichen weg:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

Wir verwenden diese klassische Indexnotation und Einsteinsche Summenkonvention hier nicht.

Mit Hilfe des Standardskalarprodukts (und allgemeiner mit jeder *Riemannschen Metrik* g , also mit ortsabhängigen Skalarproduktfeldern) können wir Vektorfelder in 1-Formen umrechnen und umgekehrt:

Lemma 2.132 (Isomorphie zwischen Vektorfeldern und 1-Formen durch Skalarprodukt) *Gegeben sei eine glatte Riemannsche Metrik g auf U . Die Abbildung*

$$\flat_g : C^\infty(U, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(U, (\mathbb{R}^n)'),$$

$$\flat_g(V)(x) = g_x(V(x), \cdot)$$

ist ein Isomorphismus.

Einen Spezialfall davon kennen Sie schon aus der Analysis 2, die Umrechnung zwischen Gradient und Ableitung mit dem euklidischen Skalarprodukt σ :

$$\flat_\sigma(V)(x) = \sigma(V(x), \cdot) = \sum_{i=1}^n V_i(x) dx_i$$

für $V = (V_1, \dots, V_n)^t \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, $x \in U$, insbesondere¹⁹

$$\flat_\sigma(\text{grad } f) = \flat_\sigma(\nabla f) = df, \quad \sigma(\nabla f(x), \cdot) = df(x)$$

für $f \in C^\infty(U)$, $x \in U$.

Ähnlich kann man Vektorfelder in $n - 1$ -Formen umrechnen, sobald eine Volumenform ausgezeichnet ist:

Übung 2.133 (Isomorphie zwischen Vektoren und $n - 1$ -Formen durch Volumenform)

Ist V ein n -dimensionaler Vektorraum und ω eine Basis von $\bigwedge^n V'$, so ist

$$*_\omega : V \rightarrow \bigwedge^{n-1} V', \quad *_\omega(v) = i_v(\omega) = \omega(v, \underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{n-1 \text{ Argumente}})$$

ein Isomorphismus.

Wir sind hier besonders am Fall der Standardvolumenform²⁰

$$\lambda_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

¹⁹Erinnerung an die Definition des Gradienten aus der Analysis 2: Der Gradient ist die Transponierte der Jacobimatrix einer reellwertigen Abbildung: $\text{grad } f = Df^t$.

²⁰Wir bezeichnen die Standardvolumenform und das Lebesguemaß mit dem gleichen Symbol λ_n , motiviert durch die natürliche Isomorphie zwischen absolutstetigen signierten Maßen und integrierbaren n -Formen.

interessiert. Hier erhalten wir aus dem Laplace-Entwicklungssatz:

$$*\lambda_n \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} v_i dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Im “klassischen Fall” $n = 3$ bedeutet das:

$$*\lambda_3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 dx_2 \wedge dx_3 + v_2 dx_3 \wedge dx_1 + v_3 dx_1 \wedge dx_2..$$

Fassen wir zusammen:

Lemma 2.134 (Umrechnung zwischen Vektorfeldern und $n-1$ -Formen mit der Volumenform) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} *\lambda_n : C^\infty(U, \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{D}^{n-1}(U), \\ (*\lambda_n V)(x) &:= *\lambda_n(V(x)) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Besonders wichtig ist der Fall $n = 3$:

$$*_{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{D}^2(U)$$

ist ein Isomorphismus.

Weil $\lambda_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ eine Basis von $\bigwedge^n(\mathbb{R}^n)'$ ist, gilt auch:

Lemma 2.135 (Isomorphie zwischen Funktionen und n -Formen durch Multiplikation mit der Volumenform) *Die Multiplikationsabbildung*

$$\cdot \lambda_n : C^\infty(U) \rightarrow \mathcal{D}^n(U), \quad f \mapsto f \cdot \lambda_n$$

ist ein Isomorphismus.

Definition 2.136 (Divergenz eines Vektorfelds) Es sei $V = (V_1, \dots, V_n)^t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Die *Divergenz*

$$\operatorname{div} V : U \rightarrow \mathbb{R}$$

ist die Spur der Ableitung:²¹

$$\operatorname{div} V(x) = \operatorname{Spur} DV(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x)$$

²¹In der Physik und den Ingenieurwissenschaften schreibt man auch manchmal in Anlehnung an die Skalarproduktnotation $\nabla \cdot V$ statt $\operatorname{div} V$, wobei man sich ∇ dann als einen Spaltenvektor $(D_1, D_2, D_3)^t$ aus Differentialoperatoren vorstellt. Wir verwenden diese Notation hier nicht.

Ihr entspricht mit den obigen Isomorphismen die äußere Ableitung $d : \mathcal{D}^{n-1}(U) \rightarrow \mathcal{D}^n(U)$:

Lemma 2.137 (Beziehung zwischen Divergenz und äußerer Ableitung im höchsten Grad) *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{n-1}(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^n(U) \\ *_{\lambda_n} \uparrow \cong & & \cong \uparrow \cdot \lambda_n \\ C^\infty(U, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \end{array}$$

d.h. es gilt

$$d(*_{\lambda_n} V) = (\text{div } V) \cdot \lambda_n$$

für jedes glatte Vektorfeld $V \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$.

Beweis Es bezeichne e_j den j -ten kanonischen Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} d(*_{\lambda_n} V) &= di_V(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \sum_{j=1}^n d(V_j i_{e_j}(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} d(V_j dx_1 \wedge \dots \cancel{dx_j} \dots \wedge dx_n) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} D_j V_j dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \cancel{dx_j} \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{j=1}^n D_j V_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= (\text{div } V) \cdot \lambda_n. \end{aligned}$$

□

Anschauliche Interpretation der Divergenz: Anschaulich kann man sich die Divergenz als die *Quellstärke* eines Vektorfeldes vorstellen: Stellen wir uns das Vektorfeld als das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit vor, so ist die Divergenz positiv in Gebieten, in denen Flüssigkeit neu entsteht, und negativ in Gebieten, in denen sie vernichtet wird.

Analog in der Elektrodynamik: Die Divergenz des elektrischen Feldes ist positiv in Gebieten mit positiven elektrischen Ladungen, und negativ in Gebieten mit negativen elektrischen Ladungen. Die Proportionalität der Divergenz des elektrischen Feldes zur Dichte elektrischer Ladungen wird auch *Gaußsches Gesetz* genannt.

Wir betrachten nun den Spezialfall $n = 3$:

Definition 2.138 (Rotation) Für stetig differenzierbare Vektorfelder $V : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, definieren wir die *Rotation*²² (engl.: “curl”) $\text{rot } V : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\text{rot } V = \begin{pmatrix} D_2 V_3 - D_3 V_2 \\ D_3 V_1 - D_1 V_3 \\ D_1 V_2 - D_2 V_1 \end{pmatrix}$$

Der Rotation entspricht die äußere Ableitung

$$d : \mathcal{D}^1(U) \rightarrow \mathcal{D}^2(U)$$

im folgenden Sinn:

Lemma 2.139 (Beziehung zwischen Rotation und äußerer Ableitung) Für offene $U \subseteq \mathbb{R}^3$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^1(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^2(U) \\ \uparrow \flat_\sigma \cong & & \cong \uparrow *_{\lambda_3} \\ C^\infty(U, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \end{array}$$

d.h. es gilt

$$d\flat_\sigma V = *_{\lambda_3} \text{rot } V$$

für jedes glatte Vektorfeld $V \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} & d\flat_\sigma V \\ &= d(V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + V_3 dx_3) \\ &= dV_1 \wedge dx_1 + dV_2 \wedge dx_2 + dV_3 \wedge dx_3 \\ &= (D_1 V_1) \cancel{dx_1 \wedge dx_1} + \underbrace{(D_2 V_1) dx_2 \wedge dx_1}_{=-dx_1 \wedge dx_2} + (D_3 V_1) dx_3 \wedge dx_1 + \\ & \quad (D_1 V_2) dx_1 \wedge dx_2 + (D_2 V_2) \cancel{dx_2 \wedge dx_2} + \underbrace{(D_3 V_2) dx_3 \wedge dx_2}_{=-dx_2 \wedge dx_3} + \\ & \quad (D_1 V_3) \underbrace{dx_1 \wedge dx_3}_{=-dx_3 \wedge dx_1} + (D_2 V_3) dx_2 \wedge dx_3 + (D_3 V_3) \cancel{dx_3 \wedge dx_3} = 0 \\ &= (D_2 V_3 - D_3 V_2) dx_2 \wedge dx_3 + (D_3 V_1 - D_1 V_3) dx_3 \wedge dx_1 + (D_1 V_2 - D_2 V_1) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (\text{rot } V)_1 dx_2 \wedge dx_3 + (\text{rot } V)_2 dx_3 \wedge dx_1 + (\text{rot } V)_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ &= d\flat_\sigma V. \end{aligned}$$

²²In der Physik und den Ingenieurwissenschaften schreibt man manchmal in Anlehnung an das Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ auch $\nabla \times V$ statt $\text{rot } V$. Wir verwenden auch diese Notation hier nicht.

□

Anschaulich kann man sich die Rotation als *Wirbelstärke* eines Vektorfelds vorstellen, wobei die Richtung des Rotationsvektors in Richtung der Achse eines Wirbels zeigt.

Fassen wir im Fall des Anschauungsraums $\mathbb{R}^3$ zusammen:

Lemma 2.140 (de-Rham-Komplex über $\mathbb{R}^3$ in der klassischen Vektoranalysis)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}^0(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^1(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^2(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^3(U) \\ \parallel & & \cong \uparrow b_\sigma & & \cong \uparrow *_{\lambda_3} & & \cong \uparrow \cdot \lambda_3 \\ C^\infty(U) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(U, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(U, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \end{array}$$

Die Regel $d \circ d = 0$ übersetzt sich in die Formeln

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{rot grad } f = 0} \text{ für } f \in C^\infty(U), \\ \boxed{\text{div rot } V = 0} \text{ für } V \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3). \end{array}$$

Anwendung: Der Laplaceoperator in krummlinigen Koordinaten. *Erinnerung an die Analysis 2:* Der Laplaceoperator einer Funktion $f \in C^\infty(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ist die Spur der Hessematrix

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \text{div grad } f.$$

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}^0(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^1(U) & & \mathcal{D}^{n-1}(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^n(U) \\ \parallel & & \cong \uparrow b_\sigma & & \cong \uparrow *_{\lambda_n} & & \cong \uparrow \cdot \lambda_n \\ C^\infty(U) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(U, \mathbb{R}^n) & = & C^\infty(U, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \end{array}$$

Δ

folgt nun:

$$\Delta f = (\cdot \lambda_n)^{-1} \circ d \circ *_{\lambda_n} \circ b_\sigma^{-1} \circ d(f) = \delta \circ d$$

mit der “Coableitung”

$$\delta := (\cdot \lambda_n)^{-1} \circ d \circ *_{\lambda_n} \circ b_\sigma^{-1} : \mathcal{D}^1(U) \rightarrow \mathcal{D}^0(U).$$

Diese Darstellung des Laplaceoperators hat den Vorteil, dass sie sich leicht in krummlinige Koordinaten umrechnen läßt:

Es sei $h : V \rightarrow U$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus ($U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen). Wir definieren die zurückgezogene Riemannsche Metrik

$$g := h^* \sigma.$$

Vektorfelder auf V werden mit dem “Vorwärtstransport”, “push-forward” mit der Ableitung wie folgt umgerechnet:

$$h_* : C^\infty(V, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^n),$$

$$h_* A(x) := dh_{h^{-1}(x)}(A(h(x)))$$

(wobei $A \in C^\infty(V, \mathbb{R}^n)$, $x \in U$.) Durch Einsetzen sieht man, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(U, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{b_\sigma} & \mathcal{D}^1(U) \\ h_* \uparrow & & \downarrow h^* \\ C^\infty(V, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{b_{h^*\sigma}} & \mathcal{D}^1(V) \end{array}$$

Das folgende kommutative Diagramm fasst die Umrechnung des Laplaceoperators in krummlinige Koordinaten zusammen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \Delta & & & & \\ & \swarrow & & \searrow & & & \\ C^\infty(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^1(U) & \xleftarrow[\cong]{b_\sigma} & C^\infty(U, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow[\cong]{*\omega^\sigma} & \mathcal{D}^{n-1}(U) \xrightarrow{d} \mathcal{D}^n(U) \xleftarrow[\cong]{\cdot\omega^\sigma} C^\infty(U) \\ \cong \downarrow h^* & & \cong \downarrow h^* & & \cong \uparrow h_* & & \cong \downarrow h^* & & \cong \downarrow h^* & & \cong \downarrow h^* \\ C^\infty(V) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^1(V) & \xleftarrow[\cong]{b_g} & C^\infty(V, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow[\cong]{*\omega^g} & \mathcal{D}^{n-1}(V) \xrightarrow{d} \mathcal{D}^n(V) \xleftarrow[\cong]{\cdot\omega^g} C^\infty(V) \end{array}$$

Der durch die folgende Komposition definierte Operator $\Delta_g : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$ bezüglich einer beliebigen Riemannschen Metrik g auf V wird *Laplace-Beltrami-Operator* genannt:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \Delta_g & & & & \\ & \swarrow & & \searrow & & & \\ C^\infty(V) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^1(V) & \xleftarrow[\cong]{b_g} & C^\infty(V, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow[\cong]{*\omega^g} & \mathcal{D}^{n-1}(V) \xrightarrow{d} \mathcal{D}^n(V) \xleftarrow[\cong]{\cdot\omega^g} C^\infty(V) \\ & \uparrow \text{Basis } dy_1, \dots, dy_n & & \uparrow \text{Basis } e_1, \dots, e_n & & \uparrow \text{Basis } (-1)^{i+1} dy_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dy_i} \wedge \dots \wedge dy_n, & & \uparrow \text{Basis } dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \end{array}$$

In Koordinaten geschrieben bedeutet das:

$$(\Delta f) \circ h(y) = \frac{1}{\sqrt{\det g(y)}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sqrt{\det g(y)} \sum_{j=1}^n (g(y)^{-1})_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} (f \circ h)(y) \right)$$

Beispiel 2.141 Es sei $h :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty[\times \{0\}])$, $h(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ die Umrechnung in Polarkoordinaten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} Dh(r, \phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}, \\ G(r, \phi) &= Dh(r, \phi)^t Dh(r, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \\ g(r, \phi) &= dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi, \\ \sqrt{\det g(r, \phi)} &= r, \\ G(r, \phi)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty[\times \{0\}))$:

$$\begin{aligned} \Delta f(h(r, \phi)) &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} f(h(r, \phi)) \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(r \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} f(h(r, \phi)) \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} f(h(r, \phi)) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f(h(r, \phi)). \end{aligned}$$

Übung 2.142 Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt,

$$\begin{aligned} h :]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, \infty[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \\ h(\phi, \theta, r) &= (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta) \end{aligned}$$

die Umrechnung in Kugelkoordinaten, und $F = f \circ h$.

(a) Zeigen Sie:

$$(\Delta f) \circ h = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}$$

Der Kürze halber sind hier die Argumente (ϕ, θ, r) weggelassen.

(b) Wenden Sie diese Formel für $f(x) = x_3 e^{-\|x\|^2}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ an. Berechnen Sie zur Kontrolle auch $(\Delta f) \circ h$ direkt und versuchen Sie, übereinstimmende Ergebnisse zu erhalten.

2.10 Der Satz von Stokes

Der Satz von Stokes stellt ein Integral über eine Untermannigfaltigkeit in Beziehung zu einem Integral über deren Rand. Wir beweisen mehrere Versionen dieses Satzes, mit zunehmender Allgemeinheit.

Die einfachste Version bezieht sich auf offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und auf “Eckgebiete”, die wie folgt definiert sind:

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ sei

$$\mathbb{H}_{n,k} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$$

und

$$\partial \mathbb{H}_{n,k} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j \geq 0 \text{ für } 1 \leq j \leq k, x_i = 0 \text{ für mindestens ein } 1 \leq i \leq k\}$$

deren Rand. Zum Beispiel:

- $\mathbb{H}_{n,0} = \mathbb{R}^n$ mit leerem Rand $\partial \mathbb{H}_{n,0} = \emptyset$;
- $\mathbb{H}_{n,1}$ ist ein Halbraum mit der Hyperebene $\partial \mathbb{H}_{n,1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ als Rand;
- $\mathbb{H}_{2,2}$ ist der erste Quadrant in der Ebene, mit der positiven x -Achse und der positiven y -Achse als Rand, etc.

Der Rand $\partial \mathbb{H}_{n,k}$ setzt sich aus den Teilen

$$\partial_j \mathbb{H}_{n,k} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k, x_j = 0\}, \quad j = 1, \dots, k$$

zusammen, die sich wiederum in mindestens 2-kodimensionalen Gebilden (“Ecken und Kanten”) schneiden:

$$\begin{aligned} \partial^2 \mathbb{H}_{n,k} := & \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k, \\ & x_j = 0 \text{ für mindestens zwei verschiedene } j \in \{1, \dots, k\}\} \end{aligned}$$

Wir versehen $\partial_j \mathbb{H}_{n,k}$, $j = 1, \dots, k$, mit der Orientierung, die die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \pi_{n,j,k} : \mathbb{H}_{n-1,k-1} &\rightarrow \partial_j \mathbb{H}_{n,k}, \\ \pi_{n,j,k}(x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, \underbrace{0}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

orientiert für gerade j und *orientierungsumkehrend* für ungerade j macht. Entfernen wir die 2-kodimensionalen “Ecken und Kanten” $\partial_i \mathbb{H}_{n,k} \cap \partial_j \mathbb{H}_{n,k}$, $i \neq j$, aus $\partial \mathbb{H}_{n,k}$, wird der verbleibende Rest von $\partial \mathbb{H}_{n,k}$ so zu einer orientierten 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Integration über $\partial \mathbb{H}_{n,k}$ meint im Folgenden eigentlich Integration über diesen Rest.

Für ein Gebiet U (offen oder berandet mit stückweise glattem Rand, z.B. $U = \mathbb{H}_{n,k}$ oder ein diffeomorphes Bild davon), bezeichnen wir mit $C_c^1(U, \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)')$, $p \in \mathbb{N}_0$, den Raum aller stetig differenzierbaren p -Formen ω auf U mit “*kompaktem Träger*”, (engl.: “*compact support*”). Dabei wird der Träger definiert als der topologische Abschluss

$$\text{supp } \omega := \overline{\{x \in U \mid \omega_x \neq 0\}}$$

des Komplements des Nullstellengebildes von ω . Hierbei ist der topologische Abschluß in U bezüglich der Teilraumtopologie gemeint, und die stetige Differenzierbarkeit von ω am Rand im Sinne einseitiger stetiger Differenzierbarkeit gemeint.

Hier ist eine mehrdimensionale Variante des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

Satz 2.143 (Satz von Stokes – Version für $\mathbb{R}^n$, Halbräume und Eckgebiete) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ und $\omega \in C_c^1(\mathbb{H}_{n,k}, \bigwedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)')$. Dann gilt:

$$\boxed{\int_{\mathbb{H}_{n,k}} d\omega = \int_{\partial\mathbb{H}_{n,k}} \omega}$$

Im Fall $k = 0$ bedeutet das insbesondere

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0}$$

denn $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$.

Man kann sich das so merken: Die äußere Ableitung d und der “Randoperator” ∂ sind bezüglich der durch das Integral gegebenen “Klammer” adjungiert zueinander.

Im Spezialfall $n = 1$ besteht der Satz einfach aus folgenden beiden Fällen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

- *Version für $\mathbb{H}_{1,0} = \mathbb{R}$:* Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} df = \int_{\mathbb{R}} f'(x) dx = 0 \quad (72)$$

Dies folgt aus dem Hauptsatz so:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f'(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} (f(a) - f(-a)) = 0,$$

denn $f(a)$ und $f(-a)$ verschwinden für alle genügend großen a .

- *Version für $\mathbb{H}_{1,1} = \mathbb{R}_0^+$:* Ist $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger, so gilt²³

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} df = \int_0^\infty f'(x) dx = -f(0). \quad (73)$$

Dies folgt aus dem Hauptsatz so:

$$\int_0^\infty f'(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f'(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} (f(a) - f(0)) = -f(0),$$

denn $f(a)$ verschwindet für alle genügend großen a .

²³Das Minuszeichen passt zur negativ gewählten Orientierung von $\partial_1 \mathbb{H}_{1,1} = \{0\}$.

Beweis des Satzes im allgemeinen Fall: Wir betrachten die Basisdarstellung von ω :

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Wir erhalten für $j = 1, \dots, k$ und $(x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n) \in \mathbb{H}_{n-1, k-1}$

$$\begin{aligned} (\pi_{n,j,k}^* \omega)_{(x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n)} &= \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, \underbrace{0}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, x_n) \pi_{n,j,k}^*(dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= f_j(x_1, \dots, \underbrace{0}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Man beachte, dass hier alle Summanden mit Index $i \neq j$ verschwinden, da für den Faktor dx_j , der dann in $dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ vorkommt, 0 eingesetzt wird. Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{H}_{n-1, k-1}} \pi_{n,j,k}^* \omega = \int_{\mathbb{H}_{n-1, k-1}} f_j(x_1, \dots, \underbrace{0}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, x_n) \lambda_{n-1}(d(x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n))$$

und daher

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbb{H}_{n,k}} \omega &= \sum_{j=1}^k \int_{\partial_j \mathbb{H}_{n,k}} \omega \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_{\mathbb{H}_{n-1, k-1}} \pi_{n,j,k}^* \omega \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_{\mathbb{H}_{n-1, k-1}} f_j(x_1, \dots, \underbrace{0}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, x_n) \lambda_{n-1}(d(x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n)), \quad (74) \end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen $(-1)^j$ aufgrund der Wahl der Orientierung von $\partial_j \mathbb{H}_{n,k}$ steht. Andererseits folgt

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^n df_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n D_i f_j dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{j=1}^n D_j f_j dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} D_j f_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

denn die Summanden mit Indizes $i \neq j$ verschwinden, da dann ein Faktor dx_i doppelt im Dachprodukt vorkommt. Das Vorzeichen $(-1)^{j-1}$ ist nun entstanden, weil der Faktor dx_j im Dachprodukt von der ersten Stelle an die j -te Stelle getauscht wird, also mit $j-1$ Faktoren vertauscht wird. Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{H}_{n,k}} d\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{H}_{n,k}} D_j f_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (75)$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{H}_{n,k}} D_j f_j(x) \lambda_n(dx), \quad (76)$$

Betrachten wir den j -ten Summanden in der letzten Summe. Wir unterscheiden zwei Fälle: $j > k$ und $j \leq k$.

1. Im Fall $j > k$ haben wir

$$\mathbb{H}_{n,k} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, \cancel{x_j}, x_n) \in \mathbb{H}_{n-1,k}, x_j \in \mathbb{R}\},$$

also nach Fubini

$$\int_{\mathbb{H}_{n,k}} D_j f_j(x) \lambda_n(dx) = \int_{\mathbb{H}_{n-1,k}} \int_{\mathbb{R}} D_j f_j(x_1, \dots, x_n) dx_j \lambda_{n-1}(d(x_1, \dots, \cancel{x_j}, x_n))$$

Das innere Integral verschwindet hier:

$$\int_{\mathbb{R}} D_j f_j(x_1, \dots, x_n) dx_j = 0$$

für alle $(x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n) \in \mathbb{H}_{n-1,k}$ wegen der Konsequenz (72) des Hauptsatzes, da f_j kompakten Träger hat. Es folgt

$$\int_{\mathbb{H}_{n,k}} D_j f_j(x) \lambda_n(dx) = 0.$$

2. Im Fall $j \leq k$ haben wir analog

$$\mathbb{H}_{n,k} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n) \in \mathbb{H}_{n-1,k-1}, x_j \in \mathbb{R}_0^+\},$$

also wieder nach Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}_{n,k}} D_j f_j(x) \lambda_n(dx) &= \int_{\mathbb{H}_{n-1,k-1}} \int_{\mathbb{R}_0^+} D_j f_j(x_1, \dots, x_n) dx_j \lambda_{n-1}(d(x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n)) \\ &= \int_{\mathbb{H}_{n-1,k-1}} -f_j(x_1, \dots, \underbrace{0}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, x_n) \lambda_{n-1}(d(x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

wobei wir das innere Integral wir mit der Variante (73) des Hauptsatzes ausgerechnet haben:

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} D_j f_j(x_1, \dots, x_n) dx_j = -f_j(x_1, \dots, \underbrace{0}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, x_n)$$

für alle $(x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n) \in \mathbb{H}_{n-1, k-1}$.

Beide Fälle in (75) eingesetzt:

$$\int_{\mathbb{H}_{n, k}} d\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_{\mathbb{H}_{n-1, k-1}} f_j(x_1, \dots, \underbrace{0}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, x_n) \lambda_{n-1}(d(x_1, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n)) \quad (77)$$

Vergleichen wir die Ergebnisse (74) und (77) miteinander, folgt die Behauptung:

$$\int_{\mathbb{H}_{n, k}} d\omega = \int_{\partial \mathbb{H}_{n, k}} \omega.$$

□

Wir betrachten nun *stückweise glatt berandete orientierbare* Untermannigfaltigkeiten²⁴ von $\mathbb{R}^m$. Diese sind so definiert:

Definition 2.144 (stückweise glatt berandete Untermannigfaltigkeiten) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *n-dimensionale stückweise glatt²⁵ berandete Untermannigfaltigkeit* wenn es für jeden Punkt $x \in M$ folgende Objekte gibt: Eine in M offene Umgebung $V \subseteq M$ von x , eine Zahl $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, eine in $\mathbb{H}_{n, k}$ offene Umgebung U von $0 \in \mathbb{H}_{n, k}$ und eine glatte Parametrisierung $\phi : U \rightarrow V$ (d.h. einen glatten Homöomorphismus, dessen Ableitung an jeder Stelle, auch am Rand, vollen Rang hat). Braucht zur Parametrisierung man keine Eckgebiete, also nur $k = 0, 1$, so nennt man M eine *glatt berandete* Untermannigfaltigkeit (ohne den Zusatz “stückweise”). Die Vereinigung aller Ränder $\phi[U \cap \partial \mathbb{H}_{n, k}]$ über alle Parametrisierungen $\phi : U \rightarrow V \subseteq M$ wird *Rand²⁶* von M genannt und mit ∂M bezeichnet. Punkte in der Vereinigung $\partial^2 M$ aller $\phi[U \cap \partial^2 \mathbb{H}_{n, k}]$ werden *Eckpunkte* oder *singuläre Randpunkte* genannt.

Nach Entfernung der singulären Randpunkte $\partial^2 M$ wird auch ∂M wieder zu einer Untermannigfaltigkeit, wobei jede Parametrisierung ϕ von M wie oben Parametrisierungen $\phi \circ \pi_{n, j, k}$, $j = 1, \dots, k$ eines Stücks von ∂M induziert.

Eine *Orientierung* von M wird durch eine Orientierung des Inneren $M \setminus \partial M$ gegeben. Eine Orientierung von M induziert auch eine Orientierung von ∂M wie folgt: Für jede Parametrisierung ϕ von M wie oben mit Orientierungsvorzeichen $\sigma \in \{\pm 1\}$ sollen die Parametrisierungen $\phi \circ \pi_{n, j, k}$, $j = 1, \dots, k$, von ∂M das Orientierungsvorzeichen $\sigma \cdot (-1)^j$ tragen.

²⁴Die gesamte Theorie dieses Abschnitts funktioniert ebenso für die Regularitätsklasse C^r , $r \in \mathbb{N}$, statt Glattheit. Um die Sprechweise möglichst einfach zu halten, verzichten wir auf die Formulierung, obwohl man praktisch überall nur “glatt” durch “ C^r ” ersetzen muss.

²⁵Stückweise C^r berandete Untermannigfaltigkeiten werden analog definiert, indem man “glatt” durch “ C^r ” ersetzt.

²⁶Man beachte, dass dieser Randbegriff nicht ganz mit dem topologischen Randbegriff übereinstimmt.

Neu gegenüber der früheren Definition von Untermannigfaltigkeiten ist also das Auftreten von Randpunkten, Eckpunkten und “Randkarten”.

Beispiel 2.145 1. Veranschaulichen wir uns die Randorientierung bei einer kompakten, einfach zusammenhängenden Fläche M in $\mathbb{R}^2$ mit einer glatten Randkurve ∂M : Eine Parametrisierung der Randkurve mit Durchlaufrichtung gegen den Uhrzeigersinn ist bezüglich der Randorientierung positiv orientiert, bei Durchlaufrichtung im Uhrzeigersinn negativ orientiert.

2. Der abgeschlossene Würfel $W = [0, 1]^3$ im $\mathbb{R}^3$ ist eine stückweise glatt berandete Untermannigfaltigkeit. Die Seitenflächen bilden den Rand ∂W des Würfels, die Ecken und Kanten den singulären Teil $\partial^2 W$ des Randes.

3. Die Halbkugel

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

ist eine stückweise glatt berandete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ der Dimension 3. Ihr Rand $\partial H = S_+^2 \cup E$ besteht aus der oberen Halbsphäre

$$S_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

und der Äquatorialscheibe

$$E = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Der Äquator

$$\partial^2 H = E \cap S_+^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

bildet die singulären Randpunkte. Die obere Halbsphäre S_+^2 bildet selbst eine glatt berandete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2 mit dem Äquator $\partial S_+^2 = \partial^2 H$ als Rand. Wir versehen S_+^2 und E mit der von H vererbten Randorientierung. Dann gilt symbolisch

$$“\partial S_+^2 = -\partial E”,$$

wobei das Minuszeichen hier bedeuten soll, dass ∂S_+^2 und ∂E zwar als Mengen übereinstimmen, aber umgekehrte Randorientierungen vererbt bekommen haben. In diesem Sinn gilt symbolisch:²⁷

$$“\partial \partial H = \partial S_+^2 + \partial E = 0”$$

Aufgrund der guten Verträglichkeit des Integrals und der äußeren Ableitung mit Diffeomorphismen erhalten wir:

²⁷Die Gleichung $\partial \circ \partial = 0$, die wir hier an einem Beispiel sehen, kann man als duale Gleichung zu $d \circ d = 0$ auffassen. Wir verzichten hier darauf, den Randoperator ∂ auf formalen Linearkombinationen berandeter Untermannigfaltigkeiten genau einzuführen. Genauer dazu können Sie in Vorlesungen über algebraische Topologie lernen.

Korollar 2.146 (Satz von Stokes – lokale Version) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$, $U \subseteq \mathbb{H}_{n,k}$ eine relativ zu $\mathbb{H}_{n,k}$ offene Teilmenge mit $0 \in U$ und $\phi : U \rightarrow V \subseteq M$ eine Parametrisierung einer stückweise glatt berandeten Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^m$. Weiter sei²⁸ $\partial U := U \cap \partial \mathbb{H}_{n,k}$, versehen mit der von $\partial \mathbb{H}_{n,k}$ geerbten Orientierung, und $\partial V := \phi[U \cap \partial \mathbb{H}_{n,k}]$. Wir versehen V und ∂V entweder mit der Orientierung, die $\phi : U \rightarrow V$ und $\phi|_{\partial U} : \partial U \rightarrow \partial V$ orientierungstreu macht, oder beide mit der Orientierung, die diese beiden Abbildung orientierungsumkehrend macht. Dann gilt für alle stetig differenzierbaren $(n-1)$ -Formen ω auf V mit kompaktem Träger in V :

$$\boxed{\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega}$$

Beweis: Es gilt $\phi^*\omega \in C_c^1(U, \bigwedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)')$. Setzen wir $\phi^*\omega$ (und $d\omega$) durch 0 auf ganz $\mathbb{H}_{n,k}$ fort und bezeichnen die Fortsetzung (in leicht missbräuchlicher Notation) wieder mit $\phi^*\omega$, so folgt auch $\phi^*\omega \in C_c^1(\mathbb{H}_{n,k}, \bigwedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)')$; analog für $\phi^*d\omega$. Aus der ersten Version des Satzes von Stokes erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_V d\omega &= \pm \int_{\phi^{-1}[V]} \phi^*d\omega = \pm \int_U d\phi^*\omega = \pm \int_{\mathbb{H}_{n,k}} d\phi^*\omega = \\ &= \pm \int_{\partial \mathbb{H}_{n,k}} \phi^*\omega = \pm \int_{\partial U} \phi^*\omega = \pm \int_{\phi^{-1}[\partial V]} \phi^*\omega = \\ &= \int_{\partial V} \omega, \end{aligned}$$

wobei das obere Vorzeichen im orientierungstreuen Fall und das untere Vorzeichen im orientierungsumkehrenden Fall gilt.

□

Um aus der lokalen Version des Satzes von Stokes eine “globale” Version herzuleiten, verwenden wir eine Verfeinerung einer Technik, die wir schon beim “Zusammenkleben” von kartenweise definierten Oberflächenmaßen zu einem Maß auf der ganzen Mannigfaltigkeit gebraucht haben: “Zerlegung der Eins”, englisch “partition of unity”. Es ist eine Standardtechnik, von lokalen zu globalen Aussagen zu kommen. Wir besprechen hier nur einen Spezialfall.

Definition 2.147 (endliche Zerlegungen der Eins) Es sei M eine stückweise glatt berandete orientierbare Untermannigfaltigkeit, $K \subseteq M$ kompakt, und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine endliche²⁹ in M offene Überdeckung von K . Eine der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins über K ist eine Familie $(\chi_i : M \rightarrow [0, 1])_{i \in I}$ von stetigen Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:

²⁸Man beachte, dass die hier definierten Ränder nicht ganz das Gleiche wie die topologischen Ränder in $\mathbb{R}^n$ sind.

²⁹Varianten der Technik verwenden *lokal endliche* Überdeckungen. Wir brauchen diese hier nicht.

1. Für alle $i \in I$ ist

$$\text{supp } \chi_i := \overline{\{x \in M \mid \chi_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_i.$$

2. Es gibt eine in M offene Menge V mit $K \subseteq V \subseteq M$, so dass $\sum_{i \in I} \chi_i$ auf V konstant gleich 1 ist. Eine Zerlegung der Eins $(\chi_i)_{i \in I}$ nennen wir glatt, wenn alle χ_i glatt sind.

Obwohl wir für unsere Anwendung eigentlich nur stetig differenzierbare Zerlegungen der Eins bräuchten, konstruieren wir im Hinblick auf andere Anwendungen sogar glatte Zerlegungen der Eins. Hierzu einige Vorbereitungen:

Lemma 2.148 (glatte Abschneidefunktionen) 1. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ist glatt und nimmt auf $\mathbb{R}^+$ positive Werte an.

2. Gegeben zwei reelle Zahlen $a < b$, ist die Abbildung

$$g_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad g_{a,b}(x) = \frac{f(x-a)}{f(x-a) + f(b-x)}$$

glatt mit $g_{a,b}(x) = 0$ für $x \leq a$ und $g_{a,b}(x) = 1$ für $x \geq b$.

3. Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und zwei Radien $R > r > 0$. Dann ist die Funktion

$$f_{r,R} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1], \quad f_{r,R}(x) = 1 - g_{r^2, R^2}(\|x\|_2^2)$$

glatt mit $f_{r,R}(x) = 0$ für $\|x\|_2 \geq R$ und $f_{r,R}(x) = 1$ für $\|x\|_2 \leq r$.

4. Es sei M eine n -dimensionale stückweise glatt berandete Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^m$, $x \in M$ ein Punkt und $\phi : U \rightarrow V \subseteq M$ eine Parametrisierung von einer offenen Umgebung U von 0 in $\mathbb{H}_{n,k}$ ($k \in \{0, \dots, n\}$ geeignet) auf eine in M offene Menge $V \subseteq M$ mit $\phi(0) = x$. Es seien $R > r > 0$ so klein, dass $B_R \subseteq U \cap \mathbb{H}_{n,k}$ gilt, wobei $B_R := \{y \in \mathbb{H}_{n,k} \mid \|y\|_2 \leq R\}$. Dann ist die Funktion

$$f : M \rightarrow [0, 1], \quad f(z) = \begin{cases} f_{r,R}(\phi^{-1}(z)) & \text{für } z \in V, \\ 0 & \text{für } z \in M \setminus \phi[B_R] \end{cases}$$

wohldefiniert und glatt mit kompaktem Träger $\text{supp } f = \phi[B_R] \subseteq V$ und konstant gleich 1 auf der Umgebung $\phi[B_r]$ von x in M .

Beweis:

1. Induktiv sieht man, dass f eingeschränkt auf $\mathbb{R}^+$ glatt ist mit der k -ten Ableitung

$$D^k f(x) = p_k(x^{-1})e^{-x^{-1}}, \quad x > 0, \quad (78)$$

mit einem Polynom p_k vom Grad $2k$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$.

‘Übung 2.149 Beweisen Sie die Formel (78).

Wir zeigen nun induktiv: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ existiert $D^k f$ überall, und es gilt $D^k f(x) = 0$ für $x \leq 0$. Der Induktionsanfang $k = 0$ ist klar. Induktionsvoraussetzung: Gelte die Behauptung nun für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}_0$. Wegen $e^{-1/x} = o(x^m)$ für $x \downarrow 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt für $x > 0$:

$$\frac{D^k f(x) - D^k f(0)}{x} = x^{-1} p_k(x^{-1}) e^{-x^{-1}} \xrightarrow{x \downarrow 0} 0.$$

Trivialerweise gilt auch für $x < 0$:

$$\frac{D^k f(x) - D^k f(0)}{x} = 0,$$

also zusammen $D^{k+1} f(0) = 0$. Zusammen mit der trivialen Aussage $D^{k+1} f(x) = 0$ für $x < 0$ folgt die Behauptung.

2. Man beachte, dass der Nenner $f(x - a) + f(b - x)$ für kein $x \in \mathbb{R}$ verschwindet, denn $f(x - a) > 0$ genau für $x > a$ und $f(b - x) > 0$ genau für $x < b$. Also ist $g_{a,b}$ glatt, da f glatt ist. Die Behauptungen für die Werte 0 und 1 von g sind klar.
3. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Behauptung 2., da g_{r^2, R^2} und die Norm-Quadrat-Abbildung glatt sind.
4. Die Menge $\phi[B_R]$ ist als Bild der kompakten Menge B_R unter der stetigen Abbildung B_R abgeschlossen; also ist $M \setminus \phi[B_R]$ offen in M . Obwohl die Funktion f auf $V \cap (M \setminus \phi[B_R]) = \phi[U \setminus B_R]$ ‘doppelt definiert’ ist, ist sie auch dort wohldefiniert, da $f_{r,R}$ auf $U \setminus B_R$ verschwindet. Zudem bilden V und $M \setminus \phi[B_R]$ zusammen eine offene Überdeckung von M . Weil sowohl ϕ als auch $f_{r,R}$ glatt sind, ist auch f glatt auf V . Ebenso ist f glatt auf $M \setminus \phi[B_R]$. Also ist f überall glatt. Die übrigen Behauptungen über f folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften von $f_{r,R}$.

□

Mit Hilfe der glatten Abschneidefunktionen konstruieren wir nun glatte Zerlegungen der 1:

Lemma 2.150 (glatte Zerlegungen der Eins) *Es sei M eine stückweise glatt berandete n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$, $K \subseteq M$ kompakt und $(\phi_i^{-1} : V_i \rightarrow U_i)_{i \in J}$ ein Atlas von M . Dann gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(V_i)_{i \in I}$, $I \subseteq J$ von K der Überdeckung $(V_i)_{i \in J}$ und eine dieser Teilüberdeckung untergeordnete glatte Zerlegung $(\chi_i : M \rightarrow [0, 1])_{i \in I}$ der Eins über K .*

Beweis: Wir wählen nach Teil 4. des vorhergehenden Lemmas für jedes $x \in K$ ein $i(x) \in J$ mit $x \in V_{i(x)}$ und eine glatte Funktion $f_x : M \rightarrow [0, 1]$ mit kompaktem Träger in $V_{i(x)}$ aus, die in einer offenen Umgebung $W_x \subseteq V_{i(x)}$ von x konstant gleich 1 ist. Dann ist $(W_x)_{x \in K}$

eine offene Überdeckung von K , besitzt also wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $(W_x)_{x \in E}$ von K . Es sei $I := \{i(x) \mid x \in E\}$ und

$$\eta_i := \sum_{x \in E} 1_{\{i(x)=i\}} f_x$$

für alle $i \in I$. Dann ist $(\eta_i)_{i \in I}$ noch nicht ganz die gewünschte Zerlegung der Eins, denn zwar ist der Träger von jedem η_i in V_i enthalten, doch

$$S := \sum_{i \in I} \eta_i$$

ist nicht konstant *gleich* 1 in einer offenen Menge, die K umfaßt, sondern dort *größer oder gleich* 1. Daher modifizieren wir die η_i noch etwas: Wir nehmen noch einen weiteren Index, nennen wir ihn “*”, zu I hinzu und setzen

$$\eta_* := 1 - g_{0,1} \circ S : M \rightarrow [0, 1], \quad S^* := \sum_{i \in I \cup \{*\}} \eta_i = S + \eta_*$$

mit der Funktion $g_{0,1}$ aus Teil 2. des vorhergehenden Lemmas. Dann ist $S^* > 0$ überall, $\chi_* = 0$ in einer Umgebung von K , also

$$\chi_i := \frac{\eta_i}{S^*}, \quad i \in I \cup \{*\}$$

wohldefiniert, glatt, und

$$\sum_{i \in I \cup \{*\}} \chi_i = 1.$$

Die χ_i , $i \in I$ bilden also die gewünschte Zerlegung der Eins über K .

□

Wir kommen nun zu einem Höhepunkt der Vorlesung:

Satz 2.151 (Satz von Stokes für stückweise glatt berandete orientierte Untermannigfaltigkeiten) *Es sei M eine n -dimensionale stückweise stetig differenzierbar berandete orientierte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$. Dann gilt für alle stetig differenzierbaren $(n-1)$ -Formen ω auf M mit kompaktem Träger in M :*

WICHTIG!

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$

Beweis: Wir führen diese Version des Satzes von Stokes mit Hilfe einer Zerlegung der Eins auf die lokale Version des Satzes zurück:

Nach Lemma 2.150 sei $(\phi_i : U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie von Parametrisierungen (orientierungstreu oder orientierungsumkehrend) von M , so dass die V_i die kompakte

Menge $K := \text{supp } \omega$ überdecken, sowie $(\chi_i : M \rightarrow [0, 1])_{i \in I}$ eine dieser Überdeckung untergeordnete glatte Zerlegung der Eins über K . Insbesondere gilt

$$\omega = \sum_{i \in I} \chi_i \omega, \quad d\omega = \sum_{i \in I} d(\chi_i \omega).$$

Wir erhalten mit der lokalen Version des Satzes von Stokes:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{i \in I} \int_M d(\chi_i \omega) = \sum_{i \in I} \int_{V_i} d(\chi_i \omega) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\partial V_i} \chi_i \omega = \sum_{i \in I} \int_{\partial M} \chi_i \omega = \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

□

Übung 2.152 Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Behauptung des Satzes von Stokes falsch werden kann, wenn man auf die Voraussetzung verzichtet, dass ω kompakten Träger haben soll.

Beispiel 2.153 1. Im einfachsten Fall $M = [a, b]$ mit $a < b$ und glattem $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ reduziert sich der Satz von Stokes auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} df = \int_{\partial[a, b]} f = f(b) - f(a).$$

2. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine glatt berandete kompakte Fläche in der Ebene mit einer glatten Randkurve ∂A , im positiven Gegenuhreigersinn durchlaufen. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \int_{\partial A} x dy - y dx = \lambda_2(A),$$

denn aus dem Satz von Stokes folgt

$$\int_{\partial A} x dy - y dx = \int_A d(x dy - y dx) = 2 \int_A dx \wedge dy = 2\lambda_2(A).$$

Diese Formel für die Fläche von A kennen Sie schon aus der Analysis 1, damals mit einer heuristisch-intuitiven Herleitung:

$$\frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt = \lambda_2(A),$$

wobei $(x, y) : [a, b] \rightarrow \partial A$ eine Parametrisierung von ∂A im Gegenuhreigersinn ist.

Übung 2.154 Gegeben sei die 2-Form $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$. Berechnen Sie das Integral $\int_{S^2} \omega$ über die Sphäre (so orientiert, dass ω darauf positiv wird) auf zwei verschiedene Weisen:

1. direkt als zweidimensionales Integral;

2. mit dem Satz von Stokes.

Korollar 2.155 (Satz von Stokes für geschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten)

Es sei M eine geschlossene n -dimensionale Untermannigfaltigkeit, also eine kompakte Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Dann gilt für jede glatte n -Form ω über M :

$$\int_M d\omega = 0.$$

Dies folgt einfach aus dem allgemeinen Satz von Stokes wegen $\partial M = \emptyset$.

Beispiel 2.156 (Wirtingerkalkül und Cauchy-Integralsatz)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein kompaktes Gebiet mit stückweise glattem Rand ∂U , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar (im reellen Sinne, also im Sinn der Analysis 2.) Es bezeichne $x : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Realteilbildung, $y : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Imaginärteilbildung, $z = x + iy : U \rightarrow \mathbb{C}$ die Identität³⁰ und $\bar{z} = z - iy : U \rightarrow \mathbb{C}$ die Komplexkonjugation. Man beachte, dass alle diese Abbildungen $\mathbb{R}$ -linear sind, aber nur z ist auch $\mathbb{C}$ -linear. Man beachte, dass sowohl dx, dy als auch $dz, d\bar{z}$ eine $\mathbb{C}$ -Basis des $\mathbb{C}$ -Vektorraums aller $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bilden. Wir verwenden folgende Notation, *Wirtingerkalkül* genannt, für die Koeffizienten der Ableitung von f bezüglich dieser beiden Basen:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

wobei die folgenden Umrechnungsformeln gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} dz &= dx + i dy, \\ d\bar{z} &= dx - i dy. \end{aligned}$$

Wir erweitern die äußere Ableitung auch auf komplexwertige Formen komponentenweise für Real- und Imaginärteil; analog wird auch das Integral und das Dachprodukt auf komplexwertige Formen erweitert. Dann gilt folgender *Cauchy-Integralsatz*:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial U} f dz = 0}$$

³⁰genauer gesagt: die Inklusionsabbildung

Die Voraussetzung

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

wird *Cauchy-Riemann-Gleichung* genannt; erfüllt f diese Voraussetzung, nennt man f *holomorph*. Holomorphe Funktionen sind der Gegenstand der Funktionentheorie.

Beweis des Cauchy-Integralsatzes: Die Rechnung sieht im Wirtingerkalkül mit der Basis $dz, d\bar{z}$ besonders einfach aus:

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} f dz &= \int_U d(f dz) \quad (\text{mit Stokes}) \\ &= \int_U df \wedge dz = \int_U \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz \\ &= \int_U \frac{\partial f}{\partial z} \underbrace{dz \wedge dz}_{=0} = 0 \quad (\text{wegen } \partial f / \partial \bar{z} = 0) \end{aligned}$$

Weil der Wirtingerkalkül vielleicht zunächst etwas gewöhnungsbedürftig ist, wird die gleiche Rechnung hier noch einmal in der “reellen Basis” dx, dy dargestellt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} f dz &= \int_{\partial U} f dx + i f dy = \int_U d(f dx + i f dy) \quad (\text{mit Stokes}) \\ &= \int_U \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge dx + i \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \int_U \frac{\partial f}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dx}_{=-dx \wedge dy} + i \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \quad (\text{wegen } dx \wedge dx = 0 = dy \wedge dy) \\ &= i \int_U \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{=0} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

□

Der Spezialfall des Satzes von Stokes für offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit (stückweise) glattem Rand ist historisch älter und stammt von Gauß. Formulieren wir ihn auch in der Sprache der klassischen Vektoranalysis:

Satz 2.157 (Satz von Gauß) *Es sei $M = \bar{U}$ der Abschluss einer offenen Menge U in $\mathbb{R}^n$ mit stückweise glattem Rand ∂M . M wird so orientiert, dass $\lambda_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ positiv ist. ∂M wird mit der zugehörigen Randorientierung versehen, d.h. für jeden glatten Randpunkt x und den zugehörigen nach außen zeigenden (normierten) Normalenvektor $N_x \perp T_x \partial M$ sei die Oberflächenform*

$$\omega_x^{\partial M} = i_{N(x)} \lambda_n|_{(T_x \partial M)^{n-1}}$$

positiv. Dann gilt für jedes C^1 -Vektorfeld $V : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger:

$$\boxed{\int_M \operatorname{div} V \lambda_n = \int_{\partial M} i_V \lambda_n} \quad (79)$$

und, mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anders geschrieben:

WICHTIG!

$$\boxed{\int_M \operatorname{div} V \lambda_n = \int_{\partial M} \langle V, N \rangle \omega^{\partial M}.} \quad (80)$$

Natürlich kann man hier auch die Notation $i_V \lambda_n = *_{\lambda_n} V$ verwenden.

Beweis des Satzes: Die erste Darstellung (80) folgt aus dem Satz von Stokes wegen

$$\operatorname{div} V \lambda_n = di_V \lambda_n$$

so:

$$\int_M \operatorname{div} V \lambda_n = \int_M di_V \lambda_n = \int_{\partial M} i_V \lambda_n.$$

Um die zweite Darstellung (80) daraus herzuleiten, beobachten wir für alle glatten Randpunkte $x \in \partial M$:

$$V_x - \langle V_x, N_x \rangle N_x \in T_x \partial M,$$

also für alle $w_1, \dots, w_{n-1} \in T_x \partial M$:

$$\lambda_n(V_x, w_1, \dots, w_{n-1}) = \langle V_x, N_x \rangle \lambda_n(N_x, w_1, \dots, w_{n-1}) = \langle V_x, N_x \rangle \omega_x^{\partial M}(w_1, \dots, w_{n-1})$$

d.h.

$$\Phi^* i_V \lambda_n = \Phi^* (\langle V, N \rangle \omega^{\partial M})$$

für jede Parametrisierung Φ von ∂M . Es folgt die Behauptung:

$$\int_M \operatorname{div} V \lambda_n = \int_{\partial M} i_V \lambda_n = \int_{\partial M} \langle V, N \rangle \omega^{\partial M}.$$

□

Anschauliche Interpretation: Stellen wir uns $\operatorname{div} V$ als die Quellstärke eines Flüssigkeitsstroms vor, so wird $\int_M \operatorname{div} V \lambda_n$ als die (pro Zeiteinheit) in M neu erzeugte Flüssigkeitsvolumen interpretiert. Andererseits bedeutet

$$\int_{\partial M} i_V \lambda_n = \int_{\partial M} \langle V, N \rangle \omega^{\partial M}$$

die (pro Zeiteinheit) durch den Rand ∂M von innen nach außen hindurchtretende Flüssigkeitsvolumen. Man nennt dies den *Fluss* von V durch ∂M . Der Satz von Gauß ist also eine Bilanzgleichung für das Flüssigkeitsvolumen:

in M erzeugte Flüssigkeitsmenge = durch ∂M austretende Flüssigkeitsmenge

Etwas allgemeiner definieren wir:

Definition 2.158 (Fluss) Es sei A eine orientierte Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ und $V : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein messbares Vektorfeld. Es sei N das normierte Normalenvektorfeld auf A , so orientiert, dass $i_N \lambda_n$ die *positive* Oberflächenform ω^A auf A beschreibt. Man nennt

$$\Phi(V, A) := \int_A i_V \lambda_n = \int_A *_{\lambda_n} V = \int_A \langle V, N \rangle \omega^A$$

(falls das Integral existiert) den *Fluss* von V durch A .

Beispiel 2.159 Wir betrachten die Sphäre $S^{n-1} = \partial B_n$ als Rand der Einheitskugel B_n . Das Vektorfeld $V = \text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V(x) = x$ besitzt die Divergenz $\text{div } V = n$ (Spur der Einheitsmatrix). Es sei $\omega^{S^{n-1}}$ das Oberflächenmaß auf S^{n-1} . Für das radial nach außen zeigende normierte Normalenvektorfeld $N = V|_{S^{n-1}}$ folgt daher für die Oberfläche der Sphäre:

$$\omega^{S^{n-1}}(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} \omega^{S^{n-1}} = \int_{S^{n-1}} \langle V, N \rangle \omega^{S^{n-1}} = \int_{B_n} \text{div } V \lambda_n = n \lambda_n(B_n).$$

In drei Dimensionen bedeutet das: Die Oberfläche 4π der Einheitskugel ist dreimal so groß wie ihr Volumen $4\pi/3$.

Korollar 2.160 (Integralformeln von Green) Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$, N wie im Satz von Gauß. Weiter seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion und $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, so dass $f \nabla g$ kompakten Träger besitzt. Dann gilt:

$$\boxed{\int_M (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) \lambda_n = \int_{\partial M} f i_{\nabla g} \lambda_n = \int_{\partial M} f \langle N, \nabla g \rangle \omega^{\partial M}} \quad (81)$$

Ist auch f eine C^2 -Funktion und besitzt auch $g \nabla f$ kompakten Träger, so gilt

$$\boxed{\int_M (f \Delta g - g \Delta f) \lambda_n = \int_{\partial M} (f i_{\nabla g} \lambda_n - g i_{\nabla f} \lambda_n) = \int_{\partial M} (f \langle N, \nabla g \rangle - g \langle N, \nabla f \rangle) \omega^{\partial M}} \quad (82)$$

Beweis: Die erste Greensche Formel (81) ist der Satz von Gauß, angewandt auf $V = f \nabla g$:

$$\int_M \text{div}(f \nabla g) \lambda_n = \int_{\partial M} i_{f \nabla g} \lambda_n = \int_{\partial M} f i_{\nabla g} \lambda_n,$$

denn es gilt

$$\text{div}(f \nabla g) = \sum_{j=1}^n D_j(f D_j g) = \sum_{j=1}^n (f D_j^2 g + D_j f D_j g) = f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

Die zweite Greensche Formel (82) folgt unmittelbar aus der ersten Greenschen Formel, indem wir f und g vertauschen und die Differenz bilden.

□

Beispiel 2.161 (Laplaceoperator des Newtonpotentials) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta f(x)}{\|x\|_2} \lambda_3(dx) = -4\pi f(0)$$

Beweis: Es sei $R > 0$ so groß, dass der Träger von f ganz in der R -Umgebung von 0 enthalten ist. Gegeben $0 < r < R$, betrachten wir die Kugelschale

$$M = M_{r,R} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq \|x\|_2 \leq R\}.$$

Sie besitzt den Rand (in symbolischer Notation)

$$“\partial M_{r,R} = RS^2 - rS^2”$$

mit der Notation $tS^2 = \{tx \mid x \in S^2\}$, $t > 0$, wobei das Minuszeichen die Umkehrung der Orientierung symbolisieren soll und tS^2 so orientiert wird, dass für das radial nach außen gerichtete Einheitsvektorfeld $N(x) = x/\|x\|_2$ die 2-Form $i_N \lambda_n$ auf tS^2 positiv ist.

Mit der zweiten Greenschen Formel folgt mit der Abkürzung $g(x) = 1/\|x\|_2$, $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{M_{r,R}} \frac{\Delta f(x)}{\|x\|_2} \lambda_3(dx) \\ &= - \int_{M_{r,R}} [f \Delta g - g \Delta f(x)] \lambda_3 \quad (\text{wegen } \Delta g(x) = 0, x \neq 0) \\ &= - \int_{\partial M_{r,R}} [f *_{\lambda_3} \nabla g - g *_{\lambda_3} \nabla f] \\ &= \int_{rS^2} [f *_{\lambda_3} \nabla g - g *_{\lambda_3} \nabla f], \end{aligned}$$

weil f auf RS^2 verschwindet; der letzte Vorzeichenwechsel entsteht durch die Orientierung von $-rS^2$. Betrachten wir die Skalierungsabbildung $s_r : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $s_r(y) = ry$. Für sie gilt $(s_r^* f)(y) = f(ry)$, $s_r^* \lambda_3 = r^3 \lambda_3$. Berechnen wir

$$*_{\lambda_3} \nabla f(x) = D_1 f(x) dx_2 \wedge dx_3 + D_2 f(x) dx_3 \wedge dx_1 + D_3 f(x) dx_1 \wedge dx_2,$$

also

$$\begin{aligned} & (s_r^* *_{\lambda_3} \nabla f)(y) \\ &= D_1 f(ry) d(ry_2) \wedge d(ry_3) + D_2 f(ry) d(ry_3) \wedge d(ry_1) + D_3 f(ry) d(ry_1) \wedge d(ry_2) \\ &= r^2 *_{\lambda_3} \nabla f(ry), \end{aligned}$$

analog für g . Wir verwenden auch

$$\nabla g(x) = -\|x\|^{-3} x = -N(x)/\|x\|^2, \quad x \neq 0,$$

mit dem radial nach außen gerichteten Einheitsvektorfeld N . Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{rS^2} [f *_{\lambda_3} \nabla g - g *_{\lambda_3} \nabla f] &= \int_{S^2} s_r^* [f *_{\lambda_3} \nabla g - g *_{\lambda_3} \nabla f] \\
&= \int_{S^2} [f(ry) r^2 *_{\lambda_3} \nabla g(ry) - g(ry) *_{\lambda_3} r^2 \nabla f(ry)] \\
&= \int_{S^2} [-f(ry) *_{\lambda_3} \frac{N(y)}{\|y\|^2} - \frac{r}{\|y\|} *_{\lambda_3} \nabla f(ry)] \\
&\xrightarrow{r \downarrow 0} \int_{S^2} -f(0) *_{\lambda_3} \frac{N(y)}{\|y\|^2} = - \int_{S^2} f(0) *_{\lambda_3} N(y) = -4\pi f(0),
\end{aligned}$$

wobei wir die Oberfläche 4π der Einheitskugel und $\|y\| = 1$ für $y \in S^2$ verwendet haben. Fassen wir zusammen: Mit der Integrierbarkeit von $\frac{\Delta f(x)}{\|x\|_2}$ und dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt für alle $R > 0$ groß genug:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta f(x)}{\|x\|_2} \lambda_3(dx) = \lim_{r \downarrow 0} \int_{M_{r,R}} \frac{\Delta f(x)}{\|x\|_2} \lambda_3(dx) = -4\pi f(0).$$

□

Übung 2.162 (Lösung der Poissongleichung) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger und $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch folgende Faltung mit dem Newtonpotential definiert:

$$h(x) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x-y)}{\|y\|_2} \lambda_3(dy)$$

Zeigen Sie, dass auch h glatt ist und die “Poissongleichung”

$$\Delta h = f$$

erfüllt.

Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass Ableitungen nach Komponenten von x und das Integral hier vertauscht werden können.

Übung 2.163 (Greensfunktion zu Δ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta f(x)}{\|x\|_2^{d-2}} \lambda_n(dx) = -n(n-2) \lambda_n(B_n) f(0)$$

wobei B_n die n -dimensionale Einheitskugel bezeichnet.

Hinweis: Der Fall $n = 3$ ist in Beispiel 2.161 behandelt. Lassen Sie sich durch diesen Spezialfall inspirieren.

Übung 2.164 (Greensfunktion zu Δ in $\mathbb{R}^2$) Zeigen Sie für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \log \|x\|_2 \Delta f(x) \lambda_2(dx) = 2\pi f(0)$$

Hinweis: Imitieren Sie die Idee von Beispiel 2.161.

Übung 2.165 (Cauchy-Integralformel für reell differenzierbare Funktionen) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein kompaktes Gebiet mit stückweise glattem Rand und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Es sei $x : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Realteilbildung, $y : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Imaginärteilbildung, $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$. Weiter sei a ein Punkt im Inneren $U^\circ = U \setminus \partial U$ von U . Zeigen Sie:

1. $d\bar{z} \wedge dz = 2i \, dx \wedge dy = 2i \, \lambda_2$

2.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - a} = 0 \quad \text{auf } U \setminus \{a\}$$

3. Ist $r > 0$ so klein, dass die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{U_r(a)}$ um a mit Radius r ganz in U° enthalten ist, so gilt

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(z)}{z - a} dz + \int_{U \setminus U_r(a)} \frac{1}{z - a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z} \wedge dz \quad (83)$$

4. Folgern Sie im Limes $r \downarrow 0$ die folgende verallgemeinerte Cauchy-Integralformel:

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a) + \int_{U \setminus \{a\}} \frac{1}{z - a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z} \wedge dz$$

Insbesondere gilt die Cauchy-Integralformel

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a)$$

für holomorphe Funktionen f .

Hinweis: Parametrisieren Sie die Kreislinie $\partial U_r(a)$ durch $z(t) := a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, und wenden Sie den Satz von der dominierten Konvergenz an, um den Limes $r \downarrow 0$ in den Integralen in (83) auszuführen. Achten Sie dabei sorgfältig auf die Existenz integrierbarer Majoranten.

Zum Abschluss dieses Abschnitts übersetzen wir noch den Satz von Stokes für Flächen im $\mathbb{R}^3$ in die Sprache der klassischen Vektoranalysis:

Korollar 2.166 (Klassischer Satz von Stokes für Flächen) *Es sei A eine kompakte, orientierte, stückweise glatt berandete Fläche im $\mathbb{R}^3$ und V ein in einer Umgebung von A definiertes C^1 -Vektorfeld. Es bezeichne ω^A die positive Standard-Oberflächenform auf A und N das normierte Normalenvektorfeld auf A mit der durch $i_N \lambda_3 = \omega^A$ (zu lesen eingeschränkt auf A) festgelegten Richtung. Dann gilt*

$$\Phi(\text{rot } V, A) = \int_{\partial A} \flat_\sigma V$$

Beweis: Das ist in der Tat nur eine andere Notation des Satzes von Stokes im vorliegenden Spezialfall: Sei $\omega := \flat_\sigma V$. Dann folgt $*_{\lambda_3} \text{rot } V = d\omega$, also

$$\int_A \langle \text{rot } V, N \rangle \omega^A = \int_A *_{\lambda_3} \text{rot } V = \int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega = \Phi(\text{rot } V, A) = \int_{\partial A} \flat_\sigma V.$$

□

Wird ∂A durch eine glatte Kurve $\phi : [a, b] \rightarrow \partial A$ orientierungstreu parametrisiert, so kann man die rechte Seite auch so schreiben:

$$\int_{\partial A} \flat_\sigma V = \int_a^b \langle V(\phi(t)), \phi'(t) \rangle dt.$$

Interpretation des Satzes in Worten: Das Linienintegral über ein Vektorfeld V über den Rand einer kompakten, glatten Fläche ist also gleich dem Integral über die Normalenkomponente der “Wirbelstärke” $\text{rot } V$ über die Fläche.

2.11 Die Lie-Ableitung von Formen und de-Rham-Kohomologie

Wir fügen zur äußeren Ableitung von Differentialformen nun einen weiteren Ableitungsbegriff hinzu: Die Lie-Ableitung einer Form nach einem Vektorfeld.

Um den Grad $p = 0$ im Folgenden nicht gesondert betrachten zu müssen, definieren wir noch formal $\mathcal{D}^{-1}(U) := \{0\}$, und $i_V : \mathcal{D}^0(U) \rightarrow \mathcal{D}^{-1}(U)$ und $d : \mathcal{D}^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{D}^0(U)$ seien die Nullabbildung.

Definition 2.167 (Lie-Ableitung) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p \in \mathbb{N}_0$ und $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Wir definieren die *Lie-Ableitung*:

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{D}^p(U) \rightarrow \mathcal{D}^p(U),$$

$$\boxed{\mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + di_X \omega}$$

Das folgende (nicht kommutative) Diagramm veranschaulicht die auftretenden Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}^p(U) & \xrightarrow{d} \mathcal{D}^{p+1}(U) \\ & \swarrow i_X & \downarrow \mathcal{L}_X \swarrow i_X \\ \mathcal{D}^{p-1}(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^p(U) \end{array}$$

Anders als die äußere Ableitung verändert die Lie-Ableitung den Grad einer Form nicht. Ebenfalls anders als die äußere Ableitung erfüllt die Lie-Ableitung die *gewöhnliche*, nicht antikommutative Produktregel:

Übung 2.168 (Produktregel für die Lie-Ableitung) Zeigen Sie in der Situation von Definition 2.167 für $p, q \in \mathbb{N}_0$ für $\omega \in \mathcal{D}^p(U)$, $\chi \in \mathcal{D}^q(U)$:

$$\boxed{\mathcal{L}_X(\omega \wedge \chi) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \chi + \omega \wedge (\mathcal{L}_X \chi)}$$

Übung 2.169 Zeigen Sie in der Situation von Definition 2.167 für glatte $a : U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_{aX}\omega = a\mathcal{L}_X\omega + da \wedge i_X\omega.$$

In diesem Sinne ist die Lie-Ableitung *nicht* $C^\infty(U)$ -linear im Vektorfeldargument.

Das folgende Lemma zeigt die Verträglichkeit der Lie-Ableitung mit glatten Abbildungen:

Lemma 2.170 (Verträglichkeit der Lie-Ableitung mit dem Rückzug) *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow V$ glatt und X bzw. Y glatte Vektorfelder auf U bzw. V mit $df_z(X(z)) = Y(f(z))$ für alle $z \in U$. Dann gilt für alle $\omega \in \mathcal{D}^p(V)$, $p \in \mathbb{N}_0$:*

$$f^*\mathcal{L}_Y\omega = \mathcal{L}_X f^*\omega.$$

Beweis: Es gilt

$$f^*i_Y\omega = i_X f^*\omega.$$

Dies ist trivial für $p = 0$, und für $p > 0$ folgt es so: Für $z \in U$ und $u_1, \dots, u_{p-1} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} (f^*i_Y\omega)_z(u_1, \dots, u_{p-1}) &= (i_Y\omega)_{f(z)}(df_z(u_1), \dots, df_x(u_{p-1})) \\ &= \omega_{f(z)}(Y(f(z)), df_z(u_1), \dots, df_x(u_{p-1})) \\ &= \omega_{f(z)}(df_z(X(z)), df_z(u_1), \dots, df_x(u_{p-1})) \\ &= (f^*\omega)_z(X(z), u_1, \dots, u_{p-1}) \\ &= (i_X f^*\omega)_z(u_1, \dots, u_{p-1}). \end{aligned}$$

Ersetzen wir ω durch $d\omega$, folgt auch

$$f^*i_Y d\omega = i_X f^* d\omega = i_X df^*\omega,$$

wobei wir im letzten Schritt die Verträglichkeit von d mit dem Rückzug angewandt haben. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f^*\mathcal{L}_Y\omega &= f^*i_Y d\omega + f^*di_Y\omega = i_X f^* d\omega + df^*i_Y\omega \\ &= i_X df^*\omega + di_X f^*\omega = \mathcal{L}_X f^*\omega. \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma gibt der Lie-Ableitung eine geometrische Interpretation:

Lemma 2.171 (Lie-Ableitung als Ableitung der mitschwimmenden Form) *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : I \times U \rightarrow V$ glatt, aufgefasst als eine glatte Familie $(f_t : U \rightarrow V)_{t \in I}$ $f_t(x) = f(t, x)$ von Abbildungen. Es bezeichne $\iota_t : U \rightarrow I \times U$, $\iota_t(x) = (t, x)$ für $t \in I$ die Inklusionsabbildung; insbesondere gilt $f_t = f \circ \iota_t$. Weiter sei X das konstante Vektorfeld auf $I \times U$ mit Wert $(1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $\omega \in \mathcal{D}^p(V)$:*

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t^*\omega = \iota_t^* \mathcal{L}_X f_t^*\omega. \quad (84)$$

Diese Formel ist punktweise gemeint:

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t^*\omega)_x(v_1, \dots, v_p) = (\iota_t^* \mathcal{L}_X f_t^*\omega)_x(v_1, \dots, v_p)$$

für alle $x \in U$ und $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$.

Alternative Darstellung in einem Spezialfall: Es sei $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld auf V das $(f_t)_{t \in I}$ im folgenden Sinn treibt:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = Y(f_t(x)) \quad (85)$$

für $t \in I$, $x \in U$. Dann gilt für jedes $\omega \in \mathcal{D}^p(V)$, $p \in \mathbb{N}_0$ und $t \in I$:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t^*\omega = f_t^* \mathcal{L}_Y \omega \quad (86)$$

Den Spezialfall $U = V$, $f_0 = \text{id}_U$ kann man sich so vorstellen: Ein Flüssigkeitsstrom im Ortsraum U soll zur Zeit $t \in I$ das Geschwindigkeitsfeld Y_t besitzen. $f_t(x)$ beschreibt dann den Ort zur Zeit t des Flüssigkeitsteilchens, das sich zur Zeit 0 noch am Ort x befand. Die Lie-Ableitung bekommt dann folgende Interpretation:

$$\mathcal{L}_Y \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_t^* \omega - \omega}{t},$$

also als Zeitableitung der mit dem Flüssigkeitsstrom “mitschwimmenden” Form.

Beweis des Lemmas: Wir verwenden die Basisdarstellung mit der Notation (70) und (69):

$$\alpha := f^*\omega = \underbrace{\sum_{I \in J_{p,n}} \beta_I dx_I + dt \wedge}_{=: \beta} \underbrace{\sum_{I \in J_{p-1,n}} \gamma_I dx_I}_{=: \gamma}$$

mit $\beta_I, \gamma_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Es folgt für jedes fixierte $s \in I$ und $x \in U$:

$$(f_s^*\omega)_x = (\iota_s^* f^*\omega)_x = \sum_{I \in J_{p,n}} \beta_I(s, x) dx_I,$$

wobei der Term γ weggefallen ist, weil die Ableitung ds der *Konstanten* s verschwindet. Wir erhalten, indem wir wieder t statt s schreiben und danach ableiten:

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t^*\omega)_x = \sum_{I \in J_{p,n}} \frac{\partial}{\partial t} \beta_I(t, x) dx_I,$$

Weiter:

$$i_X \alpha = \gamma,$$

wobei nun der Term β wegfällt, da er keinen Faktor dt enthält, und daher

$$di_X \alpha = d\gamma.$$

Andererseits:

$$df^*\omega = d\beta + d(dt \wedge \gamma) = d\beta - dt \wedge d\gamma$$

also

$$i_X df^*\omega = i_X d\beta - \underbrace{(i_X dt)}_{=1} d\gamma + dt \wedge i_X d\gamma = i_X d\beta - d\gamma + dt \wedge i_X d\gamma$$

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X f^*\omega &= \mathcal{L}_X \alpha = i_X d\alpha + di_X \alpha \\ &= i_X d\beta + dt \wedge i_X d\gamma \\ &= \sum_{I \in J_{p,n}} \frac{\partial \beta_I}{\partial t} dx_I + dt \wedge i_X d\gamma, \end{aligned}$$

wobei beim Einsetzen von X in $d\beta$ nur die Terme mit einem Faktor dt eine Rolle spielen. Für *fixiertes* $s \in I$ und $x \in U$ erhalten wir $\iota_s(dt \wedge i_X d\gamma) = 0$ wegen $ds = 0$, und daher, indem wir wieder ein t statt s schreiben:

$$(\iota_t \mathcal{L}_X f^*\omega)_x = \sum_{I \in J_{p,n}} \frac{\partial \beta_I}{\partial t}(t, x) dx_I = \frac{\partial}{\partial t}(f_t^*\omega)_x.$$

Damit ist die Behauptung (84) bewiesen. Die Behauptung (86) folgt hieraus mit Lemma 2.170 wegen

$$f_t^* \mathcal{L}_Y \omega = \iota_t^* f^* \mathcal{L}_Y \omega = \iota_t^* \mathcal{L}_X f^* \omega,$$

weil die Voraussetzung (85) impliziert:

$$df_{(t,x)}(X(t, x)) = Y(f(t, x))$$

für $t \in I$, $x \in U$.

□

Damit erhalten wir folgende Variante des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

Korollar 2.172 (Cartansche Formel: Homotopien im de-Rham-Komplex) *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.171, $I = [a, b]$, sei*

$$h_f : \mathcal{D}^p(V) \rightarrow \mathcal{D}^{p-1}(U), \quad h_f \omega = \int_a^b (\iota_t^* i_X f^* \omega) dt$$

(punktweise zu lesen). Dann gilt für $\omega \in \mathcal{D}^p(V)$:

$$\boxed{dh_f \omega + h_f d\omega = f_b^* \omega - f_a^* \omega}$$

Beweis: Setzen wir die Definition von h_f ein und vertauschen³¹ wir das Integral über t mit der Ableitung (punktweise zu lesen):

$$\begin{aligned} dh_f \omega + h_f d\omega &= \int_a^b (d\iota_t^* i_X f^* \omega + \iota_t^* i_X f^* d\omega) dt = \int_a^b \iota_t^* (di_X f^* \omega + i_X df^* \omega) dt \\ &= \int_a^b \iota_t^* \mathcal{L}_X f^* \omega dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f_t^* \omega dt = f_b^* \omega - f_a^* \omega \end{aligned}$$

□

Das folgende Diagramm veranschaulicht die Situation in den de-Rham-Komplexen:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^{p-1}(V) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^p(V) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^{p+1}(V) \xrightarrow{d} \dots \\ & \searrow h_f & \downarrow f_b^* - f_a^* & \swarrow h_f & \downarrow f_b^* - f_a^* & \swarrow h_f & \downarrow f_b^* - f_a^* \\ \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^{p-1}(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^p(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^{p+1}(U) \xrightarrow{d} \dots \end{array}$$

Die folgende Sprechweise kennen Sie im Spezialfall $p = 1$ (in etwas anderer Notation) schon aus der Analysis 2:

Definition 2.173 (exakte und geschlossene Formen) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $p \in \mathbb{N}_0$. Eine p -Form $\omega \in \mathcal{D}^p(U)$ wird *geschlossen* oder ein *p -Kozykel* genannt, wenn $d\omega = 0$ gilt. Sie wird *exakt* oder ein *p -Korand* genannt, wenn es ein $\eta \in \mathcal{D}^{p-1}(U)$ mit $d\eta = \omega$ gibt. Der Raum aller geschlossenen p -Formen wird mit

$$Z^p(U) := \text{Ker}(d : \mathcal{D}^p(U) \rightarrow \mathcal{D}^{p+1}(U)) = \{\omega \in \mathcal{D}^p(U) \mid d\omega = 0\}$$

bezeichnet; der Raum aller exakten p -Formen mit

$$B^p(U) := \text{Bild}(d : \mathcal{D}^{p-1}(U) \rightarrow \mathcal{D}^p(U)) = \{d\eta \mid \eta \in \mathcal{D}^{p-1}(U)\}.$$

Die Namen “Kozykel” und “Korand” werden durch den Satz von Stokes motiviert: Bezeichnet man als einen Zykel eine geschlossene Untermannigfaltigkeit M (oder eine formale Linearkombination von solchen): $\partial M = 0$, so sind die Zykeln also der “Kern des Randoperators”. Ränder sind nach Definition formale Linearkombinationen von Untermannigfaltigkeiten der Gestalt ∂N , also “das Bild des Randoperators”.

Als Spezialfall der Cartanschen Formel erhalten wir:

Lemma 2.174 (Lemma von Poincaré) Sei $f : I \times U \rightarrow V$, $f(t, x) = f_t(x)$, eine glatte Abbildung mit zwei offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und einem Intervall $I = [a, b]$,

³¹Die Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung wird hier mit dem Satz von Lebesgue begründet: Die dazu nötige Existenz einer integrierbaren Majorante für die Ableitungen D_j nach einem Parameter x_j folgt, da die Ableitungen der glatten Integranden auf den kompakten Gebieten $[a, b] \times \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_2 \leq \epsilon\}$ beschränkt sind, wobei $x \in U$ und $\epsilon > 0$ klein genug.

$h_f : \mathcal{D}^p(V) \rightarrow \mathcal{D}^{p-1}(U)$ wie in der Cartanschen Formel definiert. Dann gilt für alle geschlossenen Formen $\omega \in Z^p(V)$:

$$\boxed{f_b^* \omega - f_a^* \omega = dh_f \omega}$$

Insbesondere sind $f_b^* \omega$ und $f_a^* \omega$ kohomolog:

$$[f_a^* \omega] = [f_b^* \omega]. \quad (87)$$

Man beachte, dass $f_t^* \omega$ für $t \in [a, b]$ wegen

$$df_t^* \omega = f_t^* d\omega = 0$$

geschlossen ist.

Beweis des Lemmas von Poincaré:

$$f_b^* \omega - f_a^* \omega = dh_f \omega + h_f \underbrace{d\omega}_{=0} = dh_f \omega.$$

□

Die Gleichung $d \circ d = 0$ bedeutet in der neuen Notation: Jede exakte glatte Form ist geschlossen:

$$B^p(U) \subseteq Z^p(U)$$

Der Unterschied zwischen geschlossenen und exakten Formen wird durch die de-Rham-Kohomologieräume gemessen:

Definition 2.175 (de-Rham-Kohomologie) Für offenes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{N}_0$ wird Faktorraum

$$H^p(U) := Z^p(U)/B^p(U)$$

der p -te *de-Rham-Kohomologieraum* genannt. Die Äquivalenzklasse

$$[\omega] = [\omega]_{H^p(U)} := \omega + B^p(U) := \{\omega + d\eta \mid \eta \in \mathcal{D}^{p-1}(U)\}$$

einer geschlossenen Form $\omega \in Z^p(U)$ heißt die *Kohomologieklass*e von ω . Zwei geschlossene Formen $\omega, \chi \in Z^p(U)$ mit $[\omega] = [\chi]$ werden *kohomolog* genannt.

Beispiel 2.176 Die p -te Kohomologie glatt zusammenziehbarer Mengen verschwindet für $p \in \mathbb{N}$: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine glatt zusammenziehbare Menge, d.h. existiert eine glatte Homotopie $f : [0, 1] \times U \rightarrow U$, $(t, x) \mapsto f_t(x)$ von einer konstanten Abbildung f_0 zur Identität $f_1 = \text{id}_U$, so ist jede geschlossene p -Form ω , $p \geq 1$, auf U exakt:

$$Z^p(U) = B^p(U), \text{ also } H^p(U) = 0.$$

In der Tat:

$$\omega = f_1^* \omega = f_1^* \omega - \underbrace{f_0^* \omega}_{=0} = dh_f \omega.$$

Die Rückzugsoperation vererbt sich auf die Kohomologie:

Lemma 2.177 (Rückzug in der Kohomologie) Ist $f : U \subseteq V$ eine glatte Abbildung mit zwei offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $p \in \mathbb{N}_0$, so ist die Abbildung

$$f^* : H^p(V) \rightarrow H^p(U), \quad f^*([\omega]_{H^p(V)}) := [f^*\omega]_{H^p(U)}$$

wohldefiniert.

Beweis: Sind $\omega, \omega' \in Z^p(V)$ kohomolog, etwa $\omega - \omega' = d\eta$ mit $\eta \in \mathcal{D}^{p-1}(V)$, so gilt

$$f^*\omega - f^*\omega' = f^*d\eta = df^*\eta \in B^p(U).$$

Das bedeutet:

$$[f^*\omega] = [f^*\omega'].$$

□

Wir erhalten folgende Korollar des Poincaré-Lemmas:

Lemma 2.178 (Homotopieinvarianz der de-Rham-Kohomologie) Es sei $I = [a, b]$, $f : I \times U \subseteq V$, $(t, x) \mapsto f_t(x)$ eine glatte Abbildung mit zwei offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: Die beiden Rückzugsabbildungen in der Kohomologie

$$f_1^*, f_0^* : H^p(V) \rightarrow H^p(U)$$

stimmen überein.

Beweis: Dies ist nur die Aussage (87) mit anderen Worten gesagt.

□

Beispiel 2.179 Formulieren wir das Beispiel 2.176 im Spezialfall $U = \mathbb{R}^3$ noch einmal in der Sprache der klassischen Vektoranalysis:

1. Fall $p = 1$: Ist $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein glattes wirbelfreies Vektorfeld, d.h. $\text{rot } V = 0$, so ist V ein Gradientenfeld:

$$V = \nabla f$$

für ein glattes $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Diesen Spezialfall kennen Sie schon (in etwas anderer Schreibweise) aus der Analysis 2.

2. Fall $p = 2$: Ist $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein glattes divergenzfreies Vektorfeld mit $\text{div } V = 0$, so ist V die Rotation eines glatten Vektorfelds $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$V = \text{rot } W.$$

Übung 2.180 (Lie-Ableitung der Flächenform unter dem Skalierungsfluss) Berechnen Sie die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_v\omega$ der Standardflächenform $\omega = dx \wedge dy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nach dem Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (x, y)$.

Übung 2.181 (Volumeninvarianz Hamiltonischer Vektorfelder) Es seien $n = 2m$ gerade, $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit offenem $U \subset \mathbb{R}^n$.

$$\omega = \sum_{j=1}^m dx_j \wedge dx_{j+m}$$

und

$$v = (D_{m+1}H, \dots, D_{2m}H, -D_1H, \dots, -D_mH),$$

also $v_j = D_{m+j}H$ und $v_{m+j} = -D_jH$ für $j = 1, \dots, m$. Zeigen Sie:

1. $i_v\omega = dH$,
2. $\mathcal{L}_v\omega = 0$,
3. $\omega^{\wedge m} := \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{m \text{ Faktoren}}$ ist ein konstantes Vielfaches der Standardvolumenform $\lambda_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$,
4. $\mathcal{L}_v\lambda_n = 0$.

Ist nun in der Situation dieser Übung $f : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$, $(t, x) \mapsto f_t(x)$ der *Fluss*³² zu v , d.h.

$$f_0(x) = x,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = v(f_t(x))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in U$, so folgt die Volumeninvarianz des Lebesguemaßes λ_n (natürlich auf $\mathcal{B}(U)$ eingeschränkt) unter dem Fluss:

$$f_t[\lambda_n] = \lambda_n,$$

d.h.

$$\lambda_n(A) = \lambda_n(f_t^{-1}[A])$$

für alle $A \in \mathcal{B}(U)$. Wir sehen das so: Mit Formel (86) aus Lemma 2.171 erhalten wir für die Standardvolumenform $\lambda_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t^* \lambda_n = f_t^* \mathcal{L}_v \lambda_n = 0$$

also ist $f_t^* \lambda_n$ konstant in t :

$$f_t^* \lambda_n = f_0^* \lambda_n = \lambda_n,$$

was nur eine andere Notation für die Behauptung

$$f_t^{-1}[\lambda_n] = \lambda_n, \quad \text{also auch} \quad f_t[\lambda_n] = \lambda_n$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Diese Aussage wird auch *Satz von Liouville* genannt.

³²Wir nehmen hier zur Vereinfachung an, dass der Fluss global existiert, um die Sprechweise möglichst einfach zu halten.

2.12 Die Räume L^p

Im folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Aus der Analysis 2 kennen Sie die Räume $\ell^p(I, \mathbb{K})$ für abzählbare Mengen I . Im Folgenden verallgemeinern wir die Theorie dieser Räume im maßtheoretischen Kontext.

Definition 2.182 (p -Halbnorm) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und

$$M(\Omega, \mathcal{A}; \mathbb{K}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{K})\text{-messbar}\}.$$

Für $1 \leq p < \infty$ und $f \in M(\Omega, \mathcal{A}; \mathbb{K}) \cup \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ definieren wir

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

mit der Konvention $\infty^{1/p} := \infty$. Wir setzen

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}) := \{f \in M(\Omega, \mathcal{A}; \mathbb{K}) \mid \|f\|_p < \infty\}.$$

Falls klar ist, welcher Grundkörper $\mathbb{K}$ gemeint ist, schreiben wir auch kurz $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dafür.

Bemerkung 2.183 Einige Spezialfälle kennen Sie schon lange:

1. Im Spezialfall $p = 1$ ist $f \in M(\Omega, \mathcal{A}; \mathbb{K}) \cup \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ genau dann μ -integrierbar, wenn $\|f\|_1 < \infty$ gilt, und in diesem Fall haben wir

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu = \|f\|_1,$$

vgl. Übung 1.119.

2. Im Fall, dass $\Omega = I$ abzählbar ist, versehen wir mit der Potenzmenge $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und dem Zählmaß μ , stimmt $\|\cdot\|_p : M(\Omega, \mathcal{A}; \mathbb{K}) \rightarrow [0, \infty]$ mit der gleichnamigen Abbildung

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^I \rightarrow [0, \infty], \quad \|f\|_p = \left(\sum_{j \in I} |f(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

aus der Analysis 2 überein, und es gilt

$$\mathcal{L}^p(I, \mathcal{P}(I), \text{Zählmaß}) = \ell^p(I).$$

Der Fall $p = \infty$ wird etwas anders behandelt:

Definition 2.184 (Wesentliches Supremum und $\mathcal{L}^\infty$) Es sei ν ein Maß über $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ und $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Wir definieren das *wesentliche Supremum* (engl. *essential supremum*) zu ν durch

$$\text{ess sup}(\nu) := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \nu([a, \infty]) = 0\}. \quad (88)$$

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit³³ $\mu(\Omega) > 0$, und $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$, so definieren wir das wesentliche Supremum von f bezüglich μ durch

$$\text{ess sup}_\mu f := \text{ess sup}(f[\mu]) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \mu(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > a\}) = 0\}.$$

Weiter definieren wir für $f \in M(\Omega, \mathcal{A}; \mathbb{K}) \cup \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$:

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup}_\mu |f|.$$

Wir setzen

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}) := \{f \in M(\Omega, \mathcal{A}; \mathbb{K}) \mid \|f\|_\infty < \infty\}.$$

“**Übung 2.185** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{Zählmaß})$ und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\text{ess sup}_\mu f = \sup f.$$

“**Übung 2.186** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, λ das Lebesguemaß darauf und δ_0 das Diracmaß in 0 darauf. Berechnen Sie $\text{ess sup}_\lambda 1_{\{0\}}$ und $\text{ess sup}_{\delta_0} 1_{\{0\}}$.

“**Übung 2.187** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ mit $f = g$ μ -fast überall gilt: $\|f\|_p = \|g\|_p$.

“**Übung 2.188** Es seien μ, ν zwei Maße über $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ mit $\mu \ll \nu$. Zeigen Sie:

$$\text{ess sup}(\mu) \leq \text{ess sup}(\nu).$$

“**Übung 2.189** Zeigen Sie, dass das Infimum $\inf\{a \in \mathbb{R} \mid \nu([a, \infty]) = 0\}$ in der Definition (88) des wesentlichen Supremums $\text{ess sup}_\nu(\mathbb{R})$ sogar ein Minimum ist, falls die Menge $\{a \in \mathbb{R} \mid \nu([a, \infty]) = 0\}$ nichtleer und nach unten beschränkt ist.

“**Übung 2.190** Finden Sie eine sinnvolle Definition für das *wesentliche Infimum*.

“**Übung 2.191** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ und $a \geq 0$. Überlegen Sie sich, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $\|f\|_\infty \leq a$,
2. $|f| \leq a$ μ -fast sicher.

³³Formal setzt man noch $\|f\|_\infty := 0$, falls $\mu(\Omega) = 0$.

Übung 2.192 (Wie die ∞ -Halbnorm zu ihrem Namen kommt) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $0 < \mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie für alle $f \in M(\Omega, \mathcal{A})$:

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p. \quad (89)$$

Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass die Gleichung (89) im Fall $\mu(\Omega) = \infty$ falsch werden kann.

Übung 2.193 Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2^\alpha$ für $x \neq 0$, $f(0)$ beliebig. Entscheiden Sie für jede der drei Funktionen $f1_B$, $f1_{B^c}$ und f , unter welchen Voraussetzungen an α , n und p sie in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ liegt.

Die folgende Definition kennen Sie aus der Analysis 2:

Definition 2.194 (Konjugierte Exponenten) Wir nennen $p, q \in [1, \infty]$ konjugiert zueinander, wenn einer der drei folgenden Fälle vorliegt:

1. $p, q \in]1, \infty[$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $q = \frac{p}{1-p}$.
2. $p = 1$ und $q = \infty$.
3. $p = \infty$ und $q = 1$.

Satz 2.195 (Höldersche Ungleichung) Es seien $p, q \in [1, \infty]$ konjugiert zueinander und $f, g \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gilt:

$$\boxed{\int fg \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q} \quad (90)$$

Es folgt, dass für alle $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ und $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ gilt: $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ und

$$\boxed{\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q} \quad (91)$$

Beweis: Wir beweisen hier nur den Fall $1 < p < \infty$; die anderen Fälle sollen Sie in Übung 2.196 untersuchen. Der nun vorgestellte Beweis ist eine direkte Verallgemeinerung des Beweises der Hölder-Ungleichung in ℓ^p aus der Analysis 2.

Wir beweisen zuerst (90). Falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$, folgt $|f|^p = 0$ μ -fast überall oder $|g|^q = 0$ μ -fast überall, also $fg = 0$ μ -fast überall und damit

$$\int fg \, d\mu = 0 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Wir dürfen also $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ annehmen. Falls $\|f\|_p = \infty$ oder $\|g\|_q = \infty$ ist $\|f\|_p \|g\|_q = \infty$; in diesem Fall ist nichts zu zeigen. Es bleibt noch der Fall $0 < \|f\|_p < \infty$ und $0 < \|g\|_q < \infty$ zu untersuchen. In diesem Fall setzen wir

$$\tilde{f} := \frac{f}{\|f\|_p} \text{ und } \tilde{g} := \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Insbesondere gilt $\|\tilde{f}\|_p = 1$ und $\|\tilde{g}\|_q = 1$. Mit der aus der Analysis 2 bekannten Ungleichung

$$\forall a, b \geq 0 : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

folgt

$$\frac{\int fg d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} = \int \tilde{f} \tilde{g} d\mu \leq \frac{1}{p} \int |\tilde{f}|^p d\mu + \frac{1}{q} \int |\tilde{g}|^q d\mu = \frac{1}{p} \underbrace{\|\tilde{f}\|_p^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\|\tilde{g}\|_q^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

also die Behauptung (90).

Für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ und $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ folgt aus dem schon Bewiesenen:

$$\|fg\|_1 = \int |f| |g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

also $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ und hieraus mit der Integralvariante der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag aus Übung 1.119 die Behauptung

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \int |fg| d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Übung 2.196 *Beweisen Sie die Hölder-Ungleichung für $p = 1$, $q = \infty$.*

“**Übung 2.197** *Es seien $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$ mit*

$$\sum_{j=1}^m p_j^{-1} = 1$$

(Konvention: $\infty^{-1} := 0$). Weiter seien $f_1, \dots, f_m \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie:

$$\left\| \prod_{j=1}^m f_j \right\|_1 \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}.$$

Wie in der Analysis 2 folgt aus der Hölder-Ungleichung die Dreiecksungleichung:

Lemma 2.198 (Minkowskische Ungleichung = Dreiecks-Ungleichung für $\|\cdot\|_p$)
Für alle $f, g \in M(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ und $1 \leq p \leq \infty$ gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis: Wir beschränken uns hier auf den Fall $1 < p < \infty$; die Fälle $p \in \{1, \infty\}$ sind die Übungsaufgabe 2.199.

Für $\|f\|_p = \infty$ oder $\|g\|_p = \infty$ ist nichts zu zeigen; ebenso ist im Fall $\|f + g\|_p = 0$ nichts zu zeigen; wir dürfen also $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$ und $\|f + g\|_p > 0$ annehmen.

Wir schätzen zunächst nur grob ab, um $\|f + g\|_p < \infty$ zu zeigen: $|f + g| \leq 2(|f| \vee |g|)$, also

$$|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p \vee |g|^p) \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

und daher

$$\|f + g\|_p^p = \int |f + g|^p d\mu \leq 2^p(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty.$$

Nun schätzen wir feiner ab: Es sei $q = p/(p - 1)$ konjugiert zu p . Wir setzen $h := |f + g|^{p-1} \geq 0$, also

$$h^q = |f + g|^p$$

und damit

$$\|h\|_q^q = \|f + g\|_p^p.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g| h d\mu \leq \int |f| h d\mu + \int |g| h d\mu \quad (\text{wegen } |f + g| \leq |f| + |g|) \\ &\leq \|f\|_p \|h\|_q + \|g\|_p \|h\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

wobei wir $p/q = p - 1$ verwendet haben. Dividieren wir durch $\|f + g\|_p^{p-1} \in]0, \infty[$, erhalten wir

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

also die Behauptung.

Übung 2.199 Beweisen Sie die Dreiecksungleichungen

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad \text{und} \quad \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

für $f, g \in M(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$.

Damit erhalten wir:

Lemma 2.200 ($\|\cdot\|_p$ ist eine Halbnorm) Für alle $p \in [1, \infty]$ ist der Raum $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$ -Untervektorraum von $M(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, und die Abbildung $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Halbnorm darauf.

Für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ gilt $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ μ -fast überall gilt.

Beweis: Der Fall $p = \infty$ ist eine Übungsaufgabe; wir nehmen $p < \infty$ an. Die Aussage $0 \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ ist klar. Aus $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ erhalten wir $\|f\|_p \geq 0$ sowie

$$\|\alpha f\|_p = \left(|\alpha|^p \int |f|^p \mu(dp) \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|f\|_p,$$

insbesondere $\alpha f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$, und $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, insbesondere $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$. Schließlich gelten nach dem Lemma 1.137 (Integrale sehen Nullmengen nicht) die folgenden Äquivalenzen:

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \int |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow |f|^p = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.} \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}$$

□

Übung 2.201 *Beweisen Sie, dass $(\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ein halbnormierter Raum mit dem folgenden Nullraum ist:*

$$\{f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}) \mid \|f\|_\infty = 0\} = \{f \in M(\Omega, \mathcal{A}; \mathbb{K}) \mid f = 0 \text{ } \mu\text{-fastüberall}\}.$$

Erinnern Sie sich aus der Analysis 2 daran, dass man aus einem halbnormierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ durch Verkleben von Vektoren mit dem Abstand 0, also durch Bilden des Quotientenraums V/N mit dem Nullraum $N = \{x \in V \mid \|x\| = 0\}$, einen normierten Raum bekommt, wobei die Norm $\|[x]\|$ auf Äquivalenzklassen $[x] = x + N \in V/N$ repräsentantenweise durch $\|[x]\| := \|x\|$ definiert wird. Wir führen diese Konstruktion nun im Spezialfall $(V, \|\cdot\|) = (\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ durch:

Definition 2.202 (L^p -Räume) *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, \infty]$. Wir definieren*

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})/N,$$

mit dem Nullraum

$$N = \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}) \mid f = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}\}.$$

Wir versehen $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ mit der Norm

$$\|\cdot\|_p : L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f + N\|_p := \|f\|_p.$$

Falls klar ist, welcher Grundkörper $\mathbb{K}$, gemeint ist schreiben wir auch kurz $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$; im Fall $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sogar kurz $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_n|_{\mathcal{B}(\Omega)})$.

Die folgende unscharfe Sprechweise für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ ist allgemein üblich: Statt $[f] = f + N \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ schreibt man auch $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, schreibt also f , obwohl die Äquivalenzklasse $[f]$ gemeint ist. Aus dem Kontext muss dann klar werden, dass eigentlich nicht wirklich f , sondern die Äquivalenzklasse $[f] = f + N$ von f modulo Abänderung auf einer Nullmenge gemeint ist. Man beachte, dass zum Beispiel für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ die

Auswertung $f(0)$ an der fixierten Stelle 0 keinen Sinn mehr ergibt, weil $\{0\}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Punktweise Auswertung ist nur mehr in manchen Situationen sinnvoll, zum Beispiel unter dem Integral, oder auch, wenn man einen “kanonischen Repräsentanten” f von $[f]$ hat, zum Beispiel für stetige $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Diese Komplikation ist vielleicht am Anfang sehr gewöhnungsbedürftig.

Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_p$ und Konvergenz μ -fast überall ist nicht das Gleiche. Dies illustrieren die folgenden Gegenbeispiele:

Beispiel 2.203 (Konvergenz in $L^p \not\Rightarrow$ Konvergenz f.ü.) 1. Die Folge $e^n 1_{]0,1/n[} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert λ -f.ü. (sogar punktweise; keine Ausnahme-Nullmenge) gegen 0. Sie liegt zwar in allen Räumen $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, ist jedoch bezüglich keiner Norm $\|\cdot\|_p$ eine Cauchyfolge und damit auch nicht bzgl. $\|\cdot\|_p$ konvergent.

2. Betrachten wir die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n = 1_{]k2^{-m},(k+1)2^{-m}[}$ für $2^m \leq n = 2^m + k < 2^{m+1}$, wobei $m, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < 2^m$. Sie konvergiert zwar gegen 0 bezüglich $\|\cdot\|_p$ in $L^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu = \lambda|_{\mathcal{B}([0,1])})$ für $1 \leq p < \infty$. Für alle $\omega \in]0,1[$ konvergiert $f_n(\omega)$ jedoch nicht für $n \rightarrow \infty$, so dass f_n erst recht nicht μ -fast überall konvergiert.

Übung 2.204 Zeigen Sie: Jede Cauchyfolge in $(\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ konvergiert μ -fast überall.

Als Hilfsmittel für das Folgende brauchen wir:

Lemma 2.205 (Erstes Borel-Cantelli-Lemma) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) < \infty,$$

so gilt

$$\mu(\limsup_k A_k) = 0.$$

In der Sprechweise der Stochastik können wir das auch so formulieren, falls μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist:

Für jede Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten eine summierbare Folge bilden, tritt A_k fast sicher schließlich für $k \rightarrow \infty$ nicht auf.

(Es gibt auch ein zweites Borel-Cantelli-Lemma, das wir hier nicht besprechen.)

Beweis des 1. Borel-Cantelli-Lemmas: Es gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_k A_k = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$$

und daher mit der σ -Subadditivität von μ :

$$0 \leq \mu(\limsup_k A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Es folgt die Behauptung: $\mu(\limsup_k A_k) = 0$.

□

Übung 2.206 Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathbb{R}^+$ -wertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit den Verteilungen

$$\mathcal{L}_\mu(X_n)(dx) = e^{-x} dx, \quad x > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-2} X_n$ μ -fast sicher konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie das erste Borel-Cantelli-Lemma.

Wir zeigen nun die folgende Beziehung zwischen Cauchyfolgen in L^p und Konvergenz f.ü.:

Lemma 2.207 (Cauchyfolgen in $\mathcal{L}^p$ besitzen f.ü. konvergente Teilfolgen.) *Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p \leq \infty$. Dann besitzt jede Cauchyfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ eine μ -fast überall konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Insbesondere gilt dies auch für bezüglich $\|\cdot\|_p$ konvergente Folgen.*

Beweis: Für $p = \infty$ folgt dies aus Übung 2.204. Wir betrachten daher nur den Fall $1 \leq p < \infty$. Weil $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in L^p ist, gilt

$$\sup_{m: m \geq n} \|f_n - f_m\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit können wir eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_n$ mit

$$\forall k \in \mathbb{N}: \sup_{m: m \geq n_k} \|f_{n_k} - f_m\|_p \leq 4^{-k/p}$$

wählen. Insbesondere gilt also $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq 4^{-k/p}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Setzen wir

$$A_k := \{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \geq 2^{-k/p}\} = \{\omega \in \Omega \mid |f_{n_k}(\omega) - f_{n_{k+1}}(\omega)| \geq 2^{-k/p}\} \in \mathcal{A},$$

so folgt

$$1_{A_k} \leq 2^k |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|^p$$

und daher

$$\mu(A_k) = \int 1_{A_k} d\mu \leq 2^k \int |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|^p d\mu = 2^k \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p^p \leq 2^k (4^{-k/p})^p = 2^{-k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} = 1 < \infty,$$

und damit

$$\mu(\limsup_k A_k) = 0$$

nach dem Borel-Cantelli-Lemma. Für μ -fast alle $\omega \in \Omega$, genauer gesagt für alle $\omega \in (\limsup_k A_k)^c$, gilt $\omega \in A_k^c$ für $k \rightarrow \infty$ schließlich, d.h.

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall k \geq m : |f_{n_k}(\omega) - f_{n_{k+1}}(\omega)| < 2^{-k/p}.$$

Wählen wir solch ein $m \in \mathbb{N}$, so folgt für alle $l \geq k \geq m$:

$$|f_{n_k}(\omega) - f_{n_l}(\omega)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |f_{n_j}(\omega) - f_{n_{j+1}}(\omega)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} 2^{-j/p}$$

und daher

$$\sup_{l: l \geq k} |f_{n_k}(\omega) - f_{n_l}(\omega)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j/p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

so dass $(f_{n_k}(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$ dann eine Cauchyfolge ist, also konvergent in $\mathbb{R}$. Fassen wir zusammen: Für μ -fast alle $\omega \in \Omega$ konvergiert $(f_{n_k}(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. □

Satz 2.208 (Vollständigkeit von L^p) *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ ein vollständiger normierter Raum, also ein Banachraum.*

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt hieraus, indem man Realteil und Imaginärteil getrennt untersucht. Da $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ aus $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ durch Verkleben von fast überall gleichen Funktionen entsteht, genügt es, die Vollständigkeit von $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ zu zeigen.

Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$. Sie besitzt nach Lemma 2.207 eine μ -fast überall konvergente Teilfolge $(g_k = f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Wir setzen punktweise

$$f := 1_{\{-\infty < \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} g_k < \infty\}} \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k.$$

Insbesondere gilt $f \in M(\Omega, \mathcal{A})$ wegen $|f| < \infty$, und

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Wir betrachten nunächst den Fall $p < \infty$. Aus dem Lemma von Fatou folgt

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} |g_k|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |g_k|^p d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p < \infty,$$

also $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Weiter gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, nochmal mit dem Lemma von Fatou:

$$\begin{aligned} \|f - g_m\|_p^p &= \int |f - g_m|^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} |g_k - g_m|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |g_k - g_m|^p d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k - g_m\|_p^p \leq \sup_{k: k \geq m} \|g_k - g_m\|_p^p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_p$ -Cauchyfolge ist. Damit ist gezeigt:

$$\|f - g_m\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

also $g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ in $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$. In diesem Raum gilt also: Die Cauchyfolge $(f_n)_n$ besitzt die gegen f konvergente Teilfolge $(g_k)_k$ und konvergiert daher selbst gegen f .

Der Fall $p = \infty$ wird sogar etwas einfacher behandelt: Es gilt

$$s := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|g_k\|_\infty < \infty,$$

denn $(\|g_k\|_\infty)_k$ ist eine Cauchyfolge. (Erinnerung: Bilder von Cauchyfolgen unter gleichmäßig stetigen Abbildungen sind Cauchyfolgen.) Insbesondere gilt $|g_k| \leq s$ μ -f.ü. für alle $k \in \mathbb{N}$ und daher auch $|g_k| \leq s$ μ -f.ü. Es folgt auch $|f| \leq s$ μ -f.ü. wegen $g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ μ -f.ü.; hier verwenden wir, dass jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist. Damit ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gezeigt. Gegeben $\epsilon > 0$, gilt für $m \rightarrow \infty$ schließlich

$$\sup_{k: k \geq m} \|g_k - g_m\|_\infty \leq \epsilon,$$

also $|g_k - g_m| \leq \epsilon$ μ -f.ü. für alle k, m groß genug. Es folgt für alle $m \in \mathbb{N}$ groß genug

$$|f - g_m| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} |g_k - g_m| \leq \epsilon \quad \mu\text{-f.ü.},$$

also

$$\|f - g_m\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Genau wie oben folgt hieraus $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in $(\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$.

□

Übung 2.209 (Klammer zwischen L^p und L^q) Es seien $p, q \in [1, \infty]$ zueinander konjugiert. Überzeugen Sie sich davon, dass durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}) \times L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \langle [f], [g] \rangle := \int \bar{f} g \, d\mu$$

eine stetige Sesquilinearform definiert wird, wobei das kartesische Produkt mit der Produktmetrik zu $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ versehen wird. Hierbei bezeichnet $\bar{f}$ das komplex Konjugierte zu f . Überzeugen Sie auch davon, dass man im Fall $p = q = 2$ hiermit einen $\mathbb{K}$ -Hilbertraum $(L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit der Norm $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ erhält.

Die Komplexkonjugation in der Definition der Klammer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird durch den Fall $p = q = 2$ motiviert, in dem man so die wünschenswerte positive Definitheit der Klammer garantiert, also ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ erhält. Sie spielt ohnehin nur im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine Rolle und ist im Fall $p \neq q$ weit weniger wichtig als im Fall $p = 2$. Lässt man die Komplexkonjugation weg, so bekommt man unten *lineare* statt *antilineare* Abbildungen; sonst unterscheidet sich diese Alternative kaum von dem unten Behandelten.

Definition 2.210 (topologischer Dualraum) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, so wird der topologische Dualraum von V durch

$$V^* := \{L : (V, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) \mid L \text{ ist stetig und linear}\}$$

definiert. V^* wird mit der Operatornorm

$$\|\cdot\|_{V \rightarrow \mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|L\|_{V \rightarrow \mathbb{K}} := \sup\{\|L(x)\| \mid x \in V, \|x\| \leq 1\}$$

versehen.

Vom *algebraischen* Dualraum unterscheidet sich der *topologische* Dualraum dadurch, dass man nur *stetige* Linearformen betrachtet.

Die folgende Dualitätsrelation zwischen p - und q -Norm ist oft sehr hilfreich. Sie kennen sie aus der Analysis 2 (in etwas anderer Notation) schon im Spezialfall von ℓ^p und ℓ^q :

Lemma 2.211 (Dualität von p -Norm und q -Norm) Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p, q \in [1, \infty]$ zueinander konjugiert.

1. Es sei $f \in M(\Omega, \mathcal{A})$, und es gebe eine Folge $E_n \uparrow \{f \neq 0\}$ in $\mathcal{A}$ mit $\mu(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Dies ist z.B. der Fall, wenn μ σ -endlich ist.) Dann gilt

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int |fg| d\mu \mid g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1 \right\}. \quad (92)$$

2. Es sei $1 \leq p < \infty$ oder $(p = \infty \text{ und } \mu \text{ } \sigma\text{-endlich})$. Dann wird durch

$$\iota : (L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p) \rightarrow (L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)^*, \|\cdot\|_{L^q \rightarrow \mathbb{K}}), \quad \iota(f)(g) := \langle f, g \rangle = \int \bar{f}g d\mu$$

(mit $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$) eine wohldefinierte antilineare Isometrie gegeben. Insbesondere gilt für $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$:

$$\|f\|_p = \|\iota(f)\|_{L^q \rightarrow \mathbb{K}} = \sup\{|\langle f, g \rangle| \mid g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1\}.$$

Übung 2.212 Überlegen Sie sich am Beispiel $\Omega = \{0\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu = \infty \cdot \delta_0$, $f = 1_\Omega$, dass die Approximierbarkeitsbedingung durch eine Folge $E_m \uparrow \{f \neq 0\}$ in Voraussetzung 1. des Lemmas 2.211 nicht überflüssig ist.

Das gleiche Beispiel zeigt auch, dass im Fall $p = \infty$ im Teil 2. des Lemmas die Voraussetzung der σ -Endlichkeit von μ gebraucht wird. Man kann mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym zeigen, dass unter den Voraussetzungen des Teils 2. des Lemmas die Abbildung ι im Fall $p > 1$ surjektiv ist; für $p = 1$ gilt dies jedoch i.a. nicht. Wir beweisen das hier nicht.

Wir betrachten hier nur den Fall $1 < p < \infty$ des Lemmas; die Fälle $p \in \{1, \infty\}$ sind Übungsaufgaben.

Beweis des Lemmas 2.211 für $1 < p < \infty$:

Wir beweisen zunächst die Behauptung 1. für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Im Fall $f = 0$ μ -f.ü. ist die Behauptung trivial; wir dürfen also $0 < \|f\|_p < \infty$ annehmen. Wir betrachten die Funktion $h := f|f|^{p-2}1_{\{f \neq 0\}}$, die (in etwas anderer Notation) schon im Beweis der Dreiecksungleichung auftrat.

Es gilt wegen $q(p-1) = p$

$$\|h\|_q^q = \int |f|^{q(p-1)} d\mu = \int |f|^p d\mu = \|f\|_p^p$$

und wegen $\bar{f}h = |fh| = |f|^p$

$$\langle f, h \rangle = \|f\|_p^p$$

und wir erhalten für $g := h/\|h\|_q = h/\|f\|_p^{p/q} = h/\|f\|_p^{p-1}$: die Normierung $\|g\|_q = 1$ und

$$\|f\|_p = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p-1}} = \langle f, g \rangle = \frac{\langle f, h \rangle}{\|h\|_q} = \int |fg| d\mu.$$

Damit ist

$$\|f\|_p \leq \sup \left\{ \int |fg| d\mu \mid g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1 \right\} \quad (93)$$

und

$$\|f\|_p \leq \sup \{ |\langle f, g \rangle| \mid g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1 \} \quad (94)$$

für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gezeigt. Die umgekehrten Ungleichungen

$$\|f\|_p \geq \sup \left\{ \int |fg| d\mu \mid g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1 \right\} \quad (95)$$

und

$$\|f\|_p \geq \sup \{ |\langle f, g \rangle| \mid g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1 \} \quad (96)$$

folgen für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ unmittelbar aus der Hölderschen Ungleichung.

Nun beweisen wir die Behauptung 2. Nach der Hölderschen Ungleichung ist für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ die Abbildung $\iota(f) = \langle f, \cdot \rangle : \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{K}$ wohldefiniert, und offensichtlich ist $\iota(f)$ linear und wegen (96) auch stetig. Also ist $\iota : \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)^*$ wohldefiniert, und aufgrund der Linearität des Integrals und des Antilinearität der Komplexkonjugation auch antilinear. Nach Definition der Operatornorm erhalten wir

$$\|\iota(f)\|_{\mathcal{L}^q \rightarrow \mathbb{K}} = \sup \{ |\langle f, g \rangle| \mid g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1 \} = \|f\|_p.$$

Weil ι antilinear ist, folgt hieraus: ι ist eine Isometrie:

$$\forall f, f' \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : \|f - f'\|_p = \|\iota(f - f')\|_{\mathcal{L}^q \rightarrow \mathbb{K}} = \|\iota(f) - \iota(f')\|_{\mathcal{L}^q \rightarrow \mathbb{K}}.$$

Nun beweisen wir die Behauptung (92) unter der Approximierbarkeitsvoraussetzung $\mathcal{A} \ni E_n \uparrow \{f \neq 0\}$, $\mu(E_n) < \infty$.

Wir setzen $f_n := (|f| \wedge n)1_{E_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\|f_n\|_p < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$\int |f_n g| d\mu \uparrow_{n \rightarrow \infty} \int |f g| d\mu$$

für alle $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sowie

$$\|f_n\|_p \uparrow_{n \rightarrow \infty} \|f\|_p$$

nach dem Satz von der monotonen Konvergenz wegen $f_n \uparrow |f|$.

Mit dem schon Gezeigten folgt:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p \\ &= \sup \left\{ \int |f_n g| d\mu \mid g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \sup \left\{ \int |f g| d\mu \mid g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

□

Übung 2.213 Beweisen Sie das Lemma 2.211 in den Fällen $p = 1$ und $p = \infty$.

Als eine Anwendung beweisen wir:

Lemma 2.214 (Integralvariante der Minkowski-Ungleichung) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume und $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt für alle $f \in \overline{M}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ die folgende Integralversion der Dreiecksungleichung:

$$\left\| \int_{\Omega_2} f(\cdot, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \right\|_p \leq \int_{\Omega_2} \|f(\cdot, \omega_2)\|_p \mu_2(d\omega_2), \quad (97)$$

wobei $f(\cdot, \omega_2) : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{K}$, $\omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ und $\int_{\Omega_2} f(\cdot, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) : \Omega_1 \rightarrow [0, \infty]$, $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)$. Hier ist die p -Norm über $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ gemeint.

Für alle $f \in M(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2; \mathbb{K})$ mit $\int_{\Omega_2} \|f(\cdot, \omega_2)\|_p \mu_2(d\omega_2) < \infty$ ist das Integral $\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)$ für μ_1 -fast alle $\omega_1 \in \Omega_1$ definiert und endlich, und es gilt die Ungleichung (97) auch hier.

Die Dreiecksungleichung für die p -Norm im σ -endlichen Fall ist der Spezialfall $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = (\{1, 2\}, \mathcal{P}(\{1, 2\}), \delta_1 + \delta_2)$ dieser Integralvariante der Minkowski-Ungleichung.

Beweis von Lemma 2.214: Es sei $q \in [1, \infty]$ konjugiert zu p und $g \in \mathcal{L}^q(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ mit $\|g\|_q \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f(\omega_1, \omega_2)| \mu_2(d\omega_2) |g(\omega_1)| \mu_1(d\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} |f(\omega_1, \omega_2) g(\omega_1)| \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2) \quad (\text{mit dem Satz von Fubini}) \\ &\leq \int_{\Omega_2} \|f(\cdot, \omega_2)\|_p \|g\|_q \mu_2(d\omega_2) \quad (\text{mit der Hölder-Ungleichung}) \\ &\leq \int_{\Omega_2} \|f(\cdot, \omega_2)\|_p \mu_2(d\omega_2) \quad (\text{wegen } \|g\|_q \leq 1) \end{aligned}$$

Bilden wir das Supremum über alle solchen g und verwenden die Dualitätsrelation (92) aus Lemma 2.211, folgt

$$\left\| \int_{\Omega_2} |f(\cdot, \omega_2)| \mu_2(d\omega_2) \right\|_p \leq \int_{\Omega_2} \|f(\cdot, \omega_2)\|_p \mu_2(d\omega_2)$$

Insbesondere ist

$$\int_{\Omega_2} |f(\cdot, \omega_2)| \mu_2(d\omega_2) < \infty \quad \mu_1\text{-f.ü.},$$

also existiert für μ_1 -fast alle $\omega_1 \in \Omega_1$ das Integral

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)$$

und ist μ_1 -fast überall endlich. Wir erhalten die Behauptung:

$$\left\| \int_{\Omega_2} f(\cdot, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \right\|_p \leq \left\| \int_{\Omega_2} |f(\cdot, \omega_2)| \mu_2(d\omega_2) \right\|_p \leq \int_{\Omega_2} \|f(\cdot, \omega_2)\|_p \mu_2(d\omega_2).$$

□

Korollar 2.215 (Minkowski-Ungleichung für die Faltung) Es seien $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ und $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$. Dann gilt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ (Abänderung auf einer Nullmenge möglich!) und

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Etwas allgemeiner: Für f wie oben und ein beliebiges signiertes Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ gilt

$$\|f * \mu\|_p \leq \|f\|_p \|\mu\|$$

mit der Norm

$$\|\mu\| = \mu_+(\Omega) + \mu_-(\Omega)$$

aus Übung 1.180. Das bedeutet: Die Faltungsabbildung

$$*: (\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n), \|\cdot\|_p) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)), \|\cdot\| \rightarrow (\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n), \|\cdot\|_p)$$

ist eine stetige bilineare Abbildung.

Beweis: Die erste Variante ist der Spezialfall $d\mu = g d\lambda_n$ der zweiten Variante. Wir nehmen zunächst an, dass μ ein endliches (nichtnegatives) Maß ist. Nach der Integralversion der Minkowski-Ungleichung ist $\int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - x) \mu(dx)$ λ_n -fast überall definiert und endlich, und es gilt

$$\begin{aligned} \|f * \mu\|_p &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - x) \mu(dx) \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot - x)\|_p \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_p \mu(dx) = \|f\|_p \mu(\mathbb{R}^n) = \|f\|_p \|\mu\|. \end{aligned}$$

Ist μ nun ein signiertes Maß, so erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} \|f * \mu\|_p &= \|f * (\mu_+ - \mu_-)\|_p = \|f * \mu_+ - f * \mu_-\|_p \leq \|f * \mu_+\|_p + \|f * \mu_-\|_p \\ &\leq \|f\|_p \mu_+(\mathbb{R}^n) + \|f\|_p \mu_-(\mathbb{R}^n) = \|f\|_p \|\mu\|. \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.216 (Die Wärmeleitungshalbgruppe in L^p) Ist $K_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $t > 0$, der Wärmeleitungskern aus Beispiel 2.68, so gilt $\|K_t\|_1 = 1$. Für “Anfangsdaten” $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, der Wärmeleitungsgleichung und die zugehörige Lösung $f(\cdot, t) = g * K_t$ gilt also

$$\|g * K_t\|_p \leq \|g\|_p \|K_t\|_1 \leq \|g\|_p.$$

Damit erhalten wir eine stetige “Zeit- t Wärmeleitungsevolution”

$$\cdot * K_t : (L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p) \rightarrow (L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p), \quad g \mapsto g * K_t.$$

Übung 2.217 Es sei $1 \leq p < \infty$. Es sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|^{-\frac{1}{2p}} (1_{]0,1]}(x) - 1_{[-1,0[}(x)) \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} 1_{[-1,1] \setminus \{0\}}(x) \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, also $f * g \in L^p(\mathbb{R})$
2. $f * g$ ist nur λ_1 -fast überall, jedoch nicht überall definiert. (Wo nicht?)
3. Berechnen Sie

$$c := \lim_{z \downarrow 0} z^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} + 1} f * g(z)$$

Drücken Sie c mit Hilfe von Werten der Betafunktion aus.

Lemma 2.218 (Young-Ungleichung – 1. Version) Es seien $p_1, p_2, p_3 \in [1, \infty]$ mit

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 2$$

wobei $1/\infty := 0$. Dann gilt für alle $f_1, f_2, f_3 \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ und alle $z \in \mathbb{R}^n$:

$$f_1 * f_2 * f_3(z) \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3}.$$

Beweis: Wir behandeln zunächst zwei einfache Spezialfälle:

1. Fall: $1 \in \{p_1, p_2, p_3\}$, o.B.d.A. $p_1 = 1$. Hier folgt die Behauptung aus der Hölder-Ungleichung:

$$f_1 * f_2 * f_3(z) \leq \|f_1\|_1 \|f_2 * f_3\|_\infty \leq \|f_1\|_1 \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3},$$

da p_2 und p_3 hier konjugiert zueinander sind.

2. Fall: $\infty \in \{p_1, p_2, p_3\}$, o.B.d.A. $p_1 = \infty$. Hier gilt $p_2 = p_3 = 1$, und die Behauptung folgt aus der Minkowski-Ungleichung für die Faltung:

$$f_1 * f_2 * f_3(z) \leq \|f_1\|_\infty \|f_2 * f_3\|_1 \leq \|f_1\|_\infty \|f_2\|_1 \|f_3\|_1.$$

3. Fall: $p_j \in]1, \infty[$ für $j = 1, 2, 3$. Es sei $q_j \in]1, \infty[$ konjugiert zu p_j für $j = 1, 2, 3$. Insbesondere gilt

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 3 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} = 3 - 2 = 1. \quad (98)$$

Es sei

$$S_z := \{(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^n)^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = z\}$$

und $\nu_z : \mathcal{B}(S_z) \rightarrow [0, \infty]$ das Bildmaß von $\lambda_n \otimes \lambda_n$ unter der Abbildung

$$(\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow S_z, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, z - x_1 - x_2).$$

Wir setzen

$$f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 : S_z \rightarrow [0, \infty], \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3).$$

Insbesondere gilt

$$f_1 * f_2 * f_3(z) = \int_{S_z} f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 d\nu_z.$$

Wir beobachten

$$\frac{p_1}{q_3} + \frac{p_1}{q_2} = p_1(1 - q_1^{-1}) = p_1 p_1^{-1} = 1 \quad (99)$$

und analog mit zyklisch vertauschten Indizes

$$\frac{p_2}{q_1} + \frac{p_2}{q_3} = \frac{p_3}{q_2} + \frac{p_3}{q_1} = 1. \quad (100)$$

Wir betrachten nun die Produktzerlegung

$$f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 = (1 \bullet f_2^{\frac{p_2}{q_1}} \bullet f_3^{\frac{p_3}{q_1}})(f_1^{\frac{p_1}{q_2}} \bullet 1 \bullet f_3^{\frac{p_3}{q_2}})(f_1^{\frac{p_1}{q_3}} \bullet f_2^{\frac{p_2}{q_3}} \bullet 1).$$

Aus der Version der Hölder-Ungleichung aus Übung 2.197, die wegen (98) anwendbar ist, erhalten wir

$$\int_{S_z} f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \, d\nu_z \leq \|1 \bullet f_2^{\frac{p_2}{q_1}} \bullet f_3^{\frac{p_3}{q_1}}\|_{q_1} \|f_1^{\frac{p_1}{q_2}} \bullet 1 \bullet f_3^{\frac{p_3}{q_2}}\|_{q_2} \|f_1^{\frac{p_1}{q_3}} \bullet f_2^{\frac{p_2}{q_3}} \bullet 1\|_{q_3},$$

wobei die Normen über $(S_z, \mathcal{B}(S_z), \nu_z)$ gemeint sind. Nun gilt

$$\|1 \bullet f_2^{\frac{p_2}{q_1}} \bullet f_3^{\frac{p_3}{q_1}}\|_{q_1} = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f_2^{p_2}(x_2) f_3^{p_3}(x_3) \lambda_n(dx_2) \lambda_n(dx_3) = \|f_2\|_{p_2}^{p_2} \|f_3\|_{p_3}^{p_3},$$

also

$$\|1 \bullet f_2^{\frac{p_2}{q_1}} \bullet f_3^{\frac{p_3}{q_1}}\|_{q_1} = \|f_2\|_{p_2}^{\frac{p_2}{q_1}} \|f_3\|_{p_3}^{\frac{p_3}{q_1}}$$

und analog mit zyklisch vertauschten Indizes

$$\begin{aligned} \|f_1^{\frac{p_1}{q_2}} \bullet 1 \bullet f_3^{\frac{p_3}{q_2}}\|_{q_2} &= \|f_3\|_{p_3}^{\frac{p_3}{q_2}} \|f_1\|_{p_1}^{\frac{p_1}{q_2}}, \\ \|f_1^{\frac{p_1}{q_3}} \bullet f_2^{\frac{p_2}{q_3}} \bullet 1\|_{q_3} &= \|f_1\|_{p_1}^{\frac{p_1}{q_3}} \|f_2\|_{p_2}^{\frac{p_2}{q_3}}. \end{aligned}$$

Oben eingesetzt folgt die Behauptung so:

$$\int_{S_z} f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \, d\nu_z \leq \|f_2\|_{p_2}^{\frac{p_2}{q_1}} \|f_3\|_{p_3}^{\frac{p_3}{q_1}} \|f_1\|_{p_1}^{\frac{p_1}{q_3}} \|f_2\|_{p_2}^{\frac{p_2}{q_3}} \|f_1\|_{p_1}^{\frac{p_1}{q_3}} \|f_2\|_{p_2}^{\frac{p_2}{q_3}} = \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3},$$

wobei wir im letzten Schritt (99) und (100) verwendet haben. □

Durch Übersetzen der 1. Version der Young-Ungleichung mittels Dualität erhalten wir folgende Verallgemeinerung der Minkowski-Ungleichung für die Faltung:

Lemma 2.219 (Young-Ungleichung – 2. Version) *Es seien $p, q, r \in [1, \infty]$ mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r},$$

wobei $1/\infty := 0$. Dann ist für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ die Faltung $f * g$ λ_n -fast überall definiert und endlich, und es gilt

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Insbesondere ist die Faltungsabbildung

$$* : (L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n), \|\cdot\|_p) \times (L^q(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n), \|\cdot\|_q) \rightarrow (L^r(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n), \|\cdot\|_r)$$

eine stetige bilineare Abbildung.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $f, g \geq 0$. Es sei s konjugiert zu r , d.h. $s^{-1} + q^{-1} = 1$. Dann gilt die Voraussetzung $p^{-1} + q^{-1} + s^{-1} = 1$ der 1. Version der Young-Ungleichung. Für alle $h \in L^s(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ mit $h \geq 0$ folgt dann

$$\langle h, f * g \rangle = f * g * h^-(0) \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_s,$$

wobei wir $h^-(x) := h(-x)$ gesetzt haben. Mit der Dualitätsrelation (92) aus Lemma 2.211 folgt hieraus die Behauptung:

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Für Funktionen f, g beliebigen Vorzeichens erhalten wir die Behauptung hieraus mit folgender Überlegung:

$f * g(x)$ ist mindestens für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert und endlich, für die $|f| * |g|(x)$ endlich ist, und es gilt dort

$$|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x)$$

und daher

$$\|f * g\|_r \leq \| |f| * |g| \|_r \leq \| |f| \|_p \| |g| \|_q = \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Übung 2.220 (Hyperkontraktivität der Wärmeleitungshalbgruppe) Es sei K_t der Wärmeleitungskern zur Zeit $t > 0$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$. Zeigen Sie $f * K_t \in L^q(\mathbb{R}^n)$ für alle $q \geq p$.

Übung 2.221 (Young-Ungleichung in $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$) Für $f, g : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{Z}^n$ definieren wir die Faltung

$$f * g(x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} f(y) g(x - y),$$

falls die Summe wohldefiniert ist. Zeigen Sie: Für $p, q, r \in [1, \infty]$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$ und $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^n)$, $g \in \ell^q(\mathbb{Z}^n)$ ist $f * g$ auf ganz $\mathbb{Z}^n$ definiert, und es gilt

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Hinweis: Sie können diese ℓ^p -Version der Young-Ungleichung mit der gleichen Methode wie die L^p -Version der Young-Ungleichung beweisen.

Übung 2.222 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \|x\|^\alpha 1_{\{0 < \|x\|_2 < 1\}}$ und $g_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = \|x\|^\alpha 1_{\{\|x\|_2 > 1\}}$.

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $r \in [1, \infty]$ ist

1. $f_\alpha * f_\beta \in L^r(\mathbb{R}^n)$?

2. $g_\alpha * g_\beta \in L^r(\mathbb{R}^n)$?

In welchen Fällen folgt dies schon aus dem Ergebnis von Übung 2.193 und der Young-Ungleichung?

Wir zeigen nun folgende Approximationseigenschaft von Funktionen in L^p :

Lemma 2.223 (Approximation in L^p durch Faltung mit δ -Approximationen) *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben ein integrierbares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = 1$, setzen wir*

$$f_\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} f(x/\epsilon).$$

Weiter sei $1 \leq p < \infty$ gegeben. Dann gilt für alle $g \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$:

$$\|g * f_\epsilon - g\|_p \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0. \quad (101)$$

Beweis: Wir beweisen das zuerst unter der Zusatzvoraussetzung, dass g beschränkt und λ_n -fast überall stetig ist und kompakten Träger besitzt. Hier gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} g * f_\epsilon(x) &= \epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y/\epsilon) \lambda_n(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x-\epsilon z) f(z) \lambda_n(dz), \end{aligned}$$

also

$$g * f_\epsilon(x) - g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-\epsilon z) f(z) \lambda_n(dz) - g(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \lambda_n(dz) = \int_{\mathbb{R}^n} [g(x-\epsilon z) - g(x)] f(z) \lambda_n(dz).$$

Mit der Integralvariante der Minkowski-Ungleichung aus Lemma 2.214 erhalten wir :

$$\left\| x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} [g(x-\epsilon z) - g(x)] f(z) \lambda_n(dz) \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|x \mapsto g(x-\epsilon z) - g(x)\|_p |f(z)| \lambda_n(dz)$$

Um den Limes des letzten Integrals für $\epsilon \downarrow 0$ zu berechnen, wenden wir den Satz von der dominierten Konvergenz an. Wir überprüfen seine Voraussetzungen:

1. *Integrierbare Majorante:*

$$\|x \mapsto g(x-\epsilon z) - g(x)\|_p \leq \|x \mapsto g(x-\epsilon z)\|_p + \|g\|_p = 2\|g\|_p$$

also

$$\|x \mapsto g(x-\epsilon z) - g(x)\|_p |f(z)| \leq 2\|g\|_p |f(z)|,$$

was integrierbar in z ist.

2. *Punktweise Konvergenz:* Fixieren wir $z \in \mathbb{R}^n$. Wir müssen zeigen:

$$\|x \mapsto g(x-\epsilon z) - g(x)\|_p \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0. \quad (102)$$

Hierzu verwenden wir nochmal den Satz von der dominierten Konvergenz mit folgenden Zutaten:

- (a) *Konvergenz fast überall*: Aus der Stetigkeit von g fast überall folgt für λ_n -fast alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$|g(x - \epsilon z) - g(x)|^p \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0$$

- (b) *Integrierbare Majorante*: Für unser festes $z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\bigcup_{0 < \epsilon \leq 1} \text{supp}[x \mapsto g(x - \epsilon z) - g(x)] \subseteq B_{|z|} + \text{supp } g =: K(z)$$

ist beschränkt (wobei $B_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq r\}$ die Kugel um 0 mit Radius r bezeichnet), also ist

$$\sup_{0 < \epsilon \leq 1} |g(x - \epsilon z) - g(x)|^p \leq (2 \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)|)^p 1_{K(z)}(x)$$

eine in x integrierbare Majorante.

Damit ist die Behauptung (102) gezeigt.

Insgesamt folgt:

$$\|g * f_\epsilon - g\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|x \mapsto g(x - \epsilon z) - g(x)\|_p |f(z)| \lambda_n(dz) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0.$$

für beschränkte, fast überall stetige $g \in L^p$ mit kompaktem Träger.

Insbesondere gilt dies, wenn $g = 1_Q$ die Indikatorfunktion eines beschränkten Quaders $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Sei $\mathcal{G}$ der Raum aller Funktionen $g \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$, für die die Behauptung (101) gilt. Wir beobachten zuerst, dass $\mathcal{G}$ ein Untervektorraum von $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ ist, denn $0 \in \mathcal{G}$ und für alle $g, h \in \mathcal{G}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\|(\alpha g + \beta h) * f_\epsilon - (\alpha g + \beta h)\|_p \leq |\alpha| \|g * f_\epsilon - g\|_p + |\beta| \|h * f_\epsilon - g\|_p \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0,$$

also $\alpha g + \beta h \in \mathcal{G}$. Zudem ist $\mathcal{G}$ abgeschlossen bezüglich der p -Norm in $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$. In der Tat: Konvergiert eine Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$ bezüglich der p -Norm gegen $g \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$, so folgt:

$$\|g * f_\epsilon - g\|_p \leq \|g * f_\epsilon - g_m * f_\epsilon\|_p + \|g_m * f_\epsilon - g_m\|_p + \|g_m - g\|_p.$$

Nun gilt nach der Minkowski-Ungleichung für die Faltung:

$$\|g * f_\epsilon - g_m * f_\epsilon\|_p = \|(g - g_m) * f_\epsilon\|_p \leq \|g - g_m\|_p \|f_\epsilon\|_1 = \|g - g_m\|_p \|f\|_1$$

und daher eingesetzt:

$$\|g * f_\epsilon - g\|_p \leq \|g - g_m\|_p (\|f\|_1 + 1) + \|g_m * f_\epsilon - g_m\|_p$$

Gegeben $\eta > 0$, fixieren wir nun $m \in \mathbb{N}$ so gross, dass $\|g - g_m\|_p(\|f\|_1 + 1) < \eta$ gilt. Dann folgt

$$\limsup_{\epsilon \downarrow 0} \|g * f_\epsilon - g\|_p < \eta + \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \|g_m * f_\epsilon - g_m\|_p = \eta,$$

also $g \in \mathcal{G}$.

Insbesondere gilt die Voraussetzung $\|g_m - g\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ für Folgen $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$, falls $0 \leq g_m \uparrow g \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ oder $0 \leq g_m \downarrow g$ gilt.

Mit dem Satz von den monotonen Klassen folgt, dass für jeden beschränkten Quader Q in $\mathbb{R}^n$ und für jede beschränkte messbare Funktion vom Typ $g1_Q$ gilt: $g1_Q \in \mathcal{G}$. Wählen wir nun eine Folge $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von beschränkten Quadern mit $Q_m \uparrow \mathbb{R}^n$, so folgt für alle $g \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ einerseits

$$\forall m \in \mathbb{N} : 1_{Q_m} 1_{\{|g| \leq m\}} g \in \mathcal{G}$$

und andererseits

$$\|1_{Q_m} 1_{\{|g| \leq m\}} g - g\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

nach dem Satz von der dominierten Konvergenz. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{G}$ folgt die Behauptung: $g \in \mathcal{G}$. □

Wir nennen jede Familie $(f_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ wie im Lemma eine δ -Approximation, denn sie approximiert das Diracmaß δ_0 im folgenden Sinn:

$$g * f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} g * \delta_0 = g$$

bezüglich der p -Norm für alle $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 2.224 (Anfangswerte der Wärmeleitungshalbgruppe) Der Wärmeleitungskern

$$K_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}} = \frac{d\nu_t \text{Id}_n}{d\lambda_n}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

erfüllt die Skalierungseigenschaft

$$K_{\epsilon^2}(x) = \epsilon^{-n} K_1(x/\epsilon)$$

und die Normierungsbedingung

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_1 d\lambda_n = 1.$$

Die Familie $(K_{\epsilon^2})_{\epsilon > 0}$ bildet also eine δ -Approximation. Es folgt für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f * K_t - f\|_p \xrightarrow{t \downarrow 0} 0.$$

In diesem L^p -Sinne ist f der Anfangswert der Lösung $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto f * K_t(x)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta \phi.$$

Korollar 2.225 (C_c^∞ ist dicht in L^p) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ ist der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ aller glatten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger dicht in $(L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)), \lambda_n, \|\cdot\|_p)$

Beweis: Es sei $K_m \uparrow_{m \rightarrow \infty} \mathbb{R}^n$ eine zu $\mathbb{R}^n$ aufsteigende Folge kompakter Mengen, z.B. eine aufsteigende Folge von Quadern. Dann bildet $(1_{K_m}g)_{m \in \mathbb{N}}$ für beliebiges $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ eine Folge von Funktionen mit kompaktem Träger. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz sieht man, dass sie bezüglich der p -Norm gegen g konvergiert. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Für q konjugiert zu p folgt nach der Hölderschen Ungleichung:

$$\|1_{K_m}g\|_1 \leq \|1_{K_m}\|_q \|g\|_p < \infty.$$

Nun fixieren wir eine Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = 1$; die Existenz solcher f folgt aus Lemma 2.148 und bilden die zugehörige δ -Approximation $(f_\epsilon)_{\epsilon > 0}$. Dann ist für jedes $\epsilon > 0$ $f_\epsilon * (1_{K_m}g)$ glatt, denn wegen der Integrierbarkeit von $1_{K_m}g$ folgt für jeden Multiindex $\beta \in \mathbb{N}_0^n$

$$D^\beta(f_\epsilon * (1_{K_m}g)) = (D^\beta f_\epsilon) * (1_{K_m}g)$$

mit dem Satz von Lebesgue von der Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung; insbesondere sind alle Funktionen $f_\epsilon * (1_{K_m}g)$ glatt. Sie besitzen auch alle kompakten Träger, denn sowohl f_ϵ als auch $1_{K_m}g$ besitzt kompakten Träger. Es gilt also

$$\forall \epsilon > 0 \forall m \in \mathbb{N} : f_\epsilon * (1_{K_m}g) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Mit Lemma 2.223 folgt bezüglich $\|\cdot\|_p$:

$$f_\epsilon * (1_{K_m}g) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 1_{K_m}g \xrightarrow{m \rightarrow \infty} g.$$

Es folgt die behauptete Dichtheit von $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in L^p . □

Übung 2.226 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$C_c^\infty(U) := \{f|_U \mid f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ supp } f \subseteq U\}$$

der Raum aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger in U . Zeigen Sie für $1 \leq p < \infty$: $C_c^\infty(U)$ ist dicht in $(L^p(U, \mathcal{B}(U)), \lambda_n|_{\mathcal{B}(U)}, \|\cdot\|_p)$.

2.13 L^2 -Theorie von Fourierintegralen

Wir arbeiten im Folgenden mit komplexwertigen Funktionen ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$); z.B. steht $L^p(\mathbb{R}^n)$ nun für $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n; \mathbb{C})$ und $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

In diesem Abschnitt über die Fouriertransformation ist es zweckmäßig, eine etwas andere Vorzeichen- und Skalierungskonvention als früher zu verwenden:

Definition 2.227 (Fouriertransformierte – Variante) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, nennen wir

$$\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}f(k) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k, x \rangle} f(x) \lambda_n(dx),$$

die *Fouriertransformierte* von f .

Das neue Vorzeichen im Exponenten wird durch die Komplexkonjugation motiviert; die folgende Übung soll die Nützlichkeit des neuen Vorfaktors $(2\pi)^{-n/2}$ illustrieren:

Übung 2.228 Für $n \in \mathbb{N}$, eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{C}^n$ setzen wir

$$f(x) = f_{A,b}(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}x^t A x + b^t x\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei Elemente von $\mathbb{C}^n$ als Spaltenvektoren aufgefaßt werden. Zeigen Sie, ohne die Theorie dieses Abschnitts vorab zu verwenden:

1. Für $k \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mathcal{F}f(k) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{2}(k + ib)^t A^{-1}(k + ib)\right)$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie das Ergebnis von Übungsaufgabe 2.43.

2. Folgern Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f_{A,b}} f_{A',b'} d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}f_{A,b}} \mathcal{F}f_{A',b'} d\lambda_n,$$

wobei auch $b' \in \mathbb{C}^n$ sei und $A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine weitere positiv definite Matrix bezeichnet.

Aus der Übung 1.147 wissen wir, dass $\mathcal{F}f$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine stetige Funktion ist. Zudem ist $\mathcal{F}f$ beschränkt, d.h. $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$, da für alle $k \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|\mathcal{F}f(k)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle k, x \rangle} f(x)| \lambda_n(dx) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \lambda_n(dx) = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1.$$

Wegen der Linearität von $\mathcal{F}$ können wir das auch so schreiben:

Lemma 2.229 (Fouriertransformation auf L^1) Die *Fouriertransformation*

$$\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1) \rightarrow (C_b(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$$

ist eine wohldefinierte stetige lineare Abbildung. Ihre Operatornorm ist durch

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n/2}$$

beschränkt.

Übung 2.230 (Ableitung $D_j \xrightarrow{\text{Fourier}} \text{Multiplikation mit } ik_j$) Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger. Zeigen Sie für alle $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ und $j = 1, \dots, n$:

$$\boxed{\mathcal{F}(D_j f)(k) = ik_j \mathcal{F}f(k)}$$

Hinweis: Fubini + partielle Integration.

Insbesondere gilt für alle $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{F}(\Delta f)(k) = -\|k\|_2^2 \mathcal{F}f(k)$$

und daher für $\|k\|_2 \neq 0$:

$$|\mathcal{F}f(k)| = \frac{|\mathcal{F}(\Delta f)(k)|}{\|k\|_2^2} \leq \frac{(2\pi)^{-n/2} \|\Delta f\|_1}{\|k\|_2^2} \xrightarrow{\|k\|_2 \rightarrow \infty} 0,$$

Es gilt also $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, wobei

$$C_0(\mathbb{R}^n) := \{g \in C_b(\mathbb{R}^n) \mid |g(k)| \xrightarrow{\|k\|_2 \rightarrow \infty} 0\}.$$

Lemma 2.231 *Der Raum $C_0(\mathbb{R}^n)$ ist abgeschlossen in $(C_b(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$.*

Beweis: Es sei $g \in \overline{C_0(\mathbb{R}^n)}$, wobei der topologische Abschluss in $(C_b(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ gemeint ist. Gegeben $\epsilon > 0$, wählen wir $h \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|g - h\|_\infty < \frac{\epsilon}{2},$$

und hierzu $R > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{R}^n$ mit $\|k\|_2 \geq R$ gilt:

$$|h(k)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir erhalten für diese k :

$$|g(k)| \leq |g(k) - h(k)| + |h(k)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Damit ist $|g(k)| \xrightarrow{\|k\|_2 \rightarrow \infty} 0$, also $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gezeigt.

□

Wir erhalten hieraus:

Lemma 2.232 (Riemann-Lebesgue-Lemma) *Für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.*

$$\boxed{\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)] \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)}$$

Beweis: Weil $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ ist und $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1) \rightarrow (C_b(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ stetig ist, folgt

$$\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)] = \mathcal{F}[\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}] \subseteq \overline{\mathcal{F}[C_c^\infty(\mathbb{R}^n)]} \subseteq \overline{C_0(\mathbb{R}^n)} = C_0(\mathbb{R}^n).$$

In der letzten Formel ist natürlich der erste topologische Abschluß bezüglich $\|\cdot\|_1$ gemeint, die beiden übrigen Abschlüsse jedoch bezüglich $\|\cdot\|_\infty$

□

Erinnern Sie sich an Lemma 2.66. Wir schreiben es noch einmal spezialisiert für signierte Maße mit Dichte $\mu = f d\lambda_n$, $\nu = g d\lambda_n$ auf:

Lemma 2.233 (Spezialfall von Lemma 2.66) Für alle $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:³⁴

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)}$$

Satz 2.234 (Fourier-Umkehrformel) Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} := \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$f(x) = \mathcal{F}\hat{f}(-x) \text{ für } \lambda_n\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Anders geschrieben:

WICHTIG!

$$\boxed{\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k, x \rangle} f(x) \lambda_n(dx) \implies f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \hat{f}(k) \lambda_n(dk) \text{ f.ü.}}$$

Die Fouriertransformationen vorwärts und rückwärts unterscheiden sich also nur um ein Vorzeichen im Exponenten. Wir kürzen die Rückwärtstransformation für $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ wie folgt ab:³⁵

$$\mathcal{F}^- \hat{g}(x) := \mathcal{F}\hat{g}(-x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \hat{g}(k) \lambda_n(dk).$$

Beweis der Fourier-Umkehrformel: Es bezeichne für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$P_t(x) = P_t(-x) = 2^{n/2} \pi^{n/4} t^{n/4} K_t(x) := \pi^{-n/4} t^{-n/4} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}$$

den mit $2^{n/2} \pi^{n/4} t^{n/4}$ skalierten Wärmeleitungskern.³⁶ Aus Übungsaufgabe 2.43, spezialisiert auf den vorliegenden Fall, wissen wir für alle $k \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{F}P_t(k) = \pi^{-n/4} t^{n/4} e^{-\frac{t\|k\|_2^2}{2}} = P_{1/t}(k).$$

³⁴Der lästige Faktor $(2\pi)^{n/2}$ in dieser Faltungsformel ist der Preis für unsere neue Normierungskonvention.

³⁵Wir schreiben noch nicht $\mathcal{F}^{-1}$, sondern $\mathcal{F}^-$, weil die Fourier-Umkehrformel nicht auf dem gesamten Definitionsbereich $L^1(\mathbb{R}^n)$ von $\mathcal{F}$ gilt.

³⁶Die Skalierung ist so gewählt, dass $\|P_t\|_2 = 1$ gilt. Die Normierungskonstanten $2^{n/2} \pi^{n/4}$ sind hier nicht wichtig; man könnte sie ebenso gut weglassen.

also

$$\mathcal{F}P_t = P_{1/t}$$

und daher auch

$$\mathcal{F}^- \mathcal{F}P_t = \mathcal{F}^- P_{1/t} = P_t$$

also die Fourier-Umkehrformel im Spezialfall von P_t . Wir führen den allgemeinen Fall mit einer Faltungstechnik darauf zurück: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ folgt

$$\begin{aligned} f * P_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) P_t(x - y) \lambda_n(dy) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mathcal{F}^- P_{1/t}(x - y) \lambda_n(dy) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x-y \rangle} P_{1/t}(k) \lambda_n(dk) \lambda_n(dy) \\ &\quad \text{(mit Fubini, anwendbar wg. } f, P_{1/t} \in L^1) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} P_{1/t}(k) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle k, y \rangle} \lambda_n(dy)}_{=(2\pi)^{n/2} \hat{f}(k)} \lambda_n(dk) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} P_{1/t}(k) \hat{f}(k) \lambda_n(dk) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \mathcal{F}P_t(k) \hat{f}(k) \lambda_n(dk) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k, y \rangle} P_t(y) \lambda_n(dy) \hat{f}(k) \lambda_n(dk) \\ &\quad \text{(nochmal Fubini, anwendbar wg. } \hat{f}, P_t \in L^1) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x-y \rangle} \hat{f}(k) \lambda_n(dk) P_t(y) \lambda_n(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^- \hat{f}(x - y) P_t(y) \lambda_n(dy) = (\mathcal{F}^- \hat{f}) * P_t(y). \end{aligned}$$

Wieder mit $[2^{n/2} \pi^{n/4} t^{n/4}]^{-1}$ zurückskaliert schreiben wir das in der Form

$$f * K_t = (\mathcal{F}^- \hat{f}) * K_t.$$

Nun gilt $f * K_t \xrightarrow{t \downarrow 0} f$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ wegen Beispiel 2.224, also gibt es wegen Lemma 2.207 eine Nullfolge $t_n \downarrow 0$, so dass $f * K_{t_n} \xrightarrow{t \downarrow 0} f$ λ_n -fast überall gilt. Andererseits ist $g := \mathcal{F}^- \hat{f}$ stetig und beschränkt, also gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f * K_t(x) &= g * K_t(x) \\ &= (2\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y) e^{-\frac{\|y\|_2^2}{2t}} \lambda_n(dy) \quad \text{(mit der Skalierung } y = \sqrt{t}z) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - \sqrt{t}z) e^{-\frac{\|z\|_2^2}{2}} \lambda_n(dz) \quad \text{(mit dem Satz v.d. dom. Konv.)} \\ &\xrightarrow{t \downarrow 0} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-\frac{\|z\|_2^2}{2}} \lambda_n(dz) = g(x) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: $f = g$ λ_n -fast überall, also die Behauptung.

□

Beispiel 2.235 (Faltungseigenschaft der Cauchyverteilung – Variante der Herleitung)Für $a > 0$ sei

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_a(x) = e^{-a|x|}.$$

Dann gilt $f_a \in L^1(\mathbb{R})$, und für $\hat{f}_a := \mathcal{F}f_a$ und $k \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-a|x|} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(a+ik)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(a-ik)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(a+ik)x}}{-(a+ik)} \right]_{x=0}^\infty + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik} \right]_{x=-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt auch $\hat{f}_a \in L^1(\mathbb{R})$, da $\hat{f}_a(k) = O(k^{-2})$ für $|k| \rightarrow \infty$, so dass die Fourier-Umkehrformel anwendbar ist:

$$\mathcal{F}\hat{f}_a = \mathcal{F}^{-}\hat{f}_a = f_a,$$

wobei wir bei der ersten Gleichheit die Symmetrie $f_a(-x) = f_a(x)$ verwenden.

Das Gleiche ausführlich geschrieben:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \frac{a}{a^2 + k^2} dk = e^{-a|x|}. \quad (103)$$

Nun seien $a, b > 0$ gegeben. Wegen

$$f_a f_b = f_{a+b}$$

folgt mit der Faltungsformel:

$$\mathcal{F}^{-}(\hat{f}_a * \hat{f}_b) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-}\hat{f}_a \cdot \mathcal{F}^{-}\hat{f}_b = \sqrt{2\pi} f_a f_b = f_{a+b} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-}\hat{f}_{a+b}$$

und daher

$$\hat{f}_a * \hat{f}_b = \sqrt{2\pi} \hat{f}_{a+b},$$

also die Faltungsformel für die Dichte der Cauchyverteilung; siehe auch Übung 2.71.

Übung 2.236 (Fouriertransformierte der Cauchyverteilung – Variante der Herleitung)Leiten Sie Gleichung (103) noch einmal anders mit Hilfe des Cauchy-Integralsatzes und der Cauchy-Integralformel her. Betrachten Sie dazu für $R > 0$ die beiden Halbkreisscheiben

$$H_{\pm}(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R, \pm \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

und den Limes

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial H_{\pm}(R)} e^{izx} \frac{a}{a^2 + z^2} dz$$

mit $H_+(R)$ für $x > 0$ und $H_-(R)$ für $x < 0$.

Lemma 2.237 ($\mathcal{F}^-$ ist adjungiert zu $\mathcal{F}$ auf L^1) Für alle $f, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}f} \hat{g} d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \mathcal{F}^- \hat{g} d\lambda_n. \quad (104)$$

Ist speziell $\hat{g}$ von der Gestalt $\hat{g} = \mathcal{F}g$ für ein $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so können wir das auch in der folgenden Form schreiben:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}f} \mathcal{F}g d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} g d\lambda_n. \quad (105)$$

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Fubini; dieser ist wegen $f, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ anwendbar:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}f} \hat{g} d\lambda_n &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \overline{f(x)} \lambda_n(dx) \hat{g}(k) \lambda_n(dk) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \hat{g}(k) \lambda_n(dk) \lambda_n(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \mathcal{F}^- \hat{g} d\lambda_n. \end{aligned}$$

Die Variante (105) unter der Zusatzvoraussetzung $\hat{g} = \mathcal{F}g$, $g \in L^1$, folgt hieraus unmittelbar durch Einsetzen der Fourierumkehrformel: $\mathcal{F}^- \mathcal{F}g = g$.

□

Wir erhalten:

Satz 2.238 (Satz von Plancherel) Die Fouriertransformation

WICHTIG!

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$$

besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer (mit dem gleichen Symbol bezeichneten) unitären Abbildung

$$\mathcal{F} : (L^2(\mathbb{R}^n), \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (L^2(\mathbb{R}^n), \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Das bedeutet: $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv, und es gilt für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ die folgende *Plancherel-Gleichung* (auch: *Parseval-Gleichung*³⁷):

$$\boxed{\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \langle f, g \rangle, \quad \|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2}$$

Die Plancherel-Gleichung für die Norm ist natürlich der Spezialfall $f = g$ der Gleichung für das Skalarprodukt.

³⁷Von M.A. Parseval (*1755,†1835) stammt eigentlich nur die Variante für Fourierreihen (s. Analysis 2), während die hier dargestellte Gleichung auf M. Plancherel (*1885,†1967) zurückgeht. Trotzdem wird die Plancherel-Gleichung und weitere Verallgemeinerungen davon in der harmonischen Analysis auf lokalkompakten Gruppen (historisch gesehen fälschlicherweise) manchmal auch “Parseval-Gleichung” genannt.

Beweis des Satzes: Es bezeichne wieder K_t den Wärmeleitungskern. Seine Fouriertransformierte lautet

$$\mathcal{F}K_t(k) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{t\|k\|_2^2}{2}} = t^{-n/2} K_{1/t}(k), \quad k \in \mathbb{R}^n.$$

Nun sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Wir setzen für $t > 0$:

$$\begin{aligned} g_t &:= f * K_t \in L^1(\mathbb{R}^n), \\ \hat{g}_t &:= \mathcal{F}g_t : k \mapsto e^{-\frac{t\|k\|_2^2}{2}} \mathcal{F}f(k). \end{aligned}$$

Dann gilt auch $\hat{g}_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$, denn $K_{1/t}(k) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}f$ ist beschränkt. Also ist Lemma 2.237 anwendbar und liefert

$$\begin{aligned} \langle f, f * K_t \rangle &= \langle f, g_t \rangle = \langle \mathcal{F}f, \hat{g}_t \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{t\|k\|_2^2}{2}} |\mathcal{F}f(k)|^2 \lambda_n(dx) \\ &\xrightarrow{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(k)|^2 \lambda_n(dx) = \|\mathcal{F}f\|_2^2, \end{aligned} \tag{106}$$

wobei wir zuletzt den Satz von der monotonen Konvergenz und

$$e^{-\frac{t\|k\|_2^2}{2}} \uparrow_{t \downarrow 0} 1$$

verwendet haben. Andererseits gilt nach Lemma 2.223 wegen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f * K_t - f\|_2 \xrightarrow{t \downarrow 0} 0$$

also wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung (Stetigkeit des Skalarprodukts):

$$|\langle f, f * K_t \rangle - \|f\|_2^2| = |\langle f, f * K_t - f \rangle| \leq \|f\|_2 \|f * K_t - f\|_2 \xrightarrow{t \downarrow 0} 0.$$

Zusammen mit (106) schließen wir für unser $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_2^2 = \|\mathcal{F}f\|_2^2, \tag{107}$$

insbesondere $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Weil $\mathcal{F}$ linear ist, bedeutet das:

$$\mathcal{F}|_{L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)} : (L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \rightarrow (L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$$

ist (gleichmäßig) stetig. Nun ist $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht in $(L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$; zum Beispiel ist ja schon der Teilraum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht. Daher besitzt $\mathcal{F}|_{L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)}$ eine eindeutige stetige lineare Fortsetzung zu einer Abbildung

$$\mathcal{F} : (L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \rightarrow (L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2), \tag{108}$$

die wir wieder mit dem gleichen Symbol $\mathcal{F}$ bezeichnen. Mit der Stetigkeit der Norm und der Dichtheit von $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ in $(L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$ folgt nun die Plancherel-Gleichung

(107) für die Norm auch für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Die Plancherel-Gleichung für das Skalarprodukt folgt hieraus, weil sich das Skalarprodukt mit der “Polarisationsgleichung” durch die Norm ausdrücken läßt:

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n) : \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f - ig\|^2 - i\|f + ig\|^2).$$

Die Fouriertransformation (108) in L^2 ist injektiv, weil sie isometrisch ist. Weil $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist, folgt aus der Isometrie in (108) auch, dass ihr Bild $\mathcal{F}[L^2(\mathbb{R}^n)] \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig und daher abgeschlossen ist. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathcal{F}[L^2(\mathbb{R}^n)]$ eine dichte Teilmenge von $L^2(\mathbb{R}^n)$ enthält. Dies sehen wir so: Gegeben $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ wissen wir sowohl $\hat{f} * K_t \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ als auch $\mathcal{F}(\hat{f} * K_t) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}\hat{f}) \cdot (\mathcal{F}K_t) = (2\pi/t)^{n/2}(\mathcal{F}\hat{f}) \cdot K_{1/t} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, also auch $\mathcal{F}^-(\hat{f} * K_t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. In der folgenden Rechnungen sind Limiten und Abschluß bezüglich der 2-Norm gemeint. Wir erhalten:

$$\hat{f} = \lim_{t \downarrow 0} \hat{f} * K_t = \lim_{t \downarrow 0} \mathcal{F}\mathcal{F}^-(\hat{f} * K_t) \in \overline{\mathcal{F}[L^2(\mathbb{R}^n)]} = \mathcal{F}[L^2(\mathbb{R}^n)],$$

also

$$L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{F}[L^2(\mathbb{R}^n)]$$

und daher also

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \overline{L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)} \subseteq \overline{\mathcal{F}[L^2(\mathbb{R}^n)]} = \mathcal{F}[L^2(\mathbb{R}^n)].$$

Also ist $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ surjektiv. □

Beispiel 2.239 (Plancherel-Gleichung für die Funktion $\frac{\sin x}{x}$) Betrachten wir die stetige Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Sie ist zwar nicht integrierbar, $f \notin L^1(\mathbb{R})$, jedoch quadratintegrierbar, d.h. $f \in L^2(\mathbb{R})$ wegen $f(x) = O(|x|^{-2})$, $|x| \rightarrow \infty$. Wir schreiben sie als Fourierrücktransformierte:

$$f = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}^{-1} 1_{[-1,1]},$$

denn für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} 1_{[-1,1]}(k) dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{ikx} dk = \left[\frac{e^{ikx}}{ix} \right]_{k=-1}^{k=1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{ix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}.$$

Aus der Plancherel-Gleichung folgt

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \|f\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \|1_{[-1,1]}\|_2^2 = \pi.$$

Damit ist gezeigt:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi}$$

Index

- $\cap$ -stabil, 16
- χ^2 -Verteilung, 134
- δ -Approximation, 220
- σ -Algebra, 3
- σ -Algebra, erzeugte, 12
- σ -Stetigkeit, 10
- σ -endlich, 5
- σ -nullstetig, 21
- σ -stetig von unten (Inhalt), 21
- p -Form, 146
- p -Norm, 200
- äußere Ableitung, 162
- äußere Algebra, 143
- äußeres Maß, 25
- äußeres Produkt, 139
- Ableitung, äußere, 162
- absolutstetig, 79
- alternierende Multilinearform, 139
- Approximationssatz von Carathéodory, 31
- asymptotisch Gaußsche Integrale, 116
- bedingte Erwartung, 88
- Beppo Levi, Satz von, 62
- berandete Untermannigfaltigkeit, 178
- Bernoulli-Variablen, 112
- Besselfunktionen, modifizierte, 119
- Bewegung, 2
- Bildmaß, 43
- Borel-Cantelli, erstes Lemma von, 206
- Borel-Lebesgue-Maß, 33
- Borel-messbar, 35
- Borelmengen, 13
- Borelsche σ -Algebra, 13
- Carathéodory, Approximationssatz von, 31
- Carathéodory, Fortsetzungssatz von, 26
- Cartansche Formel, 195
- Cauchy-Integralformel, 191
- Cauchy-Integralsatz, 185
- Cauchy-Riemann-Gleichung, 186
- Cauchyverteilung, 139
- Cavalierisches Prinzip, 101
- Chi-Quadrat-Verteilung, 134
- Coableitung, 171
- Dachprodukt, 139–141
- de-Rham-Kohomologieraum, 197
- de-Rham-Komplex, 164
- dicht, C_c^∞ in L^p , 221
- Dichte, 75, 76
- Differentialform, 146
- Dirac-Maß, 7
- Divergenz, 168
- dominierte Konvergenz, Satz, 65
- Dreiecksungleichung in L^p , 204
- Dualraum, topologischer, 210
- durchschnittsstabil, 16
- Dynkin-System, 16
- Eindeutigkeitssatz für endliche Maße, 19
- Einsetzen (Vektor in Form), 145
- elementare Funktion, 40
- endlich (Maß), 5
- Ereignis, 3
- Ereignisraum, 3
- Erwartung, bedingte, 88
- Erwartungswert, 51
- Erzeugendensystem einer σ -Algebra, 12
- Erzeuger, 12
- erzeugte σ -Algebra (eines Mengensystems), 12
- erzeugte σ -Algebra (von einer Abbildung), 42
- exakt (Differentialform), 196
- Faltung, 134
- fast überall, 30
- fast sicher, 30
- Fatou, Lemma von, 64
- Fluss, 188
- Formel von Wick, 126

Formel, Cartansche, 195
 Fortsetzungssatz von Carathéodory, 26
 Fourier-Umkehrformel, 224
 Fouriertransformation, 222
 Fouriertransformierte, 69
 Fouriertransformierte (von Maßen), 58
 Fubini, Satz von, für integrierbare Fkt, 109
 Fubini, Satz von, für nichtneg. Fkt, 102

 Gaußsches Integral, 105
 geschlossen (Differentialform), 196
 Gleichung, Parsevalsche, 227
 Gleichung, Plancherelsche, 227
 Gleichverteilung (diskret), 8
 Grassmannalgebra, 143
 Grassmannprodukt, 139
 Greensche Integralformeln, 188

 Höldersche Ungleichung, 202
 Hahn-Zerlegung, 91
 holomorph, 186

 i.i.d., 112
 Immersion, 154
 Induktion, maßtheoretische, 52
 Inhalt, 5
 Integral (n -Formen), 150
 Integral (über Differentialformen), 151
 Integral (allgemein), 51
 Integral (Lebesgue-Stieltjes), 57
 Integral (nichtneg. messb. Fkt.), 48
 Integral (nichtneg. Treppenfunktionen), 46
 Integral (von Formen auf orient. Untermgf.), 159
 Integral, Gaußsches, 105
 Integralformel, Cauchysche, 191
 Integralformeln, Greensche, 188
 Integralsatz, Cauchyscher, 185
 integrierbar, 51
 integrierbar (Form), 160

 Jacobideterminante, 128
 Jensensche Ungleichung, 58
 Klasse, monotone, 41
 kohomolog, 197
 Kohomologie, de Rhamsche, 197
 Kohomologieklass, 197
 Komplex (de-Rham-), 164
 konjugiert (Hölder), 202
 Kontraktion (Form mit Vektor), 145
 Korand, 196
 Kozykel, 196

 Laplace-Beltrami-Operator, 172
 Laplace-Methode, 116
 Lebesgue, Satz von, Vertauschung von $\int$ und ∂_t , 69
 Lebesgue-Stieltjes-Integral, 57
 Lebesgue-Stieltjes-Maß, 32
 Lebesguemaß, 20, 33
 Lebesguesche σ -Algebra, 33
 Lebesguescher Satz von der majorisierten Konvergenz, 65
 Lemma von Borel-Cantelli, erstes, 206
 Lemma von Fatou, 64
 Lemma, Riemann-Lebesgue, 223
 Lie-Ableitung, 192
 Likelihoodquotient, 76
 Liouville, Satz von, 199

 Maß, 5
 Maß, endliches, 5
 Maß, signiertes, 5
 Maßraum, 5
 maßtheoretische Induktion, 52
 Majorante, integrierbare, 66
 majorisierte Konvergenz, Satz, 65
 Mengenalgebra, 3
 messbar (Abbildungen), 35
 messbar (Mengen), 3
 messbarer Raum, 3
 Metrik, Riemannsche, 154
 Minkowski-Ungleichung (Dreiecksungl.), 204
 Minkowski-Ungleichung (Integralversion), 212
 modifizierte Besselfunktionen, 119
 monotone Klasse, 41
 monotone Konvergenz, Satz, 62

- monotone Konvergenz
 - (für Integrale v. Treppenfkt.), 47, 49
- multidimensionale Normalverteilung, 124
- Multilinearform, alternierende, 139
- Negativteil (einer Fkt.), 41
- Negativteil (eines sign. Maßes), 91
- nichtnegativ (Differentialform), 159
- Normalverteilung (multidimensional), 124
- Nullmenge, 30
- Oberflächenmaß, 157
- orientiert, 158
- Orientierung (berandete Umgf.), 178
- orientierungstreu, 151
- orientierungsumkehrend, 151
- orthogonal (Maße), 88
- Parseval-Gleichung, 227
- Partition, 4, 14
- Plancherel, Satz von, 227
- Plancherel-Gleichung, 227
- Poissongleichung, 190
- Positivteil (einer Fkt.), 41
- Positivteil (eines sign. Maßes), 91
- Produkt- σ -Algebra, 14
- Produktmaß, 96
- Rückzug (p -Formen), 147
- Rückzug (alt. Multilinearformen), 143
- Rückzug (Bilinearformen), 153
- Rückzug (Riem. Metrik), 154
- Radon-Nikodym, Satz, 79
- Radon-Nikodym-Ableitung, 76
- Randdichte, 113
- Randverteilung, 113
- Riemann-Lebesgue-Lemma, 223
- Riemannsche Metrik, 154
- Riemannsche Volumenform, 156
- Rotation, 170
- Sattelpunktmethode, 118
- Satz über monotone Klassen, 41
- Satz von Beppo Levi, 62
- Satz von der dominierten Konvergenz, 65
- Satz von der majorisierten Konvergenz, 65
- Satz von der monotonen Konvergenz, 62
- Satz von Fubini (für integrierbare Fkt.), 109
- Satz von Fubini (für nichtneg. Fkt.), 102
- Satz von Lebesgue, Vertauschung von $\int$ und ∂_t , 69
- Satz von Liouville, 199
- Satz von Plancherel, 227
- Satz von Radon-Nikodym, 79
- Satz von Stokes, 183
- Satz von Stokes (lokale Version), 180
- Schnitt, 96
- signiertes Maß, 5
- singulär (Maße), 88
- singulär-stetig, 91
- stückweise glatt berandet, 178
- Stokes, Satz von, 183
- Stokes, Satz von, (Version für $\mathbb{R}^n$ und Halbräume), 175
- Supremum, wesentliches, 201
- topologischer Dualraum, 210
- Transformationsformel, 127
- Transformationsformel (Differentialformnotation), 150
- Treppenfunktion, 40
- Umkehrformel, Fourier, 224
- unabhängig (Ereignissysteme), 20
- unabhängig (Zufallsvariablen), 112
- Ungleichung v. Minkowski (Dreiecksungl.), 204
- Ungleichung v. Minkowski (Integralversion), 212
- Ungleichung, Höldersche, 202
- Ungleichung, Jensensche, 58
- Ungleichung, Youngsche, 215, 216
- Untermannigfaltigkeit, berandete, 178
- Urbild, 34
- Vektorfeld, 166
- Verjüngung (Form mit Vektor), 145
- Vertauschung von Integral und Ableitung, 69

Verteilung, 43
Verteilungsfunktion, 19
Vervollständigung (eines Maßraums), 31
vollständig (σ -Algebra), 30
Volumen, 33
Volumenform, Riemannsche, 156
Volumenmaß, 20, 33

Wärmeleitungsgleichung, 71, 220
Wärmeleitungshalbgruppe, 137, 214
Wärmeleitungskern, 137
Wahrscheinlichkeitsmaß, 5
Wahrscheinlichkeitsraum, 5
Wallissches Produkt, 118
wesentliches Supremum, 201
Wick, Formel von, 126
Wirtingerkalkül, 185

Young-Ungleichung, 215, 216

Zähldichte, 8
Zählmaß, 7
Zerlegung der Eins, 180
Zufallsvariable, 35