

Analysis III

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

bei Prof. Bernhard Leeb, Ph.D.

Wintersemester 2019/20

Vorwort

Dieses Dokument ist die Mitschrift der Vorlesung *Analysis III - Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen* des WiSe 2019/20 an der LMU München bei Prof. Bernhard Leeb, PhD.

Hierbei handelt es sich **nicht** um das offizielle Skript zur Vorlesung. Es stellt lediglich (mit dem Verständnis dienenden Änderungen) den mitgeschriebenen Inhalt der Vorlesung *Analysis III* dar und wird von uns mithilfe von $\text{\LaTeX}$ als PDF-Dokument gesetzt. Wir erheben keinen Anspruch auf Korrektheit und Vollständigkeit des Inhalts und bitten die Lesenden, uns auf etwaige Fehler oder Lücken aufmerksam zu machen.

Das Dokument soll den Studierenden dieses Studiengangs als Lernhilfe und den Tutorierenden als Referenz dienen.

Das Projekt (d.h. sowohl dieses PDF-Dokument als auch der Quellcode) ist zu finden unter <https://gitlab.lrz.de/f-grubm/ana3-skript> (Login mit LRZ-Kennung erforderlich).

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
Navigation nach Vorlesungsdatum	6
Bemerkungen	7
I. Maßtheorie	8
I.1. Maßproblem und Paradoxien	8
I.2. Ringe und Algebren	11
I.2.1. Die Ringstruktur auf Potenzmengen	11
I.2.2. Ringe und Algebren	12
I.2.3. Halbringe	15
I.2.4. Produkte von Halbringen und Ringen	17
I.3. Inhalte und Prämaße	21
I.3.1. Inhalte auf Halbringen und Ringen	21
I.3.2. Fortsetzung von Inhalten von Halbringen auf Ringe	22
I.3.3. Prämaße	23
I.3.4. Produkte von Inhalten und Prämaßen	28
I.4. σ -Algebren	32
I.4.1. σ -Algebren	32
I.4.2. Dynkin-Systeme	35
I.4.3. Die Messbare Kategorie	37
I.4.4. Produkte von σ -Algebren	40
I.5. Maße	41
I.5.1. Beispiele und Definitionen	41
I.5.2. Äußere Maße und Messbarkeit	42
I.5.3. Die σ -Algebra der messbaren Mengen und ihr Maß	48
I.5.4. Beziehung eines Inhalts zu seinem assoziierten äußeren Maß	51
I.5.5. Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen	51

I.5.6.	Eindeutigkeit fortgesetzter Maße	52
I.5.7.	Approximation messbarer Teilmengen	55
I.5.8.	Vervollständigung eines Maßes	60
I.5.9.	Bildmaße	62
I.5.10.	Produktmaße	63
I.5.11.	Charakterisierung des Lebesgue-Maßes	65
I.5.12.	Existenz nicht-Lebesgue-messbarer Teilmengen	73
I.5.13.	Lebesgue-Messbarkeit von Homöomorphismen	75
II.	Integrationstheorie	77
II.1.	Messbare Funktionen	77
II.2.	Konstruktion des Lebesgue-Integrals	80
II.2.1.	Integral nichtnegativer Funktionen	80
II.2.2.	Integral allgemeiner numerischer Funktionen	84
II.2.3.	Integral vektorwertiger Funktionen	94
II.2.4.	Vergleich mit Integral auf Regelfunktionen	96
II.3.	Konvergenzsätze	98
II.4.	Maße mit Dichten	101
II.5.	Produktmaße und Mehrfachintegrale	106
II.5.1.	Integraldarstellung von Produktmaßen und Cavalieri-Prinzip	106
II.5.2.	Mehrfachintegrale und Satz von Fubini	110
II.6.	Transformation von Maßen und Integration unter Abbildungen	113
II.6.1.	Allgemeine Transformationsformel: Integration relativ zu Bild- maßen	113
II.6.2.	Transformation des Lebesgue-Maßes unter Diffeomorphismen	115
III.	Mannigfaltigkeiten	119
III.1.	Etwas lineare Algebra	119
III.2.	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	125
III.3.	Tangentialbündel und Differential	133
III.4.	Totales Differential, 1-Formen und Kotangentialbündel	140
III.4.1.	Definitionen	140
III.4.2.	Rückzug von 1-Formen	144
III.4.3.	Integration von 1-Formen über Kurven	145
III.5.	Höhere Differentialformen	147
III.5.1.	Definitionen	148

III.5.2. Rückzug von r -Formen	149
III.6. Partition der Eins	150
III.7. Orientierungen von Mannigfaltigkeiten	152
III.8. Integration von Differentialformen	153
III.9. Äußere Ableitung	158
III.10. Satz von Stokes (absolut)	162
IV. Mannigfaltigkeiten mit Rand	165
IV.1. Gebiete mit differenzierbarem Rand	167
IV.2. Tangentialbündel	169
IV.3. Orientierung des Randes	171
IV.4. Satz von Stokes (relativ)	174

Navigation nach Vorlesungsdatum

14. Oktober 2019	7
17. Oktober 2019	10
21. Oktober 2019	16
24. Oktober 2019	22
28. Oktober 2019	25
31. Oktober 2019	30
04. November 2019	35
07. November 2019	39
11. November 2019	45
14. November 2019	50
18. November 2019	56
21. November 2019	59
25. November 2019	66
28. November 2019	69
02. Dezember 2019	74
05. Dezember 2019	79
09. Dezember 2019	86
12. Dezember 2019	91
16. Dezember 2019	99
18. Dezember 2019	106
19. Dezember 2019	112
09. Jänner 2020	118
13. Jänner 2020	130
16. Jänner 2020	137
20. Jänner 2020	140
23. Jänner 2020	146
27. Jänner 2020	153
30. Jänner 2020	159
03. Feber 2020	167
05. Feber 2020	174

Bemerkungen

Vorlesungswebsite: <https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~topo/ana3/ana3.html>

Themenüberblick

- (i) Maßtheorie: Konstruktion des *Lebesgue-Maßes* auf $\mathbb{R}^d$
- (ii) Integration: *Lebesgue-Integral* in allgemeinen Maßräumen
- (iii) Mannigfaltigkeiten, Differentialformen und Integration: Herleitung des *Satzes von Stokes*

Literatur

- (i) J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie
- (ii) W. Walter, Analysis 2
- (iii) H. Baue, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie
- (iv) K. Jänich, Vektoranalysis

14. Oktober 2019

I. Maßtheorie

I.1. Maßproblem und Paradoxien

Die Maßtheorie untersucht allgemein Volumina. Motivierende Beispiele sind Volumina von Teilmengen des euklidischen Raumes und insbesondere Wahrscheinlichkeiten. Im Folgenden behandeln wir euklidische Vektorräume $\mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$.

Das Ziel ist, einen leistungsfähigen Volumensbegriff zu schaffen, mit dem Volumina von möglichst vielen Teilmengen gemessen werden können.

Als ersten naiven Ansatz verlangen wir eine Volumenmessung aller Teilmengen, d. h. eine Abbildung $\text{vol} : \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

Definition I.1 (Eigenschaften von Volumina).

- (i) *Bewegungsinvarianz*, d. h. für jede Bewegung (d. h. isometrische Abbildung) $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ und jedes $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\text{vol}(\Phi(A)) = \text{vol}(A)$
- (ii) *(endliche) Additivität*, d. h. für $n \in \mathbb{N}$, $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ paarweise disjunkt gilt

$$\text{vol} \left(\bigcup_{i=1}^n M_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{vol}(M_i)$$

- (iii) *Normierung*, d. h. $\text{vol}([0, 1]^d) = 1$

Aus Flexibilitätsgründen verstärken wir die Forderung von Eigenschaft (i) (nach Borel, Lebesgue):

- (ii') *σ -Additivität*, d. h. für Folgen $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen $M_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\text{vol} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{vol}(M_n)$$

Diese Formulierung flexibilisiert die Volumenmessung erheblich, da dadurch auch kompliziertere Figuren wie z. B. Kreise approximiert werden können.

Axiom I.1 (Auswahlaxiom). Sei I eine Indexmenge und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer disjunkter Mengen. Es existiert eine Menge $\mathcal{M}$ die genau aus jeder Menge M_i ein Element enthält, d. h. es gilt für jedes $i \in I$ $\#(\mathcal{M} \cap M_i) = 1$ und $\mathcal{M} \setminus \bigcup_{i \in I} M_i = \emptyset$.

Im Zuge von Cantors Mengenlehre wurde schließlich die Existenz einer solchen naiven Volumenfunktion hinterfragt.

Fragestellung I.1 (Maßproblem, naiv). Existiert eine derartige Volumenfunktion $\text{vol} : \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, die die Eigenschaften (i'), (ii) und (iii) erfüllt?

Satz I.2 (Vitali, 1905). Es existiert keine Volumenfunktion $\text{vol} : \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, die alle drei Eigenschaften (i'), (ii) und (iii) der Eigenschaften von Volumina **I.1** erfüllt.

Beweis. Wir betrachten die Nebenklassen von $\mathbb{Q}^d$ in $\mathbb{R}^d$, d. h. $\mathbb{R}^d / \mathbb{Q}^d$. Wir konstruieren mithilfe des Auswahlaxioms (AC) **I.1** eine Menge M , die genau aus jeder Nebenklasse ein Element besitzt. D. h. für jedes $a \in \mathbb{R}^d$ besteht $M \cap (a + \mathbb{Q}^d)$ aus genau einem Element und $M \setminus \bigcup_{a \in \mathbb{R}^d} a + \mathbb{Q}^d = \emptyset$. Dann partitionieren für beliebiges $q \in \mathbb{Q}^d$ die Translate $q + M$ den ganzen Raum $\mathbb{R}^d$ in abzählbar viele Mengen.

Angenommen, es gäbe eine Abbildung $\text{vol} : \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, die die Eigenschaften (i'), (ii) und (iii) erfüllt. Aus der σ -Additivität und der Bewegungsinvarianz von vol folgt dann, dass

$$0 < \text{vol}(\mathbb{R}^d) \stackrel{(i')}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \text{vol}(q + M) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \text{vol}(M)$$

Es muss also auch $\text{vol}(M) > 0$ gelten.

Wir wählen nun M spezieller, nämlich beschränkt. Für $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen wählen wir M so, dass $M \subseteq \mathcal{O}$. Dies ist möglich, da für jedes $a \in \mathbb{R}^d$ die Menge $a + \mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d$ liegt, also $(a + \mathbb{Q}^d) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Wählen wir M , sodass $M \subseteq (0, \frac{1}{2})^d$. Die Menge $[0, 1]^d$ enthält mit $q \in \mathbb{Q}^d \cap (0, \frac{1}{2})^d$ abzählbar unendlich viele disjunkte Translate $q + M$. Sei nun

$$V := \bigcup_{q \in (0, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} (q + M) \subseteq [0, 1]^d$$

Weil $\text{vol}(V) + \underbrace{\text{vol}([0, 1]^d \setminus V)}_{\geq 0} = \underbrace{\text{vol}([0, 1]^d)}_{=1}$ wegen Additivität, ist dann also $\text{vol}(V) \leq 1 < \infty$. Allerdings ist dann auch

$$\text{vol}(V) = \sum_{q \in (0, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} \text{vol}(q + M) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{q \in (0, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} \underbrace{\text{vol}(M)}_{>0} = \infty$$

Dies ist ein Widerspruch, da wir gerade gezeigt haben, dass $\text{vol}(V) < \infty$ ist. Somit muss dann $\text{vol}(M) = 0$ gelten. $\square$

Noch dramatischer ist ein Resultat in Dimension ≥ 3 . Hier kann man zeigen, dass je zwei Teilmengen schon unter sehr allgemeinen Annahmen aus dem selben abzählbaren (oft sogar endlichen) „Bausatz“ zusammengesetzt werden können.

Satz I.3 (Banach-Tarski, 1924). Seien für $d \in \mathbb{N}$ $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ Teilmengen mit nichtleerem Inneren. Es gilt:

- (i) Es existiert eine abzählbare Familie von Teilmengen $(M_k)_{k \in I} \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine abzählbare Familie von Bewegungen $(\Phi_k)_{k \in I}$, sodass die disjunkten Zerlegungen $A = \dot{\bigcup}_{k \in I} M_k$ und $B = \dot{\bigcup}_{k \in I} \Phi(M_k)$ bestehen.
- (ii) Ist $d \geq 3$ und sind A, B beschränkt, so existiert eine endliche Familie von Teilmengen $(M_k)_{k \in I} \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine endliche Familie von Bewegungen $(\Phi_k)_{k \in I}$, sodass die disjunkten Zerlegungen $A = \dot{\bigcup}_{k \in I} M_k$ und $B = \dot{\bigcup}_{k \in I} \Phi(M_k)$ bestehen.

Beweis. Der Beweis verwendet Methoden der Gruppentheorie, genauer die Struktur orthogonaler Gruppen $\mathcal{O}(d)$. Diese sind für $d \geq 3$ nicht mehr auflösbar. Für $d \leq 2$ sind sie zwar lösbar, jedoch nicht eindeutig (Banach, 1923). $\square$

Aus Satz [I.3](#) folgt daher weiter, dass auch keine Volumenfunktion mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii) existiert.

Fragestellung I.2 (Maßproblem, postparadox). Man definiere auf einer möglichst großen und flexiblen Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ eine Volumenfunktion $\text{vol} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$, die die Eigenschaften (i'), (ii) und (iii) der Eigenschaften von Volumina [I.1](#) erfüllt. Zudem soll $\mathcal{F}$ die geometrisch wichtigen Teilmengen umfassen und abgeschlossen unter den grundlegenden mengentheoretischen Operationen ($\cup, \cap, \setminus, \mathbb{C}$, Anm.) sein.

17. Oktober 2019

I.2. Ringe und Algebren

Bemerkung. *Algebra* wird in verschiedenen Bedeutungen verwendet:

1. Die Algebra ist ein Teilgebiet der Mathematik
2. Eine Algebra als algebraische Struktur im Sinne der Algebra
3. Eine Algebra im Sinne der maßtheoretischen Definition I.4

Im Folgenden sollen Familien von Teilmengen (einer festen Menge X), die unter grundlegenden (endlichen) Mengenoperationen abgeschlossen sind, untersucht werden. Diese Mengenoperationen sind $\cup, \cap, \setminus, \complement$. Die Familien werden Definitionsbereiche der allgemeinsten von uns behandelten Volumenfunktion sein, sie heißen *Inhalte*.

Definition I.2 (Stabilität). Sei X eine Menge und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei

$$\varphi : \underbrace{\mathcal{M} \times \cdots \times \mathcal{M}}_n \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

für $n \in \mathbb{N}$ eine n -stellige Abbildung. Wir nennen $\mathcal{M}$ φ -stabil g. d. w. für eine Familie $(A_1, \dots, A_n)$ von Mengen in $\mathcal{M}$ gilt, dass $\varphi(\underbrace{A_1, \dots, A_n}_n) \in \mathcal{M}$.

Bemerkung. Im Folgenden betrachten wir ausschließlich $\cup$ -, $\cap$ -, $\setminus$ - und $\complement$ -Stabilität, die erfüllt ist, wenn für beliebige $A, B \in \mathcal{M}$ entsprechend auch deren Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und deren Komplemente wieder in $\mathcal{M}$ liegen.

I.2.1. Die Ringstruktur auf Potenzmengen

Definition I.3 (charakteristische Funktion). Sei X eine Menge und $A \in \mathcal{P}(X)$. Definiere die *charakteristische Funktion von A* $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ durch

$$x \mapsto \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung, die jeder Menge $A \in \mathcal{O}(X)$ ihre charakteristische Funktion χ_A zuordnet, ist ein Isomorphismus $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \{0, 1\}^X$, ausgezeichnet durch

$$\begin{aligned} A &\mapsto \chi_A \\ f^{-1}(\{1\}) &\leftarrow f \end{aligned}$$

$\{0, 1\}$ wird dabei als der *Körper* mit zwei Elementen, der $\mathbb{F}_2$, aufgefasst, d. h. als Restklassen modulo 2. Damit ist $\{0, 1\}^X$ ein *kommutativer Ring mit Eins* im Sinne der Algebra ($\{0, 1\}^X$ ist sogar eine $\mathbb{F}_2$ -Algebra, Anm.), wobei das Nullelement die Abbildung $\chi_\emptyset (\equiv 0)$ und das Einselement die Abbildung $\chi_X (\equiv 1)$ ist.

Addition und Multiplikation von Funktionen sollen punktweise erfolgen, also

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Die *Addition* von (charakteristischen) Funktionen entspricht der *symmetrischen Differenz* von Mengen: $\chi_A + \chi_B = \chi_{A \Delta B}$.

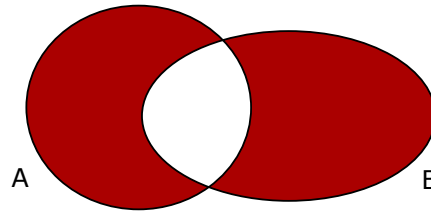


Abbildung I.1.: Symmetrische Differenz $\chi_{A \Delta B}$

Die *Multiplikation* von (charakteristischen) Funktionen entspricht dem *Durchschnitt* von Mengen: $\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A \cap B}$

Somit erhalten wir folgenden Ring: $(\mathcal{O}(X), \Delta, \cap) \cong (\mathbb{F}_2, +, \cdot)$.

I.2.2. Ringe und Algebren

Definition I.4 (Ring; Algebra). Eine Familie $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}(X)$ heißt:

(ρ) ein *Ring* auf X g. d. w. $\mathcal{R}$ ein Unterring von $(\mathcal{O}(X), \Delta, \cap)$ ist.

(α) eine *Algebra* auf X g. d. w. $\mathcal{R}$ ein Ring auf X ist und außerdem das Einselement enthält, d. h. $X \in \mathcal{R}$.

Damit $\mathcal{R}$ die Eigenschaft (ρ) erfüllt, muss $\emptyset \in \mathcal{R}$ gelten und $\mathcal{R}$ sowohl Δ - als auch $\cap$ -stabil sein.

Die Existenz von Inversen besteht, da im $\mathbb{F}_2$ die Subtraktion der Addition entspricht.

Aufgrund mengentheoretischer Gesetze können Δ und $\cap$ jeweils durch $\setminus$ und $\cup$ und umgekehrt ausgedrückt werden:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$

$$A \setminus B = (A \Delta B) \cap A$$

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$

Dies führt uns zu folgender Charakterisierung von Ringen:

Lemma I.4. Eine Familie $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Ring, wenn gilt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
- (ii) $\mathcal{R}$ ist $\setminus$ -stabil
- (iii) $\mathcal{R}$ ist $\cup$ -stabil

Analog gilt für Algebren:

Lemma I.5. Eine Familie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine Algebra auf X , wenn gilt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (iii) $\mathcal{A}$ ist $\cup$ -stabil
- (iv) $\mathcal{A}$ ist $\mathfrak{C}$ -stabil

Beweis. Sind diese Eigenschaften erfüllt, so implizieren (i) und (iv), dass $X = \mathfrak{C}\emptyset \in \mathcal{A}$. Die Operation $\setminus$ kann durch $\cup$ und $\mathfrak{C}$ ausgedrückt werden. Aus $\mathfrak{C}(A \setminus B) = (\mathfrak{C}A) \cup B$ folgt $A \setminus B = \mathfrak{C}((\mathfrak{C}A) \cup B)$. Also ist $\mathcal{A}$ ein Ring und damit eine Algebra.

Sei nun umgekehrt $\mathcal{A}$ eine Algebra. Dann gelten (i) und (iii). Da dann $X \in \mathcal{A}$, lässt sich die Operation $\mathfrak{C}$ durch die Operation $\setminus$ ausdrücken: $\mathfrak{C}A = X \setminus A$. Damit gilt auch (iv). $\square$

Korollar I.6.

- (i) bei Ringen gilt: mit A, B sind auch $A \setminus B, A \cap B$ und $B \setminus A$ enthalten, da diese alle auch Teilmengen von $A \cup B$ sind.
- (ii) bei Algebren gilt zusätzlich: $\mathcal{C}(A \cup B) \in \mathcal{A}$

Beispiel.

- (i) $\{\emptyset\} \subseteq \wp(X)$ ist ein Ring auf X . $\{\emptyset, X\} \subseteq \wp(X)$ ist eine Algebra auf X , ebenso $\wp(X) \subseteq \wp(X)$.
- (ii) Für $A \subseteq X$ ist $\{\emptyset, A\} \subseteq \wp(X)$ ein Ring und $\{\emptyset, A, \mathcal{C}A, X\} \subseteq \wp(X)$ eine Algebra
- (iii) Die Familie der endlichen (bzw. abzählbaren) Teilmengen von X ist ein Ring, eine Algebra aber nur, falls X endlich (bzw. abzählbar) ist. Die Familie der Teilmengen, die endlich (bzw. abzählbar) sind oder endliches (bzw. abzählbares) Komplement haben, ist eine Algebra.

Lemma I.7. Der Durchschnitt beliebig vieler Ringe (bzw. Algebren) auf einer festen Menge X ist wieder ein Ring (bzw. eine Algebra) auf X .

Definition I.5 (Erzeugendensystem, Ring). Der von einer Familie $\mathcal{E} \subseteq \wp(X)$ erzeugte Ring auf X ist der kleinste Ring, der $\mathcal{E}$ enthält, d. h. der Durchschnitt aller Ringe $\mathcal{R} \subseteq \wp(X)$, die $\mathcal{E}$ enthalten. Man nennt $\mathcal{E}$ ein *Erzeugendensystem* oder *Erzeuger* dieses Rings.

Definition I.6 (Erzeugendensystem, Algebra). Die von einer Familie $\mathcal{E} \subseteq \wp(X)$ erzeugte Algebra auf X ist die kleinste Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, d. h. der Durchschnitt aller Algebren $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$, die $\mathcal{E}$ enthalten. Man nennt $\mathcal{E}$ ein *Erzeugendensystem* oder *Erzeuger* dieser Algebra.

Die Angabe eines Erzeugendensystems ist oft die einfachste Art, einen Ring oder eine Algebra zu beschreiben.

Ein Ring geht aus einem Erzeugendensystem $\mathcal{E} \subseteq \wp(X)$ *konstruktiv* durch einen *abzählbaren* Prozess hervor. Dieser läuft induktiv ab. Gleiches gilt für eine Algebra:

Ein *Ring* wird induktiv konstruiert durch eine Folge von Familien

$$\mathcal{E} \cup \{\emptyset\} =: \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \dots \subseteq \wp(X)$$

Definiere für $1 \leq n \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_n := \{A \setminus B, A \cup B \mid A, B \in \mathcal{F}_{n-1}\}$. Daraus folgt, dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \subseteq \wp(X)$ sowohl $\setminus$ - als auch $\cup$ -stabil ist, somit also ein Ring.

Algebren werden analog konstruiert.

I.2.3. Halbringe

Hat ein Erzeugendensystem strukturelle Eigenschaften, so ist die Beschreibung des erzeugten Rings einfacher. Eine *natürlich* auftretende Bedingung an Erzeugendensysteme ist:

Definition I.7 (Halbring). Eine Familie $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt ein *Halbring* auf X , g. d. w. gilt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{H}$
- (ii) $\mathcal{H}$ ist $\cap$ -stabil
- (iii) Für $A, B \in \mathcal{H}$ existieren disjunkte $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{H}$ mit $A \setminus B = C_1 \cup \dots \cup C_n$

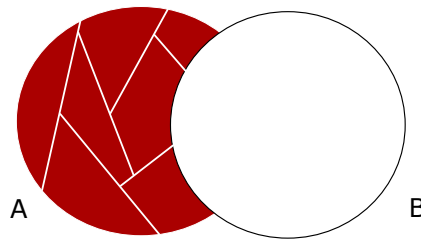


Abbildung I.2.: Disjunkte Zerlegung der Restmenge

Beispiel.

- (i) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist ein Halbring
- (ii) Die Familie bestehend aus $\emptyset$ und allen (sogar: einigen) einelementigen Teilmengen ist ein Halbring. Sie erzeugt den Ring der endlichen Teilmengen.

Bemerkung. Aufgrund der Eigenschaft (iii) von Halbringen ist es nicht möglich, analog zu Ringen und Algebren den von einer Familie $\mathcal{E}$ erzeugten Halbring zu definieren. (iii) wird nämlich nicht auf Durchschnitte von Familien vererbt. Es gibt also Durchschnitte von Halbringen, die selbst keine Halbringe sind, bzw. es existieren Familien von Mengen, die nicht in einem eindeutigen kleinsten Halbring enthalten sind.

Das folgende Beispiel ist ein Grundbaustein für spätere Überlegungen:

Beispiel. Die Familie bestehend aus $\emptyset$ und den *halboffenen* Intervallen $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$ für $a < b$ ist ein Halbring auf $\mathbb{R}$.

Im Folgenden soll der von einem Halbring erzeugte Ring beschrieben werden, wobei die Beobachtungen auch später noch nützlich sein werden.

Lemma I.8. Zu beliebigen Teilmengen $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{H}$ existieren paarweise *disjunkte* Teilmengen $H'_1, \dots, H'_n \in \mathcal{H}$, s.d. jedes H_i sich als Vereinigung einiger H'_j -s darstellen lässt.

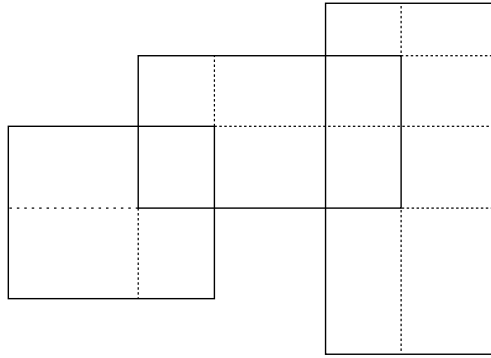


Abbildung I.3.: Simultane Zerlegung

Beweis. Seien $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{H}$. Wir betrachten das $2^m - 1$ -elementige Mengensystem

$$\mathcal{M} := \{ G_1 \cap \dots \cap G_m \mid \forall i \in \{ 1, \dots, m \} : (G_i = H_i \vee G_i = \mathbb{C}H_i) \wedge \exists i \in \{ 1, \dots, m \} : G_i = H_i \}$$

Jedes H_i ist die Vereinigung von 2^{m-1} Mengen aus $\mathcal{M}$, es genügt also zu zeigen, dass alle $M \in \mathcal{M}$ disjunkte Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathcal{H}$ sind. Da Halbringe $\cap$ -stabil sind, reicht es sogar zu zeigen, dass die Teilmengen der Form $H \cap \mathbb{C}\tilde{H}_l \cap \dots \cap \mathbb{C}\tilde{H}_1$ mit $H, \tilde{H}_l, \dots, \tilde{H}_1 \in \mathcal{H}$ disjunkte Vereinigungen von Teilmengen in $\mathcal{H}$ sind. Dies gilt wegen der Eigenschaft (iii) von Halbringen für $H \cap \mathbb{C}\tilde{H}_l = H \setminus \tilde{H}_l$. Dies reduziert die Aussage für l auf die Aussage für $l - 1$. Induktion liefert daher die Behauptung. $\square$

21. Oktober 2019

Proposition I.9. Jede Teilmenge im von einem Halbring $\mathcal{H}$ erzeugten Ring ist eine endliche disjunkte Vereinigung von Teilmengen in $\mathcal{H}$. Dies ist ein einfacherer Erzeugungsprozess als bei allgemeinen Ringen.

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ die Familie der endlichen *disjunkten* Vereinigungen von Teilmengen in $\mathcal{H}$. Aus Lemma I.8 wissen wir, dass $\mathcal{R}$ gleich der Familie aller endlichen Vereinigungen von Teilmengen in $\mathcal{H}$ ist. Dadurch ist $\mathcal{R}$ offensichtlich $\cup$ -stabil. Ebenfalls offensichtlich ist $\emptyset \in \mathcal{R}$, da schon $\emptyset \in \mathcal{H}$ ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathcal{R}$ $\setminus$ -stabil ist. Seien $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{H}$, sodass $A := A_1 \cup \dots \cup A_m$ und $B := B_1 \cup \dots \cup B_n$ mit $A_i, B_j \in \mathcal{H}$. Aus Lemma I.8 folgt, dass es endlich viele nichtleere, *paarweise disjunkte* $H'_k \in \mathcal{H}$ gibt, sodass für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und alle $j \in \{1, \dots, n\}$ A_i und B_j jeweils Vereinigungen einiger H'_k sind. Daraus folgt, dass auch A und B Vereinigungen einiger H'_k sind. Daraus folgt weiter, dass $A \setminus B$ eine Vereinigung einiger H'_k ist, nämlich derer, die in A aber nicht in B enthalten sind. Also ist $\mathcal{R}$ ein Ring. Aufgrund der $\cup$ -Stabilität von Ringen ist nun $\mathcal{R}$ Teilmenge des von $\mathcal{H}$ erzeugten Rings. Da offensichtlich auch die umgekehrte Inklusion gilt (der erzeugte Ring ist der kleinste Ring, der $\mathcal{H}$ enthält, Anm.), sind sie gleich. $\square$

I.2.4. Produkte von Halbringen und Ringen

Definition I.8 (Produktfamilie von Quadern). Seien für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge und $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{O}(X_i)$ eine Familie von Teilmengen. Wir definieren die *Produktfamilie von Quadern*

$$\mathcal{F}_1 * \dots * \mathcal{F}_n := \{ M_1 \times \dots \times M_n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : M_i \in \mathcal{F}_i \} \subseteq \mathcal{O}(X_1 \times \dots \times X_n)$$

Definition I.9 (Familie der Figuren). Seien für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge und $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{O}(X_i)$ eine Familie von Teilmengen. Wir nennen, die kleinste $\cup$ -stabile Menge, die $\mathcal{F}_1 * \dots * \mathcal{F}_n$ enthält, d. h. deren $\cup$ -stabile Hülle, die *Familie der Figuren* und bezeichnen sie mit $\mathcal{F}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{F}_n$. Wir nennen die Elemente von $\mathcal{F}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{F}_n$ *Figuren*. Sie sind endliche Vereinigungen von Quadern in $\mathcal{F}_1 * \dots * \mathcal{F}_n$.

Bemerkung. Sowohl $*$ als auch $\boxtimes$ sind assoziativ.

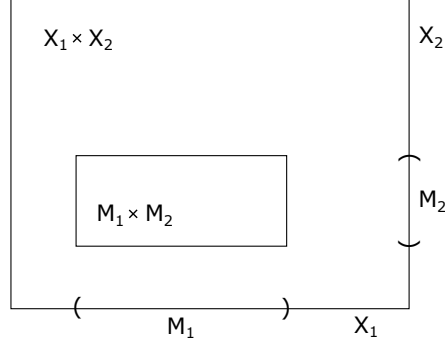


Abbildung I.4.: Quader $M_1 \times M_2$

Definition I.10 (*natürliche Projektion*). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ und für $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge. Wir nennen die Abbildung $\pi_k : X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow X_k$ mit $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$ die *natürliche Projektion* auf die k -te Menge.

Definition I.11 (*Familie der Zylindermengen*). Seien für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge und $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ eine Familie von Teilmengen. Wir nennen die Menge

$$\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n) := \left\{ \pi_k^{-1}(M_k) \mid k \in \{1, \dots, n\} \wedge M_k \in \mathcal{F}_k \right\} \subseteq \mathcal{P}(X_1 \times \dots \times X_n)$$

die *Familie der Zylindermengen*. Wir nennen ihre Elemente *Zylindermengen*. Sie haben die Form $\pi_k^{-1}(M_k) = X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times M_k \times X_{k+1} \times \dots \times X_n$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$ und $M_k \in \mathcal{F}_k$.

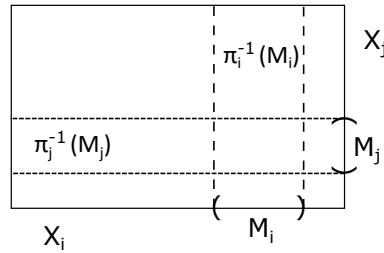


Abbildung I.5.: Zylindermengen $\pi_j^{-1}(M_j)$ und $\pi_i^{-1}(M_i)$

Lemma I.10. Seien für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge und $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ eine Familie von Teilmengen. Gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dass $X_i \in \mathcal{F}_i$, so ist

$$\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n) \subseteq \mathcal{F}_1 * \dots * \mathcal{F}_n$$

Definition I.12 (Produkt von (Halb-)Ringen). Sei $n \in \mathbb{N}$ und für $i \in \{1, \dots, n\}$ $\mathcal{H}_i$ ein Halbring und $\mathcal{R}_i$ ein Ring. Wir nennen den Halbring $\mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n$ das *Produkt der Halbringe* $\mathcal{H}_i$. Analog dazu nennen wir den Ring $\mathcal{R}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{R}_n$ das *Produkt der Ringe* $\mathcal{R}_i$.

Proposition I.11. Sei $n \in \mathbb{N}$ und für $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge, $\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{O}(X_i)$ ein Halbring und $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{O}(X_i)$ der von $\mathcal{H}_i$ erzeugte Ring. Sei weiter für $i \in \{1, \dots, n\}$ $\tilde{\mathcal{R}}_i \subseteq \mathcal{O}(X_i)$ eine Algebra und $\mathcal{E}_i \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_i$ ein Erzeugendensystem von $\tilde{\mathcal{R}}_i$. Es gelten folgende Aussagen.

- (i) $\mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n$ ist ein Halbring auf $X_1 \times \dots \times X_n$ und $\mathcal{H}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{H}_n = \mathcal{R}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{R}_n$ der von ihm erzeugte Ring.
- (ii) $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ ist ein Erzeugendensystem des Produktrings $\tilde{\mathcal{R}}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \tilde{\mathcal{R}}_n$.

Beweis. (i): zunächst für $n = 2$: Es ist klar, dass $\emptyset \in \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ und auch, dass $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ $\cap$ -stabil ist, denn für $i \in \{1, 2\}$ und $A_i, B_i \in \mathcal{H}_i$ gilt, dass $A_i \cap B_i \in \mathcal{H}_i$.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ Eigenschaft (iii) der Halbringe erfüllt, d. h., dass für $A_1, B_1 \in \mathcal{H}_1$ und $A_2, B_2 \in \mathcal{H}_2$ die Menge $(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2)$ in disjunkte Teilmengen von $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ zerlegbar ist. Es gilt die disjunkte Zerlegung

$$\begin{aligned} (A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) &= ((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)) \cup \\ &\cup ((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)) \cup ((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)) \end{aligned}$$

Da $A_1 \setminus B_1$ in Teilmengen aus $\mathcal{H}_1$ und $A_2 \setminus B_2$ in Teilmengen aus $\mathcal{H}_2$ zerlegbar sind, ist $(A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)$ zerlegbar in Teilmengen aus $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$. Mit $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{H}_1$ und $A_2 \cap B_2 \in \mathcal{H}_2$ folgt, dass auch die anderen beiden Mengen disjunkt zerlegbar sind. $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ erfüllt also Eigenschaft (iii) und ist somit ein Halbring. Durch Induktion folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. auch $\mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n$ ist ein Halbring.

Mit Proposition I.9 folgt dann weiter, dass $\mathcal{H}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{H}_n$ der von $\mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n$ erzeugte Ring ist.

(ii): Sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Der Ring auf $X_1 \times \dots \times X_n$ bestehend aus den aus den Zylindermengen $\pi_k^{-1}(M_k)$ für $M_k \in \tilde{\mathcal{R}}_k$ wird von der Familie der Zylindermengen $\pi_k^{-1}(E_k)$ für $E_k \in \mathcal{E}_k$ erzeugt, denn jede Teilmenge $M_k \in \tilde{\mathcal{R}}_k$ kann durch endlich viele Mengenoperationen aus Teilmengen $E_{ij} \in \mathcal{E}_i$ hergestellt werden und $\pi_k^{-1}(M_k)$ entsprechend durch

endlich viele Mengenoperationen von den $\pi_k^{-1}(E_{ij})$. Somit erzeugt $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ denselben Ring wie $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{R}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{R}}_n)$ und denselben wie $\tilde{\mathcal{R}}_1 * \dots * \tilde{\mathcal{R}}_n$, also den Produktring $\tilde{\mathcal{R}}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \tilde{\mathcal{R}}_n$. $\square$

Definition I.13 (Familie der halboffenen Intervalle). Wir definieren

$$\mathcal{I} := \{ [a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b \}$$

und nennen $\mathcal{I}$ die *Familie der halboffenen Intervalle*.

Definition I.14 (Familie der halboffenen Quader). Sei $d \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^d := \{ [a_1, b_1) \times \dots \times [a_d, b_d) \mid a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d \wedge \\ \wedge \forall i \in \{1, \dots, d\} : a_i < b_i \} = \mathcal{I} * \dots * \mathcal{I} \end{aligned}$$

und nennen $\mathcal{Q}^d$ die *Familie der halboffenen Quader*. Es gilt $\mathcal{I} = \mathcal{Q}^1$. Wir nennen

$$[a, b) := [a_1, b_1) \times \dots \times [a_d, b_d) \in \mathcal{Q}^d$$

einen *halboffenen Quader*.

Bemerkung. Nach Proposition I.11 ist $\mathcal{Q}^d$ ein Halbring auf $\mathbb{R}^d$.

Definition I.15 (Ring der Figuren). Sei $d \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\mathcal{F}^d := \mathcal{I} \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{I}$$

und nennen $\mathcal{F}^d$ den *Ring der Figuren*. $\mathcal{F}^d$ ist der von $\mathcal{Q}^d$ erzeugte Ring.

Wir arbeiten aus technischen Gründen mit *halboffenen* Intervallen und Quadern, da diese besonders übersichtliche Halbringe und noch dazu abgeschlossen unter Produktbildung sind. $\mathcal{Q}^d$ enthält jedoch nicht die Teilmengen, die uns primär interessieren, z. B. offene und abgeschlossene Quader, generell auch nicht-achsenparallele Quader, allgemeine Polygone und Polytope und gekrümmte „elementargeometrische“ Gebilde wie Scheiben, Bälle, Zylinder und Kegel. Also müssen wir unsere Ringe weiter anreichern und so weit flexibilisieren, damit sie auch unter *abzählbaren* Vereinigungen stabil sind. Dies wird uns zum Begriff der σ -Algebren führen.

I.3. Inhalte und Prämaße

Im Folgenden betrachten wir Abbildungen, die wir Volumenfunktionen nennen werden. Diese müssen die grundlegende Forderung der *Additivität* erfüllen und zudem nur nicht-negative Werte, d. h. Werte in $[0, \infty]$ (also der *erweiterten* positiven Halbgerade, Anm.), annehmen.

Zur Abkürzung werden wir einige *Konventionen* verwenden, die mehr oder weniger *natürlich* sind:

$$x + \infty = \infty \text{ für } x > -\infty$$

$$x \cdot \infty = \infty \text{ für } x > 0$$

$$0 \cdot \infty = 0$$

I.3.1. Inhalte auf Halbringen und Ringen

Die allgemeinste Sorte von uns betrachteten Volumenfunktionen ist *endlich additiv* und definiert auf *Halbringen*.

Definition I.16 (Inhalt). Ein *Inhalt* auf einem Halbring $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ mit den Eigenschaften:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) *Additivität*: Sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ paarweise disjunkt und ist $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{H}$, so gilt $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$

Bemerkung. Eigenschaft (i) ist notwendig, d. h. kann nicht aus den anderen Eigenschaften geschlossen werden: z. B. könnte μ auch konstant ∞ sein. Die Forderung $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{H}$ in Eigenschaft (ii) ist redundant, falls $\mathcal{H}$ ein Ring ist.

Beispiel.

- (i) $\mu \equiv 0$ (der *Nullinhalt*) und $\nu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$ sind stets Inhalte auf beliebigen Halbringen.
- (ii) Auf der trivialen Algebra $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $X \neq \emptyset$ ist die Abbildung mit $\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset \\ r & \text{sonst} \end{cases}$, für $r \in [0, \infty]$ beliebig, ein Inhalt.

- (iii) Einen Grundbaustein für das *Lebesgue-Maß* (s. u.) bilden die halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$. Auf dem Halbring $\mathcal{I} = \mathcal{Q}^1 \subseteq \mathcal{O}(X)$ liefert die euklidische Länge einen Inhalt $\lambda_{\mathcal{I}}^1 : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)$, für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, gegeben durch $\lambda_{\mathcal{I}}^1([a, b)) := b - a$. Offensichtlich ist $\lambda_{\mathcal{I}}^1(\emptyset) = 0$. Für eine aufsteigende Folge $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ in $[a, b)$ gilt die disjunkte Zerlegung $[a, b) = [a, x_1) \cup \dots \cup [x_n, b)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{I}}^1([a, b)) &= b - a = (b - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \dots + (x_1 - a) = \\ &= \lambda_{\mathcal{I}}^1([x_n, b)) + \dots + \lambda_{\mathcal{I}}^1([a, x_1)) \end{aligned}$$

24. Oktober 2019

Lemma I.12 (einfache Eigenschaften von Inhalten). Sei $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. μ besitzt folgende Eigenschaften:

- (i) *Monotonie*: Sind $A, B \in \mathcal{H}$ mit $A \subseteq B$ dann muss gelten $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (ii) *Subadditivität*: Sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ (nicht notwendigerweise disjunkt, Anm.), so dass $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{H}$, dann gilt $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$.

Beweis. (i): Seien $A, B \in \mathcal{H}$ mit $A \subseteq B$. Dann gibt es mit $C_i \in \mathcal{H}$ die Zerlegung $B \setminus A = C_1 \cup \dots \cup C_n$. Also gilt $B = A \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$. Mit der Additivität erhalten wir schließlich $\mu(B) = \mu(A) + \mu(C_1) + \dots + \mu(C_n) \geq \mu(A)$.

(ii) Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$, sodass $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{H}$. Durch Lemma I.8 wissen wir, dass es paarweise disjunkte $H_i \in \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft gibt, dass jedes A_j die Vereinigung einiger (endlich vieler) dieser Mengen ist. Entsprechend summieren sich die Volumina auf. Die Ungleichung $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$ folgt dadurch, dass jedes $\mu(H_i)$ *genau einmal* auf der linken Seite der Ungleichung steht und *mindestens einmal* auf der rechten Seite. $\square$

I.3.2. Fortsetzung von Inhalten von Halbringen auf Ringe

Satz I.13. Jeder Inhalt μ auf einem Halbring $\mathcal{H}$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einem Inhalt $\bar{\mu}$ auf dem von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$.

Beweis. Die *Eindeutigkeit* folgt unmittelbar aus der Additivität von Inhalten und der Beschreibung des erzeugten Rings $\mathcal{R}$: Jede Teilmenge in $\mathcal{R}$ ist eine *disjunkte* Vereinigung $A_1 \cup \dots \cup A_n$ mit $A_i \in \mathcal{H}$.

Daraus folgt notwendigerweise

$$\bar{\mu}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) \quad (\text{I.A})$$

Die *Existenz* bzw. *Wohldefiniertheit* von $\bar{\mu}$ folgt mit (I.A): Wir betrachten eine weitere *disjunkte* Zerlegung derselben Teilmenge $A_1 \cup \dots \cup A_n = B_1 \cup \dots \cup B_m \in \mathcal{R}$, mit $A_i, B_j \in \mathcal{H}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$. Aufgrund der $\cap$ -Stabilität gilt für alle i, j , dass $A_i \cap B_j \in \mathcal{H}$. Wir erhalten somit folgende Zerlegungen: $A_i = \cup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$ und $B_j = \cup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$. Daher gilt dann $\mu(A_i) = \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j)$ und $\mu(B_j) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j)$, weiter also

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \mu(B_j)$$

und es herrscht Wohldefiniertheit. $\bar{\mu}$ ist additiv, da jede Menge in $\mathcal{R}$ als Vereinigung von Mengen in $\mathcal{H}$ darstellbar ist. Somit ist $\bar{\mu}$ also ein Inhalt. $\square$

Bemerkung. Nimmt μ nur endliche Werte an, so nimmt $\bar{\mu}$ ebenfalls nur endliche Werte an, da es sich um endliche Summen handelt.

Beispiel. Ist $\lambda_{\mathcal{Q}^1}^1 : \mathcal{I} = \mathcal{Q}^1 \rightarrow [0, \infty)$ ein Inhalt, dann folgt mit Satz I.13, dass auch $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1 : \mathcal{F}^1 \rightarrow [0, \infty)$ ebenfalls ein Inhalt ist, wobei $\mathcal{F}^1$ den Ring der 1-dimensionalen Figuren bezeichnet. $\lambda_{\mathcal{F}^1}$ ist also definiert durch die Summe der Längen der Teilintervalle.

Bemerkung. Die Fortsetzung von Inhalten von Ringen auf Algebren ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Z. B. erzeugt der Ring $\mathcal{R} = \{\emptyset\}$ die Algebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$. Hier ist nicht eindeutig festgelegt, was der Wert von $\bar{\mu}(X)$ sein soll. Es kann $\bar{\mu}(X) = a$ mit beliebigem $a \in [0, \infty]$ gelten.

I.3.3. Prämaße

Im Folgenden soll das Verhalten von Volumina bei gewissen Grenzprozessen (Approximation von innen oder außen) betrachtet werden. Wir arbeiten mit Teilmengen einer festen Menge X .

Definition I.17 (aufsteigende Folge; absteigende Folge). Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X und $A \subseteq X$.

- (i) Ist $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq X$ und gilt $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, so nennen wir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *aufsteigend* gegen A und schreiben $A_n \nearrow A$.
- (ii) Ist $X \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ und gilt $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, so nennen wir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *absteigend* gegen A und schreiben $A_n \searrow A$.

Lemma I.14. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X und $A \subseteq X$. Es gelten folgende Äquivalenzen:

- (i) $A_n \nearrow A \iff A \setminus A_n \searrow \emptyset$
- (ii) $A_n \searrow A \iff A_n \setminus A \searrow \emptyset$

Lemma I.15. Sei $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ ein Inhalt. Seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von Teilmengen und $A \in \mathcal{R}$ mit $A_n \nearrow A, B_n \searrow A$. Es gelten die Ungleichungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \mu(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \quad (\text{I.B})$$

Beweis. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\mu(A_n) \leq \mu(A) \leq \mu(B_n)$ aufgrund der Monotonie, sodass $\mu(A_n)$ monoton wächst und $\mu(B_n)$ monoton fällt. Die Ungleichungen bleiben unter Grenzwertbildung erhalten. $\square$

Lemma I.15 d. h. die beiden Ungleichungen, gilt immer für allgemeine Inhalte. Gilt in einer dieser Ungleichungen Gleichheit, so fassen wir dies als *Stetigkeitseigenschaft* auf.

Im Folgenden soll eine Umformulierung für Zerlegungen gefunden werden: Definieren wir zusätzlich zu unserer Mengenfamilie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ noch eine zweite Mengenfamilie $\tilde{A}$ mit $\tilde{A}_n := A_n \setminus A_{n-1}$, wobei $A_0 := \emptyset$ gesetzt wird, erhalten wir eine disjunkte Zerlegung von $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n$.

Damit ist (I.A) äquivalent zur Aussage: Für Folgen $(\tilde{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen mit $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \in \mathcal{R}$ gilt die σ -Supadditivität:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n\right) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{A}_n) \quad (\text{I.C})$$

Proposition I.16. Für einen Inhalt $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ auf einem Ring $\mathcal{R}$ sind die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) σ -Additivität: Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$, so gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

- (ii) *Stetigkeit von unten*: Ist (B_n) eine aufsteigende Folge mit $B_n \in \mathcal{R}$, $B_n \nearrow B \in \mathcal{R}$ so gilt $\mu(B_n) \nearrow \mu(B)$.

Sie implizieren die beiden folgenden, ebenfalls zueinander äquivalenten Eigenschaften:

- (iii) *Stetigkeit von oben*: Ist (C_n) eine absteigende Folge in $\mathcal{R}$ mit $\mu(C_n) < \infty$ und $C_n \searrow C \in \mathcal{R}$, so gilt $\mu(C_n) \searrow \mu(C)$.
- (iv) *Stetigkeit in $\emptyset$* : Ist (D_n) eine absteigende Folge in $\mathcal{R}$ mit $\mu(D_n) < \infty$ und $D_n \searrow \emptyset$, so gilt $\mu(D_n) \searrow 0$.

Falls μ endliche Werte hat, implizieren umgekehrt (iii) und (iv) auch (i) und (ii), es gilt also eine Äquivalenz der Aussagen (i) bis (iv).

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Wir konstruieren uns eine Folge (B_n) mit $B_n := A_1 \cup \dots \cup A_n$ bzw. gilt dann $A_n = B_n \setminus B_{n-1}$. Mit der endlichen Additivität folgt dann $\mu(B_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. Für den Grenzwert gilt somit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ und außerdem auch $\mu(B) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wir setzen $B_n := C_1 \setminus C_n \in \mathcal{R}$. Es gilt daher $B = C_1 \setminus C$. Damit ist $C_1 = B_n \cup C_n = B \cup C$, demnach also $\mu(C_1) = \mu(B_n) + \mu(C_n) = \mu(B) + \mu(C)$. Aus (ii) folgt nun $\mu(B_n) \nearrow \mu(B)$. Da alle Inhalte endlich sind, gilt auch $\mu(B_n) = \mu(C_1) - \mu(C_n)$ und $\mu(B) = \mu(C_1) - \mu(C)$. Daraus folgt $\mu(C_n) \searrow \mu(C)$ und damit auch (iii).

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): (iv) ist ein Spezialfall von (iii). Für die Richtung (iv) $\Rightarrow$ (iii) setze nun $D_n = C_n \setminus C \searrow \emptyset$. $C_n = D_n \cup C$, also $\mu(C_n) = \mu(D_n) + \mu(C)$ da alle Volumen endlich sind. Damit folgt $\mu(D_n) = \mu(C_n) - \mu(C)$. Da aber $\mu(D_n) \searrow 0$ wegen (iv), erhalten wir $\mu(C_n) \searrow \mu(C)$ und damit (iii).

Habe nun μ nur endliche Werte und gelte (iv). Setze $D_n := B \setminus B_n$. Wegen (iv) gilt $\mu(D_n) \searrow 0$, somit $\mu(D_n) = \mu(B) - \mu(B_n) \searrow 0$. Es folgt $\mu(B_n) \nearrow \mu(B)$ und damit auch (ii). $\square$

28. Oktober 2019

Um eine leistungsfähige Volumentheorie zu entwickeln ist es *natürlich* und geboten, zusätzlich zu den Eigenschaften eines Inhalts die der σ -Additivität zu verlangen. (nach E. Borel, Lebesgue, ca. 1900)

Definition I.18 (Prämaß). Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Wir nennen μ ein *Prämaß* g. d. w. μ folgende Eigenschaft (ii') erfüllt:

(ii') μ ist σ -additiv

Bemerkung. Die Bezeichnung „prä“ in „Prämaß“ bezieht sich nur auf den Definitionsbereich (hier: Ring).

Beispiel. Sei X unendlich und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die von den endlichen Teilmengen von X erzeugte Algebra. Sie besteht also aus allen endlichen Teilmengen und ihren jeweiligen Komplementen. Wir definieren dann einen Inhalt μ auf $\mathcal{A}$ durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1, & \text{falls } \mathbb{C}A \text{ endlich} \end{cases}$$

Seien $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkt. Falls nicht alle A_i endlich sind, so ist genau eines der A_i unendlich. Es gilt

$$\mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) = \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1$$

Die Gleichung gilt, da auf der linken Seite der Gleichung nur genau eines der A_i Maß 1 hat. μ ist also (endlich) additiv. Jedoch ist die σ -Additivität genau dann verletzt, falls X eine abzählbare Zerlegung in endliche Teilmengen zulässt, d. h. also X abzählbar ist. Dann gilt nämlich

$$0 = \sum_{x \in X} \mu(x) \leq \mu\left(\bigcup_{x \in X} \{x\}\right) = 1$$

μ ist also genau dann ein Prämaß, falls X überabzählbar ist.

Definition I.19 (Lebesgue-Prämaß, eindimensional). Wir bezeichnen den Inhalt $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1 : \mathcal{F}^1 \rightarrow [0, \infty]$ auf dem Ring $\mathcal{F}^1$ der eindimensionalen Figuren als das *eindimensionale Lebesgue-Prämaß*.

Satz I.17. Das eindimensionale Lebesgue-Prämaß $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1 : \mathcal{F}^1 \rightarrow [0, \infty]$ aus Definition [I.19](#) ist wohldefiniert, d. h. also wirklich ein Prämaß.

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1$ ein Inhalt ist, demnach also Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1$ Eigenschaft (iii), die σ -Additivität, erfüllt. Die σ -Additivität ist aufgrund der endlichen Werte von $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1$ nach Proposition [I.16](#) äquivalent zur Stetigkeit in $\emptyset$. Im Beweis gebrauchen wir die Eigenschaft der lokalen Kompaktheit der *natürlichen* Topologie auf $\mathbb{R}$.

Betrachten wir die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}^1$ mit $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$. Wir führen den Beweis mit Kontraposition, wollen also zeigen, dass aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\mathcal{F}^1}^1(F_n) \geq v > 0$ folgt, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Sei also $v \in [0, \infty)$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\mathcal{F}^1}^1(F_n) \geq v > 0$. Wir werden F_n von innen durch eine geschachtelte Folge von Kompakta approximieren. Sei dazu $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$ mit $\varepsilon_n \searrow 0$. Wir finden dann $F'_n \in \mathcal{F}^1$ und Kompakta $K_n \subseteq \mathbb{R}$, sodass $F'_n \subseteq K_n \subseteq F_n$ und $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1(F'_n) > \lambda_{\mathcal{F}^1}^1(F_n) - \varepsilon_n$. Wir betrachten diese kleineren Figuren F'_n , da $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1$ -Volumina von Kompakta nicht definiert sind (da $K_n \notin \mathcal{F}^1$, Anm.). Diese K_n sind nicht notwendigerweise geschachtelt.

Wir erhalten somit folgenden Vergleich absteigender Folgen:

$$\bigcap_{i \leq n} F'_i \subseteq \bigcap_{i \leq n} K_i \subseteq \bigcap_{i \leq n} F_i = F_n$$

Außerdem gelten die folgenden Beziehungen:

$$\underbrace{\left(\bigcap_{i \leq n} F_i \right) \setminus \left(\bigcap_{i \leq n} F'_i \right)}_{= F_n} = \bigcup_{i \leq n} (F_n \setminus F'_i) \subseteq \bigcup_{i \leq n} (F_i \setminus F'_i)$$

Weiters erhalten wir mit

$$\left(\bigcap_{i \leq n} F'_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \leq n} (F_i \setminus F'_i) \right) \supseteq \bigcap_{i \leq n} F_i = F_n$$

eine Überdeckung von F durch $n + 1$ Teilmengen aus $\mathcal{F}^1$. Aufgrund der Subadditivität von $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1$ folgt dann

$$\lambda_{\mathcal{F}^1}^1(F_n) \leq \lambda_{\mathcal{F}^1}^1\left(\bigcap_{i \leq n} F'_i\right) + \sum_{i \leq n} \underbrace{\lambda_{\mathcal{F}^1}^1(F_i \setminus F'_i)}_{< \varepsilon_i}$$

Da der Inhalt $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1$ nur endliche Werte annimmt, folgt weiter, dass

$$\lambda_{\mathcal{F}^1}^1\left(\bigcap_{i \leq n} F'_i\right) \geq v - \sum_{i \leq n} \varepsilon_i > v - \sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n$$

Wir wählen nun (ε_n) so, dass $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n < v$. Dann ist $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1(\bigcap_{i \leq n} F'_i) > 0$, somit also $\bigcap_{i \leq n} F'_i \neq \emptyset$. Dann ist wegen $\bigcap_{i \leq n} F'_i \subseteq \bigcap_{i \leq n} K_i$ auch $\bigcap_{i \leq n} K_i \neq \emptyset$.

$(\bigcap_{i \leq n} K_i)_{n \in \mathbb{N}}$ ist somit eine absteigende Folge von Kompakta in $\mathbb{R}$. Ihr Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ ist somit nichtleer. Da die Beziehung $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ gilt, ist somit auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. $\square$

I.3.4. Produkte von Inhalten und Prämaßen

Man kann auf *natürliche* Weise Produkte von Inhalten auf Halbringen und Ringen bilden.

Definition I.20 (Produkt von Inhalten). Seien für $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge, $\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{O}(X_i)$ ein Halbring und $\mu_i : \mathcal{H}_i \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt auf $\mathcal{H}_i$. Wir nennen den Inhalt

$$\begin{aligned} (\mu_1 \times \dots \times \mu_n) : \mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n &\rightarrow [0, \infty] \\ (\mu_1 \times \dots \times \mu_n)(H_1 \times \dots \times H_n) &:= \mu_1(H_1) \cdots \mu_n(H_n) \end{aligned}$$

auf dem Produkthalbring $\mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{O}(X_1 \times \dots \times X_n)$ das *Produkt der Inhalte* μ_i .

Satz I.18. Das Produkt von Inhalten ist wohldefiniert, d. h. für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i eine Menge, $\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{O}(X_i)$ ein Halbring und $\mu_i : \mathcal{H}_i \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt ist die in Definition [I.20](#) beschriebene Abbildung $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ ein Inhalt.

Bemerkung. Im Folgenden verwenden wir die schon erwähnte Konvention $0 \cdot \infty = 0$, da wir hier konzeptionell Grenzwerte der Form $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 \cdot n = 0$ betrachten.

Beweis. Wir beweisen den Satz für $n = 2$. Die Aussage für alle höheren Dimensionen folgt dann per Induktion. Da $(\mu_1 \times \mu_2)(\emptyset) = 0 \cdot 0 = 0$ trivialerweise erfüllt ist, bleibt nur noch die Additivität zu zeigen.

Dazu betrachten wir endliche Zerlegungen eines „Rechtecks“ $H_1 \times H_2 \in \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ in endlich viele paarweise disjunkte kleinere „Rechtecke“ $H_1^{(j)} \times H_2^{(j)} \in \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$, d. h., dass $H_1 \times H_2 = \bigcup_{j \in J} (H_1^{(j)} \times H_2^{(j)})$ für eine endliche Indexmenge J . Mit Lemma [I.8](#) können wir die $H_1^{(j)}, H_2^{(j)}$ paarweise disjunkt zerlegen in Mengen $\tilde{H}_1^{(k_1)}, \tilde{H}_2^{(k_2)}$, für $k_1 \in K_1, k_2 \in K_2$ und K_1, K_2 endliche Indexmengen, sodass jedes $H_1^{(j)}, H_2^{(j)}$ die Vereinigung einiger $\tilde{H}_1^{(k_1)}, \tilde{H}_2^{(k_2)}$ ist, also für $K_1^{(j)} \subseteq K_1, K_2^{(j)} \subseteq K_2$ gilt, dass

$$H_1^{(j)} = \bigcup_{k_1 \in K_1^{(j)}} \tilde{H}_1^{(k_1)}, \quad H_2^{(j)} = \bigcup_{k_2 \in K_2^{(j)}} \tilde{H}_2^{(k_2)}$$

Wir erhalten dann eine „karierte Zerlegung“ mit

$$H_1 \times H_2 = \bigcup_{(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2} (\tilde{H}_1^{(k_1)} \times \tilde{H}_2^{(k_2)}), H_1^{(j)} \times H_2^{(j)} = \bigcup_{(k_1, k_2) \in K_1^{(j)} \times K_2^{(j)}} (\tilde{H}_1^{(k_1)} \times \tilde{H}_2^{(k_2)})$$

Es gilt $K_1 \times K_2 = \bigcup_{j \in J} (K_1^{(j)} \times K_2^{(j)})$ und die Additivität von $\mu_1 \times \mu_2$ ist klar für diese „karierte Zerlegung“: Es gilt für $i \in \{1, 2\}$:

$$\mu_i(H_i) = \sum_{k \in K_i} \mu_i(\tilde{H}_i^{(k)}), \mu_i(H_i^{(j)}) = \sum_{k \in K_i^{(j)}} \mu_i(\tilde{H}_i^{(k)})$$

Damit folgt dann für $\mu_1 \times \mu_2$:

$$\begin{aligned} (\mu_1 \times \mu_2)(H_1 \times H_2) &= \sum_{(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2} (\mu_1 \times \mu_2)(\tilde{H}_1^{(k_1)} \times \tilde{H}_2^{(k_2)}) = \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{(k_1, k_2) \in K_1^{(j)} \times K_2^{(j)}} (\mu_1 \times \mu_2)(\tilde{H}_1^{(k_1)} \times \tilde{H}_2^{(k_2)}) = \sum_{j \in J} (\mu_1 \times \mu_2)(H_1^{(j)} \times H_2^{(j)}) \end{aligned}$$

Es folgt die Additivität von $\mu_1 \times \mu_2$ und somit, dass die Abbildung ein Inhalt ist. Die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ folgt mit Induktion. $\square$

Beispiel (Elementarinhalt). Der *Elementarinhalt* achsenparalleler Quader $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^d$ für $a, b \in \mathbb{R}^d$ und $a_i < b_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ ist definiert als ihr d -dimensionales euklidisches Volumen

$$\lambda_{\mathcal{Q}^d}^d([a, b]) := (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$$

Der Elementarinhalt $\lambda_{\mathcal{Q}^d}^d$ ist ein Inhalt, denn $\lambda_{\mathcal{Q}^d}^d = \lambda_{\mathcal{I}}^1 \times \cdots \times \lambda_{\mathcal{I}}^1$ bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Q}^d = \mathcal{I} * \cdots * \mathcal{I}$.

Für Ringe folgt mit dem Fortsetzungsresultat für Inhalte von Halbringen auf die von ihnen erzeugten Ringe (Satz I.13 Anm.):

Korollar I.19. Seien für $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge, $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ ein Ring und $\mu_i : \mathcal{R}_i \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann existiert genau ein Inhalt

$$\begin{aligned} (\mu_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mu_n) : \mathcal{R}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{R}_n &\rightarrow [0, \infty] \\ (\mu_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mu_n)(R_1 \times \cdots \times R_n) &:= \mu_1(R_1) \cdots \mu_n(R_n) \end{aligned}$$

auf dem Produktring $\mathcal{R}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{P}(X_1 \times \cdots \times X_n)$.

Beispiel (Elementarinhalt, Forts.). Der Elementarinhalt $\lambda_{\mathcal{Q}^d}^d$ lässt sich eindeutig zu einem Inhalt $\lambda_{\mathcal{F}^d}^d : \mathcal{F}^d \rightarrow [0, \infty]$ auf der Familie der d -dimensionalen Figuren fortsetzen. Wir fassen ihn als d -dimensionales euklidisches Volumen auf.

Auch Prämaße verhalten sich gut unter Produktbildung:

Satz I.20. Seien für $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge, $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{O}(X_i)$ ein Ring und sei $\mu_i : \mathcal{R}_i \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß. Die Fortsetzung $\mu_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mu_n$ der Abbildung $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$, wie in Definition I.20 auf den Ring $\mathcal{R}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{R}_n$ ist wieder ein Prämaß.

31. Oktober 2019

Beweis. Da Prämaße Inhalte sind, ist sicherlich nach Satz I.18 auch das Produkt der Prämaße, $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$, ein Inhalt. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ Eigenschaft (iii), σ -Additivität, erfüllt. Wieder zeigen wir die Aussage für $n = 2$. Die Aussage für allgemeine $n \in \mathbb{N}$ folgt dann mit Induktion.

Da Figuren endliche disjunkte Vereinigungen von Quader sind und der Inhalt $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ endlich additiv ist, genügt es für Figuren $A_1 \in \mathcal{R}_1, A_2 \in \mathcal{R}_2$, eine abzählbare Indexmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ und für $m \in M, A_1^{(m)}, A_2^{(m)} \in \mathcal{R}$, abzählbare disjunkte Zerlegungen der Form

$$A_1 \times A_2 = \bigsqcup_{m \in M} (A_1^{(m)} \times A_2^{(m)})$$

zu betrachten. Wir müssen dann zeigen, dass gilt:

$$\sum_{m \in M} \mu_1(A_1^{(m)}) \cdot \mu_2(A_2^{(m)}) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

Wegen Monotonie gilt jedenfalls die Ungleichung

$$\sum_{m \in M} \mu_1(A_1^{(m)}) \cdot \mu_2(A_2^{(m)}) \leq \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

bleibt also noch die andere Ungleichung zu zeigen. Hierzu benötigen wir eine untere Abschätzung von $\sum_{m \in M} \mu_1(A_1^{(m)}) \cdot \mu_2(A_2^{(m)})$.

Wir betrachten die Folge $(F_m)_{m \in M}$ approximierender Figuren mit

$$F_m := \bigsqcup_{i \leq m} (A_1^{(i)} \times A_2^{(i)}) \nearrow A_1 \times A_2$$

Im Folgenden schätzen wir $(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m)$ nach unten ab mithilfe von X_2 -Querschnitten $(S_2^{(m)})_{m \in M}$ für $x_1 \in A_1$. Dabei ist für $m \in M$ der X_2 -Querschnitt $S_2^{(m)}(x_1) \subseteq A_2$ definiert durch

$$\{x_1\} \times S_2^{(m)}(x_1) = F_m \cap (\{x_1\} \times A_2)$$

Dann ist $S_2^{(m)}(x_1) \in \mathcal{R}$ als Vereinigung einiger $A_2^{(i)}$ und die $S_2^{(m)}(x_1)$ wachsen mit m , sodass $S_2^{(m)}(x_1) \nearrow A_2$ für $m \rightarrow \infty$ und festes x_1 .

Für festes $m \in M$ treten endlich viele Querschnitte auf. Die Punkte $x_1 \in A_1$, für die $S_2^{(m)}(x_1)$ ein bestimmter X_2 -Querschnitt ist, bilden eine Figur in $\mathcal{R}_i$, da sie im von $A_1^{(i)}$ erzeugten Unterring liegt. Wir definieren für ein $v_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < v_2 < \mu_2(A_2)$ die Mengen

$$B_1^{(m)}(v_2) := \{x_1 \in A_1 \mid \mu_2(S_2^{(m)}(x_1)) \geq v_2\} \in \mathbb{R}$$

Es gilt die Volumenabschätzung $(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m) \geq \mu_1(B_1^{(m)}(v_2)) \cdot v_2$. Da gilt, dass $S_2^{(m)}(x_1) \nearrow A_2$, und μ_2 als Prämaß stetig von unten ist, folgt weiter, dass die Beziehung $\mu_2(S_2^{(m)}(x_1)) \nearrow \mu_2(A_2)$ besteht. Da auch $B_1^{(m)}(v_2) \nearrow A_1$ und μ_1 als Prämaß stetig von unten ist, folgt weiter, dass $\mu_1(B_1^{(m)}(v_2)) \nearrow \mu_1(A_1)$. Zusammengenommen folgt dann für alle $v_2 \in (0, \mu_2(A_2))$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m) \geq \mu_1(A_1) \cdot v_2$$

Da dies für alle solche v_2 gilt, folgt damit, dass

$$\sum_{m \in M} \mu_1(A_1^{(m)}) \cdot \mu_2(A_2^{(m)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m) \geq \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

d. h. die andere Richtung der Ungleichung. Insgesamt ist also $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ σ -additiv und somit ein Prämaß. Mit Induktion folgt dann, dass $\mu_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mu_n$ ein Prämaß ist. $\square$

Bemerkung. Der letzte Satz wird häufig erst im Rahmen der Integrationstheorie mithilfe des *Satzes der monotonen Konvergenz* [II.8](#) bewiesen.

Korollar I.21. Der Inhalt $\lambda_{\mathcal{F}^d}^d$ ist ein Prämaß.

Beweis. $\lambda_{\mathcal{F}^d}^d$ ist die d -te Potenz des Prämaßes $\lambda_{\mathcal{F}^1}^1$. Mit Satz [I.20](#) ist dann $\lambda_{\mathcal{F}^d}^d$ ebenfalls ein Prämaß. $\square$

Definition I.21 (Lebesgue-Prämaß, d -dimensional). Wir nennen $\lambda_{\mathcal{F}^d}^d$ das *d -dimensionale Lebesgue-Prämaß*.

I.4. σ -Algebren

Im Folgenden wollen wir von Teilmengenfamilien $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nun verlangen, dass sie reichhaltiger und flexibler sind, in dem Sinne, dass zusätzlich zu den bis jetzt behandelten endlichen Mengenoperationen auch unter abzählbaren Mengenoperationen, die aus den endlichen durch Grenzpasse entstehen, stabil sind.

I.4.1. σ -Algebren

Definition I.22 (σ - $\cup$ -Stabilität; σ - $\cup$ -Stabilität; δ - $\cap$ -Stabilität). Sei X eine Menge, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $\mathcal{M}$ σ - $\cup$ -stabil, g. d. w. für jede abzählbare Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Elemente A_n gilt, dass

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n := A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{M}$$

Wir nennen $\mathcal{M}$ σ - $\cup$ -stabil g. d. w. für jede abzählbare Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ gilt, dass

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n := A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{M}$$

Wir nennen $\mathcal{M}$ δ - $\cap$ -stabil g. d. w. für jede abzählbare Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ gilt, dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n := A_1 \cap A_2 \cap \dots \in \mathcal{M}$$

Definition I.23 (σ -Algebra). Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra g. d. w. gilt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (iii) $\mathcal{A}$ ist σ - $\cup$ -stabil
- (iv) $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{C}$ -stabil

Lemma I.22. Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{A}$ ist eine σ -Algebra g. d. w. gilt:

- (i') $X \in \mathcal{A}$
- (iii') $\mathcal{A}$ ist δ - $\cap$ -stabil
- (iv) $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{C}$ -stabil

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Definition mit $X = \mathbb{C}\emptyset$ und den *De-Morganschen Regeln*. $\square$

Bemerkung. σ -Algebren sind auch Algebren, denn es gilt $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$ und $A \cap B = A \cap B \cap X \cap X \cap \dots$.

Bemerkung.

- (i) Eigenschaften (iii) und (iii') sind formal ähnlich zu der Definition einer Topologie. Topologien sind jedoch stabil unter beliebigen Vereinigungen, aber nur unter endlichen Durchschnitten.
- (ii) In σ -Algebren gilt also, dass alle von innen bzw. von außen durch Teilmengen in der σ -Algebra approximierbaren Teilmengen wieder zur σ -Algebra gehören.

Wie im Fall von Ringen und Algebren sind beliebige Durchschnitte von σ -Algebren wieder σ -Algebren. Wir können daher analog wieder die von einer Menge erzeugte σ -Algebra definieren.

Definition 1.24 (Erzeugendensystem, σ -Algebra). Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Mengen. Wir bezeichnen mit $\sigma(\mathcal{E})$ die eindeutige kleinste σ -Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, d.h. den Durchschnitt aller σ -Algebren, die $\mathcal{E}$ enthalten. Wir nennen $\mathcal{E}$ dann ein *Erzeugendensystem* bzw. einen *Erzeuger* von $\sigma(\mathcal{E})$.

Im Fall von Ringen und Algebren kann man die in ihnen enthaltenen Mengen noch explizit angeben, indem man sie induktiv in abzählbar vielen Schritten konstruiert. Im Gegensatz dazu ist die Definition einer σ -Algebra i. A. nicht konstruktiv. Abgesehen von Ausnahmefällen ist eine Konstruktion in abzählbar vielen Schritten nämlich nicht möglich. Man benötigt zur Konstruktion einer σ -Algebra aus einem Erzeugendensystem einen Prozess mit Überabzählbar vielen Schritten (transfinite Induktion, Anm.). Dieser Umstand reflektiert, dass die in σ -Algebren enthaltenen Teilmengen i. A. so kompliziert sind, dass man sie nicht mehr explizit beschreiben kann.

Exkurs. Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Teilmengen. Man kann durch Anwenden abzählbarer Mengenoperationen immer größere Teilmengenfamilien angeben, die zu $\sigma(\mathcal{E})$ gehören müssen, deren „Verwandtschaftsgrad“ zu $\mathcal{E}$ jedoch sukzessive abnimmt. Wir definieren für eine beliebige Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Familie $\mathcal{F}^v$ mit

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^v \subseteq \mathcal{P}(X)$ durch

$$\mathcal{F}^v := \left\{ M \in \mathcal{P}(X) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \wedge \left(M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \vee M = \mathbb{C} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right) \right\}$$

Dann definieren wir $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E} \cup \{ \emptyset \}$ und für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathcal{E}_n := \mathcal{E}_{n-1}^v$. Die Definitionen der $\mathcal{E}_i$ sind der Anfang der sogenannten *Borel-Hierarchie*. Sie werden mittels transfiniter Induktion fortgesetzt.

Beispiel.

- (i) $\sigma(\emptyset) = \{ \emptyset, X \} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist eine σ -Algebra auf X , ebenso $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$.
- (ii) Für $A \subseteq X$ ist $\sigma(A) = \{ \emptyset, A, \mathbb{C}A, X \} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra auf X .
- (iii) Die Teilmengen von X , die abzählbar sind oder ein abzählbares Komplement haben, bilden eine σ -Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ auf X . Sie werden erzeugt von den einelementigen Teilmengen. Daher ist $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$ g. d. w. X überabzählbar ist.

Definition I.25 (Borelsche σ -Algebra). Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen die von $\mathcal{T}$ erzeugte σ -Algebra $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$ die *Borelsche σ -Algebra*. Wir nennen die Elemente $B \in \mathcal{B}(X)$ *Borelmengen*.

Bemerkung.

- (i) Jeder topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ trägt also die *natürliche* σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$.
- (ii) Jeder metrische Raum (X, d) trägt die *natürliche*, von den offen d -Bällen erzeugte Topologie $\mathcal{T}_d$ und somit auch die *natürliche* σ -Algebra $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T}_d)$.

Notation I.26. Sei $(\mathbb{R}^d, \mathcal{T})$ der topologische Raum $\mathbb{R}^d$ zusammen mit seiner *natürlichen* Topologie $\mathcal{T}$. Wir notieren $\mathcal{B}^d := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Bemerkung.

- (i) Da die offenen Teilmengen genau die Komplemente der abgeschlossenen Teilmengen sind, wird die Borelsche σ -Algebra eines topologischen Raumes ebenfalls von den abgeschlossenen Teilmengen erzeugt.
- (ii) Ist für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ die Topologie $\mathcal{T}$ hausdorffsch, so sind kompakte Teilmengen abgeschlossen. Daher ist die von der Familie $\mathcal{K}$ der Kompakta erzeugte σ -Algebra in der Borelschen σ -Algebra enthalten, d. h. es gilt $\sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{B}(X)$.

Besitzt der Raum zusätzlich eine abzählbare Überdeckung, so ist $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(X)$, da dann jede abgeschlossene Teilmenge eine abzählbare Vereinigung von Kompakta ist.

04. November 2019

$\mathcal{B}^d$ hat einige verschiedene natürliche Erzeuger, z. B. :

- (i) die offenen bzw. die abgeschlossenen Teilmengen
- (ii) die Kompakta
- (iii) die offenen bzw. abgeschlossenen Bälle (jede offene Teilmenge ist eine abzählbare Vereinigung offener Bälle, Anm.)
- (iv) die Bälle mit rationalen Radien bzw. Zentren in $\mathbb{Q}^d$.
- (v) die offenen bzw. die abgeschlossenen (achsenparallelen) Quader
- (vi) die halboffenen (achsenparallelen) Quader $\mathcal{Q}^d$ (siehe Lemma I.23 unten, Anm.)

Lemma I.23. $\mathcal{B}^d$ wird auch von $\mathcal{Q}^d$ erzeugt, d. h. $\mathcal{B}(\mathcal{Q}^d) = \mathcal{B}^d$.

Beweis. Einerseits ist jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ eine notwendigerweise abzählbare Vereinigung von Quadern $[a, b) \in \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d$ mit rationalen Ecken $a, b \in \mathbb{Q}^d$. Also ist $\mathcal{B}^d \subseteq \sigma(\mathcal{Q}^d)$. Andererseits ist jeder Quader $[a, b) \in \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d$ abzählbarer Durchschnitt offener Quader, gehört also zu $\mathcal{B}^d$, genauer gilt

$$[a, b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(a_1 - \frac{1}{n}, b_1\right) \times \cdots \times \left(a_d - \frac{1}{n}, b_d\right)}_{\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}} \in \sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}) = \mathcal{B}^d$$

□

Bemerkung. Die Familie $\mathcal{B}^d$ ist so reichhaltig, dass sie alle „denkbaren“ geometrischen Gebilde in $\mathbb{R}^d$ enthält. Ein genauerer Vergleich von $\mathcal{B}^d$ mit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}$ folgt in Satz I.54.

I.4.2. Dynkin-Systeme

Definition I.27 (Dynkin-System). Sei X eine Menge und $\mathcal{D} \subseteq \wp(X)$. Wir nennen $\mathcal{D}$ ein *Dynkin-System* auf X g. d. w. gilt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{D}$

- (iii) $\mathcal{D}$ ist $\sigma\text{-}\cup$ -stabil, d. h. für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$
- (iv) $\mathcal{D}$ ist $\mathcal{C}$ -stabil

Bemerkung. Dynkin Systeme sind *natürlich* auftretende Abschwächungen von σ -Algebren. Sie verlangen $\sigma\text{-}\cup$ -Stabilität nur für disjunkte Mengen. *Dynkin-Systeme* werden auch oft abkürzend *D-Systeme* genannt.

Proposition I.24. Sei X eine Menge. Ein Dynkin-System $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist eine σ -Algebra, g. d. w. $\mathcal{D}$ $\cap$ -stabil ist.

Beweis. Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Es gilt $A \cup B = \mathcal{C}(\mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B) \in \mathcal{D}$. Also ist $\mathcal{D}$ eine Algebra. In Algebren lassen sich abzählbare Vereinigungen als abzählbare disjunkte Vereinigungen ausdrücken. Es gilt nämlich für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, dass

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \dots \in \mathcal{D}$$

Also ist $\mathcal{D}$ $\sigma\text{-}\cup$ -stabil, also eine σ -Algebra. □

Lemma I.25. Sei X eine Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Dynkin-System. Sind $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ mit $D_1 \subseteq D_2$, so ist $D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$.

Beweis. Es gilt $D_2 \setminus D_1 = \mathcal{C}(\mathcal{C}(D_2 \setminus D_1)) = \mathcal{C}(D_1 \cup \mathcal{C}D_2) \in \mathcal{D}$. □

Die Dynkin-Eigenschaft vererbt sich bei gewissen Konstruktionen.

Definition I.28 (Spur, Dynkin-System). Sei X eine Menge, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Dynkin-System und $D \in \mathcal{D}$. Wir nennen

$$\mathcal{D}|_D := \{ M \cap D \mid M \in \mathcal{D} \} \subseteq \mathcal{P}(D)$$

die *Spur* von $\mathcal{D}$ auf D . Wir definieren weiter

$$\mathcal{D}_D := \{ M \subseteq X \mid M \cap D \in \mathcal{D} \} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

Korollar I.26. Für ein Dynkin-System $\mathcal{D}$ und $D \in \mathcal{D}$ sind $\mathcal{D}|_D$ und $\mathcal{D}_D$ wieder Dynkin-Systeme.

Beweis. Die $\mathcal{C}$ -Stabilität von $\mathcal{D}|_D$ folgt aus Lemma I.25. Die Stabilität unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen und $\emptyset \in \mathcal{D}|_D$ sind klar. Analog gilt dies für $\mathcal{D}_D$. $\square$

Definition I.29 (Erzeugendensystem, Dynkin-System). Das von einer Familie $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ erzeugte Dynkin-System $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ist das eindeutige kleinste Dynkin-System, das $\mathcal{E}$ enthält, d. h. der Durchschnitt aller Dynkin-Systeme $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$, die $\mathcal{E}$ enthalten. Man nennt $\mathcal{E}$ ein *Erzeugendensystem* bzw. einen *Erzeuger* dieses Dynkin-Systems.

Lemma I.27. Das erzeugte Dynkin System ist wohldefiniert.

Beweis. Beliebige Durchschnitte von Dynkin-Systemen sind wieder Dynkin-Systeme. Es gibt also für jede Familie $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein eindeutiges kleinstes sie enthaltendes Dynkin-System. $\square$

Bemerkung. Trivialerweise gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$.

Satz I.28. Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Teilmengen. Ist $\mathcal{E}$ $\cap$ -stabil, so ist $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ebenfalls $\cap$ -stabil, also eine σ -Algebra. In diesem Fall ist also $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Beweis. Sicherlich ist $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System. Es bleibt nach Proposition I.24 zu zeigen, dass $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$ -stabil ist. Seien $E, E' \in \mathcal{E}$. Dann ist aufgrund der $\cap$ -Stabilität von $\mathcal{E}$ wieder $E \cap E' \in \mathcal{E}$. Mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$ folgt dann $E' \in \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$, d. h. auch $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$. Es folgt damit $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$ also $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$, wegen der Minimalität von $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Sei nun $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Dann ist $E \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ wegen der $\cap$ -Stabilität von $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Dann gilt nun weiter, dass $E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})_D$, also gilt für alle $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, dass $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})_D$. Demnach ist $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})_D$ für alle $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Insgesamt folgt für $D, D' \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, dass $D \cap D' \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$ -stabil. Mit Proposition I.24 ist dann $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra. $\square$

I.4.3. Die Messbare Kategorie

Im Folgenden wollen wir, analog zu Homöomorphismen in topologischen Räumen und linearen Abbildungen in Vektorräumen, mit einer σ -Algebra versehene Mengen um eine „messbare“ Zusatzstruktur erweitern.

Definition I.30 (Messraum). Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra auf X . Wir nennen das Tupel $(X, \mathcal{A})$ einen *Messraum*. Mengen $A \in \mathcal{A}$ heißen *messbar*.

Notation I.31. Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, die im Bezug zu den σ -Algebren steht, schreiben wir kurz $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$.

Messräume werden die Definitionsbereiche unserer Volumensfunktion (Maße, Anm.) sein. Wir stellen an Abbildungen eine natürliche Forderung:

Definition I.32 (messbare Abbildung). Seien X, Y Mengen und $\mathcal{A} \subseteq \wp(X), \mathcal{B} \subseteq \wp(Y)$ σ -Algebren. Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ heißt *messbar*, g. d. w. für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, d. h. , g. d. w. Urbilder messbarer Mengen wieder messbar sind. Wir sagen auch, dass $f : X \rightarrow Y$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar ist.

Bemerkung. Die Definition der messbaren Abbildung ist analog zur Definition stetiger Abbildungen auf topologischen Räumen. Bei stetigen Abbildungen sind die Urbilder offener Mengen wieder offen, d. h. in der Topologie enthalten.

Lemma I.29. Kompositionen messbarer Abbildungen sind wieder messbar. D. h., für X, Y, Z Mengen und $\mathcal{A} \subseteq \wp(X), \mathcal{B} \subseteq \wp(Y), \mathcal{C} \subseteq \wp(Z)$ σ -Algebren und messbaren Abbildungen $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}), g : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (Z, \mathcal{C})$ ist $g \circ f$ messbar.

Beweis. Sei $C \in \mathcal{C}$. Dann ist $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$, da g messbar ist und folglich ist dann auch $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$. Also ist $g \circ f$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{C}$ -messbar $\square$

Lemma I.30. Seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei $\mathcal{M} \subseteq \wp(Y)$ eine beliebige nichtleere Familie ($\mathcal{M}$ darf auch überabzählbar sein, falls Y mindestens abzählbar ist, Anm.) und $N \subseteq Y$. Es gelten folgende allgemeine mengentheoretische Aussagen:

- (i) $f^{-1}(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} f^{-1}(M)$
- (ii) $f^{-1}(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} f^{-1}(M)$
- (iii) $f^{-1}(\mathcal{C}N) = \mathcal{C}(f^{-1}(N))$

Definition I.33 (zurückgezogene Familie). Seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildungen von Mengen. f induziert die *kontravariante* Abbildung

$$f^* : \wp(Y) \rightarrow \wp(X), M \mapsto f^{-1}(M)$$

Für eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ nennt man

$$f^*\mathcal{F} := \{ f^{-1}(M) \mid M \in \mathcal{F} \} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

die mit f zurückgezogene Familie.

Korollar I.31. Seien X, Y Mengen, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X), \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ σ -Algebren auf X bzw. Y und $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ eine Abbildung. $f^*\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist ebenfalls eine σ -Algebra, und zwar die kleinste σ -Algebra, für die f $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar ist. f ist also $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar g. d. w. $f^*\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Definition I.34 (Spur- σ -Algebra). Seien X, Y Mengen mit $X \subseteq Y$ und $\iota : X \rightarrow Y$ die Inklusion, also die Einbettung von X in Y . Sei weiters $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine σ -Algebra auf Y . Wir nennen $\mathcal{B}|_X := \iota^*\mathcal{B} = \{ M \cap X \mid M \in \mathcal{B} \} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die *Spur- σ -Algebra* von $\mathcal{B}$ auf X . Die Inklusion ι ist dann $\mathcal{B}|_X$ - $\mathcal{B}$ -messbar.

Man kann auch Erzeugendensysteme von σ -Algebren zurückziehen:

Lemma I.32. Seien X, Y Mengen, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Es gilt $\sigma(f^*\mathcal{F}) = f^*\sigma(\mathcal{F})$.

Beweis. Einerseits ist $f^*(\sigma(\mathcal{F}))$ eine σ -Algebra, und wegen $f^*\mathcal{F} \subseteq f^*(\sigma(\mathcal{F}))$ gilt weiter $\sigma(f^*\mathcal{F}) \subseteq f^*(\sigma(\mathcal{F}))$. Andererseits ist $\mathcal{M} := \{ A \in \sigma(\mathcal{F}) \mid f^{-1}(A) \in \sigma(f^*\mathcal{F}) \} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ eine σ -Algebra, denn für ein $M \in \mathcal{M}$ und eine Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ ist nach Lemma I.30 $f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(M_n)$ und $f^{-1}(\complement M) = \complement(f^{-1}(M))$. Somit gilt die Gleichheit $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{F})$ und es folgt insgesamt $\sigma(f^*\mathcal{F}) = f^*\sigma(\mathcal{F})$. $\square$

07. November 2019

Es gilt folgende Reformulierung des Lemmas I.32

Lemma I.33. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine σ -Algebra und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}$. Dann wird $f^*\mathcal{B}$ von $f^*\mathcal{E}$ erzeugt.

Definition I.35 (Borel-messbar). Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *Borel-messbar*, g. d. w. sie $\mathcal{B}(X) - \mathcal{B}(Y)$ -messbar ist.

Die topologische Kategorie $(X, \mathcal{T})$ führt zur Klasse der Borelschen Messräume $(X, \mathcal{B}(X)) = (X, \sigma(\mathcal{T}))$.

Lemma I.34. Stetige Abbildungen sind Borel-messbar. D.h. sind $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist f auch $\mathcal{B}(X)$ - $\mathcal{B}(Y)$ -messbar.

Beweis. Wir verwenden die Eigenschaft stetiger Abbildungen, dass Urbilder offener Mengen wieder offen sind. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann folgt aus der Stetigkeit $f^*\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_X$. Es folgt

$$f^*(\mathcal{B}(Y)) = f^*(\sigma(\mathcal{T}_Y)) \stackrel{(*)}{=} \sigma(f^*\mathcal{T}_Y) \subseteq \sigma(\mathcal{T}_X) = \mathcal{B}(X)$$

wobei bei $(*)$ das Lemma I.32 verwendet wird. Damit ist f Borel-messbar. $\square$

I.4.4. Produkte von σ -Algebren

Wir konstruieren endliche Produkte von σ -Algebren bzw. Messräumen.

Definition I.36 (Produkt- σ -Algebra; Produkt-Messraum). Sei für $n \in \mathbb{N}$ und ein $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge und $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ eine σ -Algebra. Dann nennen wir die σ -Algebra

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n))$$

auf $X_1 \times \dots \times X_n$ das *Produkt* der σ -Algebren $\mathcal{A}_i$. $\mathcal{A}$ wird also von den Urbildern der Teilmengen in $\mathcal{A}_i$ unter der Projektion π_i erzeugt. Wir nennen den Messraum $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n)$ das *Produkt* der Messräume $(X_i, \mathcal{A}_i)$.

Bemerkung.

- (i) Die Bildung einer solchen σ -Algebra ist assoziativ, d.h. für σ -Algebren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ gilt $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3)$. Die natürlichen Projektionen $\pi_k : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_k$ sind messbar.
- (ii) Die Produkt- σ -Algebra ist *charakterisiert* als kleinste σ -Algebra auf $X_1 \times \dots \times X_n$, sodass die π_k Projektionen bezüglich der $\mathcal{A}_k$ Algebren messbar sind.

Lemma I.35. Ist für $n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}$ X_i eine Menge und $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ eine σ -Algebra und $\mathcal{E}_i$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}_i$, so sind $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ und $\mathcal{E}_1 * \dots * \mathcal{E}_n$ Erzeugendensysteme von $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$.

Beweis. Fixiere ein $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $\mathcal{E}_k$ Erzeuger von $\mathcal{A}$ und somit erzeugt die Menge $\pi_k^*\mathcal{E}_k = \{ \pi_k^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{E}_k \}$ die σ -Algebra $\pi_k^*\mathcal{A}_k = \{ \pi_k^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}_k \}$, wobei

mit π_k die natürliche Projektion gemeint ist. Insgesamt folgt, dass

$$\sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)) = \sigma(\mathcal{E}_1 * \dots * \mathcal{E}_n) = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$$

□

I.5. Maße

I.5.1. Beispiele und Definitionen

Definition I.37 (Maß). Sei $\mathcal{A}$ ein Ring und $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß. Ist $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra, so nennen wir μ ein Maß.

Beispiel.

- (i) Punktmasse: Sei $x \in X$. Dann ist das *Dirac-Maß* δ_x auf $\mathcal{P}(X)$ folgendermaßen definiert:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Mit der Vorstellung einer „endlichen Masseverteilung“ erhält man für Massen $m_i \in \mathbb{R}_0^+$ und Punkte $x_i \in X$ durch Linearkombination das Maß $\sum_{i=1}^k m_i \delta_{x_i}$. Diese Vorstellung wird von einer Masseverteilung mit einem Träger aus abzählbar vielen Punkten $\subseteq X$ verallgemeinert.

- (ii) *Zählmaß* Das Zählmaß $\zeta : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \subseteq [0, \infty]$ ist definiert als:

$$\zeta(A) = \begin{cases} |A| & , \text{ falls } A \text{ endlich} \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases}$$

- (iii) Auf $\mathcal{P}(X)$ wird durch die Abbildung μ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } A = \emptyset \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases}$$

ein Maß definiert.

- (iv) Sei X überabzählbar und $\mathcal{A}$ die von endlichen Teilmengen erzeugte σ -Algebra, d. h. die σ -Algebra bestehend aus den abzählbaren Teilmengen und deren Komplementen.

Wir können ein Maß ν auf $\mathcal{A}$ definieren durch

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } A \text{ abzählbar ist} \\ 1 & , \text{ falls } \mathbb{C}A \text{ abzählbar ist} \end{cases}$$

Teilmengen einer σ -Algebra sind im Allgemeinen kompliziert und nicht explizit beschreibbar. Entsprechendes gilt für Maße. Auch diese sind im Allgemeinen nicht durch explizite Angabe ihrer Werte beschreibbar. Dies führt uns zur Konstruktion durch Fortsetzung. Ein Inhalt auf einem Halbring bzw. ein Prämaß auf einem Ring lässt sich nämlich eindeutig beschreiben und wir werden sehen, dass es eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß auf der σ -Algebra gibt.

I.5.2. Äußere Maße und Messbarkeit

Sei $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann ist für *beliebige* Teilmengen von X ein *äußeres μ -Volumen* bzw. eine *obere μ -Volumenschranke* gegeben, indem wir *abzählbare* Überdeckungen durch Teilmengen aus $\mathcal{H}$ verwenden.

Definition I.38 (äußeres Maß, assoziiert). Sei X eine Menge, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $M \subseteq X$. Sei weiters $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann definieren wir eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\mu^*(M) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}} \wedge M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \in [0, \infty]$$

Wir nennen μ^* das zu μ *assoziierte äußere Maß*.

Bemerkung.

- (i) Falls keine abzählbare Überdeckung von M existiert, so ist intuitiverweise $\mu^*(M) = \inf \emptyset = \infty$.
- (ii) Ist ein äußeres Maß μ^* zu einem Inhalt $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ assoziiert, so gilt stets $\mu^*|_{\mathcal{R}} \leq \bar{\mu}$. Ist $\bar{\mu}$ ein Prämaß, so gilt Gleichheit.
- (iii) Es ist immer möglich zu disjunkten Überdeckungen überzugehen. Es gilt nämlich

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (A_n \setminus A_i) \right)$$

Dabei können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in \{1, \dots, n-1\}$ die Menge $A_n \setminus A_i$ endlich disjunkt in Elemente des Halbrings zerlegen, d. h. wir finden $I_{(n,i)} \subseteq \mathbb{N}$ endlich und für jedes $j \in I_{(n,i)}$ ein Element $H_j^{(n,i)} \in \mathcal{H}$ des Halbrings, sodass $A_n \setminus A_i = \bigcup_{j \in I_{(n,i)}} H_j^{(n,i)}$. Insgesamt ist dann also

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (A_n \setminus A_i) \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \left(\bigcup_{j \in I_{(n,i)}} H_j^{(n,i)} \right) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{(j_1, \dots, j_{n-1}) \in I_{(n,1)} \times \dots \times I_{(n,n-1)}} \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} H_{j_i}^{(n,i)} \right) \right) \end{aligned}$$

Wegen $\bigcap_{i=1}^{n-1} H_{j_i}^{(n,i)} \in \mathcal{H}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(j_1, \dots, j_{n-1}) \in I_{(n,1)} \times \dots \times I_{(n,n-1)}$ ist dies also die entsprechende disjunkte Überdeckung durch Elemente des Halbrings $\mathcal{H}$. Daraus folgt, dass es genügt, das Infimum über *disjunkte* Überdeckungen zu bilden.

- (iv) Sei nun μ ein Inhalt auf $\mathcal{H}$, dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $\bar{\mu}$ auf dem von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$. Dieser besteht aus endlichen disjunkten Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathcal{H}$. Wir erkennen, dass eine Überdeckung durch Teilmengen aus $\mathcal{R}$ nicht effektiver als eine Überdeckung durch Teilmengen aus $\mathcal{H}$ ist. Demnach ist $\bar{\mu}^* = \mu^*$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}} \wedge M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}} \wedge M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \end{aligned}$$

- (v) Sei $B \in \mathcal{R}$, $M \subseteq B$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von M , d. h. $M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Da wegen $\cap$ -Stabilität für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $A_n \cap B \in \mathcal{R}$, genügt es also, das Infimum der Überdeckungen durch *in B enthaltene* Teilmengen zu bilden. Ist andererseits $M \cap B = \emptyset$, dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $A_n \setminus B \in \mathcal{R}$. Es genügt also, analog das Infimum von Überdeckungen durch *zu B disjunkten* Teilmengen zu bilden.

Lemma I.36. Das zu $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ assoziierte äußere Maß $\mu^* : \wp(X) \rightarrow [0, \infty]$ hat folgende Eigenschaften:

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) μ^* ist monoton, d. h. $\forall M, M' \subseteq X : M \subseteq M' \implies \mu^*(M) \leq \mu^*(M')$

(iii) μ^* ist σ -subadditiv, d. h. $\forall (M_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}(X)^{\mathbb{N}} : \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n)$

Beweis. (i) und (ii) folgen unmittelbar aus der Konstruktion über μ .

(iii): Sei für $n \in \mathbb{N}$ $(A_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von M_n . Dann ist $(A_m^{(n)})_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Es folgt:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \stackrel{(a)}{\leq} \sum_{m,n=1}^{\infty} \mu^*(A_m^{(n)}) \stackrel{(b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m^{(n)}) \stackrel{(c)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$$

Bei (a) wurde verwendet, dass alle Summanden positiv sind und somit der Umordnungssatz für Reihen mit positiven Summanden gilt. Bei (b) wurde der „große Umordnungssatz“ verwendet. Bei (c) wurde verwendet, dass zu gegebenem $\varepsilon_n > 0$ das Folgenglied $(A_m^{(n)})$ so gewählt werden kann, dass $\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m^{(n)}) \leq \mu^*(M_n) + \varepsilon_n$. Der allerletzte Summand wird beliebig klein. Daraus folgt die σ -Subadditivität. $\square$

Bemerkung. Das zu μ assoziierte Maß μ^* ist i. A. nur σ -subadditiv, da i. A. nicht alle disjunkten Mengen vom Ring getrennt werden. D. h. für $M, N \subseteq X$ mit $M \cap N = \emptyset$ kann für alle $R \in \mathcal{R}$ gelten, dass $M \subseteq R \iff N \subseteq R$. Es muss also kein $B \in \mathcal{R}$ existieren, sodass $M \subseteq B$ und $N \cap B = \emptyset$.

Definition I.39 (äußeres Maß). Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{O}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ mit den Eigenschaften

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) Monotonie

(iii) σ -Subadditivität

heißt ein *äußeres Maß* auf X . Es muss nicht zu einem μ assoziiert sein.

Bemerkung. Man kann auch ein *inneres μ -Volumen* bzw. eine *untere μ -Volumenschranke* definieren. (Dies ist jedoch nicht logisch notwendig für die folgenden Diskussionen, motiviert aber die Definition von Messbarkeit, s. u.). Wir approximieren von innen durch eine äußere Approximation des Komplements.

Da das Komplement i. A. zu groß ist, beschränken wir uns daher im Folgenden auf Mengen $M \subseteq X$, sodass $M \subseteq R$ für ein $R \in \mathcal{R}$ mit $\bar{\mu}(R) < \infty$. Wir definieren nun das *innere Maß* μ_* durch

$$\mu_*(M) := \mu^*(R) - \mu^*(R \setminus M)$$

wobei im Allgemeinen nur $\mu_*(M) \leq \bar{\mu}(R) - \mu^*(R \setminus M)$ gilt. μ_* ist wohldefiniert, da es nicht vom gewählten $R \in \mathcal{R}$ abhängt. Sei nämlich $R' \in \mathcal{R}$, sodass $R \subseteq R'$ mit $\bar{\mu}(R') < \infty$, dann folgt

$$\mu^*(R' \setminus M) - \mu^*(R \setminus M) = \mu^*(R' \setminus R) = \mu^*(R') - \mu^*(R)$$

Die Diskrepanz zwischen äußerem und innerem Volumen lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$\mu^*(M) - \mu_*(M) = \mu^*(M) + \mu^*(R \setminus M) - \mu^*(R) \geq \mu^*(R) - \mu^*(R) = 0$$

Der „Volumenexzess“ wird erzeugt durch „erzwungene Überlappung“. Intuitiv bedeutet dies, dass der Exzess größer 0 ist, wenn der „Rand“ von M bzw. der Übergangsbereich (*engl.* Interface, Anm.) von M in $\mathbb{C}M$ „dick“ bzw. „diffus“ ist.

Die naheliegendere Konstruktion des inneren μ -Volumens durch Ausschöpfung einer Menge liefert im Gegensatz dazu ungewünschte Resultate, weshalb nur die Konstruktion durch eine äußere Approximation des Komplements von praktischer Relevanz ist. Z. B. wäre nämlich für eine beliebige offene Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$ und eine abzählbare, dichte Teilmenge $A \subseteq \mathcal{O}$ das durch Ausschöpfung konstruierte innere Volumen von $\mathcal{O} \setminus A$ gleich 0, da $\mathcal{O} \setminus A$ keine Quader (d. h. Intervalle) enthält.

11. November 2019

Lemma I.37 (partielle Additivität). Seien X eine Menge, μ ein Inhalt auf dem Halbring $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{H}$ erzeugte Ring, $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß und $M_1, M_2 \subseteq X$ disjunkt und durch $\mathcal{R}$ trennbar, d. h. wir finden ein $B \in \mathcal{R}$, sodass $M_1 \subseteq B$ und $M_2 \cap B = \emptyset$. Dann gilt $\mu^*(M_1 \cup M_2) = \mu^*(M_1) + \mu^*(M_2)$.

Beweis. Aufgrund der Subadditivität gilt sicher $\mu^*(M_1 \cup M_2) \leq \mu^*(M_1) + \mu^*(M_2)$. Für die andere Ungleichung sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $M_1 \cup M_2$, d. h. es soll $M_1 \cup M_2 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gelten. Dann definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ $A_n^{(1)} := A_n \cap B$ und $A_n^{(2)} := A_n \setminus B$. Dabei sind alle $A_n^{(1)}, A_n^{(2)} \in \mathcal{R}$, da $\mathcal{R}$ sowohl $\cap$ - also auch $\mathbb{C}$ -stabil ist. Es gilt außerdem $A_n = A_n^{(1)} \cup A_n^{(2)}$. Für eine Überdeckung $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ von $M_1 \cup M_2$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\mu^*(M_1 \cup M_2) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n) - \varepsilon \stackrel{(i)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n^{(1)}) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n^{(2)}) - \varepsilon \stackrel{(ii)}{\geq} \mu^*(M_1) + \mu^*(M_2) - \varepsilon \quad (\text{I.D})$$

wobei bei (i) die Disjunktheit der $A_n^{(1)}$ zu den $A_n^{(2)}$ und die Additivität von $\bar{\mu}$ verwendet wurden. Bei (ii) benötigen wir, dass $M_1 \subseteq B$, da somit eine Überdeckung von M_1 durch Mengen aus $\mathcal{R}$ genauso gut ist wie eine Überdeckung aus Teilmengen von B aus $\mathcal{R}$. Analog wurde verwendet, dass $M_2 \cap B = \emptyset$, da dann eine Überdeckung von M_2 durch Mengen aus $\mathcal{R}$ genauso gut ist wie eine Überdeckung durch zu B disjunkte Mengen aus $\mathcal{R}$. Da

$$\mu^*(M_1 \cup M_2) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}} \wedge M_1 \cup M_2 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$$

finden wir zu einem beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine solche Überdeckung $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$, weshalb die Ungleichungskette **I.D** für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt ist. Es gilt demnach uneingeschränkt $\mu^*(M_1 \cup M_2) \geq \mu^*(M_1) + \mu^*(M_2)$, insgesamt also $\mu^*(M_1 \cup M_2) = \mu^*(M_1) + \mu^*(M_2)$. $\square$

Im Folgenden wollen wir definieren, wann wir eine Menge $M \subseteq X$ *messbar* nennen. Der erste Ansatz wäre zu verlangen, dass $\mu^*(M) = \mu_*(M)$. Dies wäre erfüllt g. d. w. für alle $R \in \mathcal{R}$, sodass $M \subseteq R$ und $\bar{\mu}(R) < \infty$, gilt, dass $\mu^*(R) = \mu^*(M) + \mu^*(R \cap \mathbb{C}M)$ (zur Erinnerung: es gilt $R \cap \mathbb{C}M = R \setminus M$, Anm.).

Um diese Eigenschaften auf beliebige Teilmengen $M \subseteq X$ auszudehnen, verlangen wir, dass für alle $R \in \mathcal{R}$ gilt, dass $\mu^*(R) = \mu^*(R \cap M) + \mu^*(R \cap \mathbb{C}M)$.

Lemma I.38. Sei M messbar in dem Sinne, dass für alle $R \in \mathcal{R}$ gilt, dass $\mu^*(R) = \mu^*(R \cap M) + \mu^*(R \cap \mathbb{C}M)$. Dann gilt für beliebige Teilmengen $S \subseteq X$, dass $\mu^*(S) = \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \cap \mathbb{C}M)$.

Beweis. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von S , so gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_n) &\stackrel{(i)}{\geq} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n \cap M) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n \cap \mathbb{C}M) \stackrel{(iii)}{\geq} \\ &\stackrel{(iii)}{\geq} \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \cap \mathbb{C}M) \stackrel{(iv)}{\geq} \mu^*(S) \end{aligned}$$

Dabei wird bei (i) die Eigenschaft $\mu^*|_{\mathcal{R}} \leq \bar{\mu}$ und bei (ii) die Voraussetzung des Lemmas verwendet, die anwendbar ist, da für alle $n \in \mathbb{N}$ $A_n \in \mathcal{R}$ gilt. Ungleichung (iii) folgt aus der Monotonie, da (A_n) eine Überdeckung von S ist, demnach also $(A_n \cap M)$ bzw. $(A_n \cap \mathbb{C}M)$ Überdeckungen von $S \cap M$ bzw. $S \cap \mathbb{C}M$. (iv) gilt aufgrund der Monotonie von μ^* .

Da diese Ungleichungskette für alle Überdeckungen (A_n) gilt, so auch über das Infimum der Überdeckungen. Es gilt somit

$$\mu^*(S) \geq \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \cap \mathbb{C}M) \geq \mu^*(S)$$

also Gleichheit. □

Definition I.40 (μ^* -Messbarkeit, C. Carathéodory 1914). Sei X eine Menge und $\mu^* : \mathcal{O}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Wir nennen eine Teilmenge $M \subseteq X$ μ^* -messbar g. d. w. für alle $S \subseteq X$ gilt, dass

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \cap \mathbb{C}M) \quad (\text{I.E})$$

Bemerkung. Intuitiv ist M μ^* -messbar g. d. w. sich M und $\mathbb{C}M$ nicht durchdringen, bzw. M jede Menge S durch einen „sauberen Schnitt“ trennt.

Bemerkung ($\mu^{*\text{fin}}$ -Messbarkeit, Jordan, Peano). Ältere Ansätze der Konstruktion äußerer Maße arbeiten mit *endlichen* Überdeckungen im Gegensatz zu abzählbaren Überdeckungen. Wir definieren analog zu μ^* für eine Menge $M \subseteq X$

$$\begin{aligned} \mu^{*\text{fin}}(M) &:= \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \mid n \in \mathbb{N} \wedge (A_k)_{k \in \{1, \dots, n\}} \in \mathcal{H}^{\{1, \dots, n\}} \wedge M \subseteq \bigcup_{k=1}^n A_k \right\} \\ &= \inf \left\{ \bar{\mu}(\bar{A}) \mid \bar{A} \in \mathcal{R}, M \subseteq \bar{A} \right\} \end{aligned}$$

$\mu^{*\text{fin}} : \mathcal{O}(X) \rightarrow [0, \infty]$ erfüllt wieder die Eigenschaft $\mu^{*\text{fin}}(\emptyset) = 0$ und die der Monotonie. $\mu^{*\text{fin}}$ ist jedoch nur endlich subadditiv.

Im Gegensatz zu μ^* gilt zwar $\mu^{*\text{fin}}|_{\mathcal{R}} = \bar{\mu}$, jedoch ist $\mu^{*\text{fin}}$ wegen $\mu^{*\text{fin}} \geq \mu^*$ nur auf einer kleineren Klasse von Teilmengen nützlich. Wenn wir nämlich für $M \subseteq X$ analog $\mu_{*\text{fin}}$ definieren durch $\mu_{*\text{fin}}(M) := \sup \{ \bar{\mu}(R) \mid R \in \mathcal{R} \wedge R \subseteq M \}$, so erhalten wir

$$\mu_{*\text{fin}} \leq \mu_* \leq \mu^* \leq \mu^{*\text{fin}}$$

also eine größere Diskrepanz $\mu^{*\text{fin}} - \mu_{*\text{fin}} \geq \mu^* - \mu_*$.

Definieren wir *Jordan-Messbarkeit* durch die Eigenschaft, dass $\mu^{*\text{fin}}(M) = \mu_{*\text{fin}}(M)$, dann erkennen wir, dass weniger (oder gleich viele) Mengen Jordan-messbar sind, als μ^* -messbar. Aufgrund einiger ungewünschter Resultate bleibt dieser ältere Ansatz der Konstruktion äußerer Maße unbefriedigend. Z. B. betrachte man die Menge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, die

dicht in $[0, 1]$ liegt. Da jede Teilmenge in $\mathcal{F}^1$, die $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ enthält, auch $[0, 1]$ enthält, gilt $(\lambda_{\mathcal{I}}^1)^{\text{fin}}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$. Andererseits gilt aber $(\lambda_{\mathcal{I}}^1)^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$, da $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ abzählbar ist, somit also eine Überdeckung durch abzählbar viele Intervalle beliebig kleiner Gesamtlänge besitzt. Insgesamt ist also

$$(\lambda_{\mathcal{I}}^1)_{*\text{fin}}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \leq (\lambda_{\mathcal{I}}^1)^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \leq \underbrace{(\lambda_{\mathcal{I}}^1)^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1])}_{=0} \leq \underbrace{(\lambda_{\mathcal{I}}^1)^{\text{fin}}(\mathbb{Q} \cap [0, 1])}_{=1}$$

und somit $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ nicht $(\lambda_{\mathcal{I}}^1)^{\text{fin}}$ -, jedoch $(\lambda_{\mathcal{I}}^1)^*$ -messbar.

I.5.3. Die σ -Algebra der messbaren Mengen und ihr Maß

Definition I.41. Sei X eine Menge und $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{A}^* := \{ M \in \mathcal{P}(X) \mid \forall S \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(S) = \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \cap \mathbb{C}M) \} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

die Familie aller μ^* -messbaren Teilmengen von X .

Definition I.42 (Nullmenge). Sei X eine Menge, $N \subseteq X$ und $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Wir nennen N eine μ^* -Nullmenge g. d. w. $\mu^*(N) = 0$.

Lemma I.39. Alle Nullmengen liegen in der Menge $\mathcal{A}^*$.

Beweis. Sei $N \subseteq X$ eine μ^* -Nullmenge und $S \subseteq X$. Es folgt

$$\mu^*(S) \stackrel{(i)}{\leq} \mu^*(S \cap N) + \mu^*(S \cap \mathbb{C}N) \stackrel{(ii)}{\leq} \mu^*(N) + \mu^*(S) \stackrel{(iii)}{=} \mu^*(S)$$

wobei (i) mit der Subadditivität von μ^* und (ii) mit der Monotonie von μ^* , da $S \cap N \subseteq N$ und $S \cap \mathbb{C}N \subseteq S$. (iii) folgt mit $\mu^*(N) = 0$, da N eine Nullmenge ist. Insgesamt folgt die Gleichheit und somit $N \in \mathcal{A}^*$. $\square$

Satz I.40 (Carathéodory, 1914). Sei X eine Menge, $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß und $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Familie aller μ^* -messbaren Teilmengen von X nach Definition I.41. $\mathcal{A}^*$ ist eine σ -Algebra auf X und $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ ist ein Maß.

Lemma I.41.

- (i) Sind für $n \in \mathbb{N}$ $M_1, \dots, M_n \subseteq X$ (nicht notwendigerweise disjunkte) Teilmengen mit $\mu^*(M_1 \cup \dots \cup M_n) = \mu^*(M_1) + \dots + \mu^*(M_n)$, so gilt auch für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, dass $\mu^*(M_1 \cup \dots \cup M_k) = \mu^*(M_1) + \dots + \mu^*(M_k)$.
- (ii) Sind für $n \in \mathbb{N}$ $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{A}^*$ paarweise disjunkt und $S \subseteq X$, so ist

$$\mu^*(S \cap (M_1 \cup \dots \cup M_n)) = \mu^*(S \cap M_1) + \dots + \mu^*(S \cap M_n)$$

Beweis (Lemma). (i): Seien $M_1, \dots, M_n \subseteq X$. Die Subadditivität von μ^* liefert

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right) &= \sum_{i=1}^n \mu^*(M_i) = \sum_{i=1}^k \mu^*(M_i) + \sum_{i=k+1}^n \mu^*(M_i) \geq \\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^k M_i\right) + \mu^*\left(\bigcup_{i=k+1}^n M_i\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right) \end{aligned}$$

(ii): Seien $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{A}^*$ paarweise disjunkt und $S \subseteq X$. Aufgrund der Disjunktheit der M_i für ein $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} (S \cap (M_k \cup \dots \cup M_n)) \cap M_k &= S \cap M_k \\ (S \cap (M_k \cup \dots \cup M_n)) \cap \mathbb{C}M_k &= S \cap (M_{k+1} \cup \dots \cup M_n) \end{aligned}$$

Da $M_k \in \mathcal{A}^*$, können wir dann als „Testmenge“ $S \cap (M_k \cup \dots \cup M_n)$ wählen, sodass dann gilt, dass

$$\begin{aligned} \mu^*(S \cap (M_k \cup \dots \cup M_n)) &= \mu^*((S \cap (M_k \cup \dots \cup M_n)) \cap M_k) + \\ &+ \mu^*((S \cap (M_k \cup \dots \cup M_n)) \cap \mathbb{C}M_k) = \mu^*(S \cap M_k) + \mu^*(S \cap (M_{k+1} \cup \dots \cup M_n)) \end{aligned}$$

Induktion über k liefert nun die Behauptung. □

Beweis (Carathéodory, 1914). Es gilt $\emptyset \in \mathcal{A}^*$, da $\emptyset$ eine μ^* -Nullmenge ist. Auch ist $\mathcal{A}^*$ $\mathbb{C}$ -stabil, denn es gilt für alle $M \in \mathcal{A}^*$ und ein beliebiges $S \subseteq X$, dass

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \cap \mathbb{C}M) = \mu^*(S \cap \mathbb{C}M) + \mu^*(S \cap M)$$

Intuitiv hat $\mathbb{C}M$ einen „dünnen Rand“, g. d. w. M einen „dünnen Rand“ hat.

$\mathcal{A}^*$ ist auch $\cup$ -stabil. Seien nämlich $M_1, M_2 \in \mathcal{A}^*$ und $S \subseteq X$. Dann gilt aufgrund der μ^* -Messbarkeit von M_1, M_2 , dass

$$\begin{aligned}\mu^*(S) &= \mu^*(S \cap M_1) + \mu^*(S \cap \mathbb{C}M_1) = \\ &= (\mu^*(S \cap M_1 \cap M_2) + \mu^*(S \cap M_1 \cap \mathbb{C}M_2)) + (\mu^*(S \cap \mathbb{C}M_1 \cap M_2) + \underbrace{\mu^*(S \cap \mathbb{C}M_1 \cap \mathbb{C}M_2)}_{=\mathbb{C}(M_1 \cup M_2)})\end{aligned}$$

Mit $S = (S \cap M_1 \cap M_2) \cup (S \cap M_1 \cap \mathbb{C}M_2) \cup (S \cap \mathbb{C}M_1 \cap M_2) \cup (S \cap \mathbb{C}(M_1 \cup M_2))$ können wir nun Lemma I.41 (i) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\mu^*(S \cap (M_1 \cup M_2)) &= \mu^*((S \cap M_1 \cap M_2) \cup (S \cap M_1 \cap \mathbb{C}M_2) \cup (S \cap \mathbb{C}M_1 \cap M_2)) = \\ &= \mu^*(S \cap M_1 \cap M_2) + \mu^*(S \cap M_1 \cap \mathbb{C}M_2) + \mu^*(S \cap \mathbb{C}M_1 \cap M_2)\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also, dass $\mu^*(S) = \mu^*(S \cap (M_1 \cup M_2)) + \mu^*(S \cap \mathbb{C}(M_1 \cup M_2))$. Somit ist $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{A}^*$ und $\mathcal{A}^*$ eine Algebra. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{A}^*$ σ - $\cup$ -stabil ist.

Da $\mathcal{A}^*$ eine Algebra ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{A}^*$ ein Dynkin-System, d. h. stabil unter disjunkten abzählbaren Vereinigungen, ist. Sei dazu $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{A}^*)^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen und $S \subseteq X$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt aufgrund der endlichen $\cup$ -Stabilität (bei (a)) und Lemma I.41 (ii) (bei (b))

$$\begin{aligned}\mu^*(S) &\stackrel{(a)}{=} \mu^*\left(S \cap \left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)\right) + \mu^*\left(S \cap \mathbb{C}\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)\right) \stackrel{(b)}{=} \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{i=1}^n \mu^*(S \cap M_i) + \mu^*\left(S \cap \mathbb{C}\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)\right)\end{aligned}$$

Wegen $(S \cap (\bigcup_{i=1}^n M_i)) \nearrow (S \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i))$ und $(S \cap \mathbb{C}(\bigcup_{i=1}^n M_i)) \searrow (S \cap \mathbb{C}(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i))$ und der Subadditivität von μ^* folgt dann

$$\begin{aligned}\mu^*(S) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S \cap M_i) + \mu^*\left(S \cap \mathbb{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right)\right) \geq \\ &\geq \mu^*\left(S \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right)\right) + \mu^*\left(S \cap \mathbb{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right)\right) \geq \mu^*(S)\end{aligned}$$

also überall Gleichheit. Somit ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathcal{A}^*$ und $\mathcal{A}^*$ ein Dynkin-System. Da $\mathcal{A}^*$ auch eine Algebra, also insbesondere $\cap$ -stabil ist, ist $\mathcal{A}^*$ eine σ -Algebra.

14. November 2019

Wir wählen nun die Testmenge $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) &\stackrel{(c)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \cap M_k\right)}_{=M_k} + \underbrace{\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \cap \mathfrak{C}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right)\right)}_{=\emptyset} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(M_k) + \underbrace{\mu^*(\emptyset)}_{=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(M_k) \end{aligned}$$

wobei bei (c) die Eigenschaft $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \in \mathcal{A}^*$ sowie Lemma I.41 (ii) verwendet wurde. Insgesamt ist also $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ σ -additiv, also ein Maß. $\square$

I.5.4. Beziehung eines Inhalts zu seinem assoziierten äußeren Maß

Bemerkung. Ist X eine Menge, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Sei weiter $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ der von $\mathcal{H}$ erzeugte Ring und $\bar{\mu} : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ die eindeutige Fortsetzung von μ , sowie $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ das zu μ assoziierte äußere Maß und $\mathcal{A}^*$ die σ -Algebra der μ^* -messbaren Mengen. Wir beobachten, dass $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}^*$. Es gilt nämlich für $R \in \mathcal{R}$ und $S \subseteq X$ aufgrund der partiellen Additivität von μ^* , dass $\mu^*(S) = \mu^*(S \cap R) + \mu^*(S \cap \mathfrak{C}R)$, somit also $R \in \mathcal{A}^*$.

Korollar I.42. Sei $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und μ ein Inhalt auf $\mathcal{H}$, sowie $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ der von $\mathcal{H}$ erzeugte Ring. Dann ist $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}^*$ und $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ ein Maß. Die Einschränkung $\mu^*|_{\mathcal{R}} = (\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})})|_{\mathcal{R}}$ ist dann also ein Prämaß.

I.5.5. Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen

Lemma I.43. Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Ist μ zusätzlich ein Prämaß, so gilt $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{R}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ eine abzählbare Überdeckung von A . Da μ ein Inhalt ist, erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^n \mu(A_k) \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A\right)$$

Da $\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A \nearrow A$ für $n \rightarrow \infty$ und μ ein Prämaß ist, ergibt sich Ungleichungskette

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A\right) \stackrel{(*)}{=} \mu(A)$$

wobei die Prämaß-Eigenschaft von μ^* für $(*)$ benötigt wurde. Bilden wir nun das Infimum über die Überdeckungen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$, so folgt $\mu^*(A) \geq \mu(A)$. Damit gilt $\mu^*|_{\mathcal{R}} \geq \mu$. Da die umgekehrte Richtung schon in einem allgemeineren Rahmen gezeigt wurde, folgt die Gleichheit. $\square$

Satz I.44. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß. Dann wird μ durch μ^* zu einem Maß $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ fortgesetzt.

Beweis. Nach Korollar I.42 wissen wir, dass $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}^*$ sowie, dass $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ ein Maß und $\mu^*|_{\mathcal{R}}$ ein Prämaß ist. Mit Lemma I.43 folgt dann, dass $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$. $\square$

Bemerkung. Ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ ist also (auf mindestens eine Weise) zu einem Maß auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ -Algebren fortsetzbar. Im Folgenden werden wir untersuchen, in wie fern diese Fortsetzung eindeutig ist.

I.5.6. Eindeutigkeit fortgesetzter Maße

Sei μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}(X)$ und sei weiter $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}(X)$ eine σ -Algebra mit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^*$. Sei $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ die Fortsetzung von μ auf $\mathcal{B}$, d. h. $\mu = \nu|_{\mathcal{R}}$. Im Folgenden soll ν mit $\mu^*|_{\mathcal{B}}$ verglichen werden.

Lemma I.45. Sei μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}(X)$ und ν die Fortsetzung von μ auf die σ -Algebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}(X)$ mit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^*$. Es gilt $\nu \leq \mu^*|_{\mathcal{B}}$.

Beweis. Sei $M \in \mathcal{B}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ eine abzählbare Überdeckung von M , d. h. es ist $M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Es gelten die Abschätzungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \stackrel{(i)}{\geq} \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \stackrel{(ii)}{\geq} \nu(M)$$

Dabei wurde verwendet, dass ν ein Maß ist, genauer die σ -Subadditivität bei (i) und die Monotonie in (ii). $\square$

Satz I.46. Sei wieder μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}(X)$ und ν die Fortsetzung von μ auf die σ -Algebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}(X)$ mit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^*$. Sei

$$\mathcal{B}^{\text{fin}} := \left\{ M \left| \exists (R_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}} : M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : \mu(R_n) < \infty) \right. \right\}$$

die Familie der Teilmengen aus $\mathcal{B}$, die eine abzählbare Überdeckung durch Teilmengen aus $\mathcal{R}$ mit endlichem μ -Inhalt zulassen. Es gilt $\nu|_{\mathcal{B}^{\text{fin}}} = \mu^*|_{\mathcal{B}^{\text{fin}}}$.

Beweis. Sei $M \in \mathcal{B}^{\text{fin}}$.

Fall 1: Es gibt ein $R \in \mathcal{R}$, sodass $M \subseteq R$ und $\mu(R) < \infty$. Es ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu^*(M) + \mu^*(R \setminus M) &\stackrel{(i)}{=} \mu^*(R) = \mu(R) \stackrel{(ii)}{=} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \nu(R) \stackrel{(iii)}{=} \nu(M) + \nu(R \setminus M) \stackrel{(iv)}{\leq} \mu^*(M) + \mu^*(R \setminus M) \end{aligned}$$

In (i) wurde verwendet, dass $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ ein Maß, also additiv ist. Bei (ii) wurde die Eigenschaft $\nu|_{\mathcal{R}} = \mu$ benutzt. In (iii) wurde die Tatsache, dass ν ein Maß, also additiv ist, verwendet und in (iv) wird benötigt, dass nach Lemma sowohl [I.45](#) $\nu(M) \leq \mu^*|_{\mathcal{B}}(M)$ als auch $\nu(R \setminus M) \leq \mu^*|_{\mathcal{B}}(R \setminus M)$. Damit folgt die Gleichheit $\nu(M) = \mu^*(M)$. Es wurde verwendet, dass alle Größen endlich sind.

Fall 2: M hat eine abzählbare Überdeckung $(R_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\mu(R_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass die R_n paarweise disjunkt sind. Dies ist möglich, da $\mathcal{R}$ ein Ring ist, wir also für $n \in \mathbb{N}$ auch $\tilde{R}_n := R_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} R_k \in \mathcal{R}$ setzen können. Wir haben schon gezeigt, dass $\nu(M \cap R_n) = \mu^*(M \cap R_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und verwenden nun zusätzlich die σ -Additivität der Maße ν und μ^* und erhalten damit

$$\begin{aligned} \nu(M) &= \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (M \cap R_n)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(M \cap R_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(M \cap R_k) = \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (M \cap R_n)\right) = \mu^*(M) \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Wir erhalten also Eindeutigkeit unter geeigneten Endlichkeitsvoraussetzungen.

Definition I.43 (Endlichkeit; σ -Endlichkeit). Sei X eine Menge, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Wir nennen $(\mathcal{R}, \mu)$ bzw. μ

- (i) *endlich* g. d. w. $X \in \mathcal{R}$ und $\mu(X) < \infty$.
- (ii) *σ -endlich* g. d. w. eine abzählbare Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ existiert, sodass $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung.

- (i) Während *Endlichkeit* verlangt, dass der gesamte Raum endlichen μ -Inhalt hat, verlangt *σ -Endlichkeit*, dass der ganze Raum eine abzählbare Überdeckung durch Teilmengen endlichen μ -Inhalts zulässt.
- (ii) Da vorausgesetzt wird, dass $\mathcal{R}$ ein Ring ist, ist die σ -Endlichkeit äquivalent zur Existenz einer abzählbaren Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen, sodass $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \beta^d)$ (β^d bezeichne das Lebesgue-Borel-Maß s. u., Anm.) ist nicht endlich, jedoch σ -endlich, da $\mathbb{R}^d$ eine abzählbare Vereinigung von Quadern, Bällen, etc. ist.

Korollar I.47. Sei X eine Menge, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}(X)$ ein Ring und μ ein σ -endliches Prämaß auf $\mathcal{R}$. Sei weiter ν ein Maß auf einer σ -Algebra $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^*$ und $\nu|_{\mathcal{R}} = \mu$. Dann gilt $\nu = \mu^*|_{\mathcal{B}}$.

Korollar I.48. Sei X eine Menge und μ ein σ -endliches Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}(X)$. μ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{O}(X)$.

Bemerkung. Bereits in einfachsten Situationen, in denen die σ -Endlichkeit nicht gegeben ist, herrscht Nichteindeutigkeit: Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $\mathcal{R} = \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{O}(X)$ der triviale Ring und μ mit $\emptyset \mapsto 0$ ein Inhalt. Dann ist $\sigma(\mathcal{R}) = \{\emptyset, X\}$ eine σ -Algebra und $\bar{\mu}$ mit $\emptyset \mapsto 0, X \mapsto c$ für $c \in [0, \infty]$ die Fortsetzung $\bar{\mu}$ von μ auf $\{\emptyset, X\}$. Die Fortsetzung ist also nicht eindeutig, da c beliebig gewählt werden kann. $\bar{\mu}$ ist sogar endlich, falls $c < \infty$ gewählt wird. Jedoch ist μ nicht σ -endlich, da keine Überdeckung von X durch Teilmengen von $\mathcal{R}$ existiert.

Nun soll der Spezialfall $\mathbb{R}^d$ betrachtet werden.

Definition I.44 (Lebesgue-Borel-Maß, d -dimensional). Das Lebesgue-Prämaß $\lambda_{\mathcal{F}^d}^d$ ist σ -endlich. Damit existiert eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß β^d auf der Bo-

relschen σ -Algebra $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}) = \sigma(\mathcal{F}^d)$. β^d wird *Lebesgue-Borel-Maß* genannt. Wir bezeichnen weiters mit $\mathcal{L}^d = (\mathcal{B}^d)^*$ die σ -Algebra der $(\beta^d)^*$ -messbaren Teilmengen.

Definition I.45 (Lebesgue-Maß, d -dimensional). Wir nennen die Abbildung

$$\lambda^d := (\beta^d)^*|_{\mathcal{L}^d} : \mathcal{L}^d \longrightarrow [0, \infty]$$

das *d -dimensionale Lebesgue-Maß*.

I.5.7. Approximation messbarer Teilmengen

Sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$. Im Folgenden wollen wir $\sigma(\mathcal{R})$ und $\mathcal{A}^*$ vergleichen.

Definition I.46 (Modifikation durch Nullmengen). Sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$. Seien $M, M' \subseteq X$. Wir nennen M eine *Modifikation* von M' durch μ^* -Nullmengen g. d. w. $\mu^*(M \triangle M') = 0$. Aufgrund der Symmetrie ist dann auch M' eine Modifikation von M durch μ^* -Nullmengen. Wir sagen dann, dass M und M' *bis auf μ^* -Nullmengen übereinstimmen*.

Lemma I.49. Sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$. Seien weiter $M, M' \subseteq X$ mit $\mu^*(M \triangle M') = 0$. Dann gilt:

- (i) $\mu^*(M) = \mu^*(M')$
- (ii) $M \in \mathcal{A}^* \iff M' \in \mathcal{A}^*$

Beweis. (i): Es gilt $M \cup M' = (M \cap M') \cup (M \triangle M')$. Damit folgt

$$\mu^*(M \cup M') \leq \mu^*(M \cap M') + \underbrace{\mu^*(M \triangle M')}_{=0} = \mu^*(M \cap M') \leq \mu^*(M \cup M')$$

Wegen $\mu^*(M \cap M') \leq \mu^*(M), \mu^*(M') \leq \mu^*(M \cup M')$ ist dann also

$$\mu^*(M \cap M') = \mu^*(M) = \mu^*(M') = \mu^*(M \cup M')$$

(ii) Es gilt $M \triangle M' = \mathbb{C}M \triangle \mathbb{C}M'$. Für $S \subseteq X$ gilt dann

$$(S \cap M) \triangle (S \cap M') = S \cap (M \triangle M') \subseteq M \triangle M'$$

Daraus folgt $\mu^*((S \cap M) \Delta (S \cap M')) = 0$. Analog folgt dies auch für das Komplement, d. h. $\mu^*((S \cap \mathcal{C}M) \Delta (S \cap \mathcal{C}M')) = 0$. Ist $M \in \mathcal{A}^*$, so ist dann

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \cap \mathcal{C}M) = \mu^*(S \cap M') + \mu^*(S \cap \mathcal{C}M')$$

Somit ist $M' \in \mathcal{A}^*$. Da die Bezeichnungen beliebig waren, gilt auch die umgekehrte Implikation, insgesamt also die Äquivalenz $M \in \mathcal{A}^* \iff M' \in \mathcal{A}^*$. $\square$

18. November 2019

Sei wieder μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$. Wir wollen jetzt (in Anlehnung an die Archimedes-Kompressionsmethode) das Volumen beliebiger Teilmengen von innen bzw. außen durch Teilmengen aus $\sigma(\mathcal{R})$ approximieren. Für messbare Teilmengen werden wir Approximationen bis auf μ^* -Nullmengen erhalten.

Satz I.50. Sei X eine Menge und μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei weiter $M \subseteq X$ mit $\mu^*(M) < \infty$. Dann existieren Teilmengen $I, A \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $I \subseteq M \subseteq A$, sodass $\mu^*(A) = \mu^*(M)$ und $\mu^*(A \setminus I) = \mu^*(A \setminus M)$. Diese sind eindeutig bis auf Modifikation durch μ^* -Nullmengen. Außerdem gilt $M \in \mathcal{A}^* \iff \mu^*(A \setminus I) = 0$.

Beweis. Sei $M \subseteq X$ mit $\mu^*(M) < \infty$. Die Definition des äußeren Maßes liefert uns eine abzählbare Überdeckung $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ von M , deren Gesamtvolumen $\mu^*(M)$ beliebig gut approximiert. Wir finden also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A_\varepsilon \in \sigma(\mathcal{R})$, das eine abzählbare Vereinigung von Teilmengen aus $\mathcal{R}$ ist, sodass $M \subseteq A_\varepsilon$ und $\mu^*(A_\varepsilon) < \mu^*(M) + \varepsilon$. Wir wählen für die äußere Approximation $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}} \in \sigma(\mathcal{R})$. Es gilt sicher $M \subseteq A$ und A erfüllt $\mu^*(A) = \mu^*(M)$.

Die innere Approximation werden wir durch äußere Approximation von $A \setminus M$ vornehmen. Es gilt $\mu^*(A \setminus M) \leq \mu^*(A) < \infty$. Sei nun $B \in \sigma(\mathcal{R})$ so, dass $A \setminus M \subseteq B$ und $\mu^*(B) = \mu^*(A \setminus M)$. Wir wählen dann für die innere Approximation $I := A \setminus B \subseteq M$. Dann ist nämlich $A \setminus M \subseteq A \setminus I \subseteq B$ und es gilt $\mu^*(A \setminus I) = \mu^*(A \setminus M)$.

Um die Eindeutigkeit modulo Modifikation durch μ^* -Nullmengen zu zeigen, sei $M \subseteq A' \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu^*(A') = \mu^*(M)$. Es gilt $M \subseteq A \cap A'$ und

$$\mu^*(A \cap A') = \mu^*(M) = \mu^*(A) = \mu^*(A')$$

Somit sind A, A' und $A \cap A'$ μ^* -messbar und haben endliche μ^* -Volumina. Es gilt $\mu^*(A \Delta A') = \mu^*(A) + \mu^*(A') - 2\mu^*(A \cap A') = 0$. Somit sind äußere Approximatio-

nen eindeutig modulo Modifikation durch μ^* -Nullmengen. Die Eindeutigkeit der inneren Approximation folgt analog.

Für die letzte Aussage sei $M \in \mathcal{A}^*$. Dann ist $\mu^*(A \setminus I) = \mu^*(A \setminus M) \stackrel{(*)}{=} \mu^*(A) - \mu^*(M) = 0$, wobei bei $(*)$ verwendet wurde, dass $M \in \mathcal{A}^*$ endliches Volumen hat. Umgekehrt sei nun $\mu^*(A \setminus I) = 0$. Dann stimmen I, M und A bis auf μ^* -Nullmengen überein. Da $I, A \in \mathcal{A}^*$ muss also auch $M \in \mathcal{A}^*$. Insgesamt folgt die Äquivalenz der Aussagen. $\square$

Bemerkung. Die Aussage von Satz I.50 gilt allgemeiner für Teilmengen $M \subseteq X$, die abzählbare Vereinigungen von Teilmengen mit endlichem μ^* -Volumen sind. Sei dazu $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}(X)$, sodass $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ und $\mu^*(M_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass die M_n paarweise disjunkt sind. Satz I.50 liefert für $n \in \mathbb{N}$ Approximationen $I_n, A_n \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $I_n \subseteq M_n \subseteq A_n$ und $\mu^*(A_n \setminus I_n) = 0$. Vereinigen wir diese alle auf, so erhalten wir eine Approximation von M durch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \subseteq M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, denn es gilt

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(A_n \setminus \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m \right) \right)}_{\subseteq A_n \setminus I_n} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus I_n)$$

und somit $\mu^*\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right)\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus I_n)\right)$.

Für die Struktur messbarer Teilmengen folgt:

Korollar I.51. Sei μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}(X)$.

- (i) Für jede μ^* -Nullmenge M gibt es eine μ^* -Nullmenge $B \in \sigma(\mathcal{R})$, sodass $M \subseteq B$.
- (ii) Sei $M \in \mathcal{A}^*$. Gibt es eine abzählbare Überdeckung $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}(X)$ von M , sodass $\mu^*(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so existiert eine Menge $B \in \sigma(\mathcal{R})$ und eine μ^* -Nullmenge $N \subseteq X$, sodass $M = B \cup N$.

Korollar I.52. Sei μ ein σ -endliches Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}(X)$. Jede μ^* -messbare Teilmenge stimmt bis auf Modifikation durch eine μ^* -Nullmenge mit einer Menge in $\sigma(\mathcal{R})$ überein. D. h. für jede Menge $M \in \mathcal{A}^*$ existiert eine Menge $B \in \sigma(\mathcal{R})$ und eine Menge $N \subseteq X$ mit $\mu^*(N) = 0$, sodass $M = B \cup N$.

Im Folgenden betrachten wir nun speziell Lebesgue-messbare Teilmengen von $\mathbb{R}^d$, d. h. die, die bezüglich des äußeren Maßes $(\lambda_{\mathcal{F}^d}^d)^* = (\beta^d)^* = (\lambda^d)^*$ messbar sind.

Wir interpretieren Korollar I.52 so, dass die Kompliziertheit messbarer Teilmengen im Vergleich zu Teilmengen aus $\sigma(\mathcal{R})$ durch Modifikation mit Nullmengen entsteht. Diese Nullmengen sind oft vernachlässigbar. Das letzte Korollar liefert außerdem einen Vergleich von Borel- und Lebesgue-Messbarkeit für Teilmengen des $\mathbb{R}^d$.

Korollar I.53. Jede Lebesgue-messbare Teilmenge stimmt bis auf Modifikation durch eine Lebesgue-Nullmenge mit einer Borel-messbaren Teilmenge, d. h. einer Borel-Menge, überein. D. h. für jede Menge $M \in \mathcal{L}^d$ existiert eine Menge $B \in \mathcal{B}^d$ und eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\lambda^d(N) = 0$, sodass $M = B \cup N$.

Um eine bessere geometrische Vorstellung von messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ zu bekommen, vergleichen wir jetzt die messbare und die topologische Struktur auf $\mathbb{R}^d$, d. h. die σ -Algebra $\mathcal{B}^d$ mit einem geometrisch natürlichen Erzeuger, nämlich der Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}$.

Definition I.47 (G_δ -Menge; F_σ -Menge). Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $M \subseteq X$. Wir nennen M eine

- (i) G_δ -Menge, g. d. w. M ein abzählbarer Durchschnitt $\mathcal{T}$ -offener Mengen ist.
- (ii) F_σ -Menge, g. d. w. M eine abzählbare Vereinigung $\mathcal{T}$ -abgeschlossener Mengen ist.

Bemerkung. G_δ - und F_σ -Mengen sind Borel-messbar und *Verwandte ersten Grades* mit der Topologie $\mathcal{T}$ bezüglich der Borel-Hierarchie.

Im Folgenden werden wir Lebesgue-messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ topologisch approximieren. Sei dazu $M \in \mathcal{L}^d \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Satz I.54. Sei $M \in \mathcal{L}^d$. Dann existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge A_ε und eine offene Menge $\mathcal{O}_\varepsilon$, sodass $A_\varepsilon \subseteq M \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon$ und $\lambda^d(\mathcal{O}_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$. Falls $\lambda^d(M) < \infty$, so kann A_ε kompakt gewählt werden.

Beweis. Sei $M \in \mathcal{L}^d$ und $\varepsilon > 0$.

Fall 1: Angenommen M ist beschränkt. Dann finden wir einen offenen Ball $B \subseteq \mathcal{P}(X)$, sodass $M \subseteq B$. Sicherlich hat M endliches λ^d -Volumen, denn es ist $\lambda^d(M) \leq \lambda^d(B) < \infty$. Weiter finden wir für jedes $\tilde{\varepsilon} > 0$ eine Überdeckung $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{F}^d)^\mathbb{N}$ von M , sodass $\lambda^d(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) < \lambda^d(M) + \tilde{\varepsilon}$. Für die äußere Approximation von M wählen wir ein $\delta(\varepsilon) > 0$ und die Menge $\mathcal{O}_\varepsilon := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{\delta(\varepsilon)}(A_n)$, die Vereinigung der offenen $\delta(\varepsilon)$ -Neighbourhood-Umgebungen der A_n , sodass gilt, dass $M \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon \subseteq B$ und $\lambda^d(\mathcal{O}_\varepsilon) < \lambda^d(M) + \varepsilon$. $\mathcal{O}_\varepsilon$ ist als beliebige Vereinigung offener Mengen wieder offen.

Analog wählen wir für die innere Approximation die durch äußere Approximation von $\overline{B} \setminus M$ hervorgehende offene Menge $\mathcal{O}'_\varepsilon$, für die gilt, dass $\overline{B} \setminus M \subseteq \mathcal{O}'_\varepsilon$ und $\lambda^d(\mathcal{O}'_\varepsilon) < \lambda^d(\overline{B} \setminus M) + \varepsilon$. Wegen $\lambda^d(\overline{B} \setminus M) = \lambda^d(\overline{B}) - \lambda^d(M)$ und $\overline{B} \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon \cup \mathcal{O}'_\varepsilon$ folgt

$$\lambda^d(\mathcal{O}_\varepsilon) + \lambda^d(\mathcal{O}'_\varepsilon) < \lambda^d(M) + \varepsilon + \lambda^d(\overline{B} \setminus M) + \varepsilon = \lambda^d(M) + \lambda^d(\overline{B}) - \lambda^d(M) + 2\varepsilon = \lambda^d(\overline{B}) + 2\varepsilon$$

Wir definieren als nächstes die Menge $K_\varepsilon := \overline{B} \setminus \mathcal{O}'_\varepsilon$. K_ε ist eine innere Approximation von M . Dabei ist $K_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen, also kompakt nach dem Satz von Heine-Borel. Es gilt

$$\lambda^d(K_\varepsilon) = \lambda^d(\overline{B}) - \lambda^d(\mathcal{O}'_\varepsilon) > \lambda^d(\mathcal{O}_\varepsilon) - 2\varepsilon$$

Also ist $K_\varepsilon \subseteq M \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon$, K_ε kompakt, $\mathcal{O}_\varepsilon$ offen und es gilt $\lambda^d(\mathcal{O}_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < 2\varepsilon$.

Fall 2: Sei nun $M \in \mathcal{L}^d$ beliebig. Dann gibt es eine lokal endliche Familie $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^d)^\mathbb{N}$ von beschränkten Mengen, sodass $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Lokal endlich bedeutet hier, dass jeder Ball in $\mathbb{R}^d$ nur endlich viele M_n schneidet. Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ eine Familie positiver Zahlen, sodass $\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_n < \varepsilon$. Der erste Schritt liefert uns für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Approximation $K_{\varepsilon_n}^{(n)} \subseteq M_n \subseteq \mathcal{O}_{\varepsilon_n}^{(n)}$ von M_n durch eine kompakte Menge $K_{\varepsilon_n}^{(n)}$ und eine offene Menge $\mathcal{O}_{\varepsilon_n}^{(n)}$, sodass $\lambda^n(\mathcal{O}_{\varepsilon_n}^{(n)} \setminus K_{\varepsilon_n}^{(n)}) < \varepsilon_n$. Durch Vereinigung erhalten wir weiter eine Approximation $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{\varepsilon_n}^{(n)} \subseteq M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\varepsilon_n}^{(n)}$. Dabei ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{\varepsilon_n}^{(n)}$ aufgrund der Lokalendlichkeit von (M_n) (und somit auch von $(K_{\varepsilon_n}^{(n)})$) abgeschlossen und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\varepsilon_n}^{(n)}$ als Vereinigung offener Mengen offen. Es gilt

$$\lambda^d \left(\underbrace{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\varepsilon_n}^{(n)} \right) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{\varepsilon_n}^{(n)} \right)}_{\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{O}_{\varepsilon_n}^{(n)} \setminus K_{\varepsilon_n}^{(n)})} \right) \leq \lambda^d \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{O}_{\varepsilon_n}^{(n)} \setminus K_{\varepsilon_n}^{(n)}) \right) < \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_n < \varepsilon$$

□

Daraus folgt dann unmittelbar der

Satz I.55. Sei $M \in \mathcal{L}^d$. Dann existiert eine F_σ -Menge $F \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine G_δ -Menge $G \subseteq \mathbb{R}^d$, sodass $F \subseteq M \subseteq G$ und $\lambda^d(G \setminus F) = 0$.

Korollar I.56. Sei $M \in \mathcal{L}^d$. Dann gilt

$$\sup \left\{ \lambda^d(K) \mid K \subseteq M \text{ kompakt} \right\} = \lambda^d(M) = \inf \left\{ \lambda^d(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \supseteq M \text{ offen} \right\}$$

I.5.8. Vervollständigung eines Maßes

Definition I.48 (Nullmenge). Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra und ν ein Maß auf $\mathcal{A}$. Eine Teilmenge $N \in \mathcal{A}$ heißt ν -Nullmenge g. d. w. $\nu(N) = 0$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{N} := \{ M \in \mathcal{P}(X) \mid \exists N \in \mathcal{P}(X) : M \subseteq N \wedge \nu(N) = 0 \} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Familie aller Teilmengen von ν -Nullmengen.

Bemerkung. Es ist aufgrund der σ -(Sub-)Additivität von Maßen klar, dass abzählbare Vereinigungen von ν -Nullmengen selbst wieder ν -Nullmengen sind.

Lemma I.57. Sei N eine ν -Nullmenge und $M \in \mathcal{A}$ mit $M \subseteq N$. Dann ist M ebenfalls eine ν -Nullmenge.

Definition I.49 (Vollständigkeit, Maß). Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra und ν ein Maß auf $\mathcal{A}$. ν heißt *vollständig* g. d. w. alle Teilmengen von ν -Nullmengen zu $\mathcal{A}$ gehören, also selbst ν -Nullmengen sind.

Beispiel. Die Einschränkung $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ eines äußeren Maßes auf die σ -Algebra der μ^* -messbaren Teilmengen ist vollständig.

Proposition I.58. Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra und ν ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann ist

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{ A \cup N \mid A \in \mathcal{A} \wedge N \in \mathcal{N} \} = \{ \tilde{A} \subseteq X \mid \exists A \in \mathcal{A} : \tilde{A} \Delta A \in \mathcal{N} \}$$

eine σ -Algebra und ν lässt sich in eindeutiger Weise zu einem Maß $\tilde{\nu}$ auf $\tilde{\mathcal{A}}$ fortsetzen, d. h. für $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ und $A \in \mathcal{A}$ mit $\tilde{A} \Delta A \in \mathcal{N}$ gilt, dass $\tilde{\nu}(\tilde{A}) = \nu(A)$.

Beweis. Gleichheit der Definitionen von $\tilde{\mathcal{A}}$: Seien $A \in \mathcal{A}$, $\tilde{A} \subseteq X$ und N eine ν -Nullmenge, sodass $\tilde{A} \Delta A \subseteq N$. Wegen $A, N \in \mathcal{A}$ ist $A \setminus N \in \mathcal{A}$ und es gilt $A \setminus N \subseteq \tilde{A} \subseteq A \cup N$. Es folgt $\tilde{A} \subseteq (A \setminus N) \cup N'$, sodass

$$\tilde{A} \subseteq \underbrace{(A \setminus N)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{N'}_{\in \mathcal{N}}$$

Dabei gilt $N' \in \mathcal{N}$ wegen $N' \subseteq N$. Daraus folgt, dass beide Definitionen von $\tilde{\mathcal{A}}$ übereinstimmen.

Die erste Definition von $\tilde{\mathcal{A}}$ zeigt, dass $\tilde{\mathcal{A}}$ σ - $\cup$ -stabil ist. Die zweite Definition zeigt, wegen $\mathcal{C}\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{C}A = \tilde{\mathcal{A}}\Delta A$, dass $\tilde{\mathcal{A}}$ $\mathcal{C}$ -stabil ist. Also ist $\tilde{\mathcal{A}}$ eine σ -Algebra.

Ein ν auf $\tilde{\mathcal{A}}$ fortsetzendes Maß $\tilde{\nu}$ erfüllt für $A \in \mathcal{A}$, $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ mit $\tilde{A}\Delta A \in \mathcal{N}$ die Bedingung

$$\tilde{\nu}(\tilde{A}) = \nu(A) \quad (\text{I.F})$$

Wir definieren nun die Fortsetzung $\tilde{\nu}$ von ν genau durch Bedingung I.F

Zunächst prüfen wir die *Wohldefiniertheit*: Sei $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ sowie $A, A', N, N' \in \mathcal{A}$, N, N' ν -Nullmengen, sodass $\tilde{A}\Delta A \subseteq N$ und $\tilde{A}\Delta A' \subseteq N'$. Dann gilt

$$A\Delta A' \subseteq (A\Delta \tilde{A}) \cup (A'\Delta \tilde{A})$$

Es folgt, dass $A\Delta A' \in \mathcal{A}$ eine ν -Nullmenge ist. Damit muss auch $\nu(A) = \nu(A')$ gelten.

I.F liefert die Wohldefiniertheit.

Schließlich zeigen wir noch, dass $\tilde{\nu}$ ein Maß ist. Da $\tilde{\nu}(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$ bleibt die σ -Additivität von $\tilde{\nu}$ zu zeigen. Seien dazu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ und $(N_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ Folgen, sodass die Familie $(A_n \cup N_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt ist. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\nu}(A_n \cup N_n) \stackrel{(i)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \stackrel{(ii)}{=} \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \tilde{\nu}\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n\right)\right) = \tilde{\nu}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup N_n)\right)$$

$\tilde{\nu}$ ist also σ -additiv, also ein Maß. Dabei wurde in (i) verwendet, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ N_n eine $\tilde{\nu}$ -Nullmenge ist. In (ii), wurde die paarweise Disjunktheit von (A_n) und die σ -Additivität von ν benutzt. $\square$

Definition I.50 (Vervollständigung, Maß). Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra und ν ein Maß auf $\mathcal{A}$. Wir nennen die eindeutige Fortsetzung $\tilde{\nu}$ von ν auf $\tilde{\mathcal{A}} = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A} \wedge N \in \mathcal{N}\}$ aus Proposition I.58 die *Vervollständigung* des Maßes ν .

Korollar I.59. Sei X eine Menge, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring und μ ein σ -endliches Prämaß auf $\mathcal{R}$. Dann ist $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ die Vervollständigung von $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$.

Beweis. Folgt nun mit Korollar I.53 und der Definition der Vervollständigung eines Maßes. $\square$

Beispiel. Das Hauptbeispiel dazu ist die Charakterisierung von λ^d als die Vervollständigung von β^d .

I.5.9. Bildmaße

Definition I.51 (Maßraum; Unterraum eines Maßraumes). Ein *Maßraum* ist ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bestehend aus einer Menge X , einer σ -Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und einem Maß μ auf $\mathcal{A}$. Ein Maßraum ist also genau ein Messraum $(X, \mathcal{A})$ versehen mit einem Maß μ .

Sei $A \in \mathcal{A}$ sowie $\mathcal{A}|_A$ die Spur- σ -Algebra und $\mu|_A := \mu|_{\mathcal{A}|_A}$ die Einschränkung von μ auf die Spur- σ -Algebra. Wir nennen $(A, \mathcal{A}|_A, \mu|_A)$ einen *Unterraum* des Maßraumes $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Definition I.52 (Bildmaß). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathcal{B})$ ein Messraum und $f : X \rightarrow Y$ eine $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbare Abbildung. Dann ist das *Bildmaß* $f_*\mu$ auf $\mathcal{B}$ für $B \in \mathcal{B}$ gegeben durch

$$(f_*\mu)(B) := \mu(f^*(B)) = \mu(f^{-1}(B))$$

Bemerkung. Die Definition von Bildmaßen ist sinnvoll. Seien nämlich $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ Messräume und $f : X \rightarrow Y$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar, so gilt $f^*\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, da wir σ -Algebren durch messbare Abbildungen zurückziehen können.

Lemma I.60. $f_*\mu$ ist σ -additiv, also ein Maß.

Lemma I.61. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C})$ Messräume sowie $f : X \rightarrow Y$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar und $g : Y \rightarrow Z$ $\mathcal{B}$ - $\mathcal{C}$ -messbar. Dann ist $(g \circ f)_*\mu = g_*(f_*\mu)$.

Beweis. $g \circ f$ ist als Komposition messbarer Abbildungen wieder messbar (genauer $\mathcal{A}$ - $\mathcal{C}$ -messbar, Anm.). Das Bildmaß von $g \circ f$ ist also Wohldefiniert. Dann gilt für jedes $C \in \mathcal{C}$, dass

$$((g \circ f)_*\mu)(C) = \mu((g \circ f)^{-1}(C)) = \mu(f^{-1}(g^{-1}(C))) = (f_*\mu)(g^{-1}(C)) = (g_*(f_*\mu))(C)$$

Also gilt $(g \circ f)_*\mu = g_*(f_*\mu)$. □

Definition I.53 (maßerhaltende Abbildung; Homomorphismus von Maßräumen; Isomorphismus von Maßräumen). Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Eine $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -

messbare Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *maßerhaltend* g. d. w. $f_*\mu = \nu$ gilt. Wir nennen f dann einen *Homomorphismus* von Maßräumen.

Ist f maßerhaltend, d. h. ein Homomorphismus von Maßräumen, bijektiv und gilt $f^*\mathcal{B} = \mathcal{A}$, so nennen wir f einen *Isomorphismus* von Maßräumen.

Definition I.54 (Endomorphismus von Maßräumen; Automorphismus von Maßräumen). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \longrightarrow X$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}$ -messbar. Ist f maßerhaltend, d. h. ein Homomorphismus von Maßräumen, so nennen wir f einen *Endomorphismus* von Maßräumen. Ist f sogar ein Isomorphismus von Maßräumen, so nennen wir f einen *Automorphismus* von Maßräumen. Die Menge $\{ f : X \longrightarrow X \mid f \text{ ist ein Automorphismus} \}$ der Automorphismen bildet eine Gruppe.

Bemerkung.

- (i) Seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv. Dann ist auch $f^* : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ mit $M \mapsto f^{-1}(M)$ bijektiv mit Umkehrung $M \mapsto f(M) = ((f^{-1})^*M)$.
- (ii) Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv. f ist ein Homöomorphismus g. d. w. $f^*\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_X$. In diesem Fall gilt auch

$$f^*(\mathcal{B}(Y)) = f^*(\sigma(\mathcal{T}_Y)) = \sigma(f^*\mathcal{T}_Y) = \sigma(\mathcal{T}_X) = \mathcal{B}(X)$$

dann sind also f und f^{-1} $\mathcal{B}(X)$ - $\mathcal{B}(Y)$ - bzw. $\mathcal{B}(Y)$ - $\mathcal{B}(X)$ -messbar und somit ist $f : X \longrightarrow Y$ ein Isomorphismus von Messräumen.

I.5.10. Produktmaße

Im Folgenden sollen *endliche* Produkte von Maßen bzw. Maßräumen konstruiert werden.

Definition I.55 (Produktmaß; Produkt von Maßräumen). Sei $n \in \mathbb{N}$ und für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ein Maßraum. Wir definieren das *Produktmaß* $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ durch

$$\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n := (\mu_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mu_n)^*|_{\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n}$$

Wir nennen weiters $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n, \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$ das *Produkt der Maßräume* $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Bemerkung. $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ ist also die Fortsetzung des Prämaßes $\mu_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mu_n$ von dem Ring $\mathcal{A}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{A}_n$ auf die Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$. Dabei ist $\mathcal{A}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{A}_n$ der vom Halbring $\mathcal{A}_1 * \cdots * \mathcal{A}_n$ erzeugte Ring und $\mu_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mu_n$ die eindeutige Fortsetzung des Produktinhalts $\mu_1 * \cdots * \mu_n$ von $\mathcal{A}_1 * \cdots * \mathcal{A}_n$ auf $\mathcal{A}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{A}_n$.

Lemma I.62. Sei $n \in \mathbb{N}$ und für $i \in \{1, \dots, n\}$ $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ein Maßraum. Sei weiter $\pi \in S_n$ eine Permutation und $\tilde{\pi} : \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{\pi(n)}$ für alle $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ gegeben durch $\tilde{\pi}(M) := \left\{ (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \mid (x_1, \dots, x_n) \in M \right\}$ die Abbildung, die die Koordinaten gemäß π permutiert. Für alle $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ gilt dann

$$(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(M) = (\mu_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\pi(n)})(\tilde{\pi}(M))$$

Das Produkt von Maßräumen ist also in geeigneter Weise kommutativ.

Beweis. Sei $M \in \mathcal{A}_1 * \cdots * \mathcal{A}_n$. Wir finden also $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$, sodass $M = A_1 \times \cdots \times A_n$. Dann gilt also mit der Kommutativität der Multiplikation in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} (\mu_1 * \cdots * \mu_n)(M) &= \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n) = \mu_{\pi(1)}(A_{\pi(1)}) \cdots \mu_{\pi(n)}(A_{\pi(n)}) = \\ &= (\mu_{\pi(1)} * \cdots * \mu_{\pi(n)})(A_{\pi(1)} \times \cdots \times A_{\pi(n)}) = (\mu_{\pi(1)} * \cdots * \mu_{\pi(n)})(\tilde{\pi}(M)) \end{aligned}$$

Der Inhalt $\mu_{\pi(1)} * \cdots * \mu_{\pi(n)}$ lässt sich eindeutig fortsetzen zu dem Prämaß $\mu_{\pi(1)} \boxtimes \cdots \boxtimes \mu_{\pi(n)}$ auf $\mathcal{A}_{\pi(1)} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{A}_{\pi(n)}$. Dieses lässt sich fortsetzen zu dem Maß $\mu_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\pi(n)}$ auf $\mathcal{A}_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{\pi(n)}$. Die Vertauschbarkeit wird in jedem Schritt beibehalten, d. h. es gilt

$$(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(M) = (\mu_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\pi(n)})(\tilde{\pi}(M))$$

□

Lemma I.63. Sei $n \in \mathbb{N}$ und für $i \in \{1, \dots, n\}$ $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ein σ -endlicher Maßraum. Dann ist das Produkt $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$ ebenfalls σ -endlich.

Beweis. Sei für $i \in \{1, \dots, n\}$ $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ein σ -endlicher Maßraum, d. h. wir finden eine Familie $(A_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{A}_i)^{\mathbb{N}}$ messbarer Mengen mit $X_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k^{(i)}$, sodass $\mu_i(A_k^{(i)}) < \infty$. Dann ist $\mathbb{N}^n$ abzählbar,

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \bigcup_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \underbrace{(A_{k_1}^{(1)} \times \cdots \times A_{k_n}^{(n)})}_{\in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n}$$

und für alle $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ gilt, dass

$$(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)(A_{k_1}^{(1)} \times \dots \times A_{k_n}^{(n)}) = \underbrace{\mu_1(A_{k_1}^{(1)})}_{< \infty} \dots \underbrace{\mu_n(A_{k_n}^{(n)})}_{< \infty} < \infty$$

Also ist $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n, \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$ σ -endlich. $\square$

I.5.11. Charakterisierung des Lebesgue-Maßes

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass das Lebesgue-Maß eine *natürliche* Lösung des eingangs diskutierten postparadoxen Maßproblems [I.2](#) darstellt und dadurch charakterisiert wird. Dies wird die *Natürlichkeit* des Lebesgue-Maßes unterstreichen.

Definition I.56 (affine Transformation; affine Gruppe). Sei $d \in \mathbb{N}$. Wir nennen eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine *affine Transformation* g.d.w. sie für $x \in \mathbb{R}^d$ von der Form

$$\Phi(x) = \Phi_{A,v}(x) = Ax + v$$

für ein $v \in \mathbb{R}^d$ und eine lineare Abbildung $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ ist. Die Menge

$$\text{Aff}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \Phi \in (\mathbb{R}^d)^{(\mathbb{R}^d)} \mid \Phi \text{ ist eine affine Transformation} \right\}$$

bildet die sogenannte *affine Gruppe*.

Bemerkung. Affine Transformationen sind Homöomorphismen, genauer Automorphismen, von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \beta^d)$. Sie wahren die Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^d$, denn sie erhalten sowohl Geraden als auch Teilverhältnisse kollinearer Tripel. $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ ist eine Teilmenge der Menge der Homöomorphismen $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, die wiederum selbst eine Teilmenge der Menge der messbaren Automorphismen ist. Die Menge der Homöomorphismen sowie die Menge der Automorphismen sind *monströs*. $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ bildet sogar eine Lie-Gruppe.

Beispiel. Scherungen sind Beispiele für affine Transformationen. Hier werden lediglich einzelne Basisvektoren in Richtung der anderen Basisvektoren verändert.

Definition I.57 (Bewegung; Isometrie; Bewegungsgruppe; Isometriegruppe). Sei $d \in \mathbb{N}$. Wir nennen eine affine Transformation $\Phi_{A,v}$ mit $\Phi_{A,v}(x) = Ax + v$ für $v \in \mathbb{R}^d$, $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ eine *Bewegung* bzw. eine *Isometrie* g.d.w. $A \in O(d)$, d.h. orthogonal ist.

Wir bezeichnen mit

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \Phi \in (\mathbb{R}^d)^{(\mathbb{R}^d)} \mid \Phi \text{ ist eine Isometrie} \right\}$$

die sogenannte *Bewegungsgruppe* bzw. *Isometriegruppe*.

Bemerkung. Es gilt $\text{Iso}(\mathbb{R}^d) \subseteq \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$. Isomorphismen erhalten neben der Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^d$ zusätzlich die metrische Struktur, d. h. den euklidischen Abstand.

Definition I.58 (Translation; Translationsgruppe). Sei $d \in \mathbb{N}$. Wir nennen eine Isometrie $\Phi_{\text{id}_{\mathbb{R}^d}, v}$ mit $T_v(x) := \Phi_{\text{id}_{\mathbb{R}^d}, v}(x) = \text{id}_{\mathbb{R}^d}(x) + v = x + v$ für $v \in \mathbb{R}^d$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ eine *Translation*. Wir bezeichnen mit

$$\text{Transl}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \Phi \in (\mathbb{R}^d)^{(\mathbb{R}^d)} \mid \Phi \text{ ist eine Translation} \right\}$$

die sogenannte *Translationsgruppe*.

Bemerkung. Offensichtlich ist $\text{Transl}(\mathbb{R}^d) \subseteq \text{Iso}(\mathbb{R}^d) \subseteq \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$.

25. November 2019

Definition I.59. Wir definieren die Abbildung $\text{lin} : \text{Aff}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \text{GL}(d, \mathbb{R})$ mit der Abbildungsvorschrift $\Phi_{A,v} \mapsto A$ für affine Transformationen, also Abbildungen der Form $\Phi_{A,v} = Ax + v$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Wir definieren weiters die Einschränkung auf Isometrien $\text{rot} := \text{lin}|_{\text{Iso}(\mathbb{R}^d)} : \text{Iso}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow O(d)$.

Bemerkung. Es gilt $\ker \text{lin} = \text{Transl}(\mathbb{R}^d)$, d. h. $\text{Transl}(\mathbb{R}^d)$ ist ein Normalteiler von $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$, notiert $\text{Transl}(\mathbb{R}^d) \trianglelefteq \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$. Dies führt uns zur exakten Sequenz

$$\text{Transl}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\iota} \text{Aff}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\text{lin}} \text{GL}(d, \mathbb{R})$$

mit der Einbettungsabbildung ι , denn es gilt $\text{im } \iota = \ker \text{lin}$.

Die Einschränkung $\text{rot} = \text{lin}|_{\text{Iso}(\mathbb{R}^d)} : \text{Iso}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow O(d)$ ist dabei ebenfalls ein Epimorphismus und wir erhalten die exakte Sequenz

$$\text{Transl}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\iota} \text{Iso}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\text{rot}} O(d)$$

denn es gilt $\text{im } \iota = \ker \text{rot}$.

Im Folgenden untersuchen wir nun den Effekt von Homöomorphismen und dann spezieller von affinen Transformationen $\Phi_{A,v}$ auf das Lebesgue-Maß λ^d .

Lemma I.64 (Messbarkeit, Homöomorphismus). Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ein Homöomorphismus. Dann ist Φ Borel-messbar, jedoch nur Lebesgue-messbar g.d.w. Nullmengen von Φ und Φ^{-1} erhalten werden.

Lemma I.65 (Messbarkeit, affine Transformation). Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine affine Transformation. Φ ist $\mathcal{L}^d$ - $\mathcal{L}^d$ -messbar.

Beweis. Aus der Lipschitz-Stetigkeit von Φ und dem Skalierungsverhalten von λ^d unter $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ folgt $\Phi \mathcal{L}^d = \mathcal{L}^d$. $\square$

Lemma I.66 (Translationsinvarianz). Sei $d \in \mathbb{N}$. Dann sind die σ -Algebren $\mathcal{B}^d$ und $\mathcal{L}^d$, sowie β^d und λ^d translationsinvariant. Ebenso ist das äußere Maß $(\beta^d)^* = (\lambda^d)^*$ translationsinvariant.

Beweis. Sei $Q := [a, b) \in \mathcal{Q}^d$, d. h. es gilt für alle $i \in \{1, \dots, d\}$, dass $a_i < b_i$. Sei weiters $v \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $T_v^* Q = T_v^{-1}(Q) = T_{-v}(Q) = [a - v, b - v) \in \mathcal{Q}^d$. Weiters ist

$$(T_{v*} \lambda_{\mathcal{Q}^d}^d)(Q) = \lambda_{\mathcal{Q}^d}^d(T_v^*(Q)) = \prod_{k=1}^d ((b_k - v_k) - (a_k - v_k)) = \prod_{k=1}^d (b_k - a_k) = \lambda_{\mathcal{Q}^d}^d(Q)$$

Also ist $T_v^* \mathcal{Q}^d = \mathcal{Q}^d$ und $T_{v*} \lambda_{\mathcal{Q}^d}^d$.

Da Figuren endliche Vereinigungen von Quadern sind, folgt die Translationsinvarianz des von $\mathcal{Q}^d$ erzeugten Rings $\mathcal{F}^d$ sowie des Lebesgue-Prämaßes $\lambda_{\mathcal{F}^d}^d$, das den Inhalt $\lambda_{\mathcal{Q}^d}^d$ eindeutig fortsetzt. Es gilt also analog $T_v^* \mathcal{F}^d = \mathcal{F}^d$ und $T_{v*} \lambda_{\mathcal{F}^d}^d = \lambda_{\mathcal{F}^d}^d$. Es ist nämlich $T_{v*} \lambda_{\mathcal{F}^d}^d$ das Prämaß, das $T_{v*} \lambda_{\mathcal{Q}^d}^d = \lambda_{\mathcal{Q}^d}^d$ eindeutig fortsetzt.

Es folgt weiter, dass die von $\mathcal{Q}^d$ und $\mathcal{F}^d$ erzeugte σ -Algebra $\mathcal{B}^d$ translationsinvariant ist. Es gilt $T_v^* \mathcal{B}^d = T_v^* \sigma(\mathcal{F}^d) = \sigma(T_v^* \mathcal{F}^d) = \sigma(\mathcal{F}^d) = \mathcal{B}^d$. Ebenfalls ist das äußere Maß $(\lambda^d)^* = (\beta^d)^* = (\lambda_{\mathcal{F}^d}^d)^* = (\lambda_{\mathcal{Q}^d}^d)^*$ auf $\mathcal{O}(X)$ translationsinvariant, denn es gilt

$$T_{v*} (\lambda_{\mathcal{F}^d}^d)^* = \underbrace{(T_{v*} \lambda_{\mathcal{F}^d}^d)^*}_{= \lambda_{\mathcal{F}^d}^d} = (\lambda_{\mathcal{F}^d}^d)^*$$

da die Bildung des äußeren Maßes und die des Bildmaßes kommutativ sind.

Also ist die σ -Algebra $\mathcal{L}^d$ der $(\lambda_{\mathcal{F}^d}^d)^*$ -messbaren Teilmengen auch translationsinvariant. Somit ist auch die Einschränkung $\lambda^d = (\lambda_{\mathcal{F}^d}^d)^*|_{\mathcal{L}^d}$ translationsinvariant. Es gilt demnach $T_v^* \mathcal{L}^d = \mathcal{L}^d$ und $T_{v*} \lambda^d = \lambda^d$. Ebenfalls ist $\beta^d = \lambda^d|_{\mathcal{B}^d}$ translationsinvariant, denn es gilt

$$T_{v*} \beta^d = T_{v*} (\lambda^d|_{\mathcal{B}^d}) = (T_{v*} \lambda^d)|_{T_{v*} \mathcal{B}^d} = \lambda^d|_{\mathcal{B}^d} = \beta^d$$

□

Lemma [I.66](#) ist ein großer Schritt zur Lösung des postparadoxen Maßproblems [I.2](#). β^d ist nämlich translationsinvariant und normiert, d. h. es gelten die Gleichheiten $\beta^d([0, 1]^d) = \beta^d([0, 1)^d) = \lambda_{\mathcal{F}^d}^d([0, 1)^d) = 1$. Wir werden sehen, dass diese Eigenschaften das Lebesgue-Borel-Maß bereits charakterisieren.

Satz I.67. Sei $d \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}_0^+$ und μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}^d$, sodass $\mu([0, 1]^d) = c$. Dann ist $\mu = c \cdot \beta^d$, d. h. für alle $A \in \mathcal{B}^d$ gilt $\mu(A) = c \cdot \beta^d(A)$.

Beweis. Da μ per Annahme translationsinvariant ist, hängt das μ -Volumen von Quadern in $\mathcal{Q}^d$ nur von deren (euklidischer) Kantenlänge ab.

Wir betrachten im Folgenden die Menge $\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d := \{ [a, b) \in \mathcal{Q}^d \mid a, b \in \mathbb{Q}^d \}$. Für $\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d$ gilt $\sigma(\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d) = \sigma(\mathcal{Q}^d) = \mathcal{B}^d$. Im folgenden Beweis werden wir von $\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d$ die Eigenschaft benötigen, dass alle Quader $Q \in \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d$ aufgrund der rationalen Eckpunkte und der Achsenparallelität auch rationale Seitenlängen besitzen.

Seien $Q, Q' \in \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d$ zwei rationale Quader. Aufgrund der rationalen Seitenlängen existieren $n, n' \in \mathbb{N}$ und ein weiterer (i. A. größerer) Quader $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d$, sodass $\tilde{Q}$ disjunkt sowohl in n Translate von Q als auch in n' Translate von Q' zerlegt werden kann. Dann gilt also $n \cdot \mu(Q) = n' \cdot \mu(Q')$ und $n \cdot \beta^d(Q) = n' \cdot \beta^d(Q')$. Teilen wir die erste Gleichung durch die zweite erhalten wir $\frac{\mu(Q)}{\beta^d(Q)} = \frac{\mu(Q')}{\beta^d(Q')}$. Wir dürfen teilen, da $\beta^d(M) > 0$ für alle Quader $M \in \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d$ mit $M \neq \emptyset$. Der Ausdruck $\frac{\mu(Q)}{\beta^d(Q)}$ ist also unabhängig von Q . Es gilt

$$\frac{\mu(Q)}{\beta^d(Q)} = \frac{\mu([0, 1]^d)}{\beta^d([0, 1]^d)} = \frac{c}{1} = c$$

Also ist $\mu|_{\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d} = c \cdot \beta^d|_{\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d}$.

Wir können $\mu|_{\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d}$ und $c \cdot \beta^d|_{\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d}$ eindeutig von Inhalten auf dem Halbring $\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d$ zu Prämaßen auf dem von $\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d$ erzeugten Ring $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^d$ fortsetzen. Es gilt $\mu|_{\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^d} = c \cdot \beta^d|_{\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^d}$. Da sowohl $\mu|_{\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d}$ als auch $c \cdot \beta^d|_{\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d}$ σ -endlich sind können wir die Prämaße $\mu|_{\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d}$ und $c \cdot \beta^d|_{\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^d}$ eindeutig zu Maßen μ und $c \cdot \beta^d$ auf $\sigma(\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^d) = \mathcal{B}^d$ fortsetzen. Es gilt dann $\mu = c \cdot \beta^d$. □

Korollar I.68. β^d ist das eindeutig bestimmte translationsinvariante Maß auf $\mathcal{B}^d$ mit $\beta^d([0, 1)^d) = 1$.

Wir nutzen diese Charakterisierung nun, um die Bewegungsinvarianz von $\mathcal{B}^d$ einzusehen.

Lemma I.69. Sei $d \in \mathbb{N}$ und μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}^d$. Sei weiters $\Phi \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ eine affine Transformation. Dann ist $\Phi_*\mu$ translationsinvariant.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^d$ und $T_v \in \text{Transl}(\mathbb{R}^d)$ eine Translation. Dann gilt

$$T_{v*}\Phi_*\mu \stackrel{(i)}{=} \underbrace{(\Phi_*\Phi^{-1})_*}_{=\text{id}_{\mathbb{R}^d}} T_{v*}\Phi_*\mu \stackrel{(ii)}{=} \underbrace{\Phi_*(\Phi^{-1}*T_v*\Phi)}_{\in \text{Transl}(\mathbb{R}^d)}\mu \stackrel{(iii)}{=} \underbrace{\Phi_*T_w*}_{=\mu}\mu \stackrel{(iv)}{=} \Phi_*\mu$$

wobei bei (i) künstlich die Identitätsabbildung angefügt wurde und bei (ii) die Assoziativität von $*$ verwendet wurde. Bei (iii) benutzen wir, dass $\text{Transl}(\mathbb{R}^d) \trianglelefteq \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ und somit $\Psi^{-1}T_x\Psi \in \text{Transl}(\mathbb{R}^d)$ für alle $\Psi \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ und $T_x \in \text{Transl}(\mathbb{R}^d)$ mit $x \in \mathbb{R}^d$. Wir definieren dann $w \in \mathbb{R}^d$ und $T_w \in \text{Transl}(\mathbb{R}^d)$ so, dass $T_w := \Phi^{-1}T_v\Phi$. (iv) erhalten wir dann mit der Translationsinvarianz von μ . $\square$

Korollar I.70. Sei $d \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein Gruppenhomomorphismus $c : ((\text{Aff}(\mathbb{R}^d))^\times, \circ) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ mit der Eigenschaft, dass $\Phi_*\beta^d = c(\Phi) \cdot \beta^d$ für alle $\Phi \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$.

Bemerkung. Mit $(\text{Aff}(\mathbb{R}^d))^\times$ ist die Menge der invertierbaren Elemente, d.h. hier $\text{Aff}(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$, gemeint.

Beweis. Lemma I.69 und Satz I.67 liefern eine Abbildung $\tilde{c} : \text{Aff}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, also insbesondere eine Abbildung $c : (\text{Aff}(\mathbb{R}^d))^\times \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Um zu zeigen, dass c ein Homomorphismus ist, seien $\Phi, \Psi \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c(\Psi \circ \Phi) \cdot \beta^d &= (\Psi \circ \Phi)_*\beta^d = (\Psi_*\Phi)_*\beta^d = \\ &= \Psi_*(\Phi_*\beta^d) = c(\Phi) \cdot (\Psi_*\beta^d) = c(\Psi) \cdot c(\Phi) \cdot \beta^d \end{aligned}$$

Also ist $c(\Psi \circ \Phi) = c(\Psi) \cdot c(\Phi)$, c demnach ein Homomorphismus. $\square$

28. November 2019

Bemerkung. Die Translationsinvarianz von β^d entspricht der Tatsache, dass für alle $v \in \mathbb{R}^d$ $c(T_v) = 1$ ist, also $c|_{\text{Transl}(\mathbb{R}^d)} \equiv 1$ gilt. Daraus folgt also, dass c bereits durch seine Werte auf linearen Transformationen, d. h. durch $c|_{\text{GL}(d, \mathbb{R})}$, festgelegt ist. Es gilt also für alle $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^d$, dass $c(\Phi_{A,v}) = c(A)$ bzw. $(\Phi_{A,v})_*\beta^d = c(A)\beta^d$.

Lemma I.71. $c|_{\text{Iso}(\mathbb{R}^d)} \equiv 1$, d. h. für alle $\Phi \in \text{Iso}(\mathbb{R}^d)$ gilt $c(\Phi) = 1$. Bzw. ist äquivalent dazu $c|_{O(d)} \equiv 1$, da für alle $v \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass $c(T_v) = 1$.

Beweis. Die Behauptung folgt aufgrund der Rotationsinvarianz von $B_1(0)$. Ist nämlich $A \in O(d)$, so gilt

$$c(A) \cdot \beta^d(B_1(0)) = (A_*\beta^d)(B_1(0)) = \beta^d(A^*B_1(0)) = \beta^d(A^{-1}(B_1(0))) = \beta^d(B_1(0))$$

Aus $0 < \beta^d(B_1(0)) < \infty$ folgt somit $c(A) = 1$. □

Satz I.72 (Bewegungsinvarianz). Die σ -Algebren $\mathcal{B}^d$ und $\mathcal{L}^d$ sowie die Maße β^d und λ^d sind invariant unter Bewegungen des $\mathbb{R}^d$, ebenso $(\beta^d)^* = (\lambda^d)^*$.

Beweis. $\mathcal{B}^d$ ist invariant unter allen Homöomorphismen des $\mathbb{R}^d$, also insbesondere unter Bewegungen. Die Invarianz von β^d folgt aus Lemma I.71. Daraus folgt weiter die Invarianz des assoziierten äußeren Maßes $(\beta^d)^*$ und seiner Nullmengen, also auch die Invarianz von $\mathcal{L}^d$ (als Vervollständigung von $\mathcal{B}^d$) und λ^d (als Einschränkung von $(\beta^d)^*$). □

Bemerkung. λ^d ist also eine ausreichend befriedigende Lösung des Maßproblems I.2 auf $\mathbb{R}^d$.

Bemerkung. Es gibt bewegungsinvariante Fortsetzungen von λ^d auf echt größere σ -Algebren (Szpilrajn, 1935). Es gibt jedoch keine maximale Fortsetzung (Ciesielski-Pelc, 1985).

Lemma I.73. $\mathcal{L}^d$ ist invariant unter affinen Transformationen. Insbesondere hat dann λ^d dasselbe Transformationsverhalten wie β^d , d. h. es gilt für alle $\Phi \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$, dass $\Phi_*\lambda^d = c(\Phi) \cdot \lambda^d$.

Beweis. $\mathcal{L}^d$ unterscheidet sich von $\mathcal{B}^d$ nur durch Nullmengen. Da affine Transformationen $(\beta^d)^*$ lediglich skalieren, bleiben Nullmengen Nullmengen. Es gilt nämlich für

$\Phi \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ und $N \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $(\beta^d)^*(N) = 0$, dass

$$\Phi_*(\beta^d)^*(N) = c(\Phi) \cdot \underbrace{(\beta^d)^*(N)}_{=0} = 0$$

□

Das folgende Lemma benötigen wir, um später den gesamten Homomorphismus c zu bestimmen.

Lemma I.74. Seien $d \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $D \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix der Form

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $(e_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$. D hat also gerade die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. Es gilt $c(D) = |\det D^{-1}| = |\det D|^{-1}$.

Beweis. Sei $Q = (a, b) \in \mathcal{Q}_{\text{offen}}^d$, d. h. es gilt $a_i < b_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$. Es gilt dann $D^*Q = D^{-1}(Q) = (\tilde{a}, \tilde{b})$, wobei $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}^d$ für $i \in \{1, \dots, d\}$ definiert sind als

$$\tilde{a}_i := \begin{cases} \lambda_i^{-1} \cdot a_i & , \text{ falls } \lambda_i^{-1} > 0 \\ \lambda_i^{-1} \cdot b_i & , \text{ falls } \lambda_i^{-1} < 0 \end{cases} \quad \tilde{b}_i := \begin{cases} \lambda_i^{-1} \cdot b_i & , \text{ falls } \lambda_i^{-1} > 0 \\ \lambda_i^{-1} \cdot a_i & , \text{ falls } \lambda_i^{-1} < 0 \end{cases}$$

Dies gilt, da die Diagonalmatrix D bzw. D^{-1} eine Skalierung der Standardbasisvektoren bewirkt, d. h. $De_i = \lambda_i e_i$ bzw. $D^{-1}e_i = \lambda_i^{-1} e_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} (D_*\beta^d)(Q) &= \beta^d(D^*Q) = \beta^d((\tilde{a}, \tilde{b})) = \prod_{i=1}^d |\tilde{a}_i - \tilde{b}_i| = \\ &= \prod_{i=1}^d |\lambda_i^{-1} \cdot (b_i - a_i)| = \prod_{i=1}^d |\lambda_i^{-1} \cdot \beta^d((a, b))| = \left| \prod_{i=1}^d \lambda_i^{-1} \right| \cdot \beta^d(Q) = |\det D^{-1}| \cdot \beta^d(Q) \end{aligned}$$

Also ist $c(D) = |\det D^{-1}| = |\det D|^{-1}$. □

Satz I.75 (KAK-Zerlegung). Sei $d \in \mathbb{N}$ und $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ eine darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis $(e_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$. Es existiert eine *KAK-Zerlegung* von A , d. h. es existieren orthogonale Matrizen $R, R' \in O(d)$ und eine Diagonalmatrix $D \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$, sodass

$A = RDR'$. „KAK“ bezieht sich dabei auf die Zerlegung in zwei kompakte (hier: orthogonale) Matrizen und eine abelsche (hier: diagonale) Matrix.

Beweis. Die Behauptung ist eine Konsequenz der Tatsache, dass zu je zwei Skalarprodukten auf $\mathbb{R}^d$ eine gemeinsame Orthogonalbasis existiert.

Sei $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$. Im Folgenden betrachten wir das Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sowie dessen Bild $A_* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle A^{-1} \cdot, A^{-1} \cdot \rangle$. Es existiert dann also eine Basis $(v_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ von $\mathbb{R}^d$, die bezüglich beider Skalarprodukte orthogonal ist. Sei $(v_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ o. B. d. A. normiert, d. h. eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dann finden wir eine Matrix $R \in O(d)$, sodass $v_i = Re_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$. Dann ist also $(e_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ eine Orthogonalbasis bezüglich $R^{-1} A_* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle A^{-1} R \cdot, A^{-1} R \cdot \rangle$. Durch geeignete Skalierung der Basis $(e_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ können wir zu einer Orthonormalbasis übergehen. Mit anderen Worten finden wir eine Diagonalmatrix $D \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$, sodass $(De_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ bezüglich des Skalarprodukts $R^{-1} A_* \langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Orthonormalbasis ist.

Also ist dann $(e_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarprodukts $D^{-1} R^{-1} A_* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle A^{-1} RD \cdot, A^{-1} RD \cdot \rangle$. Es gilt also $D^{-1} R^{-1} A_* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Setzen wir $R' := D^{-1} R^{-1} A \in O(d)$, so gilt dann

$$A = RDD^{-1}R^{-1}A = RDR'$$

also die Behauptung. □

Korollar I.76. Es gilt $c|_{\text{GL}(d, \mathbb{R})} = |\det \cdot|^{-1} = |\det^{-1} \cdot|$.

Beweis. Es gilt $c|_{O(d)} = \det^{-1}$ und $c|_{\mathcal{D}} = \det^{-1}$, wobei wir hier mit $\mathcal{D}$ die Menge $\mathcal{D} := \{A \in \text{GL}(d, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist Diagonalmatrix}\}$ der Diagonalmatrizen bezeichnen. Sei nun $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$. Dann finden wir nach Satz I.75 Matrizen $R, R' \in O(d)$ und eine Diagonalmatrix $D \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$, sodass $A = RDR'$. Dann ist also

$$\begin{aligned} c(A) &= c(RDR') = c(R) \cdot c(D) \cdot c(R') = |\det R|^{-1} \cdot |\det D|^{-1} \cdot |\det R'|^{-1} \\ &= |(\det R) \cdot (\det D) \cdot (\det R')|^{-1} = |\det(RDR')|^{-1} = |\det A|^{-1} \end{aligned}$$

□

Korollar I.77. Ist $\Phi_{A,v} \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$, d. h. $\Phi_{A,v} = T_v \circ A$ für $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^d$, dann gilt $c(\Phi_{A,v}) = |\det A|^{-1} = |\det A^{-1}|$.

Satz I.78 (Skalierung, Lebesgue-Maß). $\mathcal{B}^d$ und $\mathcal{L}^d$ sind invariant unter affinen Transformationen des $\mathbb{R}^d$. Weiters gilt für $\Phi_{A,v} \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$, d.h. $\Phi_{A,v} = T_v \circ A$ für $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^d$, dass $\Phi_{A,v*}\lambda^d = |\det A^{-1}| \cdot \lambda^d$ bzw. $\Phi_{A,v*}(\lambda^d)^* = |\det A^{-1}| \cdot (\lambda^d)^*$.

Bemerkung. Eine affine Transformation $\Phi_{A,v} \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ bewirkt also eine Volumenverzerrung um den Faktor $|\det A|$. Ist nämlich $M \in \mathcal{L}^d$ und $M' := \Phi_{A,v}(M)$, so gilt

$$|\det A^{-1}| \cdot \lambda^d(M') = (\Phi_{A,v*}\lambda^d)(M') = \lambda^d(\Phi_{A,v}^*M') = \lambda^d(\Phi_{A,v}^{-1}(M')) = \lambda^d(M)$$

also $|\det A^{-1}| \cdot \lambda^d(M') = \lambda^d(M)$ bzw. $\lambda^d(M') = |\det A| \cdot \lambda^d(M)$.

I.5.12. Existenz nicht-Lebesgue-messbarer Teilmengen

Im Folgenden beweisen wir, nach Solovay (1970), die Existenz nicht-Lebesgue-messbarer Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ mithilfe des Auswahlaxioms. Wir konstruieren dazu analog wie im Beweis des Satzes [I.2](#) von Vitali ein abzählbares Repräsentantensystem.

Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{M} := \mathbb{R}^d / \mathbb{Q}^d = \{x + \mathbb{Q}^d \mid x \in \mathbb{R}^d\}$. $\mathcal{M}$ ist eine Partition von $\mathbb{R}^d$ in überabzählbar viele abzählbare Mengen. Mithilfe des Auswahlaxioms erhalten wir ein Repräsentantensystem $M \subseteq \mathbb{R}^d$ von $\mathcal{M}$, d.h. M enthält genau aus jeder Nebenklasse $x + \mathbb{Q}^d$ für $x \in \mathbb{R}^d$ in $\mathcal{M}$ ein einziges Element. Äquivalent besitzt jedes $x \in \mathbb{R}^d$ eine eindeutige Zerlegung $x = q + m$ für $q \in \mathbb{Q}^d$ und $m \in M$. Für $q \in \mathbb{Q}^d$ ist also auch $q + M$ ein Repräsentantensystem von $\mathcal{M}$. Wir erhalten also eine weitere Partition $\tilde{\mathcal{M}} := \{q + M \mid q \in \mathbb{Q}^d\}$ von $\mathbb{R}^d$ in abzählbar viele überabzählbare Mengen.

Lemma I.79. Sei M , wie oben konstruiert, ein Repräsentantensystem von $\mathcal{M}$. Alle Lebesgue-messbaren Teilmengen von M sind Nullmengen. D.h. ist $N \subseteq M$ und $N \in \mathcal{L}^d$, so gilt $\lambda^d(N) = 0$.

Beweis. Sei $N \subseteq M$ und $N \in \mathcal{L}^d$.

Fall 1: Angenommen N ist beschränkt. Dann betrachten wir die disjunkte Vereinigung $A := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d \cap B_1(0)} (q + N)$. Sicherlich ist A wieder beschränkt, hat also $\lambda^d(A) < \infty$. Genauer gilt

$$\lambda^d(A) = \lambda^d\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d \cap B_1(0)} (q + N)\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d \cap B_1(0)} \lambda^d(q + N) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d \cap B_1(0)} \lambda^d(N) < \infty$$

Die einzige Möglichkeit, dass $\sum_{q \in \mathbb{Q}^d \cap B_1(0)} \lambda^d(N) < \infty$, ist $\lambda^d(N) = 0$.

Fall 2: Sei nun allgemein $N \subseteq M$ und $N \in \mathcal{L}^d$. Dann finden wir eine Familie $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^d)^{\mathbb{N}}$ mit $\lambda^d(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Es gilt $B_n \subseteq M$ und $B_n \in \mathcal{L}^d$, also $\lambda^d(B_n) = 0$ nach *Fall 1* für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\lambda^d(N) = \lambda^d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda^d(B_n)}_{=0} = 0$$

□

Korollar I.80. Sei M , wie oben konstruiert, ein Repräsentantensystem von $\mathcal{M}$. M ist nicht Lebesgue-messbar, d. h. $M \notin \mathcal{L}^d$.

Beweis. Da $\tilde{\mathcal{M}} = \{q + M \mid q \in \mathbb{Q}^d\}$ eine Partition von $\mathbb{R}^d$ ist, gilt insbesondere $\mathbb{R}^d = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (q + M)$. Wegen $\lambda^d(\mathbb{R}^d) > 0$ folgt dann

$$\begin{aligned} 0 < \lambda^d(\mathbb{R}^d) &= \lambda^d\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (q + M)\right) = (\lambda^d)^*\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (q + M)\right) \stackrel{(i)}{\leq} \\ &\stackrel{(i)}{\leq} \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} (\lambda^d)^*(q + M) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} (\lambda^d)^*(M) \end{aligned}$$

wobei bei (i) die σ -Subadditivität und bei (ii) die Translationsinvarianz des äußeren Maßes $(\lambda^d)^*$ verwendet wurden. Somit gilt auch $(\lambda^d)^*(M) > 0$.

Angenommen es wäre $M \in \mathcal{L}^d$. Dann ist $\lambda^d(M) = (\lambda^d)^*(M) > 0$. Da sicherlich $M \subseteq M$ gilt, folgt aus Lemma I.79 dass $\lambda^d(M) = 0$ im Widerspruch zu $\lambda^d(M) > 0$. Also ist $M \notin \mathcal{L}^d$. □

Bemerkung. Die Existenz nicht-Lebesgue-messbarer Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

02. Dezember 2019

Wir können aus der Existenz nicht-Lebesgue-messbarer Mengen in $\mathbb{R}^d$ eine lokalisierte Existenzaussage über beliebige messbare Teilmengen herleiten.

Satz I.81 (Existenz nicht-Lebesgue-messbarer Teilmengen). Sei $d \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{L}^d$ mit $\lambda^d(A) > 0$. Dann existiert eine Menge $N \subseteq A$ mit $N \notin \mathcal{L}^d$. Jede Lebesgue-messbare Menge mit positivem Maß enthält also eine nicht-Lebesgue-messbare Teilmenge.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}^d$ mit $\lambda^d(A) > 0$. Sei weiter wie oben $\mathcal{M} := \mathbb{R}^d / \mathbb{Q}^d$ und M ein Repräsentantensystem von $\mathcal{M}$ sowie $\tilde{\mathcal{M}} := \{q + M \mid q \in \mathbb{Q}^d\}$ eine Partition von $\mathbb{R}^d$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 < \lambda^d(A) &= (\lambda^d)^*(A) = (\lambda^d)^*\left(A \cap \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (q + M)\right)\right) = \\ &= (\lambda^d)^*\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (A \cap (q + M))\right) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} (\lambda^d)^*(A \cap (q + M)) \end{aligned}$$

Wir finden somit sicherlich ein $q_0 \in \mathbb{Q}^d$, sodass $(\lambda^d)^*(A \cap (q_0 + M)) > 0$.

Angenommen es gilt $A \cap (q_0 + M) \in \mathcal{L}^d$. Dann ist auch

$$0 < (\lambda^d)^*(A \cap (q_0 + M)) = \lambda^d(A \cap (q_0 + M))$$

Da $A \cap (q_0 + M) \subseteq q_0 + M$ und $q_0 + M$ ein Repräsentantensystem von $\mathcal{M}$ ist, gilt dann nach Lemma [I.79](#) aber $\lambda^d(A \cap (q_0 + M)) = 0$. Dies steht im Widerspruch zu $(\lambda^d(A \cap (q_0 + M))) > 0$. $A \cap (q_0 + M)$ ist also nicht messbar, d. h. $A \cap (q_0 + M) \notin \mathcal{L}^d$, und es gilt $A \cap (q_0 + M) \subseteq A$. $\square$

Bemerkung. Dasselbe Argument ist auch durchführbar auf Fortsetzungen von λ^d auf translationsinvarianten σ -Algebren $\supseteq \mathcal{L}^d$.

I.5.13. Lebesgue-Messbarkeit von Homöomorphismen

Wir wissen bereits, dass stetige Abbildungen euklidischer Räume, also insbesondere Homöomorphismen des $\mathbb{R}^d$, Borel-messbar sind, was die *Natürlichkeit* von $\mathcal{B}^d$ unterstreicht. Jedoch sind nicht alle stetigen Abbildungen euklidischer Räume Lebesgue-messbar.

Lemma I.82. Seien $d, d' \in \mathbb{N}$ mit $d < d'$. Dann existiert eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$, die nicht Lebesgue-messbar ist.

Beweis. Wir betrachten die Einbettungsabbildung $\iota : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ mit der Abbildungsvorschrift $(x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$. ι ist injektiv und stetig. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ nicht Lebesgue-messbar, d. h. $M \notin \mathcal{L}^d$. M existiert nach Satz [I.81](#) ι ist nicht Lebesgue-messbar. $\iota(M)$ ist nämlich eine $\lambda^{d'}$ -Nullmenge, also gilt insbesondere $\iota(M) \in \mathcal{L}^{d'}$. Allerdings ist $\iota^{-1}(\iota(M)) = M \notin \mathcal{L}^d$ nach Annahme. $\square$

Für homöomorphe Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^d$ gibt es ein genaues Kriterium für die Lebesgue-messbarkeit:

Satz I.83. Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ein Homöomorphismus. φ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn φ^{-1} β^d -Nullmengen auf β^d -Nullmengen abbildet. D.h. φ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn für alle $N \in \mathcal{B}^d$ mit $\beta^d(N) = 0$ auch gilt, dass $\varphi^{-1}(N) \in \mathcal{B}^d$ und $\beta^d(\varphi^{-1}(N)) = 0$.

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ein Homöomorphismus und $M \in \mathcal{L}^d$. Nach Korollar I.53 stimmt jede Lebesgue-Menge bis auf Modifikation durch λ^d mit einer Borel-Menge überein, d.h. wir finden $B \in \mathcal{B}^d$ und $N \in \mathcal{L}^d$ mit $\lambda^d(N) = 0$, sodass $M = B \cup N$. Es gilt weiter $\varphi^{-1}(M) = \varphi^{-1}(B) \cup \varphi^{-1}(N)$. Da $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{L}^d$, ist die Lebesgue-Messbarkeit von φ äquivalent dazu, dass $\varphi^{-1}(N) \in \mathcal{L}^d$, bzw. dazu, dass das φ -Urbild von λ^d -Nullmengen Lebesgue-messbar ist.

Das φ -Urbild von λ^d -Nullmengen ist sogar wieder eine λ^d -Nullmenge. Sei $A \in \mathcal{L}^d$ mit $\lambda^d(A) = 0$ und φ Lebesgue-messbar, d.h. $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}^d$. Angenommen es gilt $\lambda^d(\varphi^{-1}(A)) > 0$. Dann existiert nach Satz I.81 eine Menge $B \subseteq \varphi^{-1}(A)$, sodass $B \notin \mathcal{L}^d$. Da φ bijektiv, also insbesondere injektiv ist, ist B ein φ -Urbild einer Menge $A' \subseteq A$. Für A' gilt also $A' \in \mathcal{L}^d$ und $\lambda^d(A') = 0$ als Teilmenge einer λ^d -Nullmenge. Wegen $B = \varphi^{-1}(A') \notin \mathcal{L}^d$ steht dies im Widerspruch zur Annahme der Lebesgue-Messbarkeit von φ . Also muss $\lambda^d(\varphi^{-1}(A)) = 0$ gelten.

Die Lebesgue-Messbarkeit von φ ist also äquivalent dazu, dass φ -Urbilder von λ^d -Nullmengen wieder λ^d -Nullmengen sind, d.h. dazu, dass für alle $N \in \mathcal{L}^d$ mit $\lambda^d(N) = 0$ auch $\varphi^{-1}(N) \in \mathcal{L}^d$ und $\lambda^d(\varphi^{-1}(N)) = 0$. Da jede λ^d -Nullmenge Teilmenge einer β^d -Nullmenge ist, ist dies äquivalent dazu, dass φ -Urbilder von β^d -Nullmengen wieder β^d -Nullmengen sind, also φ^{-1} β^d -Nullmengen auf β^d -Nullmengen abbildet. $\square$

Beispiel. Wir betrachten die *Cantor-Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und die *Cantor-Menge* C . f ist stetig, $f|_{[0,1]} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ surjektiv und wir finden eine abzählbare Menge $M \subseteq [0,1]$, sodass $f|_C : C \longrightarrow [0,1] \setminus M$ sogar bijektiv ist. Es gilt $C = f^{-1}([0,1] \setminus M)$ und $\lambda^d(C) = 0$, jedoch

$$\lambda^d(f^{-1}(C)) = \lambda^d(f^{-1}(f^{-1}([0,1] \setminus M))) = \lambda^d([0,1] \setminus M) = 1$$

II. Integrationstheorie

II.1. Messbare Funktionen

Definition II.1 (numerische Funktion). Sei X eine Menge. Wir nennen eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, d. h. eine $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Funktion, eine *numerische Funktion*.

Definition II.2 (Borel- σ -Algebra, erweitert). $\overline{\mathbb{R}}$ trägt eine natürliche messbare Struktur, nämlich die *erweiterte Borel- σ -Algebra* $\overline{\mathcal{B}}$. Sie wird jeweils erzeugt von den Mengen $\{ [-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R} \}$, $\{ (-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R} \}$, $\{ [a, \infty] \mid a \in \mathbb{R} \}$ sowie $\{ (a, \infty] \mid a \in \mathbb{R} \}$.

Definition II.3 (Lebesgue-Borel-Maß, erweitert). Wir erweitern nun das Lebesgue-Borel-Maß auf die σ -Algebra $\overline{\mathcal{B}}$. Wir bezeichnen das entstehende Maß weiterhin mit β^d , setzen jedoch zusätzlich $\beta^d(\{+\infty\}) := 0$ sowie $\beta^d(\{-\infty\}) := 0$.

Definition II.4 ((Borel-)Messbarkeit, Funktion). Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Wir nennen f *(Borel-)messbar* g. d. w. f $\mathcal{A}$ - $\overline{\mathcal{B}}$ -messbar ist.

Lemma II.1. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) f ist messbar
- (ii) für alle $a \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt $\{ f \leq a \} \in \mathcal{A}$ bzw. $\{ f < a \} \in \mathcal{A}$. D. h. alle Subniveaumengen sind also in der σ -Algebra $\mathcal{A}$.
- (iii) für alle $a \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt $\{ f \geq a \} \in \mathcal{A}$ bzw. $\{ f > a \} \in \mathcal{A}$. D. h. alle Supniveaumengen sind also in der σ -Algebra $\mathcal{A}$.

Definition II.5 (Raum der messbaren Funktionen; Raum der nichtnegativen Funktionen; Raum der endlichwertigen Funktionen). Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathcal{A}) := \left\{ f \in \overline{\mathbb{R}}^X \mid f \text{ ist messbar} \right\}$ den *Raum der messbaren numerischen*

Funktionen. Ist klar, welcher Messraum gemeint wird, schreiben wir $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}} := \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathcal{A})$. Wir definieren weiter den Unterraum $\mathcal{M}_{[0, \infty]} := \{f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}} \mid \forall x \in X : f(x) \geq 0\}$ der *nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen* sowie den Unterraum $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} := \{f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}} \mid \forall x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\}$ der *endlichwertigen messbaren numerischen Funktionen*.

Bemerkung. $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum bezüglich der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation. $\mathcal{M}_{[0, \infty]}, \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ sind Untervektorräume.

Im Folgenden führen wir Operationen wie Rechenoperationen oder die Bildung von Maxima, Minima, Suprema, Infima sowie Limites punktweise aus.

Lemma II.2. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}})^{\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen. Die Funktionen $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ sowie $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ sind messbar, liegen also in $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Beweis. $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ist messbar, denn es gilt $\{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{A}$, demnach also $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Analog ist auch $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ messbar. Es gilt nämlich $\{\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \geq a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \geq a\} \in \mathcal{A}$, also $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Die Messbarkeit von $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ folgt auch aus $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -(\sup_{n \in \mathbb{N}} (-f_n))$.

Die Messbarkeit von $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ folgt aus den Darstellungen $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$. $\square$

Korollar II.3. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Dann ist $\max(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ und $\min(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Definition II.6 (Positivanteil, Funktion; Negativanteil, Funktion; Absolutbetrag, Funktion). Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Wir bezeichnen mit $f^+ := \max(f, 0)$ den *Positivanteil* von f , mit $f^- := \max(-f, 0)$ den *Negativanteil* von f und mit $|f| := f^+ + f^- = \max(f^+, f^-)$ den *Absolutbetrag* von f .

Korollar II.4. Ist $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$, so sind f^+ , f^- und $|f|$ messbar.

Definition II.7 (Fortsetzung durch 0). Sei X eine Menge, $M \subseteq X$ eine Teilmenge und $f_M : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Wir können f_M *durch 0 fortsetzen* zu der

Abbildung $\overline{f_M} : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die für alle $x \in X$ gegeben ist durch

$$\overline{f_M}(x) := \begin{cases} f_M(x) & , \text{ falls } x \in M \\ 0 & , \text{ falls } x \notin M \end{cases}$$

Definition II.8 (Abschneiden, Funktion). Sei X eine Menge, $M \subseteq X$ eine Teilmenge und $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Wir bezeichnen mit χ_M die charakteristische Funktion von M . Wir können f außerhalb der Teilmenge M *abschneiden*, indem wir übergehen zur Abbildung $\chi_M f := \chi_M \cdot f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die für alle $x \in X$ gegeben ist durch

$$\chi_M f(x) := \chi_M(x) \cdot f(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ falls } x \in M \\ 0 & , \text{ falls } x \notin M \end{cases}$$

Bemerkung. Es gilt $\chi_M f = \overline{f|_M}$, d. h. $\chi_M f$ setzt $f|_M$ durch 0 fort.

Lemma II.5. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, $A \in \mathcal{A}$ und $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann ist $\chi_A f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, A)$ g. d. w. $f|_A \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(A, \mathcal{A}|_A)$, wobei mit $\mathcal{A}|_A$ die Spur- σ -Algebra gemeint ist. Letzteres tritt ein g. d. w. $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, A)$.

Bemerkung. Bei Rechenoperationen auf numerischen Funktionen sind die resultierenden Funktionen i. A. nicht überall auf dem gemeinsamen Definitionsbereich definiert. Wir betrachten dazu $n \in \mathbb{N}$, einen Messraum $(X, \mathcal{A})$ und für $i \in \{1, \dots, n\}$ Mengen $A_i \subseteq X$. Die Summe $\sum_{i=1}^n f_i = f_1 + \dots + f_n$ ist in allen Punkten definiert, in denen auch alle f_i definiert sind und nicht gleichzeitig ∞ und $-\infty$ als Werte der f_i auftreten, d. h. auf der Menge

$$\begin{aligned} A &:= \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \setminus \left(\left(\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(\{\infty\}) \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(\{-\infty\}) \right) \right) = \\ &= \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(\mathbb{R}) \right)}_{=: A_e} \cup \underbrace{\left(\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(\{\infty\}) \right) \Delta \left(\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(\{-\infty\}) \right) \right) \right)}_{=: A_u} \end{aligned}$$

Dabei ist $\sum_{i=1}^n f_i(x) \in \mathbb{R}$, d. h. endlich, für $x \in A_e$ und $\sum_{i=1}^n f_i(x) \in \{\pm\infty\}$, d. h. unendlich, für $x \in A_u$. Ist für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ $A_i \in \mathcal{A}$ und $f_i \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(A_i, \mathcal{A}|_{A_i})$, so ist auch $A \in \mathcal{A}$ und $\sum_{i=1}^n f_i \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(A, \mathcal{A}|_A)$. Auf den Bereichen endlicher Werte ist die Funktion $\sum_{i=1}^n f_i$ nämlich die Komposition der Abbildung $(f_1, \dots, f_n) : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und der Addition $\sum_{i=1}^n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$.

Beispiel. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann trägt er die natürliche σ -Algebra $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T})$. Eine Abbildung $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar g.d.w. sie *Borel-messbar* ist. Insbesondere sind *stetige* numerische Funktionen *messbar*.

II.2. Konstruktion des Lebesgue-Integrals

Wir können die Integration auffassen als Volumenberechnung. Sei also X eine Menge und $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Wir werden das Integral $\int_X f d\mu$ als *orientiertes* Volumen des Bereichs „zwischen $\text{graph } f$ und X -Achse“ interpretieren, genauer als Differenz

$$\int_X f d\mu = \text{vol} \{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x) \} - \text{vol} \{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) < y < 0 \}$$

Das Integral ist dann definiert, solange höchstens eines dieser Volumina unendlich ist. Als Volumenmaß werden wir für einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ das Produktmaß $\mu \otimes \beta^1$ verwenden. Es ist die, falls μ σ -endlich ist, eindeutige, Fortsetzung des Prämaßes $\mu \boxtimes \beta^1$ von dem Ring $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ auf die σ -Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, d. h. $\mu \otimes \beta^1 = (\mu \boxtimes \beta^1)^*|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$.

II.2.1. Integral nichtnegativer Funktionen

Definition II.9 (Lebesgue-Integral, nichtnegativ). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ eine messbare numerische Funktion. Das *Lebesgue-Integral* von f ist definiert als

$$\int_X f d\mu := (\mu \otimes \beta^1) (\{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x) \}) \in [0, \infty]$$

Wir fassen das Lebesgue-Integral als Funktional $\mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty]$ mit $f \mapsto \int_X f d\mu$ auf.

Bemerkung. Da sicherlich $\{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x) \} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, die Menge also jedenfalls messbar ist, ist das nichtnegative Lebesgue-Integral wohldefiniert.

Beispiel. Für besonders einfache Funktionen ist der Bereich zwischen Graph und X -Achse eine Figur (d. h. eine endliche Vereinigung von Quadern). In diesem Fall können wir das Integral direkt angeben. Z. B. gilt für $A \in \mathcal{A}$ und χ_A die charakteristische

Funktion von A , dass

$$\int_X \chi_A d\mu = (\mu \otimes \beta^1)(A \times (0, 1)) = \mu(A) \cdot \beta^1((0, 1)) = \mu(A) \cdot 1 = \mu(A)$$

Definition II.10 (Treppenfunktion). Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\tau \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ eine messbare numerische Funktion. Wir nennen τ eine *Treppenfunktion* g. d. w. τ nur endlich viele Werte annimmt, also g. d. w. $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty]$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $X = \bigcup_{k=1}^n A_k$ existieren, sodass $\tau = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \chi_{A_k}$.

Satz II.6 (Lebesgue-Integral, Treppenfunktion). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\tau \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine Treppenfunktion, d. h. wir finden $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty]$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $X = \bigcup_{k=1}^n A_k$, sodass $\tau = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \chi_{A_k}$. Es gilt

$$\int_X \tau d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \int_X \chi_{A_k} d\mu \quad (\text{II.A})$$

Beweis. Es folgt mit der Definition des nichtnegativen Lebesgue-Integrals, dass

$$\begin{aligned} \int_X \tau d\mu &= (\mu \otimes \beta^1)(\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < \tau(x)\}) = \\ &= (\mu \otimes \beta^1)\left(\left\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < \sum_{k=1}^n a_k \cdot \chi_{A_k}(x)\right\}\right) = \\ &= (\mu \otimes \beta^1)\left(\bigcup_{k=1}^n \{(x, y) \in A_k \times \mathbb{R} \mid 0 < y < a_k\}\right) = \\ &= (\mu \otimes \beta^1)\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \times (0, a_k))\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \int_X \chi_{A_k} d\mu \end{aligned}$$

□

Lemma II.7. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Integral auf nichtnegativen Treppenfunktionen besitzt folgende Eigenschaften:

(i) Linearität, d. h. für Treppenfunktionen $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ sowie $\alpha, \beta \in [0, \infty]$ gilt

$$\int_X (\alpha \tau_1 + \beta \tau_2) d\mu = \alpha \cdot \int_X \tau_1 d\mu + \beta \cdot \int_X \tau_2 d\mu$$

(ii) Monotonie, d. h. für Treppenfunktionen $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ mit $\tau_1 \leq \tau_2$ gilt

$$\int_X \tau_1 d\mu \leq \int_X \tau_2 d\mu$$

Satz II.8 (monotone Konvergenz, B. Levi). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und eine punktweise schwach monoton steigende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{[0, \infty]})^{\mathbb{N}}$ nichtnegativer messbarer numerischer Funktionen, d. h. für alle $x \in X$ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ gilt, dass $f_n(x) \leq f_m(x)$. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right) = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu$$

Anschaulich können also Integral und Limes vertauscht werden.

Beweis. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n : X \rightarrow [0, \infty] \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ ist überall definiert. Dabei gilt

$$\{ (x, y) \mid 0 < y < f_n(x) \} \nearrow \{ (x, y) \mid 0 < y < \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \}$$

für $n \rightarrow \infty$. Aufgrund der Stetigkeit des Maßes $\mu \otimes \beta^1$ von unten gilt dann also

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \otimes \beta^1) \left(\{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f_n(x) \} \right) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} (\mu \otimes \beta^1) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f_n(x) \} \right) = \\ &= (\mu \otimes \beta^1) \left(\{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \} \right) = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \end{aligned}$$

wobei die Stetigkeit von unten explizit bei $(*)$ verwendet wurde. $\square$

Bemerkung. Eine solche Konvergenzaussage gilt nicht ohne Monotonievoraussetzung. Sei beispielsweise $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter messbarer Mengen. Dann gilt $\chi_{A_n} \rightarrow 0$, $\int_X \chi_{A_n} \, d\mu$ kann aber eine beliebige Folge sein. Verzichten wir auf die Monotonievoraussetzung, gilt jedoch noch eine Ungleichung. Diese gilt ganz allgemein und auch ohne Konvergenzannahmen.

Satz II.9 (Lemma von Fatou). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{[0, \infty]})^{\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer messbarer numerischer Funktionen. Es gilt

$$\int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right)$$

Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, mit $n \leq m$. Es gilt $\inf_{k \geq n} f_k \leq f_m$. Mit der Monotonie des Integrals folgt dann $\int_X (\inf_{k \geq n} f_k) \, d\mu \leq \int_X f_m \, d\mu$. Hieraus folgt weiter

$$\int_X \left(\inf_{k \geq n} f_k \right) d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int_X f_k \, d\mu$$

Wegen $\inf_{k \geq n} f_k \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ folgt mit dem Satz der monotonen Konvergenz II.8

$$\int_X \left(\inf_{k \geq n} f_k \right) d\mu \nearrow \int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu$$

Für die rechte Seite der Ungleichung gilt

$$\inf_{k \geq n} \left(\int_X f_k d\mu \right) \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n d\mu \right)$$

Führt man nun den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ auf beiden Seiten der Ungleichung durch, so erhält man

$$\int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n d\mu \right)$$

□

Mithilfe der Konvergenzresultate können wir die Linearität des Integrals von nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen auf beliebige nichtnegative messbare Funktionen verallgemeinern.

Lemma II.10. Jede nichtnegative messbare Funktion ist der monotone Grenzwert einer aufsteigenden Folge von Treppenfunktionen. D. h. , ist $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ eine nichtnegative messbare Funktion, so existiert eine aufsteigende Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{[0, \infty]})^{\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, sodass $\tau_n \nearrow f$.

Lemma II.11. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Integral nichtnegativer Funktionen hat folgende Eigenschaften:

- (i) Linearität, d. h. für nichtnegative messbare Funktionen $f, g \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ sowie $\alpha, \beta \in [0, \infty]$ gilt

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \cdot \int_X f d\mu + \beta \cdot \int_X g d\mu$$

- (ii) Monotonie, d. h. für nichtnegative messbare Funktionen $f, g \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ mit $f \leq g$ gilt

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

Beweis. (i): Nach Lemma II.10 finden wir Folgen $(\tau_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, (\tau_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A}))^{\mathbb{N}}$, sodass $\tau_n^{(1)} \nearrow f$ und $\tau_n^{(2)} \nearrow g$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt aufgrund der Linearität des Integrals

auf Treppenfunktionen (Lemma II.7), dass

$$\int_X (\alpha \tau_n^{(1)} + \beta \tau_n^{(2)}) d\mu = \alpha \cdot \int_X \tau_n^{(1)} d\mu + \beta \cdot \int_X \tau_n^{(2)} d\mu$$

Wegen $\alpha \tau_n^{(1)} + \beta \tau_n^{(2)} \nearrow \alpha f + \beta g$ sowie $\tau_n^{(1)} \nearrow f$ und $\tau_n^{(2)} \nearrow g$ folgt mittels des Satzes der monotonen Konvergenz II.8, dass $\int_X (\alpha \tau_n^{(1)} + \beta \tau_n^{(2)}) d\mu \nearrow \int_X (\alpha f + \beta g) d\mu$ sowie $\int_X \tau_n^{(1)} d\mu \nearrow \int_X f d\mu$ und $\int_X \tau_n^{(2)} d\mu \nearrow \int_X g d\mu$. Führen wir also bei der obigen Gleichung auf beiden Seiten einen Grenzübergang durch, erhalten wir

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \cdot \int_X f d\mu + \beta \cdot \int_X g d\mu$$

(ii): Nach Lemma II.10 finden wir wieder Folgen $(\tau_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, (\tau_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{[0,\infty]}(X, \mathcal{A}))^{\mathbb{N}}$, sodass $\tau_n^{(1)} \nearrow f$ und $\tau_n^{(2)} \nearrow g$. Gelte o. B. d. A. für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\tau_n^{(1)} \leq \tau_n^{(2)}$. Sonst wählen wir einfach entsprechende Teilfolgen. Aufgrund der Monotonie des Integrals auf Treppenfunktionen (Lemma II.7) gilt $\int_X \tau_n^{(1)} d\mu \leq \int_X \tau_n^{(2)} d\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dem Satz der monotonen Konvergenz II.8 folgt dann

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^{(1)} \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X \tau_n^{(1)} d\mu \right) \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X \tau_n^{(2)} d\mu \right) = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^{(2)} \right) d\mu = \int_X g d\mu \end{aligned}$$

□

II.2.2. Integral allgemeiner numerischer Funktionen

Im Folgenden soll das Integral allgemeiner numerischer Funktionen definiert werden. Dafür muss der Definitionsbereich aber geeignet *beschränkt* werden. Es muss sichergestellt werden, dass die positiven und negativen Beiträge jeweils nicht unendlich sind.

Definition II.11 (1-Norm). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion. Wir definieren die 1-Norm von f durch

$$\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$$

Bemerkung.

- (i) Da $\|f\| \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$, ist $\|f\|_1$ wohldefiniert.

- (ii) Die 1-Norm bildet auf dem Raum $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ der messbaren numerischen Funktionen keine Norm im eigentlichen Sinne. Auf geeigneten Unterräumen wird die 1-Norm jedoch wirklich eine Halbnorm bzw. eine Norm bilden (s. u.).

Definition II.12 (μ -Integrierbarkeit). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. f heißt μ -integrierbar g. d. w. $\|f\|_1 < \infty$.

Bemerkung. Es gilt $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ und $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$. Also folgt aus der μ -Integrierbarkeit von f auch die μ -Integrierbarkeit von f^+ und f^- .

Definition II.13 (Lebesgue-Integral, allgemein). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Das *Lebesgue-Integral* von f ist definiert als

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu = \|f^+\|_1 - \|f^-\|_1 \quad (\text{II.B})$$

Bemerkung.

- (i) Dies ist konsistent mit der bisherigen Definition des Integrals auf $\mathcal{M}_{[0,\infty]}$.
- (ii) Es gilt $|\int_X f \, d\mu| = \pm(\|f^+\|_1 - \|f^-\|_1) \leq \|f^+\|_1 + \|f^-\|_1 = \|f\|_1$

Notation II.14. In manchen Fällen ist es sinnvoll, in der Notation des Lebesgue-Integrals das Argument der zu integrierenden Funktion mitanzugeben. Wir setzen daher

$$\int_X f(x) \, d\mu(x) := \int_X f \, d\mu$$

Definition II.15 (μ -Quasiintegrierbarkeit). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Wir nennen f μ -quasiintegrierbar g. d. w. f^+ oder f^- integrierbar ist.

Beispiel. Alle Funktionen $f \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$ sind quasiintegrierbar.

Lemma II.12. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $C > 0$ und $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine durch C beschränkte messbare numerische Funktion, d. h. gelte $|f| < C$. Habe zudem die Trägermenge endliches Maß, d. h. gelte $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$, so ist f integrierbar.

Beweis. Es gilt $\|f\|_1 \leq (\sup |f|) \cdot \mu(\{f \neq 0\}) \leq C \cdot \mu(\{f \neq 0\}) < \infty$ □

Korollar II.13. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ ein Maßraum, in dem zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x existiert, sodass $\mu(U) < \infty$. Ist $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ stetig und sei die Trägermenge $\{f \neq 0\}$ kompakt, so ist f integrierbar.

Korollar II.14. Auf dem Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \beta^d)$ sind stetige Funktionen mit kompaktem Träger $\{f \neq 0\}$ integrierbar.

Beweis. Nach dem Satz von Heine-Borel sind Kompakta beschränkt, haben also insbesondere endliches λ^d -Maß. Weiters haben stetige Funktionen von Kompakta beschränktes Bild. Mit Lemma II.12 folgt die Behauptung. $\square$

09. Dezember 2019

Definition II.16 (Lokalisierung, Integral; Integral auf Teilmengen). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ integrierbar, $A \in \mathcal{A}$ sowie $\mathcal{A}|_A$ die Spur- σ -Algebra und $\mu|_A$ die Einschränkung von μ auf $\mathcal{A}|_A$. Wir definieren die *Lokalisierung* $\int_A f d\mu$ des Integrals $\int_X f d\mu$ durch

$$\int_A f d\mu := \int_X \chi_A f d\mu = \int_A f|_A d\mu|_A$$

und nennen sie das *Integral von f auf der Teilmenge A* .

Lemma II.15. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ integrierbar und $N \in \mathcal{A}$ eine μ -Nullmenge, d. h. $\mu(N) = 0$. Es gilt $\int_N f d\mu = 0$.

Beweis. Sei zunächst $f \geq 0$. Wegen $\{(x, y) \in N \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\} \subseteq N \times \mathbb{R}$ und der Monotonie des Produktmaßes $\mu \otimes \beta^1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_N f d\mu &= (\mu \otimes \beta^1)(\{(x, y) \in N \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\}) \leq \\ &\leq (\mu \otimes \beta^1)(N \times \mathbb{R}) = \mu(N) \cdot \beta^1(\mathbb{R}) = 0 \cdot \infty = 0 \end{aligned}$$

Sei nun allgemein $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt also

$$\int_N f d\mu = \int_N \underbrace{f^+}_{\geq 0} d\mu - \int_N \underbrace{f^-}_{\geq 0} d\mu = 0 - 0 = 0$$

$\square$

Definition II.17 (μ -fast überall, μ -fast alle). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E eine Eigenschaft. Wir sagen E gilt für μ -fast alle Punkte von X bzw. μ -fast überall g. d. w. eine μ -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert, sodass E für alle $x \in X \setminus N$ gilt.

Definition II.18 (μ -fast-Übereinstimmung). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $=_\mu$ mit $f =_\mu g$ g. d. w. $f(x) = g(x)$ für μ -fast alle $x \in X$ gilt, also g. d. w. eine μ -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert, sodass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ gilt, für alle $f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}/=_\mu$ den $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Äquivalenzklassen der μ -fast überall übereinstimmenden messbaren numerischen Funktionen.

Lemma II.16. Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktionen mit $f =_\mu g$. Es gilt:

- (i) $\|f\|_1 = \|g\|_1$, also ist insbesondere f μ -integrierbar g. d. w. g μ -integrierbar ist.
- (ii) Sind f, g μ -integrierbar, so gilt

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$

Beweis. (i): Per Annahme ist $\{f \neq g\}$ eine μ -Nullmenge. Es gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \|\chi_{\{f=g\}}f + \chi_{\{f \neq g\}}f\|_1 = \|\chi_{\{f=g\}}f\|_1 + \underbrace{\|\chi_{\{f \neq g\}}f\|_1}_{=0} = \\ &= \|\chi_{\{f=g\}}g\|_1 + \underbrace{\|\chi_{\{f \neq g\}}g\|_1}_{=0} = \|\chi_{\{f=g\}}f + \chi_{\{f \neq g\}}f\|_1 = \|g\|_1 \end{aligned}$$

(ii): Seien f, g μ -integrierbar. Es gilt $f^+ =_\mu g^+$ und $f^- =_\mu g^-$, also mit (i)

$$\int_X f \, d\mu = \|f^+\|_1 - \|f^-\|_1 = \|g^+\|_1 - \|g^-\|_1 = \int_X g \, d\mu$$

□

Lemma II.17. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann hat die 1-Norm $\|\cdot\|_1$ folgende Eigenschaften:

- (i) positive Semidefinitheit, d. h. es gilt $f =_\mu 0$ g. d. w. $\|f\|_1 = 0$.
- (ii) positive Homogenität, d. h. $\|\alpha \cdot f\|_1 = |\alpha| \cdot \|f\|_1$. Wir verwenden dabei die Konvention $0 \cdot \infty = 0$.
- (iii) Dreiecksungleichung, d. h. $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$. Hier bezeichnet $f + g$ eine Funktion, die μ -fast überall mit der μ -fast überall definierten Summe $f + g$ übereinstimmt.

Beweis. (i): Nach Lemma II.16 folgt aus $f =_\mu 0$, dass $\|f\|_1 = \|0\|_1 = 0$. Sei umgekehrt $\|f\|_1 = 0$. Wir betrachten den Absolutanteil $|f|$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\chi_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}} \leq n \cdot |f|$ und weiter durch Integrieren, dass

$$\mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \int_X \chi_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}} d\mu \leq \int_X (n \cdot |f|) d\mu = n \cdot \int_X |f| d\mu = n \cdot \underbrace{\|f\|_1}_{=0} = 0$$

Wegen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|f| \geq 0\right\} = \{f \neq 0\}$ und der Stetigkeit von unten des Maßes μ folgt also $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, d. h. $f =_\mu 0$.

(ii) folgt aus der Linearität, speziell aus der positiven Homogenität, des Integrals nichtnegativer Funktionen (Lemma II.11), denn es gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot f\| &= \|(\alpha \cdot f)^+\| + \|(\alpha \cdot f)^-\| = \||\alpha| \cdot f^+\| + \||\alpha| \cdot f^-\| = \\ &= \int_X (|\alpha| \cdot f^+) d\mu + \int_X (|\alpha| \cdot f^-) d\mu = |\alpha| \cdot \int_X f^+ d\mu + |\alpha| \cdot \int_X f^- d\mu = \\ &= |\alpha| \cdot \left(\int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu\right) = |\alpha| \cdot (\|f^+\|_1 + \|f^-\|_1) = |\alpha| \cdot \|f\|_1 \end{aligned}$$

(iii): Wir finden eine μ -Nullmenge $N \subseteq X$, sodass $f + g$ überall auf $X \setminus N$ definiert ist. Dort gilt die Dreiecksungleichung $|f + g| \leq |f| + |g|$ in $\mathbb{R}$ bezüglich des euklidischen Abstands, d. h. für alle $x \in X \setminus N$ gilt $|(f + g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Aufgrund der Linearität, genauer der Additivität, und der Monotonie von Integralen auf nichtnegativen Funktionen (Lemma II.11) folgt

$$\int_{X \setminus N} |f + g| d\mu \leq \int_{X \setminus N} |f| d\mu + \int_{X \setminus N} |g| d\mu$$

Sei $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine integrierbare Funktion. Es gilt $|h| = \chi_{X \setminus N} |h| + \chi_N |h|$. Mit der Linearität des Integrals nichtnegativer Funktionen (Lemma II.11), und, weil N eine μ -Nullmenge ist, folgt dann

$$\begin{aligned} \int_X |h| d\mu &= \int_X (\chi_{X \setminus N} |h| + \chi_N |h|) d\mu = \int_X \chi_{X \setminus N} |h| d\mu + \int_X \chi_N |h| d\mu = \\ &= \int_{X \setminus N} |h| d\mu + \underbrace{\int_N |h| d\mu}_{=0} = \int_{X \setminus N} |h| d\mu \end{aligned}$$

Also gelten die Gleichheiten $\int_{X \setminus N} |f + g| d\mu = \int_X |f + g| d\mu$, $\int_{X \setminus N} |f| d\mu = \int_X |f| d\mu$ und $\int_{X \setminus N} |g| d\mu = \int_X |g| d\mu$, somit also mit der obigen Ungleichung

$$\int_X |f + g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu$$

□

Lemma II.18. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$, und $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ μ -integrierbar. Es gilt $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$. D. h. μ -integrierbare Funktionen nehmen μ -fast überall endliche Werte an.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\mu(\{|f| \geq n\}) \leq \int_X \chi_{\{|f| \geq n\}} \frac{|f|}{n} d\mu = \frac{1}{n} \cdot \|f\|_1$. Es folgt

$$\mu(\{|f| = \infty\}) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \{|f| \geq n\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \|f\|_1 = 0$$

□

Definition II.19 (Raum der endlichwertigen μ -integrierbaren Funktionen). Sei im Folgenden $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Nach dem letzten Lemma II.18 verlieren wir keine Information beim Betrachten des Integrals auf lediglich endlichwertigen Funktionen. Wir nennen $\mathfrak{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$ den *Raum der endlichwertigen μ -integrierbaren Funktionen* auf X . Falls klar ist, welcher Maßraum gemeint ist, setzen wir $\mathfrak{L}^1 := \mathfrak{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Korollar II.19.

- (i) Die 1-Norm $\|\cdot\|_1 : \mathfrak{L}^1 \rightarrow [0, \infty)$ ist eine Halbnorm. Zur Norm fehlt die strikte Positivität.
- (ii) $\mathfrak{L}^1 \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist ein Untervektorraum bezüglich der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation, also insbesondere selbst ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Bemerkung. Die Halbnorm $\|\cdot\|_1$ auf $\mathfrak{L}^1$ liefert eine translationsinvariante Pseudometrik d auf $\mathfrak{L}^1$ gegeben durch $d(f, g) := \|f - g\|_1$ für alle $f, g \in \mathfrak{L}^1$. $\|\cdot\|_1$ ist nicht strikt positiv, da für Funktionen $h \in \mathfrak{L}^1$, die nur auf μ -Nullmengen ungleich 0 sind, sicherlich $\|h\|_1 = 0$ gilt. Somit können auch verschiedene Funktionen $f, g \in \mathfrak{L}^1$ Abstand 0 haben, denn z. B., falls $g := f + h$, mit h wie vorher, d. h. $h \neq 0$ und $\|h\|_1 = 0$, dann ist $d(f, f + h) = \|f - (f + h)\|_1 = \|h\|_1 = 0$.

Lemma II.20. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, und $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. $f|_{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ ist $\mu|_{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ -integrierbar g. d. w. für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ $f|_{A_i}$

$\mu|_{A_i}$ -integrierbar ist. In diesem Fall ist

$$\int_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \left(\int_{A_i} f \, d\mu \right)$$

Beweis. Es gilt $\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}$, somit also $f^+ = \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f^+ = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} f^+$ und auch $f^- = \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f^- = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} f^-$. f ist genau dann μ -integrierbar, wenn f^+ und f^- μ -integrierbar sind, also g. d. w. für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ $\chi_{A_i} f^+$ und $\chi_{A_i} f^-$ μ -integrierbar sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die Funktionen $f^+|_{A_i}$ und $f^-|_{A_i}$ $\mu|_{A_i}$ -integrierbar sind.

Sei nun f μ -integrierbar. Dann gilt mit der Linearität des Integrals auf nichtnegativen Funktionen (Lemma II.11)

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f \, d\mu &= \int_X \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f \, d\mu = \int_X \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f^+ \, d\mu - \int_X \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f^- \, d\mu = \\ &= \int_X \left(\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} f^+ \right) d\mu - \int_X \left(\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} f^- \right) d\mu = \sum_{i=1}^n \left(\int_X \chi_{A_i} f^+ \, d\mu \right) - \sum_{i=1}^n \left(\int_X \chi_{A_i} f^- \, d\mu \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_X \chi_{A_i} f^+ \, d\mu - \int_X \chi_{A_i} f^- \, d\mu \right) = \sum_{i=1}^n \left(\int_X \chi_{A_i} f \, d\mu \right) = \sum_{i=1}^n \left(\int_{A_i} f \, d\mu \right) \end{aligned}$$

□

Satz II.21. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Lebesgue-Integral $\mathfrak{L}^1 \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_X f \, d\mu$ besitzt folgende Eigenschaften:

(i) Linearität, d. h. für $f, g \in \mathfrak{L}^1$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \cdot \int_X f \, d\mu + \beta \cdot \int_X g \, d\mu$$

(ii) Monotonie, d. h. für $f, g \in \mathfrak{L}^1$ mit $f \leq g$ gilt

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

(iii) 1-Lipschitz-Eigenschaft, d. h. für $f, g \in \mathfrak{L}^1$ gilt

$$\left| \int_X f \, d\mu - \int_X g \, d\mu \right| \leq \|f - g\|_1$$

Beweis. (i): Gelte o. B. d. A. $\alpha \geq 0$. Es gilt $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ und $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, somit also $\|(\alpha f)^+\|_1 = \alpha \cdot \|f^+\|_1$ und $\|(\alpha f)^-\|_1 = \alpha \cdot \|f^-\|_1$ aufgrund der positiven Homogenität der 1-Norm. Demnach ist $\int_X \alpha f \, d\mu = \|\alpha f^+\|_1 - \|\alpha f^-\|_1 = \alpha \cdot (\|f^+\|_1 - \|f^-\|_1) = \alpha \cdot \int_X f \, d\mu$. Das Integral ist also homogen.

Es bleibt die Additivität zu zeigen. Es gilt

$$X = \{f, g \geq 0\} \cup \{f, g < 0\} \cup \{f \geq 0, g < 0\} \cup \{f < 0, g \geq 0\}$$

Wegen Lemma II.20 gilt die Additivität auf X g. d. w. sie auf allen partitionierenden Teilmengen gilt. Die Additivität ist klar, falls die Vorzeichen von f und g gleich sind, d. h. $f, g \geq 0$ bzw. $f, g < 0$. Es bleibt der Fall verschiedener Vorzeichen zu zeigen. Gelte o. B. d. A. $f \geq 0 \geq g$. Da wir die Teilmenge weiter partitionieren dürfen, können wir annehmen, dass auch $f + g$ ein Vorzeichen hat. Sei o. B. d. A. $f + g \geq 0$. Die Behauptung folgt dann ebenfalls aus der Additivität des Integrals auf nichtnegativen Funktionen, denn $f + g \leq f$ ist integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) \, d\mu &= \int_X (f + g) \, d\mu - \int_X g \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \\ &= \int_X (f + g) \, d\mu + \int_X \underbrace{(-g)}_{\geq 0} \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \int_X ((f + g) - g) \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \\ &= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu \end{aligned}$$

Also ist das Integral auf $\mathfrak{L}^1$ linear.

(ii): Die Monotonie folgt aus der Additivität, denn, falls $f \leq g$, so gilt $g = f + (g - f)$ mit $g - f \geq 0$. Also ist wegen der Linearität

$$\int_X g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \underbrace{\int_X (g - f) \, d\mu}_{\geq 0} \geq \int_X f \, d\mu$$

(iii): Die 1-Lipschitz-Eigenschaft folgt aus der Linearität (i) und der Monotonie (ii), denn es gilt

$$\pm \left(\int_X f \, d\mu - \int_X g \, d\mu \right) = \int_X \underbrace{(\pm(f - g))}_{\leq |f - g|} \, d\mu \leq \|f - g\|_1$$

□

Definition II.20 (L^1 -Raum). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren den L^1 -Raum durch

$$L^1(X, \mathcal{A}, \mu) := \mathfrak{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) /_{=\mu} = \mathfrak{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) / \{ f \in \mathfrak{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \mid f =_{\mu} 0 \}$$

Falls klar ist, welcher Maßraum gemeint ist, setzen wir $L^1 := L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Bemerkung. Nach Lemma II.18 nehmen μ -integrierbare Funktionen μ -fast überall endliche Werte an. Jede Äquivalenzklasse $a \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}} /_{=\mu}$ hat demnach einen Repräsentanten $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, sodass also $[f] = a$. Somit gilt

$$L^1 = \mathfrak{L}^1 /_{=\mu} = \{ [f] \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}} /_{=\mu} \mid \|f\|_1 < \infty \} = \{ [f] \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}} /_{=\mu} \mid \|f\|_1 < \infty \}$$

Definition II.21 (1-Norm, L^1). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren die Abbildung $\|\cdot\|_1 : L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow [0, \infty)$ durch $\|a\|_1 := \|f\|_1$ für alle $a \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $f \in \mathfrak{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, sodass $a = [f]$, wobei mit $\|f\|_1$ die 1-Norm der Funktion f gemeint ist. Wir nennen $\|\cdot\|_1$ dann die 1-Norm auf $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Definition II.22 (Lebesgue-Integral, L^1). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren das *Lebesgue-Integral* auf L^1 als Funktional $L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\int_X a \, d\mu := \int_X f \, d\mu$$

für alle $a \in L^1$ und $f \in \mathfrak{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, sodass $a = [f]$.

Satz II.22. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) L^1 ist auf *natürliche* Weise ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Genauer ist $L^1 \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}} /_{=\mu}$ ein Untervektorraum.
- (ii) Die 1-Norm $\|\cdot\|_1$ auf L^1 ist wohldefiniert und eine Norm.
- (iii) Das Lebesgue-Integral ist wohldefiniert und 1-lipschitz bezüglich $\|\cdot\|_1$.

Beweis. (i): $\{ f \in \mathfrak{L}^1 \mid f =_{\mu} 0 \} \subseteq \mathfrak{L}^1$ ist ein Untervektorraum. Also ist die Menge $L^1 = \mathfrak{L}^1 / \{ f \in \mathfrak{L}^1 \mid f =_{\mu} 0 \}$ als Quotient zweier $\mathbb{R}$ -Vektorräume wieder ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, genauer ein Untervektorraum von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} /_{=\mu}$.

(ii): Die Wohldefiniertheit folgt daraus, dass zwei Repräsentanten $f, g \in \mathfrak{L}^1$ von $a \in L^1$ μ -fast überall gleich sind, d. h. $f =_\mu g$. Nach Lemma II.16 gilt dann nämlich auch $\|f\|_1 = \|g\|_1$. Die Halbnormeigenschaften von $\|\cdot\|_1$ auf $\mathfrak{L}^1$ übertragen sich auf $\|\cdot\|_1$ auf L^1 . Per Konstruktion ist die 1-Norm auf L^1 jedoch sogar positiv definit. Ist nämlich $a \in L^1$ und $f \in \mathfrak{L}^1$, sodass $a = [f]$ und $\|a\|_1 = 0$, so ist $0 = \|a\|_1 = \|f\|_1$, also $f =_\mu 0$. Also ist $a = [f] = [0] = 0$. $\|\cdot\|_1$ ist also positiv definit und somit eine Norm.

(iii): Die Wohldefiniertheit folgt wieder daraus, dass zwei Repräsentanten $f, g \in \mathfrak{L}^1$ von $a \in L^1$ μ -fast überall gleich sind. Dann ist nämlich nach Lemma II.16 auch $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$. Die 1-Lipschitz-Eigenschaft folgt aus der 1-Lipschitz-Eigenschaft des Integrals auf $\mathfrak{L}^1$ (Satz II.21). Sind nämlich $a, b \in L^1$ und $f, g \in \mathfrak{L}^1$, sodass $a = [f]$ und $b = [g]$, so gilt

$$\left| \int_X a \, d\mu - \int_X b \, d\mu \right| = \left| \int_X f \, d\mu - \int_X g \, d\mu \right| \leq \|f - g\|_1 = \|a - b\|_1$$

□

Bemerkung.

- (i) Der normierte Vektorraum $(L^1, \|\cdot\|_1)$ ist *vollständig* (Riesz-Fischer, 1907) (s. u.).
- (ii) Die Monotonie des Integrals drückt sich darin aus, dass es auf dem homogenen konvexen Kegel der Äquivalenzklassen nichtnegativer Funktionen nichtnegative Werte annimmt.

Definition II.23 (μ -fast überall messbar, μ -fast überall integrierbar). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Wir nennen f *μ -fast überall messbar* g. d. w. f μ -fast überall mit einer messbaren Funktion übereinstimmt, d. h. g. d. w. eine Funktion $g \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ existiert, sodass $f =_\mu g$. Analog nennen wir f *μ -fast überall integrierbar* g. d. w. f μ -fast überall mit einer integrierbaren Funktion übereinstimmt, d. h. g. d. w. eine Funktion $g \in \mathfrak{L}^1$ existiert, sodass $f =_\mu g$.

Wir können das Integral auf μ -fast überall integrierbare Funktionen verallgemeinern.

Definition II.24 (Lebesgue-Integral, μ -fast überall integrierbare Funktionen). Sei im Folgenden $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -fast überall integrierbar, d. h. sei $g \in \mathfrak{L}^1$, sodass $f =_\mu g$. Wir definieren dann das *Integral* von f durch $\int_X f \, d\mu := \int_X g \, d\mu$.

II.2.3. Integral vektorwertiger Funktionen

Das Integral $\mathbb{C}$ - oder allgemein vektorwertiger Funktionen werden wir komponentenweise durchführen und somit auf das Integral $\mathbb{R}$ -wertiger Funktionen zurückführen.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Sei weiter $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Basis von V und entsprechend $(e_i^*)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ die zu (e_i) duale Basis von V^* .

Sei $v \in V$. Dann kann v geschrieben werden als $v = \sum_{i=1}^n e_i^*(v) \cdot e_i$.

Seien $f : X \rightarrow V$ und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V^*$ Abbildungen. Dann gilt $f = \sum_{i=1}^n e_i^*(f) \cdot e_i$ und $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i^*$. Für die Abbildung $\alpha(f) = \alpha \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann

$$\alpha(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (e_i^* \circ f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i^*(f)$$

Definition II.25 (Messbarkeit, vektorwertige Funktion, Raum der messbaren vektorwertigen Funktionen). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $n \in \mathbb{N}$ und V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Basis $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Eine Abbildung $f : X \rightarrow V$ heißt *messbar* g. d. w. für alle $\alpha \in V^*$ die Funktion $\alpha(f) = \alpha \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar ist, bzw. äquivalent dazu, dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die Funktion $e_i(f) = e_i \circ f$, also die i -te Komponente von f , messbar ist. Wir definieren weiter $\mathcal{M}_V(X, \mathcal{A}, \mu)$ den *Raum der messbaren V -wertigen Funktionen*.

Definition II.26 (1-Norm, vektorwertige Funktion; μ -Integrierbarkeit, vektorwertige Funktion, Raum der μ -integrierbaren vektorwertigen Funktionen). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Wir definieren die *1-Norm* $\|\cdot\|_1 : \mathcal{M}_V \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$\|f\|_1 := \int_X \|f\|_V d\mu$$

für alle $f \in \mathcal{M}_V$. Wir nennen $f \in \mathcal{M}_V$ *μ -integrierbar* g. d. w. $\|f\|_1 < \infty$. Wir definieren weiter den *Raum $\mathfrak{L}_V^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ der μ -integrierbaren V -wertigen Funktionen*. Ist klar, welcher Maßraum und welcher Vektorraum gemeint ist, so setzen wir $\mathfrak{L}_V^1 := \mathfrak{L}_V^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Bemerkung. Die Norm $\|\cdot\|_V$ auf V kann beliebig gewählt werden, da auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum V alle Normen äquivalent sind.

Lemma II.23. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Basis $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Für $f \in \mathcal{M}_V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $f \in \mathfrak{L}_V^1$
- (ii) für alle $\alpha \in V^*$ gilt $\alpha(f) \in \mathfrak{L}^1$
- (iii) für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $e_i^*(f) \in \mathfrak{L}^1$

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (iii): Aufgrund der Äquivalenz der Normen auf V können wir o. B. d. A. annehmen, dass $\|\cdot\|_V$ die 1-Norm bezüglich der Basis (e_i) ist, d. h. , dass für alle $v \in V$ und $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$, sodass $v = \sum_{i=1}^n v_i \cdot e_i$, gilt, dass $\|v\|_V = \|\sum_{i=1}^n v_i \cdot e_i\|_V = \sum_{i=1}^n |v_i|$. Dann ist also $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^n \|e_i^*(f)\|_1$ und somit gilt die Äquivalenz der Aussagen (i) und (iii).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Sicherlich ist (iii) eine Spezialisierung von (ii), d. h. es gilt (ii) $\Rightarrow$ (iii). Andererseits ist, da $\mathfrak{L}^1$ ein Vektorraum ist, $\alpha(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i^*(f) \in \mathfrak{L}^1$ als Linearkombination von Abbildungen $e_i^*(f) \in \mathfrak{L}^1$. Also gilt auch (ii) $\Rightarrow$ (iii). $\square$

Korollar II.24. $\mathfrak{L}_V^1$ ist ein Vektorraum.

Wir wollen nun das Integral auf dem Raum $\mathfrak{L}_V^1$ konstruieren. Wir betrachten das lineare Funktional $\varphi : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\alpha \mapsto \int_X \alpha(f) d\mu$. Es gilt also $\varphi \in (V^*)^*$, d. h. φ liegt im Bidualraum von V . Da V endlichdimensional ist, ist $V \cong (V^*)^*$ mit dem natürlichen Isomorphismus $v \mapsto (\alpha \mapsto \alpha(v))$, wobei mit $\alpha \mapsto \alpha(v)$ die Funktion gemeint ist, die ein $\alpha \in V^*$ auf $\alpha(v)$ abbildet.

Es gibt also einen eindeutigen Vektor $w \in V$, sodass $\int_X \alpha(f) d\mu = \alpha(w)$ für alle $\alpha \in V^*$.

Definition II.27 (Lebesgue-Integral, vektorwertige Funktion). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ist $f \in \mathfrak{L}_V^1$, so definieren wir das Lebesgue-Integral von f durch

$$\int_X f d\mu := w$$

wobei $w \in V$ der eindeutig bestimmte Vektor ist, sodass $\int_X \alpha(f) d\mu = \alpha(w)$ für alle $\alpha \in V^*$.

Lemma II.25. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Basis $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Sei weiter $f \in \mathfrak{L}_V^1$. Wir können

das Lebesgue-Integral von f explizit angeben, denn es ist

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \left(\int_X e_i^*(f) \, d\mu \right) \cdot e_i$$

Beweis. Es gilt

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^n e_i^* \left(\int_X f \, d\mu \right) \cdot e_i = \sum_{i=1}^n \left(\int_X e_i^*(f) \, d\mu \right) \cdot e_i$$

□

Beispiel. Wir können $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum auffassen. Sei dann $f \in \mathfrak{L}_{\mathbb{C}}^1$ eine $\mathbb{C}$ -wertige integrierbare Funktion. Es gilt somit

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \operatorname{Re}(f) \, d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(f) \, d\mu$$

II.2.4. Vergleich mit Integral auf Regelfunktionen

In *Analysis I* wurde das Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ für Regelfunktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eingeführt. Wir analysieren im Folgenden den Zusammenhang zwischen dem Integral auf Regelfunktionen und dem Lebesgue-Integral.

Proposition II.26. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist f β^1 -integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\beta^1|_{[a,b]}$$

Beweis. Beide Integrale stimmen überein für charakteristische Funktionen von Intervallen, d. h. für $c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c < d \leq b$ gilt $\int_a^b \chi_{[c,d]}(x) \, dx = \int_{[a,b]} \chi_{[c,d]} \, d\mu$. Die Linearität beider Integrale impliziert nun die Gleichheit der Integrale für Treppenfunktionen, die Linearkombinationen charakteristischer Funktionen, d. h. für $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit $b_i < c_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und einer Treppenfunktion $\tau = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[b_i, c_i]}$ gilt

$$\int_{[a,b]} \tau \, d\beta^1|_{[a,b]} = \sum_{i=1}^n \left(\int_{[a,b]} \chi_{[b_i, c_i]} \, d\beta^1|_{[a,b]} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \chi_{[b_i, c_i]}(x) \, dx \right) = \int_a^b \tau(x) \, dx$$

Sei nun f eine Regelfunktion. Die Existenz der einseitigen Limites $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ für alle $x_0 \in [a, b]$ ist äquivalent zu gleichmäßigen Approximierbarkeit von f durch Treppenfunktionen. Sei also $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge solcher speziellen Treppenfunktionen, die f gleichmäßig approximieren, d. h. $\tau_n \rightarrow f$. Per Definition des Integrals von Regelfunktionen gilt dann

$$\int_a^b \tau_n(x) \, dx \rightarrow \int_a^b f(x) \, dx$$

Andererseits gilt für Lebesgue-Integrale:

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a,b]} f \, d\beta^1 - \int_{[a,b]} \tau_n \, d\beta^1 \right| &= \left| \int_{[a,b]} (f - \tau_n) \, d\beta^1 \right| \leq \\ &\leq \int_{[a,b]} |f - \tau_n| \, d\beta^1 \leq |b - a| \cdot \sup |f - \tau_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d. h. $\int_{[a,b]} \tau_n \, d\beta^1 \rightarrow \int_{[a,b]} f \, d\beta^1$. Hierbei wurde im ersten Schritt die Linearität und am Ende die Tatsache, dass für $n \rightarrow \infty$ nämlich $\sup |f - \tau_n| \rightarrow 0$ gilt, verwendet. Dies impliziert wiederum, dass die Grenzwerte der Integrale gleich sein müssen, d. h.

$$\int_{[a,b]} f \, d\beta^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{[a,b]} \tau_n \, d\beta^1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b \tau_n(x) \, dx \right) = \int_a^b f(x) \, dx$$

□

Notation II.28. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. In Anbetracht der Resultate von Proposition [II.26](#) setzen wir auch für allgemeine Lebesgue-Integrale messbarer Funktionen $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}^1|_{[a,b]}, \beta^1|_{[a,b]})$

$$\int_a^b f \, dx := \int_a^b f(x) \, dx := \int_{[a,b]} f \, d\beta^1|_{[a,b]}$$

Auch uneigentliche Integrale, d. h. Integrale über *nichtkompakten* Intervallen sind vom Lebesgue Integral erfasst. Dafür verallgemeinern wir die Approximation durch Treppenfunktionen.

Definition II.29 (Treppenfunktion, verallgemeinert). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir nennen eine Abbildung $\tau \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ eine *verallgemeinerte Treppenfunktion* g. d. w. Folgen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ und $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ existieren, sodass $\tau = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \chi_{A_i}$. D. h. wir erlauben bei verallgemeinerten Treppenfunktionen auch abzählbar viele Treppen.

Proposition II.27. Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ und $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}((a, b), \mathcal{B}^1|_{(a,b)}, \beta^1|_{(a,b)})$. Dann ist $f \beta^1|_{[a,b]}$ -integrierbar g. d. w. das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ absolut konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{[a', b'] \nearrow (a,b)} \left(\int_{a'}^{b'} f(x) dx \right) = \lim_{[a', b'] \nearrow (a,b)} \left(\int_{[a', b']} f d\beta^1|_{[a', b']} \right) = \int_{(a,b)} f d\beta^1|_{(a,b)}$$

II.3. Konvergenzsätze

Im Folgenden sollen die Konvergenzresultate für nichtnegative Funktionen (Satz der monotonen Konvergenz [II.8](#), Lemma von Fatou [II.9](#)) verallgemeinert werden. Es sollen Situationen identifiziert werden, in denen Integration und Limesbildung kommutieren. Um von punktweiser Konvergenz auf Konvergenz der Integrale schließen zu können, müssen wir Funktionen gemeinsam lokalisieren, d. h. die „Integrationsmasse“ darf nicht in die Unendlichkeit wegwandern.

Satz II.28 (majorisierte Konvergenz, Lebesgue). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, sodass $f_n \rightarrow f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ μ -fast überall. Existiert eine μ -integrierbare absolute Majorante $g \in \mathcal{M}_{[0,\infty]} \cap \mathfrak{L}^1$ für alle f_n , d. h. gilt $|f_n| \leq g$ μ -fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist f μ -integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n d\mu \right) = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu$$

Beweis. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass die Eigenschaften auf dem gesamten Definitionsbereich X gelten und, dass alle Funktionswerte von $(f_n), f$ und g endlich sind. Wir können sonst nämlich $(f_n), f$ und g auf μ -Nullmengen geeignet abändern.

Wegen $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $|f| \leq g$. Wir erhalten $\|f_n\|_1 \leq \|g\|_1 < \infty$ und $\|f\|_1 \leq \|g\|_1 < \infty$, d. h. f und f_n sind integrierbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X (f_n - f) d\mu \right) = 0$. Dann können wir auch o. B. d. A. annehmen, dass $f = 0$, d. h. $f_n \rightarrow 0$ μ -fast überall. Da das Vorzeichen ebenfalls keine Rolle spielt, können wir auch noch o. B. d. A. annehmen, dass $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da $f_n \rightarrow 0$ und $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ können wir zusätzlich noch o. B. d. A. annehmen, dass $f_n \searrow 0$, d. h. , dass (f_n) monoton fallend ist. Sonst können wir einfach zu einer monotonen Teilfolge übergehen. Da $f_n \leq g$, also $g - f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g - f_n \rightarrow g$ für $n \rightarrow \infty$, können wir den Satz der monotonen Konvergenz [II.8](#) anwenden und wir

erhalten

$$\int_X g \, d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X (g - f_n) \, d\mu \right) = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (g - f_n) \right) d\mu = \int_X g \, d\mu$$

$$\text{d. h. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right) = 0. \quad \square$$

Beispiel. Ist die Voraussetzung, dass eine absolute Majorante $g \in \mathfrak{L}^1$ existiert, sodass $|f| \leq g$ μ -fast überall, so ist sind Integral- und Limesbildung i. A. nicht vertauschbar. Betrachten wir nämlich die Folge $(\chi_{[n,n+1]})_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$. Wir sehen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $\int_X \chi_{[n,n+1]} \, d\mu = 1 < \infty$ gilt, also $\chi_{[n,n+1]} \in \mathfrak{L}^1$. Außerdem konvergiert $(\chi_{[n,n+1]})$ punktweise, denn es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[n,n+1]} = 0$. Allerdings ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X \chi_{[n,n+1]} \, d\mu \right) = 1 \neq 0 = \int_X 0 \, d\mu = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[n,n+1]} \right) d\mu$$

Es gibt jedoch keine integrierbare Majorante, denn es gilt

$$\min \left\{ g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : \chi_{[n,n+1]} \leq g \right\} = \chi_{[1,\infty]}$$

und $\int_X \chi_{[1,\infty]} \, d\mu = \infty$, also ist schon diese kleinste Majorante nicht integrierbar.

16. Dezember 2019

Korollar II.29. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, sodass $f_n \rightarrow f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ μ -fast überall. Existiert eine μ -integrierbare absolute Majorante $g \in \mathcal{M}_{[0,\infty]} \cap \mathfrak{L}^1$ für alle f_n , so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.

Beweis. Mit der Dreiecksungleichung gilt $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g \in \mathfrak{L}^1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $|f_n - f|$ wird also absolut von einer integrierbaren Funktion majorisiert. Nach dem Satz der majorisierten Konvergenz II.28 gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - f) \right\|_1 = \|0\|_1 = 0$$

$\square$

Aus dem letzten Korollar leitet sich ein weiterer *natürlicher* Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen ab.

Definition II.30 (Konvergenz im Mittel). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum sowie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathfrak{L}^1)^\mathbb{N}$ eine Folge integrierbarer Funktionen. Wir sagen, (f_n) konvergiert für $n \rightarrow \infty$ im Mittel gegen eine integrierbare Funktion $f \in \mathfrak{L}^1$, g. d. w. $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Satz II.30 (majorisierte Konvergenz, Reformulierung). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{\mathbb{R}})^\mathbb{N}$ eine Folge messbarer Funktionen, sodass $f_n \rightarrow f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ μ -fast überall. Existiert eine μ -integrierbare absolute Majorante $g \in \mathcal{M}_{[0, \infty]} \cap \mathfrak{L}^1$ für alle f_n , d. h. gilt $|f_n| \leq g$ μ -fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist f μ -integrierbar und (f_n) konvergiert im Mittel gegen f , d. h. $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Bemerkung. Umgekehrt impliziert die Konvergenz im Mittel jedoch nicht die punktweise Konvergenz. Sei dazu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ eine Folge messbarer Mengen, sodass $\|\chi_{A_n}\|_1 = \mu(A_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \infty$, d. h. $\mu(A_n)$ soll zwar gegen 0 konvergieren, das aber so langsam, dass die Reihe noch bestimmt divergiert. Dann konvergiert (χ_{A_n}) zwar per Annahme im Mittel gegen 0, jedoch konvergiert (χ_{A_n}) nicht punktweise μ -fast überall.

Für ein anderes, konkreteres Beispiel betrachten wir die Familie $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist durch

$$I_n := [2^{-i(n)}(n - 2^{i(n)}), 2^{-i(n)}(n - 2^{i(n)} + 1)]$$

wobei wiederum $i(n)$ definiert ist durch $i(n) := \max \{ k \in \mathbb{N} \mid 2^k \leq n \}$. I_n , ein Intervall der Länge $2^{-i(n)}$, durchläuft für $i(n) \leq n < i(n+1)$ das Einheitsintervall vollständig, d. h. $\bigcup_{n=i(n)}^{i(n+1)-1} I_n = [0, 1]$. Die Intervalllänge nimmt im nächsten Zyklus um die Hälfte ab. Insgesamt ist dann also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{I_n}\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{I_n} d\lambda^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^1(I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{i(n)}} = 0$$

χ_{I_n} konvergiert also im Mittel gegen 0. Jedoch durchläuft I_n in jedem Zyklus das Einheitsintervall vollständig, χ_{I_n} konvergiert in ganz $[0, 1]$ demnach nicht punktweise gegen 0.

Satz II.31. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathfrak{L}^1)^\mathbb{N}$ eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge integrierbarer Funktionen. Es gelten folgende Aussagen:

- (i) (f_n) konvergiert im Mittel gegen eine integrierbare Funktion $f \in \mathfrak{L}^1$, d. h. es gilt $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

- (ii) Es existiert eine Teilfolge $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ von (f_n) , sodass (f_{n_i}) μ -fast überall gegen eine integrierbare Funktion $f \in \mathfrak{L}^1$ konvergiert.

Beweis. Per Annahme gilt $\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}_{\geq n} : \|f_n - f_m\|_1 \leq \varepsilon$. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$ gilt, dass $\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2^n}$, denn ansonsten können wir zu einer geeigneten Teilfolge übergehen. Dann gilt auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f_{n+1}\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1 < \infty$$

Wegen $\sum_{i=1}^n |f_n - f_{n+1}| \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^n |f_n - f_{n+1}| \nearrow \sum_{i=1}^{\infty} |f_n - f_{n+1}|$ ist somit wegen des Satzes der Monotonen Konvergenz II.8 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n+1}| \in \mathfrak{L}^1$, also insbesondere $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n+1}| < \infty$ μ -fast überall.

Somit ist $f_1 - f_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n+1}| < \infty$ μ -fast überall. Somit konvergiert auch (f_n) selbst μ -fast überall, d. h. es gilt (ii).

Außerdem gilt weiter wegen $|f_1 - f_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^n |f_n - f_{n+1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $|f_{n+1}| \leq |f_1| + \sum_{i=1}^n |f_n - f_{n+1}| \in \mathfrak{L}^1$, für alle $n \in \mathbb{N}$ wird $|f_{n+1}|$ bzw. $|f_n|$ also von einer integrierbaren Funktion absolut majorisiert. Mit dem Satz der monotonen Konvergenz II.8 folgt dann $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$, also (i). □

Korollar II.32 (Satz von Riesz-Fischer). Der normierte Vektorraum $(L^1, \|\cdot\|_1)$ ist vollständig.

II.4. Maße mit Dichten

Definition II.31 (Dichte, relativ). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\rho \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$. Sei weiter $\nu := \rho\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ das Maß auf $(X, \mathcal{A})$ definiert durch

$$\nu(A) := (\rho\mu)(A) := \int_X \chi_A \rho d\mu = \int_A \rho d\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Wir nennen dann ρ die *Dichte* von ν relativ zu μ .

Lemma II.33. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\rho \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$. Die Abbildung $\rho\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ist wirklich ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$.

Beweis. Es gilt $(\rho\mu)(\emptyset) = \int_X \chi_{\emptyset} \rho d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$. Um die σ -Additivität zu zeigen, sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter messbarer Mengen. Wegen

$\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} \nearrow \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}$, somit also $\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} \rho \nearrow \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} \rho$, und $\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} \rho \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der Linearität des Integrals und dem Satz der monotonen Konvergenz [II.8](#), dass

$$\begin{aligned} (\rho\mu)\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) &= \int_X \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} \rho \, d\mu \stackrel{(i)}{=} \\ &\stackrel{(i)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} \rho \, d\mu \right) \stackrel{(ii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (\rho\mu)(A_i) \right) = \sum_{i=1}^\infty (\rho\mu)(A_i) \end{aligned}$$

wobei der Satz der monotonen Konvergenz [II.8](#) explizit bei (i) und die Linearität des Integrals auf charakteristischen Funktionen bei (ii) verwendet wurde. Also ist $\rho\mu$ σ -additiv und somit insgesamt ein Maß. $\square$

Lemma II.34. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\rho, \rho' \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$. Es gelten folgende Aussagen:

- (i) Für alle Mengen $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gilt $(\rho\mu)(N) = 0$, d. h. μ -Nullmengen sind auch $(\rho\mu)$ -Nullmengen.
- (ii) Für alle nichtnegativen messbaren Funktionen $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ ist

$$\int_X f \, d(\rho\mu) = \int_X (f\rho) \, d\mu \quad (\text{II.C})$$

- (iii) Eine messbare numerische Funktionen $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist genau dann $(\rho\mu)$ -integrierbar, wenn $f\rho$ μ -integrierbar ist.
- (iv) Es gilt $\rho'(\rho\mu) = (\rho'\rho)\mu$

Beweis. (i): Sei $N \in \mathcal{A}$ und $\mu(N) = 0$. Es gilt

$$(\rho\mu)(N) = \int_X \chi_N \rho \, d\mu \leq (\mu \otimes \beta^1)\left(N \times \left[0, \sup_{x \in X} \rho(x)\right]\right) = \underbrace{\mu(N)}_{=0} \cdot \beta^1\left(\left[0, \sup_{x \in X} \rho(x)\right]\right) = 0$$

wobei wir die Konvention $0 \cdot \infty = 0$ verwenden, falls $\sup_{x \in X} \rho(x) = \infty$. Also ist N auch eine $(\rho\mu)$ -Nullmenge.

- (ii): Die Gleichung [II.C](#) gilt für charakteristische Funktionen, denn für $A \in \mathcal{A}$ ist

$$\int_X \chi_A \, d(\rho\mu) = (\rho\mu)(A) = \int_X (\chi_A \rho) \, d\mu$$

Aufgrund der Linearität des Integrals gilt [II.C](#) auch für nichtnegative Linearkombinationen charakteristischer Funktionen, d. h. für nichtnegative Treppenfunktionen. Sind

nämlich $\tau \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}[0, \infty]$, sodass für $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ und $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty]$ $\tau = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \chi_{A_i}$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_X \tau \, d(\rho\mu) &= \int_X \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \chi_{A_i} \right) d(\rho\mu) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \left(\int_X \chi_{A_i} \, d(\rho\mu) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \left(\int_X \chi_{A_i} \rho \, d\mu \right) = \int_X \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \chi_{A_i} \rho \right) d\mu = \int_X \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \chi_{A_i} \right) \rho \right) d\mu = \int_X (\tau \rho) \, d\mu \end{aligned}$$

Schließlich gilt (II.C) auch auf ganz $\mathcal{M}_{[0, \infty]}$, denn jede nichtnegative Funktion ist der monotone Limes einer aufsteigenden Folge von nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen. Sei nämlich $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$. Dann finden wir eine Folge nichtnegativer messbarer Treppenfunktionen $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$ mit $\tau_n \nearrow f$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_X f \, d(\rho\mu) &= \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \right) d(\rho\mu) \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X \tau_n \, d(\rho\mu) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X (\tau_n \rho) \, d\mu \right) \stackrel{(*)}{=} \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \rho \right) d\mu = \int_X (f \rho) \, d\mu \end{aligned}$$

wobei bei (*) jeweils der Satz der monotonen Konvergenz II.8 verwendet wurde.

(iii): Sei $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_1^{(\rho\mu)} &= \|f^+\|_1^{(\rho\mu)} - \|f^-\|_1^{(\rho\mu)} = \int_X f^+ \, d(\rho\mu) - \int_X f^- \, d(\rho\mu) = \\ &= \int_X (f^+ \rho) \, d\mu - \int_X (f^- \rho) \, d\mu = \int_X (f \rho)^+ \, d\mu - \int_X (f \rho)^- \, d\mu = \\ &= \|(f \rho)^+\|_1^\mu - \|(f \rho)^-\|_1^\mu = \|f \rho\|_1^\mu \end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|_1^{(\rho\mu)}$ die 1-Norm bezüglich $\rho\mu$ und $\|\cdot\|_1^\mu$ die 1-Norm bezüglich μ bezeichnet. Also ist $\|f\|_1^{(\rho\mu)} < \infty$ g. d. w. $\|f \rho\|_1^\mu < \infty$, d. h. es gilt $f \in \mathfrak{L}^1(X, \mathcal{A}, \rho\mu)$ g. d. w. $f \rho \in \mathfrak{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Mit anderen Worten ist also f genau dann $(\rho\mu)$ -integrierbar, wenn $f \rho$ μ -integrierbar ist.

(iv): Sei $A \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$(\rho'(\rho\mu))(A) = \int_X (\chi_A \rho') \, d(\rho\mu) \stackrel{(*)}{=} \int_X (\chi_A \rho' \rho) \, d\mu = ((\rho' \rho)\mu)(A)$$

wobei bei (*) die Gleichung (II.C) verwendet wurde. □

Lemma II.35. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}_{[0, \infty]} \cap \mathfrak{L}^1$. Ist μ endlich, so gilt $\rho_1 \mu = \rho_2 \mu$ g. d. w. $\rho_1 =_\mu \rho_2$.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{A}$ und zunächst $\rho_1 =_\mu \rho_2$. Es gilt

$$(\rho_1 \mu)(A) = \int_X (\chi_A \rho_1) d\mu = \int_X (\chi_A \rho_2) d\mu = (\rho_2 \mu)(A)$$

Also ist $\rho_1 \mu = \rho_2 \mu$.

Sei nun $\rho_1 \mu = \rho_2 \mu$ und weiter $\varepsilon > 0$. Wir betrachten im Folgenden die Menge $A_\varepsilon := \{ \rho_1 \geq \rho_2 + \varepsilon \} \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$0 = \underbrace{(\rho_1 \mu)(A_\varepsilon)}_{< \infty} - \underbrace{(\rho_2 \mu)(A_\varepsilon)}_{< \infty} = \int_X (\chi_{A_\varepsilon} (\rho_1 - \rho_2)) \geq \varepsilon \cdot \mu(A_\varepsilon)$$

Daher ist $\varepsilon \cdot \mu(A_\varepsilon) = 0$ und, wegen $\varepsilon > 0$, $\mu(A_\varepsilon) = 0$. Somit gilt für die Menge $\{ \rho_1 \geq \rho_2 \} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$, dass

$$\mu(\{ \rho_1 \geq \rho_2 \}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{\frac{1}{n}}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Analog ist auch $\{ \rho_1 < \rho_2 \}$ eine μ -Nullmenge. Insgesamt ist demnach

$$\mu(\{ \rho_1 \neq \rho_2 \}) = \mu(\{ \rho_1 \geq \rho_2 \}) + \mu(\{ \rho_1 < \rho_2 \}) = 0$$

und somit $\rho_1 =_\mu \rho_2$. □

Im Folgenden suchen wir ein Kriterium dafür, wann ein Maß relativ zu einem anderen Maß eine Dichte besitzt:

Definition II.32 (absolute Stetigkeit). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und ν ein weiteres Maß auf $(X, \mathcal{A})$. ν heißt *absolut stetig* g. d. w. alle μ -Nullmengen auch ν -Nullmengen sind, also g. d. w. für alle $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gilt, dass $\nu(N) = 0$. Wir schreiben in diesem Fall $\nu \ll \mu$.

Satz II.36 (Radon-Nikodým). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und ν ein weiteres Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Ist μ σ -endlich und $\nu \ll \mu$, so besitzt ν eine Dichte relativ zu μ , d. h. es existiert eine messbare numerische Funktion $\rho \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$, sodass $\nu = \rho \mu$.

Korollar II.37. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und ν ein weiteres Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Ist μ σ -endlich, so ist $\nu \ll \mu$ g. d. w. ν eine Dichte relativ zu μ besitzt, also g. d. w. eine messbare numerische Funktion $\rho \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ existiert, sodass $\nu = \rho \mu$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma II.35 und dem Satz von Radon-Nikodým II.36. $\square$

Beispiel (Stieltjes-Inhalt). Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann ist der Stieltjes-Inhalt auf $\mathcal{Q}^1$ definiert durch $\mu_F|_{\mathcal{Q}^1}([a, b)) := F(b) - F(a)$. Wir können $\mu_F|_{\mathcal{Q}^1}$ eindeutig zu einem Inhalt $\mu_F|_{\mathcal{F}^1}$ auf dem Ring $\mathcal{F}^1$ fortsetzen. $\mu_F|_{\mathcal{F}^1}$ ist genau dann ein Prämaß, wenn F rechtsseitig stetig ist. In diesem Fall ist $\mu_F|_{\mathcal{F}^1}$ σ -endlich, lässt sich also eindeutig zu einem Maß μ_F auf $\mathcal{B}^1$ fortsetzen. Ist F von der Klasse C^1 , so gilt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\mu_F([a, b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_{[a, b)} F' d\beta^1 = \int_{[a, b)} F' d\beta^1 = (F'\beta^1)([a, b))$$

Also ist $\mu_F|_{\mathcal{Q}^1} = (F'\beta^1)|_{\mathcal{Q}^1}$ und weiter, aufgrund der Eindeutigkeit der Fortsetzung auf den Ring $\mathcal{F}^1$, $\mu_F|_{\mathcal{F}^1} = (F'\beta^1)|_{\mathcal{F}^1}$. Wegen der eindeutigen Fortsetzbarkeit σ -endlicher Prämaße, ist dann schließlich $\mu_F = F'\beta^1$.

Ist F ein C^1 -Diffeomorphismus gilt $\mu_F = F^{-1*}\beta^1$, analog wie zuvor zunächst auf $\mathcal{Q}^1$, dann auf $\mathcal{F}^1$ und letztlich auf $\mathcal{B}^1$. Daher ist $F^{-1*}\beta^1 = F'\beta^1$. Dies ist ein Spezialfall ($d = 1$) der allgemeinen Transformationsformel (s. u.).

Beispiel (Volumen, d -dimensionale Kugel). Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\tilde{r} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ die Radiusfunktion gegeben durch $\tilde{r}(x) = \|x\|_2$, wobei $\|\cdot\|_2$ die d -dimensionale euklidische 2-Norm bezeichnet. Wir betrachten im Folgenden das Bildmaß $\tilde{r}_*\lambda^d$ auf $[0, \infty)$.

Sei $R \geq 0$. Es gilt

$$(\tilde{r}_*\lambda^d)([0, R]) = \lambda^d(\tilde{r}^{-1}([0, R])) = \lambda^d(\overline{B}_R(0)) = R^d \cdot \lambda^d(\overline{B}_1(0))$$

und weiter für $R_2 > R_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} (\tilde{r}_*\lambda^d)([R_1, R_2]) &= \lambda^d(\tilde{r}^{-1}([R_1, R_2])) = \lambda^d(\overline{B}_{R_2}(0) \setminus \overline{B}_{R_1}(0)) \\ &= \lambda^d(\overline{B}_{R_2}(0)) - \lambda^d(\overline{B}_{R_1}(0)) = R_2^d \cdot \lambda^d(\overline{B}_1(0)) - R_1^d \cdot \lambda^d(\overline{B}_1(0)) \\ &= \lambda^d(\overline{B}_1(0)) \cdot (R_2^d - R_1^d) = \lambda^d(\overline{B}_1(0)) \cdot d \cdot \left[\frac{r^d}{d} \right]_{R_1}^{R_2} \\ &= \lambda^d(\overline{B}_1(0)) \cdot d \cdot \left(\int_{R_1}^{R_2} r^{d-1} dr \right) = \lambda^d(\overline{B}_1(0)) \cdot d \cdot \left(\int_{[R_1, R_2]} r^{d-1} d\lambda^1(r) \right) \\ &= \left(d \cdot \lambda^d(\overline{B}_1(0)) \cdot r^{d-1} \right) \lambda^1|_{[0, \infty)}([R_1, R_2]) \end{aligned}$$

Somit ist $r_*\lambda^d = (d \cdot \lambda^d(\overline{B}_1(0)) \cdot r^{d-1})\lambda^1|_{[0,\infty)}$ zunächst auf $\mathcal{Q}^1$, dann durch eindeutige Fortsetzung auf $\mathcal{F}^1$, und schließlich auf $\mathcal{B}^d$ bzw. $\mathcal{L}^d$, denn beide Maße verschwinden auf β^d -Nullmengen.

II.5. Produktmaße und Mehrfachintegrale

II.5.1. Integraldarstellung von Produktmaßen und Cavalieri-Prinzip

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume. Wir wissen, dass es ein eindeutiges Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gibt, sodass $(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$ für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Im Folgenden werden wir eine Integraldarstellung von $\mu_1 \otimes \mu_2$ im Sinne von *Cavalieri* angeben.

Definition II.33 (Querschnitt). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, \dots, X_n$ Mengen und $M \subseteq \prod_{i=1}^n X_i$. Wir definieren für $x_1 \in X_1$ den *Querschnitt* von M durch x_1 als Menge $M_{x_1} \subseteq \prod_{i=2}^n X_i$, sodass $M \cap (\{x_1\} \times X_2 \times \dots \times X_n) = \{x_1\} \times M_{x_1}$.

Bemerkung.

- (i) Ist $M \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$, so gilt $M_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ für alle $x_1 \in X_1$.
- (ii) Analog definiert man den Querschnitt durch ein $x_n \in X_n$ bzw. allgemeiner den Durchschnitt durch ein $x_i \in X_i$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$.

Satz II.38. Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume sowie $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Die Funktion $\varphi : X_1 \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch $x_1 \mapsto \mu_2(M_{x_1})$ ist messbar, d. h. $\varphi \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1, \mathcal{A}_1)$ und es gilt

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(M) = \int_{X_1} \varphi \, d\mu_1 = \int_{X_1} \mu_2(M_{x_1}) \, d\mu_1(x_1)$$

18. Dezember 2019

Beweis. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die Familie der Mengen M , für die die Aussage des Satzes gilt. Zu zeigen ist dann, dass $\mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Zuerst beobachten wir, dass $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{F}$, denn für $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) = \int_{X_1} \chi_{A_1} \mu_2(A_2) d\mu_1 = \int_{X_1} \mu_2(M_{x_1}) d\mu_1(x_1)$$

Als nächstes sehen wir, dass $\mathcal{F}$ ein Dynkin-System ist, $\mathcal{F}$ also die Eigenschaften

(α) $\emptyset \in \mathcal{F}$, (β) σ - $\cup$ -Stabilität und (γ) $\cap$ -Stabilität erfüllt:

(α): Wegen $\emptyset \in \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ ist $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(β): Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{F}$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\mu_1 \otimes \mu_2)\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) &\stackrel{(i)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_1 \otimes \mu_2)(M_n) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{X_1} \mu_2((M_n)_{x_1}) d\mu_1(x_1) \right) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \int_{X_1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_2((M_k)_{x_1}) \right) d\mu_1(x_1) \\ &\stackrel{(iv)}{=} \int_{X_1} \mu_2\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (M_n)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) \\ &\stackrel{(v)}{=} \int_{X_1} \mu_2\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) \end{aligned}$$

Dabei benötigen wir bei (i) die σ -Additivität von $\mu_1 \otimes \mu_2$, bei (ii), dass $M_n \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, bei (iii) den Satz der monotonen Konvergenz [II.8](#), bei (iv) die σ -Additivität von μ_2 und bei (v), dass $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n)_{x_1} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (M_n)_{x_1}$ für alle $x_1 \in X_1$.

(γ) Sei $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Fall 1: Sei $\mu_1 \otimes \mu_2$ endlich. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathfrak{C}M) &= (\mu_1 \otimes \mu_2)\left((X_1 \times X_2) \setminus M\right) \\
&\stackrel{(i)}{=} (\mu_1 \otimes \mu_2)(X_1 \times X_2) - (\mu_1 \otimes \mu_2)(M) \\
&\stackrel{(ii)}{=} \int_{X_1} \mu_2\left((X_1 \times X_2)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) - \int_{X_1} \mu_2(M_{x_1}) d\mu_1(x_1) \\
&\stackrel{(iii)}{=} \int_{X_1} \left(\mu_2\left((X_1 \times X_2)_{x_1}\right) - \mu_2(M_{x_1})\right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \mu_2\left((X_1 \times X_2)_{x_1} \setminus M_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) \\
&\stackrel{(iv)}{=} \int_{X_1} \mu_2\left(\left((X_1 \times X_2) \setminus M\right)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \mu_2\left((\mathfrak{C}M)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1)
\end{aligned}$$

Dabei wurde bei (i) verwendet, dass $(\mu_1 \otimes \mu_2)(X_1 \times X_2) < \infty$ und bei (ii), dass $X_1 \times X_2 \in \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{F}$ sowie $M \in \mathcal{F}$. (iii) folgt dann mit der Linearität des Integrals und (iv) mit $(X_1 \times X_2)_{x_1} \setminus M_{x_1} = \left((X_1 \times X_2) \setminus M\right)_{x_1}$ für alle $x_1 \in X_1$.

Fall 2: Seien nun $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endlich. Dann ist nach Lemma I.63 auch $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ σ -endlich. Wir finden aufsteigende Familien $(A_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{A}_1)^\mathbb{N}$ und $(A_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{A}_2)^\mathbb{N}$ messbarer Mengen mit $A_n^{(1)} \nearrow X_1$ und $A_n^{(2)} \nearrow X_2$, sodass $\mu_1(A_n^{(1)}), \mu_2(A_n^{(2)}) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann $A_n^{(1)} \times A_n^{(2)} \nearrow X_1 \times X_2$ und $(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_n^{(1)} \times A_n^{(2)}) = \mu_1(A_n^{(1)}) \cdot \mu_2(A_n^{(2)}) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathfrak{C}M) &\stackrel{(i)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left((\mu_1 \otimes \mu_2)\left(\mathfrak{C}M \cap (A_n^{(1)} \times A_n^{(2)})\right) \right) \\
&\stackrel{(ii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left((\mu_1|_{A_n^{(1)}} \otimes \mu_2|_{A_n^{(2)}})\left(\mathfrak{C}M \cap (A_n^{(1)} \times A_n^{(2)})\right) \right) \\
&\stackrel{(iii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{A_n^{(1)}} \mu_2|_{A_n^{(2)}}\left(\left(\mathfrak{C}M \cap (A_n^{(1)} \times A_n^{(2)})\right)_{x_1}\right) d\mu_1|_{A_n^{(1)}}(x_1) \right) \\
&\stackrel{(iv)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{X_1} \chi_{A_n^{(1)}}(x_1) \mu_2|_{A_n^{(2)}}\left(\left(\mathfrak{C}M \cap (A_n^{(1)} \times A_n^{(2)})\right)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) \right) \\
&\stackrel{(v)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{X_1} \chi_{A_n^{(1)}}(x_1) \mu_2\left(\left(\mathfrak{C}M \cap (A_n^{(1)} \times A_n^{(2)})\right)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) \right) \\
&\stackrel{(vi)}{=} \int_{X_1} \chi_X(x_1) \mu_2\left(\left(\mathfrak{C}M \cap (X_1 \times X_2)\right)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \mu_2\left((\mathfrak{C}M)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1)
\end{aligned}$$

Dabei wurde bei (i) die Stetigkeit von unten des Maßes $\mu_1 \otimes \mu_2$ und bei (ii) die Definition der Einschränkung eines Maßes verwendet. (iii) folgt dann aus Fall 1, da für jedes

$n \in \mathbb{N}$ der Maßraum $(A_n^{(1)} \times A_n^{(2)}, \mathcal{A}_1|_{A_n^{(1)}} \otimes \mathcal{A}_2|_{A_n^{(2)}}, \mu_1|_{A_n^{(1)}} \otimes \mu_2|_{A_n^{(2)}})$ endlich ist. Weiter gilt (iv) mit der Definition der Lokalisierung des Integrals, d. h. der Einschränkung des Integrals auf Teilmengen, (v) mit der Definition der Einschränkung eines Maßes und schließlich (vi) mit dem Satz der monotonen Konvergenz **II.8**.

Also ist $\mathcal{F}$ ein Dynkin-System. Es gilt demnach insgesamt

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2)$$

Da aber $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ $\cap$ -stabil ist, ist nach Satz **I.28** $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2)$ und somit $\mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. $\square$

Korollar II.39 (Cavalieri-Prinzip). Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume, sowie $M, M' \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Gilt $\mu_2(M) = \mu_1 \mu_2(M')$, d. h. $\mu_2(M_{x_1}) = \mu_2(M'_{x_1})$ für μ_1 -fast alle $x_1 \in X_1$, so ist $(\mu_1 \otimes \mu_2)(M) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(M')$.

Bemerkung. Vgl. Kunstinstallation mit Leuchtstoffröhren „monuments‘ for V. Tatlin“ von Dan Flavin in der Pinakothek der Moderne.

Beweis. Nach Satz **II.38** gilt

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(M) = \int_{X_1} \mu_2(M_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \mu_2(M'_{x_1}) d\mu_1(x_1) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(M')$$

$\square$

Beispiel (Volumen, Kegel). Ein messbarer d -dimensionaler Kegel K besteht aus einer ($\mathbb{R}^{d-1}$ -dimensionalen) messbaren Grundfläche $B \subseteq \mathbb{R}^d$ und einer Höhe $h \in \mathbb{R}^d$. Wir können somit den $\mathbb{R}^d$ geeignet isometrisch transformieren, um eine geeignete Zerlegung $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ zu finden, sodass $B = \tilde{B} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ und $h = (0, \dots, 0, \tilde{h}) \in \{0\}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda^d(K) = \int_{[0, \tilde{h}]} \lambda^{d-1}(K_t) d\lambda(t) = \int_{[0, \tilde{h}]} (1 - \frac{t}{\tilde{h}})^{d-1} \cdot \lambda^{d-1}(B) d\lambda(t) = \frac{\tilde{h}}{d} \cdot \lambda^{d-1}(B)$$

Bezeichnet conv die Konvexe Hülle und ist (e_i) die Standardbasis des $\mathbb{R}^d$, so gilt für das d -dimensionale Standard-Simplex $\Delta_d = \text{conv} \{0, e_1, \dots, e_d\} \subseteq \mathbb{R}^d$ die Rekursionsformel $\lambda^d(\Delta_d) = \frac{1}{d} \cdot \lambda^{d-1}(\Delta_{d-1})$. Mit Induktion folgt dann $\lambda^d(\Delta_d) = \frac{1}{d!}$.

Beispiel (Volumen, Kugel).



II.5.2. Mehrfachintegrale und Satz von Fubini

Satz II.40 (Fubini, nichtnegative Funktionen). Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume und $f \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Die Abbildung $\varphi : X_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2$ ist μ_1 -messbar, d. h. $\varphi \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1, \mathcal{A}_1)$ und es gilt

$$\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \varphi d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$$

Beweis. Die Aussage gilt für charakteristische Funktionen messbarer Teilmengen. Ist nämlich $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} \chi_M d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= (\mu_1 \otimes \mu_2)(M) = \int_{X_1} \mu_2(M_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \\ &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \chi_{M_{x_1}}(x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \chi_M(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \end{aligned}$$

Mit der Linearität des Integrals folgt die Behauptung dann für alle nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen: Ist τ eine solche nichtnegative messbare Treppenfunktion, so finden wir $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty]$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, sodass $\tau = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} \tau d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1 \times X_2} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \right) d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \left(\int_{X_1 \times X_2} \chi_{A_i} d(\mu_1 \otimes \mu_2) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} \chi_{A_i}(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \right) \\ &= \int_{X_1} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \left(\int_{X_2} \chi_{A_i}(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \right) \\ &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x_1, x_2) \right) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \tau(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \end{aligned}$$

Mit dem Satz der monotonen Konvergenz II.8 gilt die Aussage dann für alle nichtnegativen messbaren Funktionen: Ist nun $f \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$, so finden wir eine monoton wachsende Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{[0,\infty]})^{\mathbb{N}}$ nichtnegativer messbarer Treppenfunktionen mit $\tau_n \nearrow f$ für

$n \rightarrow \infty$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{X_1 \times X_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1 \times X_2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \right) d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{X_1 \times X_2} \tau_n \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} \tau_n(x_1, x_2) \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \right) \\
&= \int_{X_1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{X_2} \tau_n(x_1, x_2) \, d\mu_2(x_2) \right) \right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n(x_1, x_2)) \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)
\end{aligned}$$

□

Satz II.41 (Fubini, integrierbare Funktionen). Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume und $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Es gilt:

- (i) Für μ_1 -fast alle $x_1 \in X_1$ ist die Funktion $f(x_1, \cdot)$ μ_2 -integrierbar, d. h. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$
- (ii) Die μ_1 -fast überall definierte Funktion $\varphi : X_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot) \, d\mu_2$ ist μ_1 -integrierbar, d. h. $\varphi \in \mathcal{L}^1(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$
- (iii)

$$\int_{X_1 \times X_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \varphi \, d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$$

Beweis. Aus der $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ -Integrierbarkeit von f folgt die $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ -Integrierbarkeit des Positivanteils f^+ bzw. des Negativanteils f^- . Mit dem Satz von Fubini für nichtnegative Funktionen [II.40](#) folgt dann jeweils für Positiv- und Negativanteil

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f^\pm(x_1, x_2) \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1 \times X_2} f^\pm(x_1, x_2) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$$

Also ist $\int_{X_2} f^\pm(x_1, \cdot) \, d\mu_2 < \infty$ für μ_1 -fast alle $x_1 \in X_1$. Somit gilt für μ_1 -fast alle

$$\|f(x_1, \cdot)\|_1 = \int_{X_2} f^+(x_1, \cdot) \, d\mu_2 + \int_{X_2} f^-(x_1, \cdot) \, d\mu_2 < \infty$$

D. h. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ für μ_1 -fast alle $x_1 \in X_1$, also (i).

Weiter ist die Abbildung $\psi : X_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $x_1 \mapsto \int_{X_2} f^+(x_1, \cdot) d\mu_2 - \int_{X_2} f^-(x_1, \cdot) d\mu_2$ μ_1 -fast überall definiert und es gilt $\psi = \varphi$. Für das Integral ist dann

$$\begin{aligned}
\int_{X_1} \varphi d\mu_1 &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} (f^+(x_1, x_2) - f^-(x_1, x_2)) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f^+(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) - \int_{X_2} f^-(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f^+(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) - \\
&\quad - \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f^-(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1 \times X_2} f^+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int_{X_1 \times X_2} f^- d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&= \int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2)
\end{aligned}$$

D. h. es gilt (iii) und weiter $\varphi \in \mathfrak{L}^1(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, demnach also auch (ii). $\square$

Korollar II.42. Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume und $f \in \mathfrak{L}^1(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Die Integrationsreihenfolge darf vertauscht werden, d. h. es gilt

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)$$

Beweis. Mit dem Satz von Fubini für integrierbare Funktionen [II.41](#) und der Tatsache, dass wir die Reihenfolge der Faktoren in $X_1 \times X_2$, $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ bzw. $\mu_1 \otimes \mu_2$ vertauschen dürfen (Lemma [I.62](#)), folgt

$$\begin{aligned}
\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) &= \int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \\
&= \int_{X_2 \times X_1} f d(\mu_2 \otimes \mu_1) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)
\end{aligned}$$

$\square$

19. Dezember 2019

II.6. Transformation von Maßen und Integration unter Abbildungen

II.6.1. Allgemeine Transformationsformel: Integration relativ zu Bildmaßen

Satz II.43 (Transformationssatz). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathcal{B})$ ein Messraum und $\Phi : X \rightarrow Y$ eine $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbare Abbildung. Es gelten folgenden Aussagen:

(i) Ist $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(Y, \mathcal{B})$, so gilt

$$\int_Y f \, d(\Phi_*\mu) = \int_X (f \circ \Phi) \, d\mu$$

(ii) Eine Abbildung $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(Y, \mathcal{B})$ ist $(\Phi_*\mu)$ -integrierbar g. d. w. $f \circ \Phi$ μ -integrierbar ist. In diesem Fall gilt ebenfalls

$$\int_Y f \, d(\Phi_*\mu) = \int_X (f \circ \Phi) \, d\mu$$

Beweis. (i): Sei $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(Y, \mathcal{B})$. Die Aussage gilt für charakteristische Funktionen messbarer Mengen, denn für $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$\int_Y \chi_B \, d(\Phi_*\mu) = (\Phi_*\mu)(B) = \mu(\Phi^{-1}(B)) = \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \, d\mu = \int_X (\chi_B \circ \Phi) \, d\mu$$

Mit der Linearität des Integrals (Satz [II.21](#)) folgt die Behauptung nun für nichtnegative Treppenfunktionen aus $\mathcal{M}_{[0, \infty]}(Y, \mathcal{B})$. Ist nämlich $\tau \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(Y, \mathcal{B})$ eine solche nichtnegative Treppenfunktion, d. h. finden wir $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty]$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$, sodass $\tau = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_Y \tau \, d(\Phi_*\mu) &= \int_Y \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \right) d(\Phi_*\mu) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \left(\int_Y \chi_{A_i} \, d(\Phi_*\mu) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \left(\int_X (\chi_{A_i} \circ \Phi) \, d\mu \right) = \int_X \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (\chi_{A_i} \circ \Phi) \right) d\mu \\ &= \int_X \left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \right) \circ \Phi \right) d\mu = \int_X (\tau \circ \Phi) \, d\mu \end{aligned}$$

Der Satz der Monotonen Konvergenz [II.8](#) liefert die Behauptung schließlich für alle $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(Y, \mathcal{B})$. Ist nämlich $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(Y, \mathcal{B})$, so finden wir eine monotone Folge

$(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_{[0, \infty]}(Y, \mathcal{B}))^{\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, sodass $\tau_n \nearrow f$ für $n \rightarrow \infty$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int_Y f \, d(\Phi_* \mu) &= \int_Y \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \right) d(\Phi_* \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_Y \tau_n \, d(\Phi_* \mu) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X (\tau_n \circ \Phi) \, d\mu \right) = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n \circ \Phi) \right) d\mu = \int_X (f \circ \Phi) \, d\mu \end{aligned}$$

(ii) Sei nun $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(Y, \mathcal{B})$. f ist genau dann $(\Phi_* \mu)$ -integrierbar, wenn sowohl der Positivanteil f^+ als auch der Negativanteil f^- $(\Phi_* \mu)$ -integrierbar ist. Für Positiv- und Negativanteil gilt nach (i) jeweils

$$\int_Y f^{\pm} \, d(\Phi_* \mu) = \int_X (f^{\pm} \circ \Phi) \, d\mu = \int_X (f \circ \Phi)^{\pm} \, d\mu$$

$f^{\pm}$ ist also genau dann $(\Phi_* \mu)$ -integrierbar, wenn $(f \circ \Phi)^{\pm}$ μ -integrierbar ist. Insgesamt ist also $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{B}, \Phi_* \mu)$ g. d. w. $f \circ \Phi \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Für das Integral gilt dann

$$\begin{aligned} \int_Y f \, d(\Phi_* \mu) &= \int_Y f^+ \, d(\Phi_* \mu) - \int_Y f^- \, d(\Phi_* \mu) = \\ &= \int_X (f \circ \Phi)^+ \, d\mu - \int_X (f \circ \Phi)^- \, d\mu = \int_X (f \circ \Phi) \, d\mu \end{aligned}$$

□

Definition II.34 (Rotationssymmetrie, Funktion). Sei $d \in \mathbb{N}$, X eine Menge sowie $f : \mathbb{R}^d \rightarrow X$ eine Funktion und bezeichne mit $r : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ die *Radiusfunktion*. Wir nennen f *rotationssymmetrisch* g. d. w. es eine Funktion $\bar{f} : [0, \infty) \rightarrow X$ gibt, sodass $f = \bar{f} \circ r$.

Beispiel (Integration rotationssymmetrischer Funktionen). Sei $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)$ eine messbare rotationssymmetrische Funktion, d. h. sei $\bar{f}$, sodass $f = \bar{f} \circ r$. Dann ist auch $\bar{f}$ messbar und nach dem Transformationssatz II.43 ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda^d)$ g. d. w. $\bar{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1, r_* \lambda^1)$. Für die Integrale gilt im integrierbaren Fall

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda^d = \int_{\mathbb{R}} \bar{f} \, d(r_* \lambda^d) = \int_{[0, \infty)} \bar{f} \, d(r_* \lambda^d)$$

Wir wissen bereits, dass $r_*\lambda^d = (d \cdot \lambda^d(\overline{B_1}(0)) \cdot r^{d-1})\lambda^1|_{[0,\infty)}$. Mit dem Transformationsatz [II.43](#) erhalten wir somit

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda^d = \int_{[0,\infty)} \bar{f} \, d(r_*\lambda^d) = d \cdot \lambda^d(\overline{B_1}(0)) \cdot \int_{[0,\infty)} (\bar{f}(r) \cdot r^{d-1}) \, d\lambda^1(r)$$

Beispielsweise gilt für $d = 2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda^2 = 2\pi \int_{[0,\infty)} (\bar{f}(r) \cdot r) \, d\lambda^1(r)$$

Diese Tatsache erlaubt uns, durch geschicktes Umformen, das uneigentliche Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, d\lambda^1(x)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, d\lambda^1(x) \right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} \, d\lambda^1(x_1) \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2} \, d\lambda^1(x_2) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2 - x_2^2} \, d\lambda^1(x_2) \right) \, d\lambda^1(x_1) \\ &\stackrel{(i)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2 - x_2^2} \, d\lambda^2(x_1, x_2) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2} \, d\lambda^2(x) \\ &\stackrel{(iii)}{=} 2\pi \int_{[0,\infty)} (e^{-r^2} \cdot r) \, d\lambda^1(r) \\ &= 2\pi \int_{[0,\infty)} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right)' \, d\lambda^1(r) \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \pi \end{aligned}$$

Dabei verwenden wir bei (i) den Satz von Fubini [II.41](#) bei (ii) die Erkenntnisse über die Integration rotationssymmetrischer Funktionen und bei (iii) die Definition der 2-Norm, d. h. hier $-\|x\|^2 = -(x_1^2 + x_2^2) = -x_1^2 - x_2^2$ für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Insgesamt gilt also $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, d\lambda^1(x) = \sqrt{\pi}$.

Beispiel (Volumen, Kugel, Forts.).



II.6.2. Transformation des Lebesgue-Maßes unter Diffeomorphismen

Das Transformationsverhalten von λ^d unter affinen Transformationen kennen wir bereits (Satz [I.78](#), Anm.): Für $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^d$ gilt $\Phi_{A,v*}\lambda^d = |\det A|^{-1} \lambda^d$. Also ist

$\Phi_{A,v*}\lambda^d \ll \lambda^d$, und die Konstante $|\det A|^{-1}$ die Dichte von $\Phi_{A,v*}\lambda^d$ relativ zu λ^d . Dass man sich anschaulich Diffeomorphismen als „infinitesimal affin“ vorstellen kann, motiviert den folgenden Satz.

Satz II.44 (Transformationsformel). Sei $d \in \mathbb{N}$, $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offene Teilmengen und $\Phi : U \longrightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Es gilt

$$\Phi_*(\beta^d|_U) = |\det d\Phi^{-1}| \beta^d|_V$$

Also ist $\Phi_*(\beta^d|_U) \ll \beta^d|_V$ und $|\det d\Phi^{-1}|$ die Dichte von $\Phi_*(\beta^d|_U)$ relativ zu $\beta^d|_V$. Sie ist mindestens von der Klasse C^0 , also stetig.

Beweis. Ist das Differential konstant, d. h. Φ selbst linear, so gilt die Behauptung nach Satz I.78. Um die Aussage allgemein zu zeigen, werden wir zuerst den wesentlichen Fall, nämlich den mit fast konstantem Differential, betrachten und die Erkenntnisse dann auf beliebige Diffeomorphismen anwenden.

Fall 1: Sei das Differential überall fast konstant, also $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ eine invertierbare lineare Abbildung, sodass $d\Phi_x \approx A$ für alle $x \in U$. Genauer gelte für $1 > \varepsilon > 0$ sowohl die Abschätzung $|\det(A^{-1} d\Phi_x) - 1| < \varepsilon$ als auch $\|A^{-1} d\Phi_x - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}\| < \varepsilon$ für alle $x \in U$, wobei $\|\cdot\|$ hier die Operatornorm bezeichnen soll.

Sei $(e_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^d$. Seien weiter $a \in \mathbb{R}^d$, sowie $l \in (0, \infty)$ und $e = \sum_{i=1}^d e_i = (1, \dots, 1)_{(e_i)}^T$. Dann ist $W := [a, l \cdot e)$ ein Würfel. Es gilt dann $(d(A^{-1}\Phi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}))_x = A^{-1} d\Phi_x - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$, dessen Operatornorm per Annahme durch ε beschränkt ist. Mit dem Schrankensatz aus *Analysis II* folgt für $x_1, x_2 \in W$

$$\begin{aligned} \|(A^{-1}\Phi(x_2) - A^{-1}\Phi(x_1)) - (x_2 - x_1)\| &= \|(A^{-1}\Phi(x_2) - x_2) - (A^{-1}\Phi(x_1) - x_1)\| \\ &= \|(A^{-1}\Phi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})(x_2) - (A^{-1}\Phi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})(x_1)\| \\ &\leq \varepsilon \cdot \|x_2 - x_1\|_2 \leq \varepsilon \cdot l \cdot \sqrt{d} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass ein $v \in \mathbb{R}^d$ existiert, sodass $(A^{-1}\Phi)(W)$ in der abgeschlossenen Tubenumgebung vom Radius $\varepsilon \cdot l \cdot \sqrt{d}$ um $T_v(W)$ liegt. Da $A^{-1}\Phi$ eine offene Abbildung ist, ist $(A^{-1}\Phi)(W)$ sogar in der entsprechenden offenen Tubenumgebung von $T_v(W)$ enthalten, d. h. $(A^{-1}\Phi)(W) \subseteq N_{\varepsilon \cdot l \cdot \sqrt{d}}(T_v(W))$. Damit ist $(A^{-1}\Phi)(W)$ insgesamt in einem Würfel

der Kantenlänge $l + 2 \cdot \varepsilon \cdot l \cdot \sqrt{d} = l \cdot (1 + 2\varepsilon\sqrt{d})$ enthalten. Es folgt also

$$\begin{aligned} (\Phi^{-1} *_\beta^d|_V)(W) &= \beta^d|_V(\Phi(W)) = \beta^d|_V(AA^{-1}\Phi(W)) = (A^{-1} *_\beta^d|_V)(A^{-1}\Phi(W)) = \\ &= |\det A| \beta^d|_V(A^{-1}\Phi(W)) \leq (1 + 2\varepsilon\sqrt{d})^d |\det A| \beta^d|_U(W) \end{aligned}$$

Da sich jeder achsenparallele Quader in $\mathcal{Q}^d$ als abzählbare, disjunkte Vereinigung offener oder abgeschlossener achsenparalleler Würfel darstellen lässt, lässt sich auch jede achsenparallele Figur in $\mathcal{F}^d$ als abzählbare, disjunkte Vereinigung offener oder abgeschlossener Würfel darstellen und die Ungleichung gilt für ganz $\mathcal{F}^d|_U$. Ist nämlich $F \in \mathcal{F}^d|_U$, so finden wir eine Familie $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Würfeln in U , sodass $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ und es gilt

$$\begin{aligned} (\Phi^{-1} *_\beta^d|_V)(F) &= \beta^d|_V(\Phi(F)) = \beta^d|_V\left(\Phi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n\right)\right) \\ &= \beta^d|_V\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(W_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^d|_V(\Phi(W_n)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2\varepsilon\sqrt{d})^d |\det A| \beta^d|_U(W_n) = (1 + 2\varepsilon\sqrt{d})^d |\det A| \beta^d|_U\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n\right) \\ &= (1 + 2\varepsilon\sqrt{d})^d |\det A| \beta^d|_U(F) \end{aligned}$$

Wir erhalten also den Vergleich von Prämaßen

$$(\Phi^{-1} *_\beta^d|_V)|_{\mathcal{F}^d|_U} \leq (1 + 2\varepsilon\sqrt{d})^d |\det A| \beta^d|_{\mathcal{F}^d|_U}$$

Die gleiche Ungleichung folgt für die assoziierten äußeren Maße auf $\mathcal{O}(U)$, also auch für die Einschränkungen auf die von $\mathcal{F}^d|_U$ erzeugte Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}^d|_U$, d. h. die eindeutigen, die Prämaße fortsetzenden Maße $\Phi^{-1} *_\beta^d|_V$ und $(1 + 2\varepsilon\sqrt{d})^d |\det A| \beta^d|_{\mathcal{F}^d|_U}$. Es folgt also insgesamt

$$\Phi^{-1} *_\beta^d|_V \leq (1 + 2\varepsilon\sqrt{d}) |\det A| \beta^d|_U$$

Per Annahme gilt $|\det(A^{-1} d\Phi_x) - 1| < \varepsilon$, also $1 - \varepsilon < \frac{\det d\Phi_x}{\det A} < 1 + \varepsilon$ für alle $x \in U$. Wir erhalten also

$$\Phi^{-1} *_\beta^d|_V \leq (1 + 2\varepsilon\sqrt{d}) |\det A| \beta^d|_U \leq \frac{(1 + 2\varepsilon\sqrt{d})}{1 - \varepsilon} |\det d\Phi| \beta^d|_U$$

Fall 2: Sei nun $\Phi : U \rightarrow V$ ein beliebiger C^1 -Diffeomorphismus. Dann finden wir um jeden Punkt $x_0 \in U$ eine hinreichend kleine offene Umgebung $\mathcal{O}_{x_0} \subseteq U$, sodass $d\Phi_x$

auf $\mathcal{O}_{x_0}$ fast konstant im Sinne von *Fall 1*, d. h. beschränkt durch $1 > \varepsilon > 0$, ist. Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir somit die Abschätzung

$$\Phi^{-1} \beta^d|_V \leq |\det d\Phi| \beta^d|_U$$

Analog erhalten wir für die Umkehrabbildung Φ^{-1}

$$\Phi_* \beta^d|_U \leq |\det d\Phi|^{-1} \beta^d|_V$$

Die Kombination dieser beiden letzten Resultate liefert uns schließlich die verbleibende Ungleichung

$$\begin{aligned} |\det d\Phi|^{-1} \beta^d|_V &= |\det d\Phi|^{-1} \Phi_* \Phi^{-1} \beta^d|_V \\ &\leq |\det d\Phi|^{-1} \Phi_* (|\det d\Phi| \beta^d|_U) \\ &= \underbrace{|\det d\Phi|^{-1} |\det d\Phi|}_{=1} \Phi_* \beta^d|_U \\ &= \Phi_* \beta^d|_U \end{aligned}$$

Insgesamt folgt die Gleichheit $\Phi_*(\beta^d|_U) = |\det d\Phi|^{-1} \beta^d|_V$, also die Behauptung. $\square$

Korollar II.45. Sei $d \in \mathbb{N}$, $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offene Teilmengen und $\Phi : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Es gilt allgemeiner

$$\Phi_* \lambda^d|_U = |\det d\Phi|^{-1} \lambda^d|_V$$

Beweis. C^1 -Diffeomorphismen offener Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ erhalten β^d -Nullmengen. Sie sind also auch λ^d -messbar. Wir können somit beide Maße der Gleichung in Satz II.44, d. h. $\Phi_* \beta^d|_U$ und $|\det d\Phi|^{-1} \beta^d|_V$, von $\mathcal{B}^d|_U$ fortsetzen zu den Maßen $\Phi_* \lambda^d|_U$ und $|\det d\Phi|^{-1} \lambda^d|_V$ auf $\mathcal{L}^d|_U$. Die Gleichheit der Maße bleibt dabei erhalten. $\square$

09. Jänner 2020

III. Mannigfaltigkeiten

III.1. Etwas lineare Algebra

Definition III.1 (multilineare Abbildung; Multilinearform; symmetrische multilineare Abbildung; symmetrische Multilinearform; alternierende multilineare Abbildung; alternierende Multilinearform). Sei K ein Körper, $k \in \mathbb{N}$ und $V, V_1, \dots, V_k, W$ K -Vektorräume. Eine Abbildung $\mu : \prod_{i=1}^k V_k \longrightarrow W$ heißt k -fach K -*multilinear*, kurz k -multilinear, g. d. w. für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, $v_j \in V_j$ für $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$, $v, w \in V_i$ und $\alpha, \beta \in K$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \mu(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v + \beta w, v_{i+1}, \dots, v_k) \\ = \alpha \cdot \mu(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k) + \beta \cdot \mu(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_k) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen den Raum der k -Multilinearformen mit der Signatur $\prod_{i=1}^k V_i \longrightarrow W$ mit $\text{Mult}_k(V_1, \dots, V_k; W)$. Ist $V_1 = \dots = V_k = V$, so schreiben wir kurz $\text{Mult}_k(V, W)$. Ist $W = K$, d. h. $\mu : \prod_{i=1}^k V_k \longrightarrow K$ eine k -multilineare Abbildung, so nennen wir μ eine *k-Multilinearform*.

Eine multilineare Abbildung $\sigma : \prod_{i=1}^k V \longrightarrow W$ heißt *symmetrisch* g. d. w. für jede Permutation $\pi \in S_k$ gilt, dass $\sigma(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \sigma(v_1, \dots, v_k)$ für alle $v_1, \dots, v_k \in V$. Wir bezeichnen den Raum der symmetrischen k -multilinearen Abbildungen mit der Signatur $\prod_{i=1}^k V \longrightarrow W$ mit $\text{Mult}_k^{\text{symm}}(V, W)$. Ist $W = K$, d. h. $\sigma : \prod_{i=1}^k \longrightarrow K$ eine symmetrische k -multilineare Abbildung, so nennen wir σ eine *symmetrische k-Multilinearform*. Wir bezeichnen den Raum der symmetrischen k -Multilinearformen von V mit $\text{Mult}_k^{\text{symm}}(V)$.

Eine multilineare Abbildung $\alpha : \prod_{i=1}^k V \longrightarrow W$ heißt *alternierend* g. d. w. für alle $v_1, \dots, v_k \in V$ gilt, dass $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$, wenn $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j$ existieren, sodass $v_i = v_j$. Wir bezeichnen den Raum der alternierenden k -multilinearen Abbildungen mit der Signatur $\prod_{i=1}^k V \longrightarrow W$ mit $\text{Alt}_k(V, W)$. Ist $W = K$, d. h. $\alpha : \prod_{i=1}^k \longrightarrow K$ eine alternierende k -multilineare Abbildung, so nennen wir α eine *alternierende k-*

Multilinearform. Wir bezeichnen den Raum der alternierenden k -Multilinearformen mit $\text{Alt}_k(V)$.

Bemerkung. Ist $\text{char } K \neq 2$, so ist die Eigenschaft der Alternierung einer multilinearen Abbildung α äquivalent dazu, dass für jede Permutation $\pi \in S_k$ gilt, dass

$$\alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \text{sgn}(\pi) \cdot \alpha(v_1, \dots, v_k)$$

für alle $v_1, \dots, v_k \in V$.

Lemma III.1. Sei $k \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V, W K -Vektorräume. Ist $\dim V < \infty$ und $\dim W < \infty$, so gilt

$$\begin{aligned} \dim \text{Mult}_k(V, W) &= (\dim V)^k \cdot \dim W \\ \dim \text{Mult}_K^{\text{symm}}(V, W) &= \binom{\dim V + k - 1}{k} \cdot \dim W \\ \dim \text{Alt}_k(V, W) &= \binom{\dim V}{k} \cdot \dim W \end{aligned}$$

Korollar III.2. Sei $k \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Es gilt

$$\begin{aligned} \dim \text{Mult}_k(V, K) &= (\dim V)^k \\ \dim \text{Mult}_K^{\text{symm}}(V) &= \binom{\dim V + k - 1}{k} \\ \dim \text{Alt}_k(V) &= \binom{\dim V}{k} \end{aligned}$$

Definition III.2 (Determinante, Matrix). Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $(a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, k\}} \in K^{n \times n}$. Dann ist die *Determinante* von (a_{ij}) definiert durch

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \in K$$

Definition III.3 (Determinante, Endomorphismus). Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit $\dim V = n$. Für einen Endomorphismus $A \in \text{End}(V)$ existiert

eine Abbildung $A^* : \text{Alt}_n(V) \longrightarrow \text{Alt}_n(V)$ mit

$$\begin{aligned} A^*(\mu) &:= A^*\mu \in \text{Alt}_n(V) \\ A^*\mu(v_1, \dots, v_n) &:= \mu(Av_1, \dots, Av_n) \end{aligned}$$

für alle $\mu \in \text{Alt}_n(V)$ und $v_1, \dots, v_n \in V$. Wir definieren die Funktion $\det : \text{End}(V) \longrightarrow K$ mit der Eigenschaft $\det(A) \cdot \text{id}_{\text{Alt}_n(V)} = A^*$, d. h. $\det(A) \cdot \alpha = A^*\alpha$, für alle $A \in \text{End}(V)$ und $\alpha \in \text{Alt}_n(V)$. Wir nennen $\det(A)$ dann die Determinante von A .

Bemerkung. Wegen $\dim \text{Alt}_n(V) = \binom{n}{n} = 1$, also $\dim \text{End}(\text{Alt}_n(V)) = 1 \cdot 1 = 1$, sind alle Abbildungen A^* voneinander linear abhängig, d. h. Vielfache voneinander. Somit ist die Determinante durch die obige Eigenschaft eindeutig festgelegt. $\det|_{\text{Aut}(V)} : \text{Aut}(V) \longrightarrow K^\times = K \setminus \{0\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Lemma III.3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Bezeichne mit $\mathcal{B}(V)$ die Menge der Basen von V . $\mathcal{B}(V)$ ist eine dichte offene Teilmenge von V und $\mathcal{B}(V)$ hat genau zwei Pfadzusammenhangskomponenten.

Definition III.4 (Orientierung). Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Wir nennen eine Pfadzusammenhangskomponente $[a] \subseteq \mathcal{B}(V)$ eine *Orientierung* auf V . Wir bezeichnen die beiden Orientierungen mit $+$ und $-$.

Definition III.5 (Tensorprodukt, 2 Faktoren). Sei K ein Körper und U, V zwei K -Vektorräume. Das *Tensorprodukt* von U und V ist ein K -Vektorraum $U \otimes V$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$\otimes : U \times V \longrightarrow U \otimes V$$

sodass für jeden K -Vektorraum W und jede bilineare Abbildung $\beta : U \times V \longrightarrow W$ eine eindeutige lineare Abbildung $\lambda : U \otimes V \longrightarrow W$ existiert, sodass

$$\beta = \lambda \circ \otimes \tag{III.A}$$

Bemerkung. Eigenschaft III.A nennt man auch die *universelle Eigenschaft* des Tensorprodukts. Jede bilineare Abbildung lässt sich also als Verknüpfung des Tensorpro-

$$\begin{array}{ccc}
U \times V & \xrightarrow{\beta} & W \\
\otimes \downarrow & \nearrow \exists! \lambda & \\
U \otimes V & &
\end{array}$$

dukts mit einer eindeutigen linearen Abbildung schreiben. Mit anderen Worten ist die lineare Abbildung $\text{Hom}(U \otimes V, W) \longrightarrow \text{Mult}_2(U, V; W)$ mit $\lambda \mapsto \lambda \otimes$ ein Isomorphismus.

Satz III.4. Sei K ein Körper und U, V zwei K -Vektorräume. Das Tensorprodukt existiert und ist eindeutig bis auf Isomorphie. Dies rechtfertigt, dass wir von *dem* Tensorprodukt sprechen können.

Lemma III.5. Sei K ein Körper und U, V zwei K -Vektorräume. Seien $\{u_i \mid i \in I\}$ und $\{v_j \mid j \in J\}$ Basen von U bzw. V . Dann ist $\{u_i \otimes v_j \mid i \in I \wedge j \in J\}$ eine Basis von $U \otimes V$. Ist $\dim U < \infty$ und $\dim V < \infty$, so gilt

$$\dim U \otimes V = \dim U \cdot \dim V$$

Definition III.6 (Tensorprodukt, n Faktoren). Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ U_i ein K -Vektorraum. Wir definieren das *Tensorprodukt* von $U_1, \dots, U_n$ als K -Vektorraum $\bigotimes_{i=1}^n U_i$ zusammen mit einer n -multilinearen Abbildung

$$\otimes : \prod_{i=1}^n U_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n U_i$$

sodass für jeden K -Vektorraum W und jede n -multilineare Abbildung $\mu : \prod_{i=1}^n U_i \longrightarrow W$ eine eindeutige lineare Abbildung $\lambda : \bigotimes_{i=1}^n U_i \longrightarrow W$ existiert, sodass

$$\mu = \lambda \circ \otimes \tag{III.B}$$

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{i=1}^n U_i & \xrightarrow{\mu} & W \\
\otimes \downarrow & \nearrow \exists! \lambda & \\
\bigotimes_{i=1}^n U_i & &
\end{array}$$

Bemerkung. Wir bezeichnen auch (III.B) als die *universelle Eigenschaft* des Tensorprodukts. Die Eigenschaften des Tensorprodukts zweier Faktoren gelten analog auch für das Tensorprodukt von n -Faktoren.

Definition III.7 (Tensorpotenz; Tensoralgebra; Tensor; Einfachheit, Tensor). Sei $m \in \mathbb{N}_0$, K ein Körper und U ein K -Vektorraum. Wir nennen $T_m U := \bigotimes_{i=1}^m U$ die m -te (kovariante) *Tensorpotenz* von U und $T^m U := T_m(U^*) = \bigotimes_{i=1}^m (U^*)$ die m -te kontravariante *Tensorpotenz* von U . Seien weiter $r, s \in \mathbb{N}_0$. Dann nennen wir $T_r^s U := T_r U \otimes T^s U$ die gemischte *Tensorpotenz* vom *Bigrad* (r, s) . Wir verwenden dabei die Konvention $T_0 U = T^0 U = K$.

Wir definieren weiter K -Algebren $T_* U := \bigoplus_{m=0}^{\infty} T_m U$ und $T^* U := \bigoplus_{m=0}^{\infty} T^m U$ sowie schließlich

$$T(U) := T_*(U) := \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T_r^s U$$

die *Tensoralgebra* von U .

Die Elemente dieser soeben definierten Mengen heißen *Tensoren*. Tensoren der Form $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ heißen *einfach*.

Bemerkung. Es existieren natürliche Produktabbildungen $\otimes : T_m U \times T_n U \longrightarrow T_{m+n} U$ und $\otimes : T_* U \times T_* U \longrightarrow T_* U$. Analoge Produktabbildungen existieren auch für die kontravarianten Potenzen.

Beispiel. Tensoren vom Typ $(1, 0)$ heißen *Vektoren* und solche vom Typ $(0, 1)$ heißen *Kovektoren*. Letztere sind Linearformen. Tensoren vom Typ $(0, 2)$ werden mit bilinearen Abbildungen identifiziert, und Tensoren vom Typ $(1, 1)$ mit Endomorphismen.

Lemma III.6. Seien $r, s \in \mathbb{N}_0$, K ein Körper und U ein K -Vektorraum mit $\dim U < \infty$. Dann gilt

$$(T_r^s U)^* \cong T_s^r U \cong T_r^s (U^*)$$

Korollar III.7. Es gilt somit $\text{Mult}_r(U) \cong (T_r U)^* \cong T_r(U^*) = T^r U$.

Wir wollen nun die Betrachtungen über das Tensorprodukt, insbesondere die universelle Eigenschaft, auf alternierende multilineare Abbildungen übertragen.

Definition III.8 (äußere Potenz; äußeres Produkt). Sei $k \in \mathbb{N}_0$, K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Wir definieren den linearen Unterraum

$$I_k := \langle \{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mid v_1, \dots, v_k \in V \wedge \exists i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j : v_i = v_j \} \rangle \subseteq T_k V$$

der von den einfachen Tensoren, die zwei mal das gleiche Argument „enthalten“, erzeugt wird. Die k -te *äußere Potenz* V ist definiert als der Vektorraum $\Lambda_k V := T_k V / I_k V$ versehen mit der alternierend k -multilinearen Abbildung $\wedge : V^k \longrightarrow \Lambda_k V$, sodass für jeden K -Vektorraum W und jede alternierende k -multilineare Abbildung $\alpha : V^k \longrightarrow W$ eine eindeutige lineare Abbildung $\lambda \in \text{Hom}(\Lambda_k V, W)$ existiert, sodass

$$\alpha = \lambda \circ \wedge \tag{III.C}$$

Die Abbildung $\wedge$ heißt das *äußere Produkt*. Wir setzen $\Lambda_0 V = K$ und $\Lambda_1 V = V$.

$$\begin{array}{ccc} V^k & \xrightarrow{\alpha} & W \\ \wedge \downarrow & \nearrow \exists! \lambda & \\ \Lambda_k V & & \end{array}$$

Analog zum Tensorprodukt definieren wir $\Lambda^k V := \Lambda_k(V^*)$, $I_* V := \bigoplus_{k=0}^{\infty} I_k V$ sowie

$$\begin{aligned} \Lambda_* V &:= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda_k V \cong T_* V / I_* V \\ \Lambda^* V &:= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda_k(V^*) \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Eigenschaft der Alternierung erhält $\wedge$ genau durch das Herausteilen von $I_k V$. (III.C) wird wieder die *universelle Eigenschaft* von $\wedge$ genannt.

Lemma III.8. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Sei weiter $\{ e_i \mid i \in I \}$ eine Basis von V versehen mit der Totalordnung $\prec$. Dann ist

$$\{ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid i_1, \dots, i_k \in I \wedge i_1 \prec \cdots \prec i_k \}$$

eine Basis von $\Lambda_k V$.

Lemma III.9. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Es gilt $\dim(\Lambda_k V) = \binom{\dim V}{k}$ und $\dim(\Lambda_* V) = 2^{\dim V}$.

Lemma III.10. Es gilt auf natürliche Weise mit der universellen Eigenschaft $\text{Alt}_k(V) \cong (\Lambda_k V)^*$. Ist $\dim V < \infty$, so gilt insgesamt

$$\text{Alt}_k(V) \cong (\Lambda_k V)^* \cong \Lambda_k(V^*) = \Lambda^k V$$

III.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Wir erinnern uns zurück an den Begriff der *Untermannigfaltigkeit* des euklidischen Raums (vgl. *Analysis II*).

Definition III.9 (differenzierbare Untermannigfaltigkeit, euklidischer Raum). Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir nennen M eine *m-dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$ g. d. w. für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p , eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie ein C^k -Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ existieren, sodass

$$\Phi(M \cap U) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{m+1} = \dots = x_n = 0\} \cap V = (\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}) \cap V$$

Bemerkung. Im Folgenden werden wir $\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}$ mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren und nennen $\mathbb{R}^m$ dann das *Modell* von M . Wir schreiben auch $\mathbb{R}^m \cap V := (\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}) \cap V$.

Definition III.10 (lokale Karte, Untermannigfaltigkeit, euklidischer Raum). Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine *m-dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$ und $p \in M$. Dann finden wir also eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen C^k -Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$, sodass $\Phi(M \cap U) = \mathbb{R}^m \cap V$. Wir nennen die Abbildung $\kappa = \Phi|_{M \cap U}$ die von Φ induzierte *lokale Karte* von M in p .

Bemerkung. Der Name „lokale Karte“ ist darauf zurückzuführen, dass κ die Untermannigfaltigkeit M lokal mit Koordinaten belegt.

Definition III.11 (Koordinatentransformation, Untermannigfaltigkeit, euklidischer Raum). Sei wieder $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine *m-dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$ und $p \in M$. Seien weiter $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebungen von p und $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, sodass $\kappa_1 : M \cap U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m \cap V_1$ und

$\kappa_2 : M \cap U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m \cap V_2$ zwei lokale Karten von M in p sind. Wir nennen die Abbildung

$$\kappa_2|_{M \cap U_1 \cap U_2} \circ (\kappa_1|_{M \cap U_1 \cap U_2})^{-1} = (\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1})|_{\kappa_1(M \cap U_1 \cap U_2)}$$

eine *Koordinatentransformation* bzw. einen *Koordinatenwechsel* von der lokalen Karte κ_1 zur lokalen Karte κ_2 .

Lemma III.11. Je zwei Karten sind zueinander C^k -kompatibel in dem Sinne, dass Koordinatentransformationen selbst C^k -Diffeomorphismen sind

Beweis. Die Aussage gilt, da κ_1 und κ_2 jeweils die Einschränkungen der C^k -Diffeomorphismen $\Phi_1|_{U_1 \cap U_2}$ und $\Phi_2|_{U_1 \cap U_2}$ sind. Dabei sind Verknüpfungen von C^k -Diffeomorphismen wieder C^k -Diffeomorphismen und Einschränkungen der Definitionsmenge bewirken keine Verminderung der Regularität. $\square$

Die C^k -Kompatibilität der Karten ermöglicht uns, Differentialrechnung auf M zu betreiben, ohne den umgebenden euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ zu benötigen.

Definition III.12 (Differenzierbarkeit, Untermannigfaltigkeit, euklidischer Raum). Seien $n \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $l \leq k$, M eine C^k -Untermannigfaltigkeit, κ eine lokale Karte in $p \in M$ und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *l -fach-differenzierbar* in p , wenn die auf einer offenen Menge definierte lokale Koordinatendarstellung $f \circ \kappa^{-1}$ im Punkt $\kappa(p)$ l -fach differenzierbar ist.

Bemerkung. Höhere als k -fache Differenzierbarkeit kann nicht sinnvoll definiert werden.

Lemma III.12. Die Differenzierbarkeit in p ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der gewählten lokalen Karte.

Beweis. Seien κ und $\tilde{\kappa}$ lokale Karten in p . Es gilt

$$f \circ \tilde{\kappa}^{-1} = f \circ \kappa^{-1} \circ (\kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1})$$

nahe $\tilde{\kappa}(p)$. $f \circ \tilde{\kappa}^{-1}$ ist genau dann l -fach differenzierbar in $\tilde{\kappa}(p)$, wenn $f \circ \kappa^{-1}$ l -fach differenzierbar in $\kappa(p)$ ist. $\square$

Im Folgenden sollen nun „abstrakte“, d. h. a priori nicht in einen euklidischen Raum eingebettete, *differenzierbare Mannigfaltigkeiten* definiert werden. Sie werden gewisse topologische Räume mit Zusatzstruktur sein, die uns eine sinnvolle Differentialrechnung ermöglichen.

Definition III.13 (lokal euklidischer Raum; lokale Karte; Kartengebiet; Modell). Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $m \in \mathbb{N}$. Wir nennen X *m-dimensional lokal euklidisch* g. d. w. jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge in $\mathbb{R}^m$ ist, d. h. g. d. w. zu jedem Punkt $p \in X$ eine offene Umgebung $U \in \mathcal{T}$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und einen Homöomorphismus $\Phi : U \longrightarrow V$ existiert. Wir nennen dann (U, Φ) eine (*lokale*) *Karte* bzw. ein *lokales Koordinatensystem* in p und U ein *Kartengebiet*. Ist klar, welches Kartengebiet gemeint ist, bezeichnen wir auch Φ als lokale Karte. Wir bezeichnen dann $\mathbb{R}^m$ als Modell von X .

Bemerkung. Die Definition eines m -dimensionalen lokal euklidischen Raumes nach Definition III.13 ist äquivalent dazu, dass eine Indexmenge I existiert sowie für jedes $\iota \in I$ offene Mengen $U_\iota \in \mathcal{T}$ und $V_\iota \subseteq \mathbb{R}^m$ und ein Homöomorphismus $\Phi_\iota : U_\iota \longrightarrow V_\iota$, sodass $X = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$. D. h. anschaulich, dass X lokal euklidisch ist g. d. w. X von Karten überdeckt wird.

Notation III.14. Sei $m \in \mathbb{N}$ und X ein topologischer Raum. Um auszudrücken, dass X m -dimensional lokal euklidisch ist, schreiben wir auch kurz X^m .

Lemma III.13. Seien $m \in \mathbb{N}$ und X ein m -dimensionaler lokal euklidischer topologischer Raum, $p \in X$ und (U_1, κ_1) sowie (U_2, κ_2) zwei lokale Karten in p . Der *Kartenwechsel* $\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}$ ist ein Homöomorphismus offener Teilmengen des Modells $\mathbb{R}^m$.

Definition III.15 (Atlas). Sei X ein lokal euklidischer topologischer Raum und I eine Indexmenge. Sei weiter für $\iota \in I$ $p_\iota \in X$ und (U_ι, κ_ι) eine lokale Karte in p_ι . Wir nennen die Familie $\mathcal{A} := \{ (U_\iota, \kappa_\iota) \mid \iota \in I \}$ von lokalen Karten einen *Atlas* von X g. d. w. die Kartengebiete U_ι den ganzen Raum überdecken, d. h. g. d. w. $X = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$.

Definition III.16 (C^k -Kompatibilität; Differenzierbarkeit, Atlas). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$, X ein lokal euklidischer topologischer Raum, $p_1, p_2 \in X$ und (U_1, κ_1) bzw. (U_2, κ_2) zwei lokale Karten in p_1 bzw. p_2 . Wir sagen, (U_1, κ_1) und (U_2, κ_2) sind zueinander *C^k -kompatibel*, g. d. w. der Kartenwechsel $\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}$, und folglich auch der umgekehrte Kartenwechsel $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$, ein C^k -Diffeomorphismus ist. Ein Atlas $\mathcal{A} = \{ (U_\iota, \kappa_\iota) \mid \iota \in I \}$

von X heißt C^k -differenzierbar, g. d. w. seine Karten paarweise C^k -kompatibel sind, d. h. g. d. w. für alle $i, j \in I$ gilt, dass (U_i, κ_i) und (U_j, κ_j) zueinander C^k -kompatibel sind. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei C^k -differenzierbare Atlanten von X , so bezeichnen wir $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ als zueinander C^k -kompatibel g. d. w. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ C^k -differenzierbar ist.

Lemma III.14. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und X ein lokal euklidischer topologischer Raum. Die Relation $\sim$, die für zwei Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ auf X gegeben ist durch

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} : \Longleftrightarrow \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{B} \text{ sind } C^k\text{-kompatibel}$$

stellt eine Äquivalenzrelation dar.

Definition III.17 (differenzierbare Struktur). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, X ein lokal euklidischer Raum und $\mathcal{A}$ ein Atlas auf X . Wir nennen den maximalen Atlas, der $\mathcal{A}$ enthält,

$$\bigcup \left\{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ ist Atlas von } X \wedge \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{B} \text{ sind } C^k\text{-kompatibel} \right\} = \bigcup_{\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]_{\sim}} \mathcal{B}$$

die von $\mathcal{A}$ induzierte C^k -Struktur auf X .

Eine differenzierbare Struktur erlaubt es, differenzierbare Konzepte vom euklidischen Raum auf beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu übertragen. So z. B. den Begriff der Differenzierbarkeit von Abbildungen:

Definition III.18 (lokale Koordinatendarstellung). Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und X^m sowie Y^n lokal euklidische Räume, jeweils versehen mit den C^k -Strukturen $\mathcal{A}_X$ bzw. $\mathcal{A}_Y$. Sei weiter $F : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und für $p \in X$ $(U, \kappa) \in \mathcal{A}_X$ eine lokale Karte von X in p und $(U', \kappa') \in \mathcal{A}_Y$ eine lokale Karte von Y in $F(p)$. Die auf einer offenen Menge des $\mathbb{R}^m$ definierte $\mathbb{R}^n$ -wertige Abbildung

$$\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}$$

heißt eine *lokale Koordinatendarstellung* von F nahe p .

Definition III.19 (Differenzierbarkeit; Diffeomorphismus, lokal euklidische Räume). Seien $k, l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $l \leq k$, X^m und Y^n lokal euklidische Räume, jeweils versehen mit den C^k -differenzierbaren Strukturen $\mathcal{A}_X$ bzw. $\mathcal{A}_Y$, sowie $F : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Sei weiter $p \in X$ und $(U, \kappa) \in \mathcal{A}_X$ sowie $(U', \kappa') \in \mathcal{A}_Y$ lokale Karten von

X bzw. Y in p bzw. $F(p)$, sodass $\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}$ eine lokale Koordinatendarstellung von F nahe p ist. F heißt im Punkt p *l -fach differenzierbar*, g. d. w. $\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}$ im Punkt $\kappa(p)$ *l -fach differenzierbar* ist. Darüber hinaus nennen wir F im Punkt p *l -fach stetig differenzierbar* g. d. w. F in p *l -fach differenzierbar* ist und das Differential $d(\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1})$ stetig ist. Den Raum der *l -fach stetig differenzierbaren* Abbildungen $X \rightarrow Y$ bezeichnen wir mit $C^l := C^l(X, Y)$. Ist $F \in C^l(X, Y)$, so heißt F *von der Klasse C^l* .

Wir nennen F *l -fach (stetig) differenzierbar*, g. d. w. F in jedem Punkt $p \in X$ (stetig) differenzierbar ist. Wie gewohnt nennen wir F einen *C^l -Diffeomorphismus* g. d. w. F bijektiv sowie von der Klasse $C^l(X, Y)$ ist, und die Umkehrabbildung F^{-1} von der Klasse $C^l(Y, X)$ ist.

Lemma III.15. Die Differenzierbarkeit ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der lokalen Koordinatendarstellung.

Beweis. Seien $\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}$ und $\tilde{\kappa}' \circ F \circ \tilde{\kappa}^{-1}$ zwei lokale Koordinatendarstellungen nahe $p \in X$. Es gilt

$$\tilde{\kappa}' \circ F \circ \tilde{\kappa}^{-1} = (\tilde{\kappa}' \circ \kappa'^{-1}) \circ (\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1})$$

Dabei sind $\tilde{\kappa}' \circ \kappa'^{-1}$ und $\kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1}$ als Abbildungen euklidischer Räume von der Klasse C^k . $\tilde{\kappa}' \circ F \circ \tilde{\kappa}^{-1}$ besitzt also mindestens dieselbe Regularität $l \leq k$ wie $\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}$, d. h. $\tilde{\kappa}' \circ F \circ \tilde{\kappa}^{-1}$ ist *l -fach (stetig) differenzierbar* in $\tilde{\kappa}(p)$ g. d. w. $\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}$ *l -fach (stetig) differenzierbar* in $\kappa(p)$ ist. $\square$

Definition III.20 (Basis, topologischer Raum). Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt *Basis* des topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ g. d. w. sich jede offene Menge als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ schreiben lässt, d. h. g. d. w. wir für jedes $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ eine Indexmenge I und eine Familie $(B_\iota)_{\iota \in I} \in \mathcal{B}^I$ von Mengen aus $\mathcal{B}$ finden, sodass $\mathcal{O} = \bigcup_{\iota \in I} B_\iota$.

Definition III.21 (Mannigfaltigkeit, topologisch, differenzierbar). Seien $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$ und $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen X eine

- (i) *m -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* g. d. w. $(X, \mathcal{T})$ ein m -dimensionaler lokal euklidischer Hausdorffraum ist und eine abzählbare Basis besitzt

- (ii) *m-dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit* g. d. w. $(X, \mathcal{T})$ eine *m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* ist und auf X zusätzlich eine C^k -Struktur $\mathcal{A}$ existiert.

Bemerkung. Die Hausdorff Eigenschaft stellt sicher, dass wir Punkte durch stetige Funktionen trennen können. Die abzählbare Basis der Topologie sichert die Existenz einer abzählbaren Partition der Eins.

Definition III.22 (Untermannigfaltigkeit, topologisch, differenzierbar). Seien $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und N^n eine *n-dimensionale topologische bzw. C^k -Mannigfaltigkeit* mit einem Atlas $\mathcal{A}$. Eine Teilmenge $M^m \subseteq N^n$ heißt eine *m-dimensionale bzw. (n-m)-kodimensionale topologische bzw. C^k -Mannigfaltigkeit* g. d. w. in jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p , eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus bzw. ein C^k -Diffeomorphismus $(\Phi : U \rightarrow V) \in \mathcal{A}$ existiert, sodass

$$\Phi(U \cap M) = \left(\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\} \right) \cap V = \mathbb{R}^m \cap V$$

Beispiel.

- (i) Die natürliche C^∞ -differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^n$ besteht aus $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ zusammen mit allen C^∞ -kompatiblen Karten, d. h. $\bigcup_{\mathcal{A} \in \{(\mathbb{R}^d, \text{id}_{\mathbb{R}^n})\}} \sim \mathcal{A}$. $\mathbb{R}^n$ ist also selbst eine C^∞ -Mannigfaltigkeit.
- (ii) Eine *m-dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit* M des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Relativtopologie ist ein lokal euklidischer Raum. Sie trägt eine C^k -differenzierbare Struktur induziert durch die Karten $\Phi|_{M \cap U}$.
- (iii) Endliche Produkte von C^k -Mannigfaltigkeiten sind auf natürliche Art C^k -Mannigfaltigkeiten.
- (iv) Jede C^k -differenzierbare Struktur kann zu einer C^l -differenzierbaren Struktur für $l \leq k$ abgeschwächt werden. D. h. jede C^k -Mannigfaltigkeit ist für $l \leq k$ auch eine C^l -Mannigfaltigkeit. Die differenzierbare Struktur bleibt aber i. A. nicht gleich. Indem eine niedrigere Regularität gefordert wird, kommen nämlich i. A. neue lokale Karten hinzu.

13. Jänner 2020

Man kann, ausgehend von einer Menge, mit Hilfe eines geeigneten Atlas direkt sowohl die topologische als auch die differenzierbare Struktur einer Mannigfaltigkeit identifizieren. Dies ist oft nützlich für die Konstruktion von Mannigfaltigkeiten.

Satz III.16. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}_0$ und M eine Menge. Sei weiter I eine Indexmenge und zu jedem $\iota \in I$ $U_\iota \subseteq M$ eine Teilmenge und $V_\iota \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, sodass κ_ι die Signatur $U_\iota \rightarrow V_\iota$ trägt und $M = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$. Sei zudem für alle $i, j \in I$ der Definitionsbereich der Abbildung $\kappa_i \circ \kappa_j^{-1}$ offen und die Abbildung $\kappa_i \circ \kappa_j^{-1}$ selbst von der Klasse C^k . Sei schließlich $\mathcal{A} := \{\kappa_\iota \mid \iota \in I\}$ die Menge aller dieser Abbildungen. Dann existiert auf M eine eindeutige m -dimensionale lokale euklidische Topologie $\mathcal{T}$, für die $\mathcal{A}$ ein Atlas ist und auf $(M, \mathcal{T})$ eine eindeutige C^k -Struktur für die $\mathcal{A}$ ein C^k -Atlas ist.

Bemerkung. Anschaulich erhalten wir auf unserer Menge eine differenzierbare Struktur, indem wir die κ_ι als lokale Karten (mit Koordinatenwechseln von der Klasse C^k) und die Menge $\mathcal{A}$ als Atlas interpretieren.

Beweis. Wir betrachten die Familie

$$\mathcal{T} := \{\mathcal{O} \subseteq M \mid \forall \iota \in I : \kappa_\iota(\mathcal{O} \cap U_\iota) \text{ ist offen}\}$$

$\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf M . Sie wird von dem Mengensystem

$$\{\kappa_\iota^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_\iota) \mid \iota \in I \wedge \tilde{\mathcal{O}}_\iota \subseteq V_\iota \text{ ist offen}\}$$

erzeugt. Genauer gesagt ist dann für $\iota \in I$ die Menge U_ι offen und die bijektive Abbildung κ_ι ein Homöomorphismus. Weiter folgt mit der Annahme der Regularität der Kartenwechsel $\kappa_i \circ \kappa_j^{-1}$, dass $\mathcal{A}$ einen C^k -Atlas liefert. $\square$

Proposition III.17. Kehren wir zur Situation von Satz [III.16](#) zurück. Wir können zusätzliche Aussagen über die Topologie $\mathcal{T}$ treffen, insbesondere dann, ob es sich bei $(M, \mathcal{T})$ um eine Mannigfaltigkeit handelt. Es gilt nämlich:

- (i) $(M, \mathcal{T})$ ist hausdorffsch, wenn sich je zwei Punkte entweder im selben Kartengebiet oder in disjunkten Kartengebieten befinden, d. h., wenn wir für alle $p, q \in M$ entweder $\iota \in I$ finden, sodass $p, q \in U_\iota$, oder $i, j \in I$ finden, sodass $p \in U_i$, $q \in U_j$ und $U_i \cap U_j = \emptyset$.
- (ii) $(M, \mathcal{T})$ hat eine abzählbare Basis, wenn M durch abzählbar viele U_ι überdeckt wird, d. h., wenn eine abzählbare Indexmenge $J \subseteq I$ existiert, sodass $M = \bigcup_{\iota \in J} U_\iota$.

Beweis. Übung. $\square$

Beispiel (reell-projektiver Raum). Für $d \in \mathbb{N}$ ist der d -dimensionale reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^d$ definiert als die Menge der Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^{d+1}$. Genauer gesagt: Für $\sim$ die Äquivalenzrelation „liegen auf derselben Ursprungsgeraden“ auf $\mathbb{R}^{d+1}$ ist $\mathbb{R}P^d$ definiert als $\mathbb{R}P^d := \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} / \sim$. $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ repräsentiert dabei die Gerade $\mathbb{R}x$. Dieser ordnen wir für $x = (x_0, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ die *homogenen Koordinaten* $[x_0 : \dots : x_d]$ zu, d. h. wir schreiben $[x] = [x_0 : \dots : x_d]$. Die homogenen Koordinaten sind bis auf Skalierung eindeutig, es gilt also für $[x], [y] \in \mathbb{R}P^d$, dass $[x] = [y]$ g. d. w. wir ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ finden, sodass $\lambda x = y$.

Wir definieren für $i \in \{0, \dots, d\}$ dann die Mengen

$$U_i := \{ [x] \in \mathbb{R}P^d \mid x_i \neq 0 \}, \quad V_i := \{ x_i = 1 \} \cong \mathbb{R}^d$$

sowie die bijektiven Abbildungen

$$\kappa_i : U_i \longrightarrow V_i, \quad [x_0 : \dots : x_d] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_0, \dots, x_d) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_d}{x_i} \right)$$

Die κ_i heißen die *affinen Koordinaten*. Sie besitzen die Umkehrabbildungen

$$\kappa_i^{-1} : (y_0, \dots, y_d) \mapsto [y_0 : \dots : y_d]$$

Wir prüfen nun, dass die Familie der κ_i die Voraussetzungen des Satzes [III.16](#) erfüllt. Dazu stellen wir fest, dass für $i \in \{0, \dots, d\}$ $\kappa_i(U_i) = V_i \cong \mathbb{R}^d$, also U_i sicher offen. $\mathbb{R}P^d$ wird dabei von den U_i überdeckt. Weiter sind für $i \neq j$ die Mengen

$$(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})^{-1} \left(\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_i = 1 \wedge x_j \neq 0 \} \right)$$

als Urbilder von Komponenten von Hyperebenen, d. h. Urbilder offener Mengen, unter rationalen Funktionen wieder offen. Dabei sind die $\kappa_i \circ \kappa_j^{-1}$ als rationale Funktionen offener Mengen glatt, also von der Klasse C^∞ . Nach Satz [III.16](#) induzieren die κ_i dann den Atlas einer glatten Struktur. Da wir für $[x], [y] \in \mathbb{R}P^d$ immer ein $i \in \{0, \dots, d\}$ finden können, sodass $[x], [y] \in U_i$, und, da $\mathbb{R}P^d = \bigcup_{i=0}^d U_i$, d. h. $\mathbb{R}P^d$ endlich, also insbesondere abzählbar, überdeckt wird, folgt mit Proposition [III.17](#) dass $\mathbb{R}P^d$ eine d -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung. Die Aussagen von Satz [III.16](#) und Proposition [III.17](#) gelten auch, wenn die V_i selbst C^k -Mannigfaltigkeiten und die κ_i C^k -Diffeomorphismen sind. Dies ist insbesondere für Verklebekonstruktionen nützlich.

III.3. Tangentialbündel und Differential

Wir approximieren nun differenzierbare Mannigfaltigkeiten lokal durch Vektorräume, indem wir den Begriff des Tangentialraums an eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ aus *Analysis II* adaptieren.

Definition III.23 (Übereinstimmung erster Ordnung; 1-Jet). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$, (U, x) eine lokale Karte in p , $\varepsilon > 0$ hinreichend klein und $c_1, c_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $c_1(0) = c_2(0) = p$ zwei C^1 -Kurven durch einen Punkt p . Wir definieren die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$c_1 \sim c_2 : \iff (x \circ c_1)'(0) = (x \circ c_2)'(0)$$

Wir sagen, c_1 und c_2 stimmen in $t = 0$ *erster Ordnung überein* g. d. w. $c_1 \sim c_2$. Ist $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ eine C^1 -Kurve durch p , so nennen wir die Äquivalenzklasse von c , d. h. $[c]$, den *1-Jet* der Kurve c durch den Punkt p .

Lemma III.18. Die Übereinstimmung erster Ordnung ist wohldefiniert, d. h. sie ist unabhängig von der gewählten Karte.

Beweis. Ist also $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und (U, x) , sowie $(\tilde{U}, \tilde{x})$ lokale Karten in p , so gilt

$$(\tilde{x} \circ c)'(0) = d(\tilde{x} \circ x^{-1})_{x(c(0))}((x \circ c)'(0)) \quad (\text{III.D})$$

□

Definition III.24 (Tangentialvektor; Tangentialraum; Tangentialbündel). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

- (i) Wir nennen einen 1-Jet durch p einen *Tangentialvektor* am Punkt p .
- (ii) Wir nennen die Menge $T_p M := \{ [c] \mid [c] \text{ ist Tangentialvektor am Punkt } p \}$ aller Tangentialvektoren am Punkt p den *Tangentialraum* an M im Punkt p .
- (iii) Wir nennen die disjunkte Vereinigung

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

aller Tangentialräume zusammen mit der Fußpunktprojektion $\pi : TM \longrightarrow M$, gegeben durch $[c] \mapsto p$, falls $[c] \in T_p M$, das *Tangentialbündel* von M . Wir nennen das Tangentialbündel TM auch den *Totalraum* und $\pi^{-1}(\{p\}) = T_p M$ eine *Faser*.

Bemerkung. Die Vereinigung $TM = \cup_{p \in M} T_p M$ ist wirklich disjunkt, da die Äquivalenzklassen von Kurven in verschiedenen Tangentialräumen $T_p M, T_q M$ zu unterschiedlichen Punkten p, q assoziiert sind. Da M hausdorffsch ist, können wir p, q durch offene Umgebungen $\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_q$ trennen. Kurven, die nur auf der Umgebung $\mathcal{O}_p$ definiert sind, sind zwar in einer Äquivalenzklasse von $T_p M$ enthalten, jedoch nicht in einer Äquivalenzklasse von $T_q M$.

Lemma III.19. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ ist $T_p M$ ein m -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum, d. h. $T_p M \cong \mathbb{R}^m$.

Beweis. Seien $x, \tilde{x}$ zwei lokale Karten auf M in p . Da die Differentiale $d(\tilde{x} \circ x^{-1})_{x(c(0))}$ der Kartenwechsel lineare Automorphismen sind, existiert angesichts (III.D) und der Kettenregel eine eindeutige lineare Struktur als m -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum auf $T_p M$. Dabei ist für jede Karte x in p die lineare Abbildung $T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^m$, gegeben durch

$$[c] \mapsto (x \circ c)'(0) \quad (\text{III.E})$$

ein Isomorphismus. □

Definition III.25 (Standardbasis, Tangentialraum). Sei $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und x eine lokale Karte in p . Bezeichne mit $(e_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^m$. Wir nennen für $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p := [t \mapsto x^{-1}(x(p) + t \cdot e_i)] \in T_p M$$

den i -ten *Standardbasisvektor* von $T_p M$ bezüglich x . Wir nennen $\left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ die *Standardbasis* von $T_p M$ bezüglich x .

Bemerkung. Die Notation in Definition III.25 reflektiert also, dass Tangentialvektoren Richtungsableitungen entsprechen.

Lemma III.20. Die Standardbasis von $T_p M$ bezüglich x in Definition III.25 ist wirklich eine Basis von $T_p M$. Jeder Tangentialvektor $[c] \in T_p M$ hat dann die Darstellung

$$[c] = \sum_{i=1}^m (x_i \circ c)'(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right)$$

wobei für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ mit x_i die i -te Komponente der Abbildung x gemeint ist.

Beweis. Unter dem Isomorphismus (III.E) wird für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ der i -te Standardbasisvektor $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ bezüglich x auf den i -ten Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^m$ abgebildet. Da Isomorphismen Basen erhalten, ist die Standardbasis von $T_p M$ bezüglich x wirklich eine Basis von $T_p M$.

Sei $[c] \in T_p M$. Wegen $(x \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^m (x_i \circ c)'(0) \cdot e_i$ hat $[c]$ die Darstellung

$$[c] = \sum_{i=1}^m (x_i \circ c)'(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right)$$

□

Lemma III.21. Tangentialbündel von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sind selbst wieder differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Genauer ist für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit das Tangentialbündel TM eine $(2m)$ -dimensionale C^{k-1} -Mannigfaltigkeit.

Beweis. Sei M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Eine Karte (U, x) von M induziert durch den Isomorphismus (III.E) eine Karte

$$\begin{aligned} T_x : TU = \bigcup_{p \in U} T_p M &\longrightarrow x(U) \times \mathbb{R}^m \\ [c] &\mapsto ((x \circ c)(0), (x \circ c)'(0)) \end{aligned} \quad (\text{III.F})$$

auf TU . Ist $(\tilde{U}, \tilde{x})$ eine weitere Karte auf M , so ist der Kartenwechsel

$$T_{\tilde{x}} \circ T_x^{-1} : x(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \tilde{x}((U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^m)$$

auf TM gegeben durch

$$\begin{aligned} ((x \circ c)(0), (x \circ c)'(0)) &\mapsto ((\tilde{x} \circ c)(0), (\tilde{x} \circ c)'(0)) = \\ &= \left((\tilde{x} \circ x^{-1})(x(c(0))), d(\tilde{x} \circ x^{-1})_{x(c(0))}((x \circ c)'(0)) \right) \end{aligned}$$

Bezeichnen wir suggestiver die Koordinaten in M bezüglich der Karten x bzw. $\tilde{x}$ selbst mit x bzw. $\tilde{x}$ und den Kartenwechsel dann mit $\tilde{x}(x)$, so nimmt der Kartenwechsel auf TM die Form $(x, v) \mapsto (\tilde{x}(x), d\tilde{x}_x(v))$ an.

Das Differential einer Abbildung $\tilde{x}(x)$ zwischen offenen Teilmengen euklidischer Räume ist explizit gegeben durch

$$d\tilde{x}_x(v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(v_j \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}(x) \right) \cdot e_i$$

wobei wir die symbolische Kurzschreibweise

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} := \frac{\partial (\tilde{x}(x))_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (\tilde{x} \circ x^{-1})_i}{\partial x_j}$$

verwenden (die partiellen Ableitungen sind ja eigentlich nur auf euklidischen Räumen definiert, Anm.), und $(e_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^m$ sein soll. Dabei entspricht der j -te Standardbasisvektor $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \Big|_p$ dem Differential $d\tilde{x}_x(e_j)$. Also ist



$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}(x(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \Big|_p \quad (\text{III.G})$$

bzw. in der symbolischen Notation, d. h. ohne ein $p \in M$ zu fixieren,



$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \quad (\text{III.H})$$

Da das Differential $d\tilde{x}$ bzw. die Einträge der Jacobi-Matrix $\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}$ mindestens von der Klasse C^{k-1} sind, sind also die Kartenwechsel $T_{\tilde{x}} \circ T_x^{-1}$ für TM von der Klasse C^{k-1} . Nach Satz III.16 existiert zur Menge $\{ (TU, T_x) \mid (U, x) \text{ ist Karte von } M \}$ eine eindeutige $(2m)$ -dimensionale lokal euklidische Topologie auf TM und eine eindeutige C^{k-1} -Struktur auf TM .

Weiter hat der topologische Raum TM eine abzählbare Basis, weil auch M eine abzählbare Basis hat. TM ist auch wieder hausdorffsch. Insgesamt ist also TM eine $(2m)$ -dimensionale C^{k-1} -Mannigfaltigkeit. $\square$

16. Jänner 2020

Beispiel. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, dann ist id_W eine globale Karte. Es gilt der Isomorphismus aus (III.E), d. h. $T_p W \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m, [c] \mapsto c'(0)$. Der Totalraum TW ist also durch die Karte

$$TW = \bigcup_{p \in W} T_p W \longrightarrow W \times \mathbb{R}^m$$

$$[c] \mapsto (c(0), c'(0))$$

gegeben. Damit erhält man das Standardbasenfeld

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right)_{i \in \{1, \dots, m\}} = \left([t \mapsto x + te_i] \right)_{i \in \{1, \dots, m\}}$$

Definition III.26 (Ableitung, Geschwindigkeit, differenzierbare Kurve). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \longrightarrow M$ eine differenzierbare Kurve. Dann ist die *Ableitung* bzw. *Geschwindigkeit* von c zum Zeitpunkt τ definiert durch

$$\frac{dc}{dt}(\tau) := c'(\tau) := [c(\cdot + \tau)] = [t \mapsto c(t + \tau)]$$

Im Folgenden sollen differenzierbare Abbildungen lokal durch lineare Abbildungen der Tangentialräume approximiert werden. Dies wird den Begriff des Differential für Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Definition III.27 (Differential, differenzierbare Mannigfaltigkeit). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, M^m, N^n C^k -Mannigfaltigkeiten und $F : M^m \longrightarrow N^n$ eine differenzierbare Abbildung. Wir definieren dann die Abbildung

$$dF : TM \longrightarrow TN$$

$$[c] \mapsto [F \circ c] \tag{III.I}$$

Wir nennen dF das *Differential* von F . Wir definieren weiter für $p \in M$ die Abbildung

$$dF_p := dF|_{T_p M}$$

dF_p heißt dann das *Differential* von F im Punkt p .

Lemma III.22. Das Differential dF aus (III.1) ist wohldefiniert, d. h. nur von c abhängig.

Beweis. Sei (U, x) eine Karte auf M und (V, y) eine Karte auf N , sodass $\pi([c]) \in U$ und $\pi([F \circ c]) \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned}(y \circ (F \circ c))'(0) &= (y \circ F \circ x^{-1} \circ x \circ c)'(0) \\ &= d(y \circ F \circ x^{-1})_{(x \circ c)(0)}((x \circ c)'(0))\end{aligned}$$

Somit hängt $[F \circ c]$ nur von $[c]$ ab. □

Bemerkung. Das Differential bildet Tangentialräume auf Tangentialräume ab:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{dF_p} & T_{F(p)} N \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{d(y \circ F \circ x^{-1})_{x(p)}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Im Fall von Abbildungen offener Teilmengen euklidischer Räume ist das Differential aus Definition (III.27) konsistent mit dem Differential auf euklidischen Räumen, d. h. hier $d(y \circ F \circ x^{-1})_{x(p)}$, denn letzteres bildet $c'(0) \mapsto (F \circ c)'(0)$ ab.

Lemma III.23 (Kettenregel; Differential der Umkehrfunktion). Seien X, Y, Z differenzierbare Mannigfaltigkeiten sowie $F : X \rightarrow Y$ und $G : Y \rightarrow Z$ differenzierbare Abbildungen. Es gilt:

- (i) Kettenregel: $d(G \circ F) = dG \circ dF$
- (ii) Ist F ein Diffeomorphismus, so gilt $d(F^{-1}) = (dF)^{-1}$
- (iii) Es gilt $d(\text{id}_M) = \text{id}_{TM}$

Beweis. (i): Es gilt für $[c] \in TX$

$$d(G \circ F)([c]) = [G \circ (F \circ c)] = dG([F \circ c]) = (dG \circ dF)([c])$$

□

Bemerkung. Die von einer Karte (U, x) auf M induzierte Bündelkarte T_x auf TM ist das Differential dx . Ist $(\tilde{U}, \tilde{x})$ eine weitere Karte auf M , so stimmt der Bündelkartenwechsel $T_{\tilde{x}} \circ (T_x)^{-1}$ modulo der Identifikation $T(x(U)) \cong x(U) \times \mathbb{R}^m$ überein mit dem Differential $d(\tilde{x} \circ x^{-1})$ des Kartenwechsels $\tilde{x} \circ x^{-1}$ auf M .

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{T_x} & x(U) \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow dx & \downarrow \cong \\ & & T(\underbrace{x(U)}_{\subseteq \mathbb{R}^m}) \end{array}$$

Lemma III.24. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, M^m, N^n differenzierbare Mannigfaltigkeiten, (U, x) eine Karte auf M , (V, y) eine Karte auf N und $F : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $p \in U$ und $F(p) \in V$, so ist das Differential dF_p relativ zu den Standardbasen $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p\right)_{j \in \{1, \dots, m\}}$ und $\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{F(p)}\right)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von $T_p M$ bzw. $T_{F(p)} N$ gegeben durch die Jacobi-Matrix der lokalen Koordinatendarstellung $y \circ F \circ x^{-1}$

$$dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y_i \circ F \circ x)}{\partial x_j} (x(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{F(p)}$$

Bemerkung. Dies verallgemeinert eine frühere Formel für den Wechsel zwischen von lokalen Karten induzierten Basen der Tangentialräume.

Lemma III.25. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, M^m, N^n differenzierbare Mannigfaltigkeiten, (U, x) eine Karte auf M , (V, y) eine Karte auf N und $F : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Die lokale Koordinatendarstellung $T_y \circ dF \circ T_x^{-1}$ des Differentials stimmt modulo der Identifikationen

$$T(x(U)) \cong x(U) \times \mathbb{R}^m, \quad T(y(V)) \cong y(V) \times \mathbb{R}^n$$

mit dem Differential dy von $y(x)$ überein, d. h. es hat die Form

$$(x, v) \mapsto (y(x), dy_x(v)) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} (x) \right) e_i$$

III.4. Totales Differential, 1-Formen und Kotangentialbündel

III.4.1. Definitionen

Definition III.28 (totales Differential). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, M eine C^k -Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung. Wir nennen die Abbildung $df : TM \rightarrow T\mathbb{R}$ das *totale Differential* von f .

Bemerkung. Das totale Differential ist eine Familie

$$df = \left(df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \right)_{p \in M}$$

von linearen Abbildungen. Mit der natürlichen Isomorphie $T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ ist df eine Familie von Linearformen auf Tangentialräumen, d. h. $df_p \in (T_p M)^*$. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition III.29 (Kotangentialraum; Kotangentialbündel; Schnitt). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

- (i) Wir nennen für $p \in M$ den Vektorraum $T_p^* M := (T_p M)^*$ den *Kotangentialraum* an M in p .
- (ii) Wir nennen die disjunkte Vereinigung $T^* M := \bigcup_{p \in M} T_p^* M$ aller Kotangentialräume zusammen mit der Fußpunktprojektion $\pi_{T^* M} : T^* M \rightarrow M$ das *Kotangentialbündel* an M .
- (iii) Wir nennen eine Abbildung $\alpha : M \rightarrow T^* M$ mit der Eigenschaft $\pi_{T^* M} \circ \alpha = \text{id}_M$ einen *Schnitt* des Kotangentialbündels $T^* M$.

Bemerkung.

- (i) Anschaulich ist ein Schnitt also eine Abbildung, die einem $p \in M$ ein Element aus $T_p^* M$ zuordnet.
- (ii) Das totale Differential df ist also die Abbildung $df : M \rightarrow T^* M$ mit $p \mapsto df_p \in T_p^* M$. Genauer ist df ein Schnitt von $T^* M$, denn es gilt $\pi_{T^* M} \circ df = \text{id}_M$.

20. Jänner 2020

Definition III.30 (1-Form). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir nennen einen Schnitt α , d. h. eine Abbildung $\alpha : M \rightarrow T^*M$ mit der Eigenschaft $\pi_{T^*M} \circ \alpha = \text{id}_M$ eine *Differentialform* vom Grad 1, kurz *1-Form*.

Bemerkung. Eine 1-Form α ist also eine Familie $(\alpha_p)_{p \in M} := (\alpha(p))_{p \in M}$.

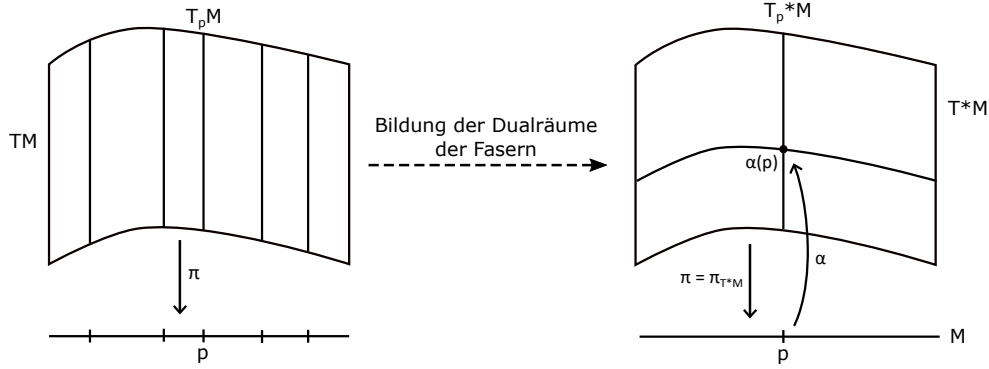


Abbildung III.1.: Veranschaulichung einer 1-Form

Beispiel. Totale Differentiale sind 1-Formen.

Lemma III.26 (Rechenregeln für totale Differentiale). Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $f, g : M \rightarrow N$ differenzierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Das totale Differential hat folgende Eigenschaften:

- (i) $\mathbb{R}$ -Linearität, d. h. $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$.
- (ii) Produktregel, d. h. $d(fg) = (df)g + f(dg)$.

Lemma III.27. Sei $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei α eine 1-Form, $p \in M$ und (U, x) eine lokale Karte für M in p . $(d(x_i)_p)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ bildet eine Basis von T_p^*M . Wir finden demnach für alle $q \in U$ eindeutige $a_1^{(q)}, \dots, a_m^{(q)} \in \mathbb{R}$, sodass

$$\alpha(q) = \sum_{i=1}^m a_i^{(q)} d(x_i)_q$$

bzw. eindeutige Abbildungen $a_1, \dots, a_m : U \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\alpha|_U = \sum_{i=1}^m a_i d(x_i)$.

Beweis. Dual zum Differential dx_p finden wir die Abbildung $(dx_p)^* : (\mathbb{R}^m)^* \rightarrow T_p^*M$ mit $\lambda \mapsto d(\lambda \circ x)_p = d\lambda_{x(p)} \circ dx_p = (dx_p)^*\lambda$.

$$\begin{array}{ccc}
T_p M & \xrightarrow[\cong]{dx_p} & \mathbb{R}^m \\
& \searrow & \downarrow \lambda \\
& & \mathbb{R}
\end{array}$$

Sei $(e_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^m$ und $(e_i^*)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ die zu ihr duale Basis von $(\mathbb{R}^m)^*$. Dann gilt $e_i^* \mapsto (dx_p)^* e_i^* = d(x_i)_p$. Dabei ist $(d(x_i)_p)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ dual zur Basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p\right)$ von $T_p M$, also insbesondere selbst eine Basis. Es gilt nämlich

$$\left(d(x_i)_p\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial(x_i \circ x^{-1})}{\partial x_j}(p) = \delta_{ij}$$

Bezüglich der Standardbasen schreibt sich $\alpha(q)$ also

$$\alpha(q) = \sum_{i=1}^m a_i^{(q)} d(x_i)_q$$

für eindeutige $a_1^{(q)}, \dots, a_m^{(q)} \in \mathbb{R}$. Definieren wir für $i \in \{1, \dots, m\}$ die Abbildung $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch $a_i(q) := a_i^{(q)}$, so erhalten wir außerdem

$$\alpha(q) = \sum_{i=1}^m a_i(q) d(x_i)_q$$

also $\alpha|_U = \sum_{i=1}^m a_i d(x_i)$. □

Korollar III.28. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung. Das totale Differential df lässt sich lokal bei p schreiben als

$$df|_U = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_i} \circ x \right) d(x_i)$$

Beweis. Es gilt

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ x^{-1}(x(p) + te_i)) = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p))$$

□

Definition III.31 (Regularität, 1-Form). Sei $k, \tilde{k} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale $C^{\tilde{k}}$ -Mannigfaltigkeit, I eine Indexmenge, $(U_\iota)_{\iota \in I}$ eine Überdeckung von

M durch Kartengebiete U_ι und α eine 1-Form auf M . Nach Lemma III.27 finden wir für jedes $\iota \in I$ Funktionen $a_1^{(\iota)}, \dots, a_m^{(\iota)} : U_\iota \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\alpha|_{U_\iota} = \sum_{i=1}^m a_i^{(\iota)} dx_i$. Wir sagen, α ist stetig g. d. w. für alle $\iota \in I$ $a_1^{(\iota)}, \dots, a_m^{(\iota)}$ stetig sind. Wir sagen, dass α k -fach differenzierbar ist g. d. w. für alle $\iota \in I$ $a_1^{(\iota)}, \dots, a_m^{(\iota)}$ k -fach differenzierbar sind. Wir sagen, dass α von der Klasse C^k ist g. d. w. für jedes $\iota \in I$ $a_1^{(\iota)}, \dots, a_m^{(\iota)}$ von der Klasse C^k -sind.

Lemma III.29. Analog zum Tangentialbündel ist auch das Kotangentialbündel eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Dann ist T^*M eine $(2m)$ -dimensionale C^{k-1} -Mannigfaltigkeit.

Beweis. T^*M erbt von M bzw. TM ebenfalls eine Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit, indem Karten für M entsprechende Karten für T^*M induzieren.

Sei (U, x) eine lokale Karte für M . (U, x) induziert, durch faserweises Zurückziehen, dual zur Karte $T_x = dx : TU \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^m$ eine lokale Parametrisierung

$$T_x^* : x(U) \times (\mathbb{R}^m)^* \rightarrow T^*U$$

$$\left(x(p), \sum_{i=1}^m a_i e_i^*\right) \mapsto \sum_{i=1}^m a_i dx_i|_p = d(a \circ x)|_p = (dx_p)^* a$$



wobei wir $a = \sum_{i=1}^m a_i x_i$ als lineare Abbildung auf $x(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ auffassen. Ihre Umkehrung, d. h. $(T_x^*)^{-1}$ dient als lokale Karte für T^*M .

Wir zeigen nun, dass Kartenwechsel mindestens von der Klasse C^{k-1} sind. Sei dazu $(\tilde{U}, \tilde{x})$ eine weitere Karte für M . Dann haben wir dual zum Basiswechsel

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial(\tilde{x}_i \circ x^{-1})}{\partial x_j} \circ x \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$$

auf den Tangentialräumen den Basiswechsel der Kotangentialräume

$$d\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x \right) dx_j$$

denn es gilt

$$d\tilde{x}_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = d\tilde{x}_i \left(\sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_j} \circ x \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} \right) = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x$$

Auch haben wir dual zum Kartenwechsel $T_{\tilde{x}} \circ T_x^{-1}$ auf TM den Kartenwechsel

$$(T_{\tilde{x}}^*)^{-1} \circ T_x^* : x(U \cap \tilde{U}) \times (\mathbb{R}^m)^* \longrightarrow \tilde{x}(U \cap \tilde{U}) \times (\mathbb{R}^m)^*$$

$$(x(p), a) \mapsto \left(\tilde{x}(p), \sum_{j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}(p)) \right)}_{= \frac{\partial(a \circ x)}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}(p))} \cdot e_j^* \right)$$

wobei wir wieder $a = \sum_{i=1}^m a_i x_i$ als lineare Abbildung auf $x(U)$ sehen und die Abbildung $(a \circ x)(\tilde{x}) = (x^*a)(\tilde{x})$ (wobei hier wieder $a \circ x$ kurz für $a \circ x \circ \tilde{x}^{-1}$ ist, Anm.) auf $\tilde{x}(U)$ als ihre Verknüpfung, d. h. ihr Rückzug, mit dem Kartenwechsel $x(\tilde{x})$. Wir können also die Abbildungsvorschrift von $(T_{\tilde{x}}^*)^{-1} \circ T_x^*$ schreiben als

$$(x(p), a) \mapsto (\tilde{x}(p), d(x^*a)_{\tilde{x}(p)}) = (\tilde{x}(p), d(a \circ x)_{\tilde{x}(p)})$$

Dabei ist $(T_{\tilde{x}}^*)^{-1} \circ T_x^*$ von der Klasse C^{k-1} .

Wir erhalten also einen C^{k-1} -Atlas auf T^*M . Analog zu TM ist auch T^*M selbst ein Hausdorffraum und die topologische Basis von T^*M ist abzählbar. Insgesamt ist also T^*M eine $(2m)$ -dimensionale C^{k-1} -Mannigfaltigkeit. $\square$

Bemerkung. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und betrachten wir den von $\{ \text{id}_{\mathbb{R}^m} \mid_W \}$ induzierten Atlas. 1-Formen α lassen sich nach Lemma [III.27](#) schreiben als $\alpha = \sum_{i=1}^m a_i dx_i$. Das totale Differential einer Funktion $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ lässt sich also schreiben als $df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

III.4.2. Rückzug von 1-Formen

Mit differenzierbaren Abbildungen können wir 1-Formen zurückziehen. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, M^m, N^n differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $F : M \longrightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Dual zu $dF_p : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ haben wir lineare Rückzugsabbildungen $dF_p^* : T_{F(p)}^* N \longrightarrow T_p^* M$. Wir können damit eine 1-Form $\alpha : N \longrightarrow \mathbb{R}$ zurückziehen zu einer 1-Form $F^*\alpha$ auf M mit

$$(F^*\alpha)_p := (dF_p)^* \alpha_{F(p)} = \alpha_{F(p)} \circ dF_p$$

Sei $p \in M$ und (U, x) eine lokale Karte für M in p sowie (V, y) eine lokale Karte für $F(p)$. Wir betrachten die 1-Form $d(y_i)$. In lokalen Koordinaten gilt

$$F^* d(y_i) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \circ x \right) dx_j$$

denn mit der lokalen Koordinatendarstellung von dF gilt

$$(F^* d(y_i)) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = dy_i \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \circ x$$

III.4.3. Integration von 1-Formen über Kurven

Definition III.32 (Kurvenintegral). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\alpha : M \rightarrow TM$ eine stetige 1-form auf M , $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve. Das *Kurven-* bzw. *Wegintegral* von α längs der Kurve c ist definiert als

$$\int_c \alpha := \int_{[a,b]} \alpha(c') d\lambda^1 = \int_{[a,b]} \alpha_{c(t)}(c'(t)) d\lambda^1(t)$$

Bemerkung. Wegen $c' = dc \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ ist somit $\alpha(c') = (\alpha \circ dc) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ und es gilt

$$\int_c \alpha = \int_{[a,b]} c^* \alpha d\lambda^1$$

Lemma III.30. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^1 . Seien weiter $p, q \in M$ aus der selben Zusammenhangskomponente, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$. Dann gilt

$$f|_p^q = \int_{[a,b]} \left(df_{c(t)}(c'(t)) \right) d\lambda^1(t)$$

Bemerkung. Das Kurvenintegral ist also in geeignetem Sinne die Umkehrung des totalen Differentials. Modulo einer additiven Konstante kann f auf jeder Zusammenhangskomponente durch „Aufintegrieren“ aus dem totalen Differential df rekonstruiert werden.

Beweis. Es gilt

$$f|_p^q = f \circ c|_a^b \stackrel{(*)}{=} \int_{[a,b]} (f \circ c)'(t) d\lambda^1(t) = \int_{[a,b]} (df_{c(t)}(c'(t))) d\lambda^1(t)$$

wobei wir bei (*) den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus *Analysis I* verwendet haben. $\square$

Das Kurvenintegral ist invariant unter orientierungserhaltenden Reparametrisierungen, also Solchen, bei denen Anfangs- und Endpunkt der Kurve gleich bleiben, d.h. nicht getauscht werden.

Lemma III.31. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\alpha : M \rightarrow TM$ eine stetige 1-form, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve. Sind weiter $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{a} < \tilde{b}$ und $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ ein C^1 -Diffeomorphismus mit $\varphi(\tilde{a}) = a$ und $\varphi(\tilde{b}) = b$, d.h. $c \circ \varphi$ eine orientierungserhaltende Reparametrisierung von c . Dann gilt

$$\int_{c \circ \varphi} \alpha = \int_c \alpha$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{c \circ \varphi} \alpha &= \int_{[\tilde{a}, \tilde{b}]} \alpha_{(c \circ \varphi)(\tilde{t})} ((c \circ \varphi)'(\tilde{t})) d\lambda^1(\tilde{t}) \\ &\stackrel{(i)}{=} \int_{[\tilde{a}, \tilde{b}]} \alpha_{(c \circ \varphi)(\tilde{t})} (c'(\varphi(\tilde{t})) \cdot \varphi'(\tilde{t})) d\lambda^1(\tilde{t}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_{[\tilde{a}, \tilde{b}]} (\alpha_{(c \circ \varphi)(\tilde{t})}(c'(\varphi(\tilde{t}))) \cdot \varphi'(\tilde{t})) d\lambda^1(\tilde{t}) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \int_{[a, b]} \alpha_{c(t)}(c'(t)) d\lambda^1(t) \\ &= \int_c \alpha \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir bei (i) die Kettenregel in der Form $(c \circ \varphi)'(\tilde{t}) = c'(\varphi(\tilde{t})) \cdot \varphi'(\tilde{t})$ und bei (ii), dass $\varphi'(t) \in \mathbb{R}$ und $\alpha_{c(\varphi(\tilde{t}))}$ linear ist. Schließlich führen wir bei (iii) eine Substitution durch, wenden also den Transformationssatz in Dimension 1 an. $\square$

23. Jänner 2020

Beispiel. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein durch die glatte Kurve $c = \text{id}_I$ parametrisiert ist. Wir betrachten eine Riemann-integrierbare Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und die 1-Form $\alpha = g dt$. Dann wird

das Kurvenintegral zu

$$\int_{\text{id}_I} g \, dt = \int_I \text{id}_I^* g \, dt = \int_I g \, dt$$

Dabei ist Ersteres ein Kurvenintegral über die 1-Form $g \, dt$ und Zweiteres das aus *Analysis I* bekannte Riemann-Integral über die Funktion g .

Lemma III.32. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $F : M \rightarrow N$ eine C^1 -Abbildung und c eine C^1 -Kurve in M . Für eine stetige 1-Form β gilt

$$\int_{F \circ c} \beta = \int_c F^* \beta$$

Das Kurvenintegral verhält sich also gut unter stetig differenzierbaren Abbildungen.

Beweis. Es gilt

$$(F \circ c)^* \beta = \beta \circ (F \circ c)' = \beta \circ dF \circ c' = (F^* \beta) \circ c' = c^*(F^* \beta)$$

Ist also $I \subseteq \mathbb{R}$ die Definitionsmenge von c , so folgt

$$\int_{F \circ c} \beta = \int_I (F \circ c)^* \beta = \int_I c^*(F^* \beta) = \int_c F^* \beta$$

□

III.5. Höhere Differentialformen

1-Formen sind Familien von Linearformen auf Tangentialräumen. Es treten ebenfalls andere Familien von Objekten der *linearen Algebra* auf Tangentialräumen natürlicherweise auf. Es bietet sich deshalb an, weitere natürliche Bündel und deren Schnitte zu betrachten. Im Rahmen dieser Vorlesung sind Familien *alternierender Multilinearformen* relevant. Diese ermöglichen schließlich infinitesimale Volumenmessung und sind damit natürliche Objekte für die Integration über Untermannigfaltigkeiten.

Es gibt aber auch viele andere wichtige Typen. Zu erwähnen wären z. B. *Riemannsche Metriken*, also Familien von Skalarprodukten, d. h. Tensorfelder vom Typ $(0, 2)$. Sie sind insbesondere in der Differentialgeometrie von Bedeutung, da es sich bei ihnen um eine natürliche Art handelt, Längenmessung auf Mannigfaltigkeiten einzuführen.

III.5.1. Definitionen

Definition III.33 (äußeres Algebrenbündel). Sei $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$ und M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir definieren das Vektorbündel

$$\Lambda^r TM := \bigcup_{p \in M} \Lambda^r(T_p M)$$

zusammen mit der Fußpunktprojektion $\pi_{\Lambda^r TM} : \Lambda^r TM \rightarrow M$. Weiters definieren wir das *äußere Algebrenbündel* $\Lambda^* TM$ durch

$$\Lambda^* TM = \bigcup_{p \in M} \Lambda^*(T_p M)$$

und versehen es ebenfalls mit der Fußpunktprojektion $\pi_{\Lambda^* TM} : \Lambda^* TM \rightarrow M$.

Bemerkung. Es gilt $\Lambda^1 TM = T^*M$. Für $r = 0$ und im Topgrad $r = m$ sind die Bündel der äußeren Potenzen, also $\Lambda^0 TM$ und $\Lambda^m TM$, eindimensional. Sie werden auch *Linienbündel* genannt. Während $\Lambda^0 TM = \mathbb{R}$ ist $\Lambda^m TM$ i. A. nicht trivial. Für $r > m$ ist $\Lambda^r TM$ trivial, denn es gilt $\dim(\Lambda^r(T_p M)) = \binom{n}{r} = 0$ für alle $p \in M$.

Definition III.34 (r -Form; gemischte Differentialform). Sei $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$ und M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine *Differentialform* vom Grad r , kurz *r -Form*, auf M ist ein Schnitt des Vektorbündels $\Lambda^r TM$, d. h. eine Abbildung $\alpha : M \rightarrow \Lambda^r TM$, sodass $\pi_{\Lambda^r TM} \circ \alpha = \text{id}_M$. Eine *gemischte Differentialform* auf M ist ein Schnitt des äußeren Algebren-Bündels $\Lambda^* TM \rightarrow M$.

$\leadsto \alpha_p := \alpha(p) \in \Lambda^k T_p M \cong \text{Alt}_k(T_p M)$ (i. d. h. alt. k -multilin.-form auf $T_p M$)

Analog zum Tangentialbündel und Kotangentialbündel sind die Bündel der äußeren Potenzen wieder differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Lemma III.33. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$ und M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Dann ist $\Lambda^r TM$ eine C^{k-1} -Mannigfaltigkeit. Ist weiter (U, x) eine Karte für M , so ist

$$\{ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \mid i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\} \wedge i_1 < \cdots < i_r \}$$

ein lokales Basenfeld für $\Lambda^r TM|_U \cong \Lambda^r TU$. Für eine r -Form α auf M finden wir also für $p \in U$ Koeffizienten $a_{i_1, \dots, i_r}^{(p)} \in \mathbb{R}$ für $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\}$ mit $i_1 < \dots < i_r$, sodass

$$\alpha(p) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\} \\ i_1 < \dots < i_r}} a_{i_1, \dots, i_r}^{(p)} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

Wir finden also für $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\}$ mit $i_1 < \dots < i_r$ eine Abbildung $a_{i_1, \dots, i_r} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a_{i_1, \dots, i_r}(p) := a_{i_1, \dots, i_r}^{(p)}$, sodass wir α lokal in U schreiben können als

$$\alpha|_U = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\} \\ i_1 < \dots < i_r}} a_{i_1, \dots, i_r} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

Bemerkung. Im Fall $r > m$ ist

$$\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \mid i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\} \wedge i_1 < \dots < i_r\} = \emptyset$$

und es gilt $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

Definition III.35 (Regularität, r -Form). Seien $k, \tilde{k} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit, I eine Indexmenge, $(U_\iota)_{\iota \in I}$ eine Überdeckung von M durch Kartengebiete U_ι und α eine r -Form auf M . Nach Lemma [III.33](#) können wir für jedes $\iota \in I$ und alle $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\}$ mit $i_1 < \dots < i_r$ eine Abbildung $a_{i_1, \dots, i_r}^{(\iota)} : U_\iota \rightarrow \mathbb{R}$ finden, sodass für alle $\iota \in I$ gilt, dass

$$\alpha|_{U_\iota} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\} \\ i_1 < \dots < i_r}} a_{i_1, \dots, i_r}^{(\iota)} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

Wir sagen, α hat die Regularität $\mathcal{R}$ g. d. w. für jedes $\iota \in I$ und alle $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\}$ mit $i_1 < \dots < i_r$ die Funktion $a_{i_1, \dots, i_r}^{(\iota)}$ die Regularität $\mathcal{R}$ hat. Also ist α stetig, differenzierbar bzw. von der Klasse C^k g. d. w. alle Koeffizientenfunktionen stetig, differenzierbar bzw. von der Klasse C^k sind.

III.5.2. Rückzug von r -Formen

Analog zu 1-Formen können wir auch allgemeiner r -Formen mit differenzierbaren Abbildungen zurückziehen. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, M^m, N^n differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $F : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Dual zu

$dF_p : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ haben wir lineare Rückzugsabbildungen $dF_p^* : T_{F(p)}^* N \longrightarrow T_p^* M$. Wir können damit eine r -Form $\alpha : N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zurückziehen zu einer r -Form $F^*\alpha$ auf M mit

$$(F^*\alpha)_p := (dF_p)^*\alpha_{F(p)} = \alpha_{F(p)} \circ dF_p$$

Der Rückzug von r -Formen vertauscht ob seiner Natürlichkeit mit dem Dachprodukt, d. h. für r -Formen α, β auf M gilt

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta) \quad (\text{III.J})$$

Sei $p \in M$ und (U, x) eine lokale Karte von M in p sowie (V, y) eine lokale Karte von N in $F(p)$. Für 1-Formen gilt (s. o.) für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$F^* dy_i = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \circ x \right) dx_j$$

Dabei ist für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ der Ausdruck $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ definiert auf $x(U)$, der Ausdruck $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \circ x \right)$ definiert auf U , dy_i eine 1-Form auf V und dx_j eine 1-Form auf U .

Seien $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < \dots < i_r$. Für beliebige r -Formen gilt dann:

$$\begin{aligned} F^*(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_r}) &= (F^* dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge (F^* dy_{i_r}) \\ &= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, m\} \\ j_1 < \dots < j_r}} \left(\left(\prod_{l=1}^r \frac{\partial F_{i_l}}{\partial x_{j_l}} \right) \circ x \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \\ &= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, m\} \\ j_1 < \dots < j_r}} \left(\det \left(\frac{\partial F_{i_s}}{\partial x_{j_t}} \right)_{s,t \in \{1, \dots, r\}} \circ x \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \end{aligned}$$



Im Fall $r = m > n$ erhält man die Vereinfachung

$$F^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_r) = \left(\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}} \circ x \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

III.6. Partition der Eins

Die Partition der Eins ist ein topologisches Hilfsmittel um durch Verklebung von lokalen zu globalen Konstruktionen zu gelangen.

Definition III.36 (topologischer Träger, Funktion). Sei X ein topologischer Raum, Y ein Vektorraum und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Der topologische Träger $\text{supp } \varphi$ von φ ist definiert durch

$$\text{supp } \varphi := \overline{\{\varphi \neq 0\}}$$

Definition III.37 (lokale Endlichkeit). Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{M} \in \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Mengen. $\mathcal{M}$ heißt *lokal endlich* g. d. w. zu jedem Punkt eine Umgebung dieses Punktes existiert, die nur endlich viele Elemente von $\mathcal{M}$ schneidet. Anschaulich „driftet“ $\mathcal{M}$ dann nach unendlich ab.

Bemerkung. Lokale Endlichkeit von $\mathcal{M}$ ist äquivalent dazu, dass jedes Kompaktum nur endlich viele Elemente von $\mathcal{M}$ schneidet.

Definition III.38 (Partition der Eins; untergeordnete Partition der Eins). Seien $k, \tilde{k} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $k \leq \tilde{k}$ und M eine $C^{\tilde{k}}$ -Mannigfaltigkeit. Sei I eine Indexmenge und $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von C^k -Funktionen $\varphi_\iota : M \rightarrow [0, 1]$. Wir nennen (φ_ι) eine *C^k -Partition der Eins* g. d. w. gilt:

(i) die Familie der topologischen Träger $(\text{supp } \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ ist lokal endlich

(ii) $\sum_{\iota \in I} \varphi_\iota \equiv 1$

Sei A eine weitere Indexmenge und $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von M , d. h. $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Wir sagen (φ_ι) ist der Überdeckung (U_α) *untergeordnet* g. d. w. eine Abbildung $\alpha : I \rightarrow A$ existiert, sodass $\text{supp } \varphi_\iota \subseteq U_{\alpha(\iota)}$ für alle $\iota \in I$.

Bemerkung. Obwohl die Summe $\sum_{\iota \in I} \varphi_\iota$ möglicherweise überabzählbar viele Summanden hat, ist sie wohldefiniert, da, aufgrund der lokalen Endlichkeit der topologischen Träger, punktweise sogar nur endlich viele Summanden ungleich 0 sind.

Satz III.34. Seien $k, \tilde{k} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $k \leq \tilde{k}$ und M eine $C^{\tilde{k}}$ -Mannigfaltigkeit. Für jede offene Überdeckung von M existiert eine ihr untergeordnete C^k -Partition der Eins über einer abzählbaren Indexmenge und kompakten topologischen Trägern. D. h. ist A eine Indexmenge und $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M , so existiert eine abzählbare Indexmenge I und C^k -Partition der Eins $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$, sodass (φ_ι) (U_α) untergeordnet ist und für jedes $\iota \in I$ der topologische Träger $\text{supp } \varphi_\iota$ kompakt ist.

III.7. Orientierungen von Mannigfaltigkeiten

Definition III.39 (Orientierung; Orientierbarkeit; Orientierungserhaltung, Diffeomorphismus; Standardorientierung, $\mathbb{R}^m$). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine *Orientierung* von M ist eine Familie $(o_p)_{p \in M}$ von Orientierungen o_p der Tangentialräume $T_p M$, sodass für jede lokale Karte (U, x) das Vorzeichen der Orientierung der Standardbasis $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right)_i$ als Funktion in Abhängigkeit von $p \in U$ lokal konstant ist. M heißt *orientierbar* g. d. w. eine Orientierung von M existiert. Ist $(o_p)_{p \in M}$ eine Orientierung auf M , so nennen wir M *orientiert* durch (o_p) .

Seien M und N orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $\Phi : M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Φ heißt *orientierungserhaltend*, g. d. w. sein Differential punktweise orientierungserhaltend ist, also g. d. w. das Bild $(\Phi(b_i))_{i \in I}$ einer positiv orientierten Basis $(b_i)_{i \in I}$, für eine totalgeordnete Indexmenge I , wieder positiv orientiert ist.

Die *Standardorientierung* von $\mathbb{R}^m$ ist die Orientierung, für die das Standardbasenfeld $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right)$ positiv orientiert ist.

Bemerkung. Eine Karte (U, x) einer orientierten Mannigfaltigkeit ist also orientierungserhaltend, wenn sie orientierungserhaltend relativ zur Standardorientierung auf $x(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ ist.

Definition III.40 (Volumenform). Sei $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei $\omega : M \rightarrow \Lambda^m T^*M$ eine m -Form auf M . Wir nennen ω eine *Volumenform* auf M g. d. w. ω nirgends verschwindet, d. h. g. d. w. für alle $p \in M$ gilt, dass $0 \neq \omega_p \in \Lambda^m T_p^*M$ (ω_p also nicht die Nullabbildung ist, Anm.). Dabei ist ω_p selbst eine Volumenform auf T_p^*M .

Definition III.41 (induzierte Orientierung, Volumenform). Sei $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und ω eine stetige Volumenform auf M . ω induziert eine Orientierung $o^{(\omega)}$ von M . Für $p \in M$ ist dann eine geordnete Basis $(v_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ von $T_p M$ positiv orientiert g. d. w. $\omega_p(v_1, \dots, v_m) > 0$.

Beispiel. Die Standardorientierung von $\mathbb{R}^m$ wird induziert von $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$. Sie wird auch *Standardvolumenform* von $\mathbb{R}^m$ genannt.

Lemma III.35. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ω, ω' Volumenformen auf M . ω, ω' induzieren die selbe Orientierung g. d. w. es ein $f > 0$ gibt, sodass $\omega' = f \cdot \omega$.

Beweis. Wegen $\dim(\Lambda^m T_p M) = 1$ sind alle Volumenformen Vielfache voneinander, d. h. wir finden $f \in \mathbb{R}$, sodass $\omega' = f \cdot \omega$. ω, ω' induzieren dieselbe Orientierung g. d. w. für alle geordneten Basen $(v_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ von $T_p M$ gilt, dass

$$\operatorname{sgn}(\omega(v_1, \dots, v_m)) = \operatorname{sgn}(\omega'(v_1, \dots, v_m))$$

Dies ist genau der Fall, wenn $f > 0$. □

Proposition III.36. Orientierungen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten werden immer von Volumenformen induziert. Sei also $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine C^k -Mannigfaltigkeit versehen mit einer Orientierung o . Dann existiert eine C^k -Volumenform ω , sodass o von ω induziert ist.

Beweis. Wir betrachten für eine Indexmenge A eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von M durch Kartengebiete. Für jedes α finden wir eine C^k -Volumenform ω_α auf U_α , die bezüglich der Orientierung o positiv orientiert ist. Wir Wählen nun eine Partition der Eins $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ für eine Indexmenge I , die der Überdeckung (U_α) untergeordnet ist. Es gilt also $\sum_{\iota \in I} \varphi_\iota = 1$ und wir finden eine Abbildung $\alpha : I \rightarrow A$, sodass $\operatorname{supp} \varphi_\iota \subseteq U_{\alpha(\iota)}$ für alle $\iota \in I$.

Wir definieren dann $\omega := \sum_{\iota \in I} \varphi_\iota \omega_{\alpha(\iota)}$ als die gesuchte *globale* Volumenform positiver Orientierung auf M . Da die Summe lokal endlich ist, d. h. punktweise nur endlich viele Summanden ungleich 0 sind, und, weil Konvexkombinationen von Volumenformen wieder Volumenformen sind, ist ω wohldefiniert. □

Korollar III.37. Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M existieren genau dann Volumenformen, wenn M orientierbar ist.

27. Jänner 2020

III.8. Integration von Differentialformen

Wir wollen nun unsere Erkenntnisse über das Kurvenintegral, d. h. die Integration von 1-Formen über C^1 -Kurven verallgemeinern. Unser Ziel ist die Integration von Differentialformen beliebigen Grades über Untermannigfaltigkeiten bzw. allgemeiner die Integration längs Abbildungen orientierter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten der entsprechenden Dimension.

Eine r -Form auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit weist r -dimensionalen Parallelpipeden in den Tangentialräumen orientierte Volumina zu. Sie erlauben uns also eine infinitesimale Volumenmessung in der Dimension r . Durch Integration gelangen wir dann zu einer globalen Volumenmessung. Wir fassen dabei Integrale als orientierte Volumina auf.

Im Folgenden werden wir zuerst das Integral von m -Formen auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ betrachten. Anschließend werden wir diese Betrachtungen auf das Integral von m -Formen auf beliebigen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten erweitern.

Definition III.42 (Integral, Differentialform, $\mathbb{R}^m$). Sei $m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und α eine stetige m -Form auf U mit kompaktem Träger. Dann finden wir nach Lemma III.33 eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, sodass $\alpha = f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$. Das Standardparallelepiped hat dann das infinitesimale α -Volumen

$$\alpha_x \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_x \right) = f(x)$$

Wir definieren dann das Integral $\int_U \alpha$ durch

$$\int_U \alpha := \int_U \alpha_x \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_x \right) d\lambda^m(x) = \int_U f d\lambda^m = \int_U f dx_1 \cdots dx_m$$

Lemma III.38. Das Integral von Differentialformen ist invariant unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen. Sei also $m \in \mathbb{N}$, $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, α eine stetige m -Form auf V mit kompaktem Träger und $F : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Es gilt $\int_U F^* \alpha = \int_V \alpha$.

Bemerkung. Ist F orientierungsumkehrend, so gilt $\int_U F^* \alpha = - \int_V \alpha$.

Beweis. Wir finden nach Lemma III.33 eine stetige Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, sodass $\alpha = f \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m$. Es gilt

$$F^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m) = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

wobei für die Jacobi-Determinante gilt, dass $\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}} > 0$, da F per Annahme orientierungserhaltend ist. Die Jacobi-Determinante gibt die infinitesimale orientierte

Volumenverzerrung an. Insgesamt ist dann also

$$F^*\alpha = (f \circ F) \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}} \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

Für das Integral gilt dann also

$$\begin{aligned} \int_U F^*\alpha &= \int_U (f \circ F) \cdot \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}} dx_1 \cdots dx_m \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_V f dy_1 \cdots dy_m \\ &= \int_V \alpha \end{aligned}$$

wobei bei $(*)$ die Transformationsformel [II.44](#) verwendet wurde. $\square$

Da das Integral von Formen über offene Mengen euklidischer Räume also auch invariant unter orientierungserhaltenden Koordinatenwechseln ist, können wir das Integral auch sinnvoll auf allgemeine differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir definieren dabei zuerst den Lokalen Fall, bei dem der Träger der Differentialform bereits vollständig in einem der Kartenbereiche enthalten ist.

Definition III.43 (Integral, Differentialform, Mannigfaltigkeit, lokaler Fall). Sei $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und α eine stetige m -Form mit kompaktem Träger, sodass ein Kartengebiet U einer orientierungserhaltenden Karte (U, x) von M existiert, sodass $\text{supp } \alpha \subseteq U$. Wir führen dann das Integral über M zurück auf das Integral über $x(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ und definieren

$$\int_M \alpha := \int_{x(U)} (x^{-1})^* \alpha$$

Lemma III.39. Das Integral von Differentialformen über differenzierbaren Mannigfaltigkeiten aus Definition [III.43](#) ist wohldefiniert, also unabhängig von der gewählten Karte.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und α eine stetige m -Form mit kompaktem Träger. Seien $(U, x), (\tilde{U}, \tilde{x})$ zwei Karten von M mit

$\text{supp } \alpha \subseteq U, \tilde{U}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{x(U)} (x^{-1})^* \alpha &= \int_{x(U \cap \tilde{U})} (x^{-1})^* (\alpha|_{U \cap \tilde{U}}) \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{\tilde{x}(U \cap \tilde{U})} (x \circ \tilde{x}^{-1})^* (x^{-1})^* (\alpha|_{U \cap \tilde{U}}) \\ &= \int_{\tilde{x}(\tilde{U})} (\tilde{x}^{-1})^* \alpha \end{aligned}$$

wobei wir bei (*) Lemma III.38 verwenden. $\square$

Für den allgemeinen Fall benötigen wir eine Partition der Eins.

Definition III.44 (Integral, Differentialform, Mannigfaltigkeit). Sei $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, α eine stetige m -Form mit kompaktem Träger, A eine Indexmenge, sodass $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von M durch Kartengebiete ist, und I eine Indexmenge, sodass $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine der Überdeckung (U_α) untergeordnete C^k -Partition der Eins ist. Dann führen wir den globalen Fall zurück auf den lokalen Fall und definieren

$$\int_M \alpha := \sum_{i \in I} \left(\int_M \varphi_i \alpha \right)$$

Bemerkung. Wir fassen $\int_M \alpha$ als das α -Volumen von M auf.

Lemma III.40. Das Integral von Differentialformen über differenzierbare Mannigfaltigkeiten aus Definition III.44 ist wohldefiniert, d. h. die Summe ist immer definiert und das Integral ist unabhängig von der gewählten Partition der Eins.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, α eine stetige m -Form mit kompaktem Träger, A eine Indexmenge, sodass $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von M durch Kartengebiete ist, und I, J Indexmengen, sodass $(\varphi_i)_{i \in I}, (\psi_j)_{j \in J}$ zwei der Überdeckung (U_α) untergeordnete C^k -Partitionen der Eins sind. Die Summe $\sum_{i \in I} (\int_M \varphi_i \alpha)$ ist immer definiert, da $(\text{supp } \varphi_i)_{i \in I}$ eine lokal endliche Familie ist und aufgrund der Kompaktheit von $\text{supp } \alpha$ nur für endlich viele $i \in I$ gilt, dass $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \varphi_i \neq \emptyset$. Weiters gilt

$$\sum_{i \in I} \left(\int_M \varphi_i \alpha \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} \left(\int_M \psi_j \varphi_i \alpha \right) \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} \left(\int_M \varphi_i \psi_j \alpha \right) \right) = \sum_{j \in J} \left(\int_M \psi_j \alpha \right)$$

wobei wir die Summationsreihenfolge vertauschen dürfen, da nur endlich viele Summanden ungleich 0 sind. $\square$

Proposition III.41. Sei $m \in \mathbb{N}$, M, N m -dimensionale orientierte C^k -Mannigfaltigkeiten, $F : M \rightarrow N$ ein orientierungserhaltender C^1 -Diffeomorphismus, und α eine stetige m -Form auf N mit kompaktem Träger. Es gilt

$$\int_M F^* \alpha = \int_N \alpha$$

Beweis. Sei A eine Indexmenge, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von N durch Kartengebiete und I eine Indexmenge, sodass $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ eine der Überdeckung (U_α) untergeordnete C^k -Partition der Eins. Sei weiter $(\psi_\iota)_{\iota \in I}$ die C^k -Partition der Eins, die unter F der Partition (φ_ι) entspricht. Es gilt

$$\int_M F^* \alpha = \sum_{\iota \in I} \left(\int_M \psi_\iota F^* \alpha \right) = \sum_{\iota \in I} \left(\int_N \varphi_\iota \alpha \right) = \int_N \alpha$$

□

Beispiel. In Dimension 0 reduziert sich die Integration zur Summation. Ist M eine 0-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist M ein diskreter topologischer Raum. Wir finden also eine Orientierung $\varepsilon : M \rightarrow \{\pm 1\}$. Dann gilt für jede stetige Funktion, d. h. jede stetige 0-Form, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit endlichem Träger:

$$\int_M f := \sum_{p \in M} \varepsilon(p) \cdot f(p)$$

Im Folgenden werden wir Formen beliebigen Grades über Untermannigfaltigkeiten der entsprechenden Dimension, bzw. allgemeiner über Abbildungen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten integrieren.

Definition III.45 (Integral, Abbildungen von Mannigfaltigkeiten). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale orientierte und kompakte C^k -Mannigfaltigkeit und N eine nicht notwendigerweise orientierte n -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Sei weiters α eine stetige m -Form auf M und $F : M \rightarrow N$ eine C^1 -Abbildung. Wir definieren das Integral von α längs der Abbildung F als

$$\int_M F^* \alpha$$

Bemerkung. Wir fassen $\int_M F^* \alpha$ als das α -Volumen der Abbildung F auf.

Beispiel. Wir können über eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeiten M von N integrieren, indem wir für F die Inklusionsabbildung $\iota : M \hookrightarrow N$ wählen und somit das Integral $\int_N \iota^* \alpha$ betrachten.

III.9. Äußere Ableitung

Das totale Differential bildet Funktionen, d. h. 0-Formen, auf 1-Formen ab. Die äußere Ableitung verallgemeinert das totale Differential in der Hinsicht, dass es eine k -Form auf eine $(k + 1)$ -Form abbildet. Induktiv gelangen wir so von 0-Formen zu beliebigen n -Formen. Eine weitere Motivation für die äußere Ableitung folgt a posteriori mit dem Satz von Stokes und dem Poincaré-Lemma (s. u.).

Satz III.42. Sei M eine C^2 -Mannigfaltigkeit. Es existiert eine eindeutige Fortsetzung des totalen Differentials auf differenzierbaren Funktionen zu einem $\mathbb{R}$ -linearen Operator d auf differenzierbaren Differentialformen, sodass gilt:

- (i) d ist *antiderivativ* vom Grad 1, d. h. d bildet für $k \in \mathbb{N}_0$ k -Formen auf $(k + 1)$ -Formen ab und es erfüllt die Produktregel

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$$

für alle differenzierbaren k -Formen α und beliebigen Differentialformen β .

- (ii) Auf zweifach differenzierbaren Formen gilt $d^2 \equiv 0$, d. h. für jede zweifach differenzierbare Form α gilt $d^2 \alpha = d(d\alpha) = 0$.

Bemerkung. Eigenschaft (ii) rührt von der *de-Rham-Kohomologie*.

Definition III.46 (äußere Ableitung). Sei M eine C^2 -Mannigfaltigkeit. Der Operator d aus Satz III.42 heißt die *äußere Ableitung*.

Beweis. Sei α eine differenzierbare Form. Wir überzeugen uns, dass eine äußere Ableitung d notwendigerweise ein lokaler Operator ist, d. h. $(d\alpha)_p$ in $p \in M$ nur vom lokalen Verhalten von α nahe p abhängt. Äquivalent dazu ist, dass $(d\alpha)_p = 0$, wenn $\alpha = 0$ nahe p . Wir wählen dann eine C^2 -Buckelfunktion φ auf M , sodass $\varphi \equiv 1$ nahe p und $\varphi \alpha = 0$ auf ganz M . Dann gilt

$$0 = d0 \stackrel{(i)}{=} d(\varphi \alpha) \stackrel{(ii)}{=} d\varphi \wedge \alpha + \varphi d\alpha \stackrel{(iii)}{=} 0 + 1 \cdot d\alpha = d\alpha$$

Dabei wurde bei (i) verwendet, dass $\varphi\alpha \equiv 0$ auf ganz M . (ii) folgt als Spezialfall $d(f\beta) = (df) \wedge \beta + f d\beta$, für eine differenzierbare Abbildung f und eine differenzierbare Differenzialform β , der Produktregel. Schließlich folgt (iii), da $d\varphi \equiv 0$ nahe p also $(d\varphi) \wedge \alpha \equiv 0$ nahe p sowie $\varphi \equiv 1$ nahe p . Insbesondere gilt dann $(d\alpha)_p = 0$.

Als Folge der Lokalität können wir d auf offene Teilmengen einschränken, d. h. für eine Karte (U, x) liefert die äußere Ableitung d auf M die äußere Ableitung d_U auf U , sodass gilt $d_U(\alpha|_U) = (d\alpha)|_U$.

Als nächstes beweisen wir die Aussage, dass d eine globale äußere Ableitung darstellt, im Spezialfall, dass $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist.

30. Jänner 2020

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und α eine k -Form auf M . Wir finden also für $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ eine Funktion, d. h. eine 0-Form $a_{i_1, \dots, i_k} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\} \\ i_1 < \dots < i_k}} a_{i_1, \dots, i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Dann definieren wir die äußere Ableitung durch

$$\begin{aligned} d\alpha &= d \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\} \\ i_1 < \dots < i_k}} a_{i_1, \dots, i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) \\ &:= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\} \\ i_1 < \dots < i_k}} da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned} \quad (\text{III.K})$$

Wir überprüfen nun, dass dies in der Tat eine äußere Ableitung definiert, d. h. die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt. Aufgrund der Linearität genügt es, die Eigenschaften der äußeren Ableitung für Monome zu zeigen. Seien $a, b : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, m\}$ mit $i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_l$ sowie $\alpha := a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ und $\beta := b dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$ eine k - bzw. eine l -Form auf M . Es gilt

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= d(a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge b dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) \\
&= d(ab dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) \\
&= d(ab) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= (d(a)b + a(db)) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= ((da)b) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&\quad + (a(db)) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= da \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge b dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&\quad + (-1)^k a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge db \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= da \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge b dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&\quad + (-1)^k a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge db \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&= d(a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \wedge b dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\
&\quad + (-1)^k a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge d(b dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) \\
&= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{-1} \alpha \wedge (d\beta)
\end{aligned}$$

also (i). Als nächstes überprüfen wir Eigenschaft (ii). Wir verifizieren zuerst für 0-Formen, also Funktionen. Sei f zweifach differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
d^2 f &= d(df) = d\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(d\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j\right) \wedge dx_i = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)}_{=0} dx_j \wedge dx_i = 0
\end{aligned}$$

Sei dann α wie oben eine Differentialform vom Grad $k \geq 1$ und zudem zweifach differenzierbar. Es gilt

$$d^2(a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = d(da \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = 0$$

wobei die letzte Gleichheit aus Eigenschaft (i) und $d^2 \equiv 0$ für zweimal differenzierbare 0-Formen folgt. Aufgrund der Linearität gilt also $d^2 \alpha = 0$ für alle zweifach differenzierbaren Formen auf U . Insgesamt ist also d_U eine äußere Ableitung auf $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Kehren wir zurück zum allgemeinen Fall, dass M eine m -dimensionale C^2 -Mannigfaltigkeit ist. Wir wissen bereits, dass auf jedem Kartengebiet $U \subseteq M$ eine eindeutige äußere Ableitung existiert. Also ist eine äußere Ableitung auf M eindeutig, falls existent.

Zur Existenz: Seien $(U, x), (\tilde{U}, \tilde{x})$ zwei Karten von M . Wegen der Eindeutigkeit lokaler äußerer Ableitungen schränken d_U und $d_{\tilde{U}}$ auf $U \cap \tilde{U}$ ein zu einer äußeren Ableitung $d_{U \cap \tilde{U}}$. Sei α eine differenzierbare Form auf M . Es gilt

$$(d_U(\alpha|_U))|_{U \cap \tilde{U}} = d_{U \cap \tilde{U}}(\alpha|_{U \cap \tilde{U}}) = (d_{\tilde{U}}(\alpha|_{\tilde{U}}))|_{U \cap \tilde{U}}$$

Also sind d_U und $d_{\tilde{U}}$ zueinander kompatibel. Wir definieren dann also für $p \in U$ $(d\alpha)_p := (d_U(\alpha|_U))_p$. Aufgrund der vorherigen Überlegung ist die äußere Ableitung d unabhängig von der gewählten Karte. Wir setzen also die lokal definierten äußeren Ableitungen d_U auf Kartengebieten U zusammen zu einer globalen äußeren Ableitung d auf M , sodass also gilt, dass

$$(d\alpha)|_U = d_U(\alpha|_U)$$

□

Definition III.47 (exakte Form). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und α eine Differentialform auf M . Wir nennen α *exakt* g. d. w. eine Differentialform β auf M existiert, sodass $\alpha = d\beta$.

Bemerkung. Ein notwendiges Kriterium für die Exaktheit einer Differentialform α ist $d\alpha = 0$. Ist nämlich $\alpha = d\beta$, so gilt $d\alpha = d^2\beta = 0$.

Lemma III.43. Die äußere Ableitung vertauscht mit dem Rückzug. Seien also $m, n \in \mathbb{N}_0$ und M, N m - bzw. n -dimensionale differenzierbare C^2 -Mannigfaltigkeiten. Sei $F : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Es gilt dann $d_M \circ F^* = F^* \circ d_N$ wobei d_M und d_N jeweils die äußeren Ableitungen auf M bzw. N darstellen.

Beweis. Sei zunächst $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare 0-Form, d. h. eine differenzierbare Funktion. Es gilt

$$d(F^*f) = d(f \circ F) \stackrel{(*)}{=} df \circ dF = F^*(df)$$

wobei bei $(*)$ die Kettenregel verwendet wurde.

Sei dann α eine exakte differenzierbare 1-Form, d. h. wir finden eine zweifach differenzierbare 0-Form g , sodass $\alpha = dg$. Es gilt

$$d(F^*\alpha) = d(F^*(dg)) = d(d(F^*g)) = d^2(F^*g) = 0 = F^*(d^2(g)) = F^*(d(dg))$$

Betrachten wir nun eine differenzierbare k -Form β von der Form $\beta = f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$ für zweifach differenzierbare 0-Formen $g_1, \dots, g_k$. Es gilt

$$\begin{aligned} d(F^*\beta) &= d(F^*(f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)) \\ &\stackrel{(*)}{=} d((F^*f) \cdot (F^*dg_1) \wedge \cdots \wedge (F^*dg_k)) \\ &= d(F^*f) \wedge (F^*dg_1) \wedge \cdots \wedge (F^*dg_k) \\ &= (F^*df) \wedge (F^*dg_1) \wedge \cdots \wedge (F^*dg_k) \\ &\stackrel{(*)}{=} F^*(df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) \\ &= F^*d(f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) \\ &= F^*(d\beta) \end{aligned}$$

Dabei wurde bei $(*)$ jeweils Gleichung (III.J), d. h. die Vertauschbarkeit von Rückzug und äußerem Produkt, verwendet.

Aufgrund der Linearität der äußeren Ableitung, und, da sich jede Differentialform lokal als eine Linearkombination von Formen derselben Gestalt wie β oben darstellen lässt, gilt die Behauptung überall lokal. Insgesamt gilt die Aussage dann allgemein global auf ganz M . $\square$

III.10. Satz von Stokes (absolut)

Der *Satz von Stokes* verallgemeinert den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* von Intervallen auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zunächst betrachten wir den *Satz von Stokes* im absoluten Fall, d. h. denn Fall ohne Randterme.

Proposition III.44. Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Abbildung, d. h. eine C^1 -Form vom Grad 0. (a, b) ist eine durch f orientierte 1-dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^1$. Ist $\text{supp } f$ kompakt, so gilt

$$\int_{(a,b)} df \, d\lambda^1 = 0$$

Beweis. Ist $\text{supp } f$ kompakt, d. h. hier abgeschlossen und beschränkt, so können wir f in den Randpunkten a, b stetig fortsetzen zu $f(a) = f(b) = 0$. Dann ist also

$$\int_{[a,b]} df \, d\lambda^1 = \int_a^b f' \, d\lambda^1 = f(b) - f(a) = 0 - 0 = 0$$

nach dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*. $\square$

Satz III.45 (Stokes, absoluter Fall). Sei $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale orientierte C^2 -Mannigfaltigkeit. Dann gilt für eine C^1 -Form α vom Grad $m - 1$ mit kompaktem Träger $\text{supp } \alpha$:

$$\int_M d\alpha = 0$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den „lokalen“ Fall $M = \mathbb{R}^m$. Wir können α dann schreiben als

$$\alpha = \sum_{i=1}^m f_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m$$

für C^1 -Formen $f_1, \dots, f_m : M \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad 0 jeweils mit kompaktem Träger, wobei $\widehat{*}$ bedeuten soll, dass der Faktor $*$ ausgelassen wird. Es gilt

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i=1}^m df_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m \\ &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} d\alpha = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) d\lambda^m = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} d\lambda^m \right)$$

Mit dem Satz von Fubini II.41 reduziert sich die Aussage $\int_{\mathbb{R}^m} d\alpha = 0$ dann zu

$$\int_{\mathbb{R}^m} d\alpha = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) d\lambda^1(x_i) \right) = 0$$

für alle $x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_m \in \mathbb{R}$. Nach Proposition III.44 gilt dies, da jeder einzelne Summand gleich 0 ist.

Der globale Fall, d. h. , dass M eine beliebige m -dimensionale C^2 -Mannigfaltigkeit ist, folgt unmittelbar. Aus der Aussage im „lokalen“ Fall folgt, dass die Behauptung für von Kartengebieten getragene Differentialformen gilt. Aufgrund der Linearität des Integrals gilt die Behauptung dann auch für endliche Linearkombinationen solcher Formen. Mithilfe einer Partition der Eins gilt die Aussage dann für alle C^1 -Formen vom Grad $m - 1$. □

IV. Mannigfaltigkeiten mit Rand

Im Folgenden verallgemeinern wir das Konzept einer Mannigfaltigkeit. Mannigfaltigkeiten haben als lokales Modell den Raum $\mathbb{R}^m$. Mannigfaltigkeiten mit Rand werden als lokales Modell den abgeschlossenen Halbraum H^m haben.

Definition IV.1 (abgeschlossener Halbraum H^m). Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir nennen die Menge

$$H^m := \{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \leq 0 \} = \{ x_1 \leq 0 \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

versehen mit der Relativtopologie des $\mathbb{R}^m$ den m -dimensionalen *abgeschlossenen Halbraum*.

Bemerkung. Für das Innere bzw. den Rand von H^m gilt $\overset{\circ}{H}^m = \{ x_1 < 0 \}$ bzw. $\partial H^m = \{ x_1 = 0 \}$. Da auf H^m die Relativtopologie betrachtet wird, ist insbesondere H^m offen und abgeschlossen, d. h. *clopen*. Wenn im Folgenden von „offen in H^m “ die Rede ist, so ist „offen bezüglich der Relativtopologie von H^m “ gemeint.

Definition IV.2 (lokal euklidischer Raum mit Rand; topologische Mannigfaltigkeit mit Rand; Karte; Kartengebiet). Sei $m \in \mathbb{N}$ und $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen X

- (i) einen m -dimensionalen *lokal euklidischen Raum mit Rand* g. d. w. X lokal homöomorph zu H^m ist, d. h. zu jedem Punkt $p \in X$ eine Umgebung $U \in \mathcal{T}$ von p und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ sowie ein Homöomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ existieren.
- (ii) eine m -dimensionale *Mannigfaltigkeit mit Rand* g. d. w. X ein m -dimensional lokal euklidischer Hausdorffraum ist und $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Analog zu topologischen Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir den Homöomorphismus zusammen mit seiner Definitionsmenge als *Karte* von X und die Definitionsmenge alleine als *Kartengebiet*.

Bemerkung. Der Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand ist kein Spezialfall einer topologischen Mannigfaltigkeit, sondern eine Verallgemeinerung. Im Allgemeinen ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand nämlich keine topologische Mannigfaltigkeit, aber umgekehrt jede topologische Mannigfaltigkeit eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand.

Analog zu topologischen Mannigfaltigkeiten sind Kartenwechsel Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen von H^m .

Proposition IV.1. Sei $m \in \mathbb{N}$. Homöomorphismen von offenen Teilmengen von H^m erhalten innere Punkte und Randpunkte. Sind also $U, V \subseteq H^m$ offene Teilmengen bezüglich der Relativtopologie von H^m und $\Phi : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus. Dann ist $p \in U$ ein innerer Punkt von U , d. h. $p \in \overset{\circ}{U}$ g. d. w. $\Phi(p)$ inner Punkt von V ist, d. h. $\Phi(p) \in \overset{\circ}{V}$. Also ist $p \in \partial U$ g. d. w. $\Phi(p) \in \partial V$.

Bemerkung. Der Beweis für die Aussage benötigt Methoden aus der *algebraischen Topologie*. Da wir im Folgenden aber ohnehin höhere Regularität fordern werden, werden wir die Proposition in dieser allgemeinen Form gar nicht benötigen.

Definition IV.3 (Inneres; Rand, Mannigfaltigkeit mit Rand). Sei $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Das *Innere* $\overset{\circ}{M}$ von M ist die Teilmenge der Punkte von M , die von allen lokalen Karten auf das Innere von H^m , also auf $\{x_1 < 0\}$, abgebildet werden. Analog ist der *Rand* ∂M von M definiert als die Teilmenge der Punkte von M , die von allen lokalen Karten auf den Rand von H^m , also auf $\{x_1 = 0\}$, abgebildet werden.

Bemerkung. Die Definition ist angesichts der Proposition IV.1 sinnvoll, da Homöomorphismen (also insbesondere lokale Karten) innere und äußere Punkte von Mannigfaltigkeiten mit Rand erhalten. Insbesondere genügt also für die Zugehörigkeit eines Punktes p zu $\overset{\circ}{M}$ bzw. ∂M bereits, dass eine lokale Karte existiert, die p ins Innere bzw. den Rand von H^m abbildet.

Wir können den Differenzierbarkeitsbegriff auf Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von H^m ausweiten.

Definition IV.4 (Differenzierbarkeit, H^m ; Regularität, H^m). Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $V \subseteq H^m$ und $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir sagen, F besitzt die *Regularität* $\mathcal{R}$ g. d. w. für jeden Punkt $x \in V$

eine offene Umgebung $W \subseteq H^m$ von x sowie eine Abbildung $F_W : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ von der Regularität $\mathcal{R}$ existiert, sodass $F|_{V \cap W} = F_W|_{V \cap W}$. Insbesondere ist für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ F k -fach differenzierbar g. d. w. F_W , wie eben definiert, k -fach differenzierbar ist und F ist von der Klasse C^k g. d. w. F_W von der Klasse C^k -ist.

03. Feber 2020

IV.1. Gebiete mit differenzierbarem Rand

Definition IV.5 (Gebiet). Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir nennen eine offene Menge $U \subseteq M$ ein *Gebiet* von M .

Wir können bereits analytische Betrachtungen über Abbildungen von Gebieten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit anstellen. Im Folgenden werden wir diese bis zum Rand der entsprechenden Gebiete fortsetzen. Dazu müssen die Ränder jedoch besondere Anforderungen erfüllen, also z. B. differenzierbare Hyperflächen, d. h. Untermannigfaltigkeiten von Kodimension 1, sein.

Definition IV.6 (Differenzierbarkeit, Rand). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit und $W \subseteq M$ ein Gebiet von M . Für $l \leq k$ ist ∂W von der Klasse C^l g. d. w. in jedem Punkt $p \in \overline{W}$ eine offene Umgebung U von p und eine C^l -Abbildung $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert, sodass

$$x(\overline{W} \cap U) = H^m \cap x(U)$$

Wir sagen dann auch, W habe C^l -Rand.

Bemerkung. Mit der selben Notation wie oben und im Fall des C^l -Randes gilt dann stets $x(W \cap U) = \overset{\circ}{H}^m \cap x(U)$ und $x(\partial W \cap U) = \partial H^m \cap x(U)$. Als Konsequenz ist also ∂W eine C^l -Hyperfläche.

Beispiel. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^k -Abbildung und a ein regulärer Wert. Die Subniveaumenge $\{f \leq a\}$ hat C^k -Rand. Beispielsweise ist für die C^∞ -Abbildung $f = \|\cdot\|_2^2$ jeder Wert $r^2 > 0$ regulär für f und alle Subniveaumengen r -Bälle bezüglich der 2-Norm. Bälle bezüglich der 2-Norm in $\mathbb{R}^m$ haben somit C^∞ -Rand.

Definition IV.7 (Regularität, Abbildung offener Mengen mit Rand). Seien $k, l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $l \leq k$, R eine Regularität schwächer oder gleich stark wie die Klasse C^l , M, n C^k -Mannigfaltigkeiten und $W \subseteq M$ ein Gebiet von M mit C^l -Rand. Eine Abbildung $f : \overline{W} \rightarrow N$ heißt *von der Regularität R g. d. w.* eine offene Umgebung $\tilde{W}$ von $\overline{W}$ in M und eine Abbildung $\tilde{f} : \tilde{W} \rightarrow N$ mit der Regularität R existiert, sodass $f = \tilde{f}|_{\overline{W}}$, d. h. mit anderen Worten g. d. w. sie sich zu einer R -Abbildung $\tilde{f}$ auf einer größeren *offenen* Menge $\tilde{W}$ fortsetzen lässt.

Aufgrund der Existenz von C^k -Partitionen der Eins ist die Forderung äquivalent dazu, dass in jedem Punkt $p \in \partial W$ eine Umgebung U_p von p in M und eine Abbildung $\tilde{f}_p : U_p \rightarrow N$ mit der Regularität R existiert, sodass $f|_{\overline{W} \cap U_p} = \tilde{f}_p|_{\overline{W} \cap U_p}$. Anders formuliert muss in jedem Punkt p des Randes eine Fortsetzung von f zu einer R -Abbildung $\tilde{f}_p$ auf einer Umgebung U_p von p existieren.

Definition IV.8 (Tangentialraum; Tangentialbündel; äußere Potenz, differenzierbarer Rand). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $W \subseteq M$ eine offene Menge. Für jeden Punkt $p \in \overline{W}$ definieren wir den *Tangentialraum* an $\overline{W}$ im Punkt p durch $T_p \overline{W} := T_p M$. Das *Tangentialbündel* von $\overline{W}$ ist definiert durch

$$T\overline{W} := TM|_{\overline{W}} = \bigcup_{p \in \overline{W}} T_p M$$

gemeinsam mit der Fußpunktprojektion $\pi : T\overline{W} \rightarrow \overline{W}$, gegeben durch $[c] \mapsto p$, wenn $[c] \in T_p \overline{W}$. In analoger Weise verallgemeinert man auch das *Kotangentialbündel* sowie die *äußeren Potenzen*.

Bemerkung. Ist W von der Klasse C^k für ein $k \in \mathbb{N} \cup \infty$, so hat TW selbst einen C^{k-1} -Rand. Es gilt

$$\partial(TW) = \pi^{-1}(\partial W) = \bigcup_{p \in \partial W} T_p M$$

sowie $(T\overline{W})^\circ = TW = \pi^{-1}(W)$ und $\overline{TW} = T\overline{W}$.

Bemerkung (Differentialformen). Die Begriffe des Kalküls der Differentialformen inklusive der Integration können ohne Änderungen für Gebiete mit differenzierbarem Rand übernommen werden.

Wir können nun den Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand definieren.

Definition IV.9 (differenzierbare Struktur, differenzierbarer Rand; Mannigfaltigkeit mit Rand, differenzierbar). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und X ein lokal euklidischer Raum mit Rand.

- (i) Eine C^k -Struktur auf X ist ein maximaler C^k -Atlas auf X .
- (ii) Wir nennen X eine C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand g.d.w. X eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist und zusätzlich eine C^k -Struktur auf X existiert.

Lemma IV.2. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand. Das Innere $\overset{\circ}{M}$ bildet eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Der Rand ∂M ist selbst eine $(m-1)$ -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit.

Korollar IV.3. Mannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten mit leerem Rand, also Mannigfaltigkeiten mit Rand, deren Rand die leere Menge ist.

Definition IV.10 (Regularität, differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, M, N C^k -Mannigfaltigkeiten mit Rand, R eine Regularität schwächer oder gleich stark wie die Klasse C^k und $f : M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung. Wir sagen, f ist von der Regularität R g.d.w. alle lokalen Koordinatendarstellungen von der Regularität R sind.

IV.2. Tangentialbündel

Da wir im Falle der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand Tangentialvektoren in Randpunkten nicht durch Kurven repräsentieren können, müssen wir bei der Konstruktion anders vorgehen. Wir realisieren im Folgenden die Tangentialvektoren an eine Mannigfaltigkeit mit Rand als Äquivalenzklassen von Tangentialvektoren an die (Bilder der) Karten. Das Tangentialbündel entsteht dann durch Verkleben der Tangentialbündel an die (Bilder der) Karten.

Definition IV.11 (Tangentialvektor; Tangentialraum; Tangentialbündel, Mannigfaltigkeit mit Rand). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Wir definieren für $v, \tilde{v} \in TH^m$ die Äquivalenzrelation

$$v \sim \tilde{v} : \Longleftrightarrow \tilde{v} = d(\tilde{x} \circ x^{-1})(v)$$

falls $(U, x), (\tilde{U}, \tilde{x})$ Karten von M sind und $v \in T_{x(p)}(x(U))$ sowie $\tilde{v} \in T_{\tilde{x}(p)}(\tilde{x}(\tilde{U}))$ für ein $p \in U \cap \tilde{U}$ gilt.

Wir bezeichnen eine Äquivalenzklasse $[v]$ mit $v \in T_{x(p)}(x(U))$ für eine Karte (U, x) und ein $p \in U$ als *Tangentialvektor* an M im Punkt p . Wir definieren dazu den *Tangentialraum* an M im Punkt p durch $T_p M := T(x(U)) / \sim$. Das Tangentialbündel von M ist dann definiert durch

$$TM := \bigcup_{(U,x) \text{ ist Karte von } M} T(x(U)) / \sim \cong \bigcup_{p \in M} T_p M$$

gemeinsam mit der Fußpunktprojektion $\pi = \pi_{TM} : TM \rightarrow M$ mit $[c] \mapsto p$, falls $[c] \in T_p M$.

Bemerkung.

- (i) Es existiert der kanonische lineare Isomorphismus

$$T(x(U)) \cong x(U) \times \mathbb{R}^m \subseteq H^m \times \mathbb{R}^m$$

- (ii) In analoger Weise werden auch das *Kotangentialbündel* sowie die *äußeren Potenzen* definiert.

Lemma IV.4. Die Definitionen von Tangentialvektor, Tangentialraum und Tangentialbündel an eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit M wie in Definition IV.11 ist sinnvoll, d. h. insbesondere ist $\sim$ wohldefiniert, also wirklich eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Kettenregel. □

Satz IV.5. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand. TM ist eine $(2m)$ -dimensionale C^{k-1} -Mannigfaltigkeit.

Bemerkung. Es gilt $\partial(TM) = T(\partial M)$.

Beweis. Sei (U, x) eine Karte von M . Dann setzen wir $TU := \bigcup_{p \in U} T_p M$. Es existiert die natürliche bijektive Abbildung $T_x : TU \rightarrow T(x(U))$. Ist $(\tilde{U}, \tilde{x})$ eine weitere Karte, so liefert das Differential des Kartenwechsels $\tilde{x} \circ x^{-1} : x(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{x}(U \cap \tilde{U})$, also die Abbildung

$$d(\tilde{x} \circ x^{-1}) : T(x(U \cap \tilde{U})) \rightarrow T(\tilde{x}(U \cap \tilde{U}))$$

einen natürlichen C^{k-1} -Diffeomorphismus von Tangentialbündeln. $d(\tilde{x} \circ x^{-1})$ nimmt dabei die Rolle des Kartenwechsels des Tangentialbündels, aufgefasst als eigenständige Mannigfaltigkeit mit Rand, ein.

Nach Satz III.16 bzw. dessen Fortsetzung auf offenen Mengen mit C^k -Rand, existiert dann zur Menge $\{ (TU, T_x) \mid (U, x) \text{ ist Karte von } M \}$ eine eindeutige $(2m)$ -dimensionale lokal euklidische Topologie mit Rand mit einer eindeutigen C^{k-1} -Struktur auf TM . Die Hausdorff-Eigenschaft sowie die Abzählbarkeit der Topologie übertragen sich direkt von M auf TM . TM ist also eine $(2m)$ -dimensionale C^{k-1} -Mannigfaltigkeit mit Rand. $\square$

Bemerkung. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$, $k \geq 2$, $m, n \in \mathbb{N}$, M^m, N^n zwei C^k -Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ differenzierbar. F hat das Differential $dF : TM \rightarrow TN$ und für Karten $(U, x), (V, y)$ von M bzw. N besitzt dF die Koordinatendarstellung $T_y \circ df \circ T_x^{-1}$. Sie ist das Differential der lokalen Koordinatendarstellung $y \circ F \circ x^{-1}$. Ist F von der Klasse C^k , so ist dF von der Klasse C^{k-1} .

Definition IV.12 (Richtung, Mannigfaltigkeit mit Rand). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand, $p \in \partial M$ und $\nu \in T_p M$. Wir sagen, ν ist *(schwach) nach außen gerichtet* g. d. w. die $\frac{\partial}{\partial x_1}$ -Komponente positiv (oder 0) ist. Analog ist ν *(schwach) nach innen gerichtet* g. d. w. die $\frac{\partial}{\partial x_1}$ -Komponente negativ (oder 0) ist und ν ist *tangential an den Rand von M* g. d. w. die $\frac{\partial}{\partial x_1}$ -Komponente gleich 0 ist.

Lemma IV.6. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in \partial M$ und $\nu \in T_p M$. Für ein $\varepsilon > 0$ lässt sich ν für eine differenzierbare Kurve $c : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ als Geschwindigkeitsvektor $c'(0)$ darstellen g. d. w. ν nicht nach außen zeigt.

Bemerkung. Intuitiv lässt sich jeder (also insbesondere auch jeder nach außen gerichtete) Tangentialvektor in p als Geschwindigkeitsvektor $c'(0)$ einer differenzierbaren Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ mit $c(0) = p$ darstellen, wobei U aus M durch „Erweiterung über den Rand hinaus“ entsteht. Zeigt ein Tangentialvektor nach außen, so verläuft c dann für ein $0 < \delta \leq \varepsilon$ außerhalb von M .

IV.3. Orientierung des Randes

Wir haben bereits festgestellt, dass der Rand einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand selbst wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit bildet, und zwar von einer

Dimension weniger aber von der selben Regularität. Im Folgenden betrachten wir die induzierten Orientierungen auf dem Rand orientierter Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Lemma IV.7. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und M eine m -dimensionale orientierte C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei weiter I eine Indexmenge und $((U_\iota, x_\iota))_{\iota \in I}$ die Familie aller orientierungserhaltenden Karten für M . Dann ist die Familie $((U_\iota \cap \partial M, x_\iota|_{U_\iota \cap \partial M}))_{\iota \in I}$ ein C^k -Atlas für ∂M mit orientierungserhaltenden Kartenwechseln.

Beweis. Es ist klar, dass die Einschränkungen einen C^k -Atlas bilden. Es genügt also zu zeigen, dass die Kartenwechsel orientierungserhaltend sind.

Seien dazu $(U, x), (\tilde{U}, \tilde{x})$ orientierungserhaltende Karten in $p \in M$. Das Differential $d(\tilde{x} \circ x^{-1})_{x(p)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ des Kartenwechsels $\tilde{x} \circ x^{-1}$, mit der Jacobi-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$ bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^m$, erhält sowohl die Richtung in $x(p)$ als auch die Orientierung, d. h. es gilt $\det A > 0$.

In ∂M hat die Jacobi-Matrix eine besondere Struktur: Da $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{x(p)}$ nach außen zeigt, zeigt auch $A \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{x(p)}$ nach außen. Demnach ist $a_{11} > 0$. Da A den Rand erhält, ist für $j \in \{2, \dots, m\}$ die erste Komponente von $A \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{x(p)}$ gleich 0. A hat dann also die Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Somit gilt $\det A = a_{11} \cdot \det A|_{\partial M}$ und wegen $\det A, a_{11} > 0$ ist somit auch $\det A|_{\partial M} > 0$. Also ist die Kartenwechsel der auf ∂M eingeschränkten Karten $\tilde{x}|_{\tilde{U} \cap \partial M} \circ (x|_{U \cap \partial M})^{-1}$ ebenfalls orientierungserhaltend. $\square$

Definition IV.13 (induzierte Orientierung, Rand). Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und M eine m -dimensionale orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei ω eine Volumenform auf $\mathbb{R}^m$, sodass also die Standardbasis $(e_1, \dots, e_m)$ die Orientierung $\omega(e_1, \dots, e_m)$ besitzt. Der Vektorraum ∂H^m hat dann die von der Volumenform $i_{e_1} \omega = \omega(e_1, \cdot, \dots, \cdot)$ determinierte Orientierung. Diese Orientierung von ∂H^m legt durch die orientierungserhaltenden Karten, die nach Lemma IV.7 einen Atlas bilden, wiederum die Orientierung von ∂M fest. Wir nennen Diese die *induzierte Orientierung* von ∂M .

Bemerkung. Wählen wir die Orientierung von ∂H^m so, dass die Standardbasis $(e_2, \dots, e_m)$ positiv orientiert ist und ist (U, x) eine orientierungserhaltende Karte von M , dann ist das lokale Koordinatenbasenfeld $(\frac{\partial}{\partial x_2} \big|_{U \cap \partial M}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \big|_{U \cap \partial M})$ positiv orientiert und die lokale Volumenform $d(x_2|_{U \cap \partial M}) \wedge \dots \wedge d(x_m|_{U \cap \partial M})$ positiv bezüglich der Orientierung des Randes.

Definition IV.14 (Vektorfeld). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Ein *Vektorfeld* ist ein Schnitt des Tangentialbündels, also eine Abbildung $\nu : M \rightarrow TM$ mit $\pi_{TM} \circ \nu = \text{id}_M$.

Bemerkung. Anschaulich ordnet ein Vektorfeld jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen (Richtungs-)Vektor in dem dem Punkt zugehörigen Tangentialraum zu. Vektorfelder sind also zu 1-Formen duale Objekte.

Setzen wir das Vektorfeld ν in die 1-Form α ein, so erhalten wir eine Funktion, genauer eine 0-Form, $\alpha(\nu) : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \mapsto \alpha_p(\nu(p)) \in \mathbb{R}$. Allgemeiner können wir ν auch in eine beliebige r -Form β einsetzen und erhalten die $(r-1)$ -Form $i_\nu \beta = \beta(\nu, \cdot, \dots, \cdot)$.

Lemma IV.8. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$ und M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand. Es existiert ein C^{k-1} -Vektorfeld auf M , das längs des Randes nach außen zeigt.

Beweis. Der lokale Fall ist direkt auf die Existenz am Rand nach außen gerichteter Vektorfelder in H^m zurückzuführen. Ist V ein solches Vektorfeld und (U, x) eine lokale Karte von M , so wird die Richtung des Vektorfelds von x^{-1} erhalten. $V \circ x$ ist somit ein am Rand nach außen gerichtetes Vektorfeld. In den Punkten, die nicht im Kartengebiet U liegen, setzen wir $V \circ x$ durch 0 zu einem Vektorfeld auf ganz M fort.

Sei A eine Indexmenge und $((U_\alpha, x^\alpha))_{\alpha \in A}$ ein C^k -Atlas für M . Für jedes $\alpha \in A$ finden wir im lokalen Fall ein Vektorfeld ν_α , das längs des Randes nach außen zeigt. Für den globalen Fall benötigen wir nun die Existenz einer dem Atlas $((U_\alpha, x^\alpha))_{\alpha \in A}$ untergeordneten abzählbaren Partition der Eins mit kompakten Trägern (Satz III.34). Sei dazu I eine abzählbare Indexmenge und $(\varphi_\iota)_\iota$ die entsprechende untergeordnete abzählbare Partition der Eins mit kompakten Trägern, wobei $\alpha : I \rightarrow A$, so sein soll, dass $\text{supp } \varphi_\iota \subseteq U_{\alpha(\iota)}$. Für jedes $\iota \in I$ zeigt $\varphi_\iota \cdot \nu_{\alpha(\iota)}$ entlang des Randes schwach nach außen, da die Summe von schwach nach außen zeigenden Vektoren wieder schwach nach außen zeigt. Das Vektorfeld $\nu := \sum_{\iota \in I} \varphi_\iota \cdot \nu_{\alpha(\iota)}$ zeigt demnach überall entlang des Randes nach außen. $\square$

Wir können die induzierte Orientierung aus Definition IV.13 auch anders charakterisieren.

Lemma IV.9. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und M eine m -dimensionale orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei weiter $\nu : \partial M \rightarrow TM$ ein längs des Randes definiertes, nach außen gerichtetes stetiges Vektorfeld und $p \in \partial M$.

- (i) Eine geordnete Basis $(v_2, \dots, v_m)$ von $T_p \partial M$ ist positiv orientiert bezüglich der induzierten Orientierung auf ∂M g.d.w. die ergänzende Basis $(\nu(p), v_2, \dots, v_m)$ von $T_p M$ bezüglich der Orientierung von M positiv orientiert ist.
- (ii) Ist ω_M eine positive Volumenform auf M , so ist die Volumenform

$$\omega_{\partial M} := i_{\nu(p)}(\omega_M|_{\partial M}) = \omega_M(\nu(p), \cdot, \dots, \cdot)|_{\partial M}$$

positiv bezüglich der induzierten Orientierung auf ∂M .

Beispiel. In einer Dimension, d. h. $m = 1$, gibt es um einen Randpunkt nur entweder orientierungserhaltende oder orientierungsumkehrende Karten, je nachdem, ob der nach außen zeigenden Normalenvektor positiv oder negativ orientiert ist. Man gibt entsprechend dem Randpunkt die Orientierung $+$ bzw. $-$.

Betrachten wir nun die Charakterisierung mithilfe von Volumenformen. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und dazu ω_M eine positive 1-Form auf M und ν ein nach außen weisendes Vektorfeld längs ∂M . Die Orientierung eines Randpunktes $p \in \partial M$ wird vom Vorzeichen von $i_{\nu(p)}\omega = \omega(\nu(p))$ bestimmt.

Konkret bedeutet dies für ein Intervall $[a, b]$, also eine 1-dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit mit Rand, versehen mit der Standardorientierung, dass a negativ und b positiv orientiert bezüglich der induzierten Orientierung ist.

05. Feber 2020

IV.4. Satz von Stokes (relativ)

Satz IV.10 (Stokes, relativ). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$, M eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand und α eine C^1 -($m-1$)-Form M mit kompaktem Träger. Es gilt

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha$$

Beweis.



1.4.2 Dynkin-Systeme

Wird bei der Diskussion von Produktmaßen und Fubini verwendet, siehe 2.5.

Die folgende Abschwächung des Begriffs der σ -Algebra tritt natürlich auf.

Definition. Eine Familie $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein *Dynkin-System* auf X , falls gilt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{D}$
- (ii) $\mathcal{C}$ -stabil: $A \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}A \in \mathcal{D}$
- (iii) Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise *disjunkter* Teilmengen $A_n \in \mathcal{D}$ gilt $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Der Unterschied zur Definition von σ -Algebren liegt darin, daß wir nur die Abgeschlossenheit unter abzählbaren *disjunkten* Vereinigungen fordern.

Offensichtlich sind σ -Algebren Dynkin-Systeme. Die Bedeutung des Begriffs des Dynkin-Systems beruht darauf, daß umgekehrt gilt:

Proposition. $\cap$ -stabile Dynkin-Systeme sind σ -Algebren.

Beweis: Die Abgeschlossenheit unter der Bildung von Komplementen und endlichen Durchschnitten impliziert die Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen, dh $\cap$ -stabile Dynkin-Systeme sind Algebren. Abzählbare Vereinigungen lassen sich dann als abzählbare disjunkte Vereinigungen ausdrücken, also sind $\cap$ -stabile Dynkin-Systeme auch σ -Algebren. $\square$

Dies liefert eine Methode nachzuweisen, daß Teilmengenfamilien σ -Algebren sind. Wir interessieren uns deshalb für Kriterien dafür, daß Dynkin-Systeme $\cap$ -stabil sind.

Sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Dynkin-System. Wir beobachten:

Lemma. Falls $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ mit $D_1 \subset D_2$, so auch $D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$.

Beweis: Dies folgt aus der disjunkten Zerlegung $\mathcal{C}(D_2 \setminus D_1) = D_1 \sqcup \mathcal{C}D_2$. $\square$

Als Konsequenz vererbt sich die Dynkin-Eigenschaft bei gewissen Konstruktionen:

Folgerung. Für $D \in \mathcal{D}$ ist die Spur

$$\mathcal{D}|_D := \{M \subset D \mid M \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{P}(D)$$

von $\mathcal{D}$ auf D ein Dynkin-System auf D . Ebenso ist

$$\mathcal{D}_D := \{M \subset X \mid M \cap D \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

ein Dynkin-System auf X .

Beweis: Die $\mathcal{C}$ -Stabilität von $\mathcal{D}|_D$ folgt aus dem Lemma und Eigenschaft (iii) aus der Definition von Dynkin-Systemen ist klar. Die zweite Behauptung sieht man genauso. $\square$

Weil beliebige Durchschnitte von Dynkin-Systemen wieder Dynkin-Systeme sind, gibt es für jede Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein kleinstes sie enthaltendes Dynkin-System $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(X)$, genannt das von $\mathcal{E}$ *erzeugte* Dynkin-System. Es gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.

Satz 1.13. Von $\cap$ -stabilen Familien erzeugte Dynkin-Systeme sind $\cap$ -stabil, also σ -Algebren.

Beweis: Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ $\cap$ -stabil. Dann $E' \cap E \in \mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$ für $E, E' \in \mathcal{E}$, also $E' \in \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$. Daher $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$, also

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$$

für alle $E \in \mathcal{E}$. Dies bedeutet, daß $D \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ für $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und $E \in \mathcal{E}$, was wiederum dazu äquivalent ist, daß

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})_D$$

für $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Es folgt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})_D$. Dies bedeutet, daß $D \cap D' \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ für alle $D, D' \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, daß also $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$ -stabil ist. Aufgrund der letzten Proposition ist $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ daher eine σ -Algebra. $\square$

Ist $\mathcal{E}$ $\cap$ -stabil, so gilt also $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

2.2 Konstruktion des Lebesgue-Integrals

Integration kann als *Volumenberechnung* aufgefaßt werden. Man interpretiert das Integral einer Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ als das Volumen des Bereichs in $X \times \mathbb{R}$ „zwischen dem Graphen von f und der X -Achse“, genauer als „orientiertes“ Volumen im Sinne, daß das Volumen des Bereichs „über“ der Achse positiv und des Bereichs „darunter“ negativ gezählt wird, also als

$$\text{vol}\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\} - \text{vol}\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) < y < 0\}.$$

Die Volumenmessung in $X \times \mathbb{R}$ ergibt sich dabei aus der Volumenmessung auf X , die durch ein Maß vorgegeben werden muß, sowie auf $\mathbb{R}$ durch das Lebesgue-(Borel-)Maß. Die Volumendifferenz ist wohldefiniert, solange höchstens eines der Teilvolumina unendlich ist.

Ist also $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, so entspricht die Konstruktion des *Lebesgue-Integrals*

$$f \mapsto \int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x)$$

für meßbare Funktionen $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ der Konstruktion des *Produktmaßes* $\mu \otimes \beta^1$ auf $X \times \mathbb{R}$. Da wir letzteres schon konstruiert haben, leiten wir die Konstruktion des Integrals daraus ab.

2.2.1 Das Integral nichtnegativer Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Wir können dann den Produktraum $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \beta^1)$ bilden. Im Fall, wenn μ nicht σ -endlich ist, nehmen wir als Produktmaß $\mu \otimes \beta^1$ die Einschränkung des äußeren Maßes $(\mu \boxtimes \beta^1)^*$, vgl Kap 1.5.11. Wesentlich ist aber der Fall, wenn μ σ -endlich ist.

Für eine meßbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ ist die Teilmenge $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\}$ meßbar ²⁹ und wir definieren das (μ) -Integral von f als ihr Volumen,

$$\int_X f d\mu := (\mu \otimes \beta^1)(\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\}) \in [0, \infty]. \quad (2.1)$$

Wir fassen das (μ) -Integral auf als Funktional

$$\mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty], \quad f \mapsto \int_X f d\mu \quad (2.2)$$

auf dem Raum der nichtnegativen meßbaren numerischen Funktionen.

Für besonders einfache Funktionen ist der Bereich zwischen Graph und X -Achse eine Figur, dh endliche Vereinigung von Quadern, und wir können das Integral direkt angeben.

Für die *charakteristische Funktion* χ_A einer Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\int_X \chi_A d\mu = (\mu \otimes \beta^1)(\underbrace{\{0 < y < \chi_A(x)\}}_{A \times (0,1)}) = \mu(A) \cdot \underbrace{\beta^1((0,1))}_1 = \mu(A).$$

²⁹Sie besitzt die Darstellung $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) < y\} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} (f^{-1}([q, \infty)) \times (-\infty, q))$.

Eine *Treppenfunktion* ist eine Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Für eine nichtnegative meßbare Treppenfunktion, also eine Funktion der Form $\tau = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \chi_{A_i}$ mit $a_i \in [0, \infty]$ und disjunkten $A_i \in \mathcal{A}$, gilt

$$\int_X \tau d\mu = (\mu \otimes \beta^1)(\underbrace{\{0 < y < \tau(x)\}}_{\cup_i (A_i \times (0, a_i))}) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mu(A_i). \quad (2.3)$$

Diese Formel bleibt auch richtig, wenn die A_i nicht paarweise disjunkt sind, weil wir sie dann simultan disjunkt (in Teilmengen des von ihnen erzeugten Rings) zerlegen können, also annehmen können, daß je zwei von ihnen disjunkt sind oder übereinstimmen.

Im Hinblick auf die *Linearität* des Integrals schreiben wir (2.3) noch um. Für $a_i \in [0, \infty]$ und beliebige $A_i \in \mathcal{A}$ gilt

$$\int_X \tau d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \int_X \chi_{A_i} d\mu,$$

Daraus folgt direkt die *Additivität* und *positive Homogenität* des Integrals auf nichtnegativen meßbaren *Treppenfunktionen*, dh für Treppenfunktionen $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ und $c_1, c_2 \in [0, \infty]$ gilt

$$\int_X (c_1 \tau_1 + c_2 \tau_2) d\mu = c_1 \int_X \tau_1 d\mu + c_2 \int_X \tau_2 d\mu. \quad (2.4)$$

Weiter folgt direkt aus der Definition des Integrals seine *Monotonie* auf beliebigen nichtnegativen meßbaren Funktionen, dh für $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$ gilt

$$f_1 \leq f_2 \quad \Rightarrow \quad \int_X f_1 d\mu \leq \int_X f_2 d\mu. \quad (2.5)$$

Dies entspricht der Monotonie des Produktmaßes $\mu \otimes \beta^1$.

Auch grundlegende *Konvergenzeigenschaften* des Integrals auf nichtnegativen Funktionen lassen sich unmittelbar aus den Eigenschaften des Produktmaßes ableiten, nämlich aus seinen Stetigkeitseigenschaften als Maß.

Wir betrachten Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$.

Zunächst nehmen wir an, daß die Folge (f_n) schwach monoton wachsend ist, $f_n \nearrow$, wobei diese Eigenschaft wieder punktweise zu verstehen ist. Die Funktionen konvergieren dann punktweise, dh die Limesfunktion $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ist überall definiert. Ebenso konvergieren die Bereiche zwischen Graphen und X -Achse,

$$\{(x, y) \mid 0 < y < f_n(x)\} \nearrow \{(x, y) \mid 0 < y < f(x)\}. \quad (2.6)$$

Sind die Funktionen f_n meßbar, so auch die Limesfunktion f . Wegen der Monotonie des Integrals wachsen die Integrale der Funktionen monoton, $\int_X f_n d\mu \nearrow$, und sind durch das Integral der Limesfunktion $\int_X f d\mu$ nach oben beschränkt. Angesichts der Ausschöpfung (2.6) liefert die Stetigkeit von unten des Maßes $\mu \otimes \beta^1$, daß *Limes und Integral vertauscht* werden können:

Satz 2.7 (Monotone Konvergenz (B. Levi)). Für eine schwach monoton wachsende Folge (f_n) von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X, \mathcal{A})$ gilt

$$\int_X (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

Ohne Voraussetzung von Monotonie gilt diese Konvergenzaussage nicht. (Man betrachte zB eine Folge disjunkter Teilmengen $A_n \in \mathcal{A}$. Dann $\chi_{A_n} \rightarrow 0$, die Folge der Integrale $\int_X \chi_{A_n} d\mu = \mu(A_n)$ kann sich jedoch beliebig verhalten.) Es gilt jedoch noch eine Ungleichung. Diese gilt ganz allgemein für beliebige Folgen nichtnegativer meßbarer Funktionen, ohne Konvergenzannahme.

Satz 2.8 (Lemma von Fatou). Für jede Folge (f_n) von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X, \mathcal{A})$ gilt

$$\int_X (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

Beweis: Die Monotonie des Integrals impliziert wegen $\inf_{k \geq n} f_k \leq f_l$ für alle $l \geq n$, daß

$$\int_X (\inf_{k \geq n} f_k) d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int_X f_k d\mu.$$

Weil beide Seiten schwach monoton wachsen,

$$\inf_{k \geq n} f_k \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{und} \quad \inf_{k \geq n} \int_X f_k d\mu \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu,$$

folgt mit dem Satz von der Monotonen Konvergenz die Behauptung. □

Mit Hilfe der Konvergenzeigenschaften können wir die *Additivität* und *positive Homogenität* (2.4) des Integrals auf nichtnegativen meßbaren Treppenfunktionen auf allgemeine nichtnegative meßbare numerische Funktionen ausdehnen.

Lemma. Für $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$ und $c_1, c_2 \in [0, \infty]$ gilt:

$$\int_X (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\mu = c_1 \cdot \int_X f_1 d\mu + c_2 \cdot \int_X f_2 d\mu \quad (2.9)$$

Beweis: Für Treppenfunktionen wissen wir dies bereits, siehe (2.4).

Allgemeine Funktionen $f_i \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$ können durch Treppenfunktionen $\tau_{in} \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$ monoton approximiert werden, $\tau_{i,n} \nearrow f_i$ (Ü). Dann auch $c_1 \tau_{1,n} + c_2 \tau_{2,n} \nearrow c_1 f_1 + c_2 f_2$. Aus der Gültigkeit der Aussage für Treppenfunktionen folgt mit dem Satz von der Monotonen Konvergenz

$$\underbrace{\int_X (c_1 \tau_{1,n} + c_2 \tau_{2,n}) d\mu}_{\nearrow \int_X (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\mu} = c_1 \cdot \underbrace{\int_X \tau_{1,n} d\mu}_{\nearrow \int_X f_1 d\mu} + c_2 \cdot \underbrace{\int_X \tau_{2,n} d\mu}_{\nearrow \int_X f_2 d\mu},$$

also die Aussage im allgemeinen Fall. □

2.2.2 Das Integral allgemeiner numerischer Funktionen

Wir dehnen die Definition des Integrals und die Untersuchung seiner Eigenschaften auf allgemeine Funktionen mit möglicherweise wechselndem Vorzeichen aus.

Damit das Integral definiert werden kann, müssen wir die Funktionen geeignet *beschränken*.

Definition (Integrierbar). Eine Funktion $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ heißt (μ) -integrierbar, falls

$$\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu < \infty.$$

In diesem Fall sind auch die Anteile $f^{\pm}$ integrierbar, denn $\|f^{\pm}\|_1 \leq \|f\|_1 = \|f^+\|_1 + \|f^-\|_1$, und wir definieren das (μ) -Integral der Funktion f als

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \|f^+\|_1 - \|f^-\|_1. \quad (2.10)$$

Dies ist konsistent mit unserer Definition des Integrals auf $\mathcal{M}_{[0,\infty]}$. Es gilt die Abschätzung:

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \|f\|_1$$

Beispiel. Ist $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ beschränkt und hat $\{f \neq 0\}$ endliches Maß, so ist f μ -integrierbar, denn

$$\|f\|_1 \leq (\sup |f|) \cdot \mu(\{f \neq 0\}).$$

Insbesondere sind *stetige* Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ mit *kompaktem Träger* β^d -integrierbar. Dies gilt allgemeiner für stetige Funktionen mit kompaktem Träger auf topologischen Hausdorff-Räumen versehen mit einem *Borel-Maß*.³⁰ Der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf einem topologischen Raum X wird mit $\mathcal{C}_c(X)$ bezeichnet.

Bemerkung. Die Definition (2.10) bleibt sinnvoll, solange f^+ oder f^- integrierbar ist. Solche Funktionen nennt man *quasi-integrierbar*. ZB sind die Funktionen in $\mathcal{M}_{[0,\infty]}$ quasi-integrierbar.

Ist $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ integrierbar, so gilt für $c > 0$

$$\mu(\{|f| \geq c\}) \leq \int_X \underbrace{\chi_{\{|f| \geq c\}} \frac{|f|}{c}}_{\geq \chi_{\{|f| \geq c\}}} d\mu \leq \frac{1}{c} \cdot \|f\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{für } c \rightarrow \infty.$$

Insbesondere ist $\{f = \pm\infty\} = \{|f| = \infty\}$ eine μ -Nullmenge, dh μ -integrierbare Funktionen haben *μ -fast überall endliche Werte*. Deshalb verliert man keine Information, wenn man das Integral auf $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen betrachtet. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$$

den Raum der μ -integrierbaren $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen auf X .

³⁰Ein *Borel-Maß* auf einem Hausdorff-Raum ist ein Maß, so daß jeder Punkt eine offene Umgebung endlichen Volumens besitzt.

Das Integral kann auf Teilmengen von X *lokalisiert* werden.

Ist $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$ und $A \in \mathcal{A}$, so ist die abgeschnittene Funktion $\chi_A f$ genau dann μ -integrierbar, wenn $f|_A$ $\mu|_A$ -integrierbar ist. In diesem Fall nennen wir f *über A integrierbar* und definieren das (μ) -Integral von f über A als

$$\int_A f d\mu := \int_X \chi_A f d\mu = \int_A f|_A d(\mu|_A).$$

Gegeben endlich viele disjunkte meßbare Teilmengen, so können wir ein Integral über ihre Vereinigung *aufspalten* als Summe der Integrale über die einzelnen Teilmengen:

Lemma. Sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, so ist eine Funktion $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$ genau dann über $A_1 \cup \dots \cup A_n$ integrierbar, wenn sie über jedes A_i integrierbar ist, und es gilt dann

$$\int_{A_1 \cup \dots \cup A_n} f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \dots + \int_{A_n} f d\mu. \quad (2.11)$$

Beweis: Es gilt $\chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_n}$ und $\chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n} f^\pm = \chi_{A_1} f^\pm + \dots + \chi_{A_n} f^\pm$. Die Additivität (2.9) des Integrals auf $\mathcal{M}_{[0, \infty]}$ liefert daher

$$\int_{A_1 \cup \dots \cup A_n} f^\pm d\mu = \int_{A_1} f^\pm d\mu + \dots + \int_{A_n} f^\pm d\mu,$$

und damit die Behauptung. □

Wir beschreiben nun die grundlegenden Eigenschaften des Funktional $\|\cdot\|_1$ und des Integrals.

Proposition 2.12. Für das Funktional

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty], \quad f \mapsto \int_X |f| d\mu$$

gilt $(f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$ und $c \in \mathbb{R})$:

- (i) *Positive Homogenität:* $\|cf\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1$ (mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$)
- (ii) *Dreiecksungleichung:* $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$, falls $f + g$ überall definiert ist.

Beweis: (i) folgt aus der positiven Homogenität (2.9) des Integrals nichtnegativer Funktionen.

(ii) ergibt sich durch Integrieren der punktweisen Dreiecksungleichung $|f + g| \leq |f| + |g|$ aus Monotonie (2.5) und Additivität (2.9) des Integrals nichtnegativer Funktionen. □

Korollar. (i) $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$ ist ein *Untervektorraum*, also selbst ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum bzgl. punktwiser Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen.

- (ii) Das Funktional

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow [0, \infty)$$

ist eine *Halbnorm* auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, dh es ist *nichtnegativ*, *positiv homogen* und erfüllt die *Dreiecksungleichung*.

Bemerkung. Eine Halbnorm $\|\cdot\|$ auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V induziert eine translationsinvariante Pseudometrik³¹ d auf V durch $d(v, w) := \|v - w\|$, diese wiederum eine Topologie.

Wir dehnen jetzt die für das Integral nichtnegativer Funktionen bewiesenen Eigenschaften auf allgemeine Funktionen aus.

Satz. Das durch das μ -Integral gegebene Funktional

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_X f d\mu$$

ist (i) $\mathbb{R}$ -linear, dh für $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_X (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\mu = c_1 \cdot \int_X f_1 d\mu + c_2 \cdot \int_X f_2 d\mu \quad (2.13)$$

(ii) *monoton*, dh für $f, g \in \mathcal{L}^1$ gilt: $f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

(iii) *1-Lipschitz* bzgl der Halbnorm $\|\cdot\|_1$, dh für $f, g \in \mathcal{L}^1$ gilt:

$$\left| \int_X f d\mu - \int_X g d\mu \right| \leq \|f - g\|_1. \quad (2.14)$$

Beweis: (i) Für $f \in \mathcal{L}^1$ und $c > 0$ gilt $(cf)^\pm = cf^\pm$ und $\|(cf)^\pm\|_1 = c \cdot \|f^\pm\|_1$, also

$$\int_X cf d\mu = \|cf^+\|_1 - \|cf^-\|_1 = c \cdot \int_X f d\mu,$$

analog für $c < 0$. Dies zeigt die Homogenität des Integrals.

Um die Additivität des Integrals einzusehen, nutzen wir jetzt aus, daß wir Integrale für endliche meßbare Zerlegungen von X als Summen der Integrale über die Zerlegungsmengen aufspalten können, siehe (2.11). Für $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1$ gilt also die Additivität

$$\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$$

wenn sie für die Teilintegrale über die Teilmengen einer Zerlegung gilt. Wir dürfen deshalb annehmen, daß beide Funktionen f_1, f_2 ein Vorzeichen haben. In den Fällen gleichen Vorzeichens, $f_1, f_2 \geq 0$ oder $f_1, f_2 \leq 0$, gilt die Behauptung wegen der Additivität des Integrals auf $\mathcal{M}_{[0, \infty]}$, vgl (2.9). Es bleibt der Fall verschiedener Vorzeichen zu verifizieren, oBdA $f_1 \geq 0 \geq f_2$. Wiederum nach Aufspalten der Integrale dürfen wir zusätzlich annehmen, daß $f_1 + f_2$ ein Vorzeichen hat, oBdA $f_1 + f_2 \geq 0$. Dann aber folgt die Behauptung ebenfalls aus der Additivität auf $\mathcal{M}_{[0, \infty]}$, denn $f_1 + f_2 \leq f_1$ ist integrierbar und (2.9) liefert

$$\int_X f_1 d\mu = \int_X \underbrace{((f_1 + f_2))}_{\geq 0} + \underbrace{(-f_2)}_{\geq 0} d\mu = \int_X (f_1 + f_2) d\mu + \underbrace{\int_X (-f_2) d\mu}_{-\int_X f_2 d\mu}.$$

³¹Von einer Pseudometrik verlangt man dieselben Eigenschaften wie von einer Metrik mit der Ausnahme, daß verschiedene Punkte Abstand Null haben dürfen.

Dies zeigt die Linearität des Integrals.

(ii) Die Monotonie des Integrals folgt sofort aus seiner Additivität.

(iii) Die 1-Lipschitz-Eigenschaft ergibt sich aus Linearität und Monotonie, denn

$$\pm \left(\int_X f \, d\mu - \int_X g \, d\mu \right) = \int_X \underbrace{(\pm(f - g))}_{\leq |f - g|} \, d\mu \leq \|f - g\|_1.$$

Damit ist der Beweis des Satzes vollständig. $\square$

Man sagt, daß zwei numerische Funktionen $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *μ -fast überall gleich* sind, notiert

$$f =_\mu g,$$

falls $f(x) = g(x)$ für μ -fast alle Punkte $x \in X$, dh falls $\{f \neq g\}$ in einer μ -Nullmenge enthalten ist. Wenn $f, g \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$, so bedeutet dies, daß $\mu(\{f \neq g\}) = 0$. Wir betrachten den Raum

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}} / =_\mu$$

der Äquivalenzklassen *μ -fast überall übereinstimmender meßbarer numerischer Funktionen*.

Für meßbare Funktionen, die fast überall übereinstimmen, ist die Integrierbarkeit äquivalent und die Werte ihrer Integrale sind dann gleich:

Lemma. Seien $f, g \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ mit $f =_\mu g$. Dann:

(i) $\|f\|_1 = \|g\|_1$. Insbesondere ist f genau dann μ -integrierbar, wenn g es ist.

(ii) In diesem Fall gilt $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

Beweis: (i) Das Integral meßbarer Funktionen über Nullmengen verschwindet. Ist nämlich $N \subset X$ eine μ -Nullmenge, so ist $N \times \mathbb{R}$ eine $\mu \otimes \lambda^1$ -Nullmenge und deshalb $\int_N f^\pm \, d\mu = 0$, also

$$\int_N f \, d\mu = 0.$$

Weil wir Integrale über X als Summen von Integralen über Teilmengen aufspalten können, folgt

$$\|f\|_1 = \|f\chi_{\{f=g\}}\|_1 + \underbrace{\|f\chi_{\{f \neq g\}}\|_1}_0 = \|g\chi_{\{f=g\}}\|_1 + \underbrace{\|g\chi_{\{f \neq g\}}\|_1}_0 = \|g\|_1.$$

(ii) Da auch $f^\pm =_\mu g^\pm$, gilt im integrierbaren Fall

$$\int_X f \, d\mu = \|f^+\|_1 - \|f^-\|_1 = \|g^+\|_1 - \|g^-\|_1 = \int_X g \, d\mu \quad \square$$

Es ist deshalb natürlich, das μ -Integral als Funktional auf Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen zu betrachten, die sich nur auf μ -Nullmengen unterscheiden.

Zunächst steigt das Funktional $\|\cdot\|_1 : \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}} \rightarrow [0, \infty]$ ab zu dem wohldefinierten Funktional

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}} / =_\mu \rightarrow [0, \infty], [f] \mapsto \|f\|_1.$$

Dieses ist außerhalb des „Ursprungs“ $[0]$ strikt *positiv*, denn ob meßbare Funktionen *μ -fast überall verschwinden*, läßt sich mit Hilfe des Funktional $\|\cdot\|_1$ charakterisieren:

Lemma. Für $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ gilt: $f =_{\mu} 0 \Leftrightarrow \|f\|_1 = 0$.

Beweis: Es bleibt nur die Richtung „ $\Leftarrow$ “ zu zeigen. OBdA $f \geq 0$, weil wir f durch $|f|$ ersetzen können. Integrieren von $\chi_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} \leq nf$ für $n \in \mathbb{N}$ liefert $\mu(\{f \geq \frac{1}{n}\}) \leq n\|f\|_1 = 0$. Da $\{f \geq \frac{1}{n}\} \nearrow \{f > 0\}$, folgt mit der Stetigkeit von unten von Maßen, daß $\mu(\{f > 0\}) = 0$. $\square$

Weil μ -integrierbare Funktionen μ -fast überall endliche Werte annehmen (vgl oben), haben ihre Äquivalenzklassen $\mathbb{R}$ -wertige Repräsentanten. Daher besteht die natürliche Identifikation

$$L^1(X, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) /_{=\mu} \cong \{[f] \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}) /_{=\mu} \mid \|f\|_1 < \infty\} \subset \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}) /_{=\mu}.$$

Da die μ -fast überall verschwindenden Funktionen in $\mathcal{L}^1$ einen Untervektorraum bilden, ist L^1 ein Quotient von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen,

$$L^1 \cong \mathcal{L}^1 / \{f \mid f =_{\mu} 0\},$$

und damit selber in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Unsere Diskussion zeigt:

Satz. (i) Der Raum $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ von Äquivalenzklassen fast überall übereinstimmender integrierbarer $\mathbb{R}$ -wertiger Funktionen trägt eine natürliche Struktur als $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

(ii) Die Einschränkung des Funktional $\|\cdot\|_1$ von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) /_{=\mu}$ auf $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist eine Norm, die sogenannte 1-Norm.

(iii) Das μ -Integral steigt ab zu dem wohldefinierten linearen Funktional

$$L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [f] \mapsto \int_X f d\mu.$$

Es ist 1-Lipschitz bzgl der Norm $\|\cdot\|_1$.

Bemerkung. (i) Wir werden sehen, daß der normierte Vektorraum $(L^1, \|\cdot\|_1)$ vollständig, also ein Banachraum ist (Satz von Riesz-Fischer). Damit ist er ein schönes geometrisches Objekt und ein sehr befriedigender Definitionsbereich für das Integral als stetigem linearen Funktional.

(ii) Die Monotonie des Integrals drückt sich darin aus, daß seine Werte auf dem konvexen Kegel

$$\{[f] \mid f \geq 0\} \subset L^1$$

abgesehen von der Spitze $[0]$ strikt positiv sind.

Das Integral kann noch allgemeiner für „fast überall meßbare“ Funktionen definiert werden. Damit meinen wir numerische Funktionen $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, für welche Funktionen $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ existieren mit $f =_{\mu} g$. Ist g integrierbar, so definiert man

$$\int_X f d\mu := \int_X g d\mu.$$

Dies ist wohldefiniert, weil die verschiedenen möglichen Funktionen g μ -fast überall übereinstimmen. Ähnlich definiert man das Integral für μ -fast überall definierte meßbare Funktionen.

Das Integral für *komplex*- und allgemeiner *vektorwertige* Funktionen läßt sich auf das Integral für reellwertige Funktionen zurückführen, indem man es komponentenweise definiert bzw, anders gesagt, die vektorwertigen Funktionen mit Linearformen komponiert.

Es sei V ein endlich-dim $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Weiter bezeichne (e_i) eine Basis von V und (e_i^*) die zu ihr duale Basis des Dualraums V^* .

Wir betrachten Funktionen $f : X \rightarrow V$. Für jede Linearform $\lambda \in V^*$ ist dann ihre Komposition $\lambda(f) = \lambda \circ f$ mit f eine $\mathbb{R}$ -wertige Funktion. Insbesondere sind $f_i := e_i^*(f)$ die Komponenten von f bzgl der Basis (e_i) , dh wir haben die Darstellung $f = \sum_i e_i^*(f) \cdot e_i$. Für eine allgemeine Linearform $\lambda = \sum_i \lambda_i e_i^*$ gilt $\lambda(f) = \sum_i \lambda_i f_i$.

Definition (Meßbar, vektorwertig). Eine Funktion $f : X \rightarrow V$ heißt *meßbar*, falls die Funktionen $\lambda(f)$ für alle $\lambda \in V^*$ meßbar sind.

Dies ist äquivalent dazu, daß alle Funktionen f_i meßbar sind. Wir bezeichnen den Raum der meßbaren Funktionen $X \rightarrow V$ mit $\mathcal{M}_V = \mathcal{M}_V(X, \mathcal{A})$.

Wir fixieren nun eine Norm $\|\cdot\|_V$ auf V .

Definition (Integrierbar, vektorwertig). Eine Funktion $f \in \mathcal{M}_V$ heißt *(μ -)integrierbar*, falls

$$\|f\|_1 := \int_X \|f\|_V d\mu < \infty.$$

Weil alle Normen auf V zueinander äquivalent sind, ist dies unabhängig von der gewählten Norm. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{L}_V^1 := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu; V) \subset \mathcal{M}_V(X, \mathcal{A})$$

den Raum der μ -integrierbaren V -wertigen Funktionen auf X .

Lemma. $f \in \mathcal{M}_V$ sind äquivalent: (i) $f \in \mathcal{L}_V^1$.

(ii) $\lambda(f) \in \mathcal{L}^1$ für alle $\lambda \in V^*$.

(ii') $f_i \in \mathcal{L}^1$ für alle i .

Beweis: Wir dürfen oBdA annehmen, daß $\|\cdot\|_V$ die 1-Norm bzgl der Basis (e_i) ist, dh $\|\sum_i v_i e_i\|_V = \sum_i |v_i|$. Dann entsprechend $\|f\|_1 = \sum_i \|f_i\|_1$. Also (i) $\Leftrightarrow$ (ii'). Weil $\mathcal{L}^1$ ein Vektorraum ist, gilt außerdem (ii) $\Leftrightarrow$ (ii'). $\square$

Korollar. $\mathcal{L}_V^1$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Um das Integral

$$\mathcal{L}_V^1 \longrightarrow V$$

zu erklären, betrachten wir für eine Funktion $f \in \mathcal{L}_V^1$ das lineare Funktional

$$\lambda \mapsto \int_X \lambda(f) d\mu \tag{2.15}$$

auf V^* . Es liegt in $(V^*)^* \cong V$. Wir erinnern an den natürlichen Isomorphismus

$$V \rightarrow (V^*)^*, \quad v \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(v)).$$

Also ist das lineare Funktional (2.15) durch Einsetzen eines eindeutig bestimmten Vektors aus V gegeben, den wir mit

$$\int_X f \, d\mu \in V$$

bezeichnen und das (μ) -Integral der Funktion f nennen.³² Es gilt demnach

$$\lambda\left(\int_X f \, d\mu\right) = \int_X \lambda(f) \, d\mu$$

für alle $\lambda \in V^*$. Für eine (beliebige!) Basis (e_i) von V haben wir

$$\int_X f \, d\mu = \sum_i \left(\int_X f_i \, d\mu\right) e_i.$$

Insbesondere gilt im Fall $V = \mathbb{C}$, also für *komplexwertige* Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, daß

$$\int_X f \, d\mu = \int_X (\operatorname{Re} f) \, d\mu + i \cdot \int_X (\operatorname{Im} f) \, d\mu.$$

Ü L^1 -Approximation von integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger: Der Raum $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger liegt dicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ bzgl der 1-Norm.

2.2.3 Vergleich mit dem Integral für Regelfunktionen auf $\mathbb{R}$

Wir hatten (vgl Analysis I) das Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

von *Regelfunktionen* $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt. Regelfunktionen sind Funktionen, die sich *gleichmäßig* durch Treppenfunktionen approximieren lassen, die ihrerseits Linearkombinationen charakteristischer Funktionen von *Intervallen* sind. Regelfunktionen sind dadurch charakterisiert, daß die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ überall existieren. Regelfunktionen sind also sehr spezielle Borel-meßbare Funktionen. Sie umfassen die stetigen Funktionen.

Das Integral von Regelfunktionen wird vom Lebesgue-Integral subsumiert. Als beschränkte meßbare Funktionen sind sie Lebesgue-integrierbar und:

Proposition. Für Regelfunktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda^1|_{[a,b]}$$

³²Da $\dim V < \infty$, ist der natürliche Homomorphismus $V \rightarrow (V^*)^*$, gegeben durch $v \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(v))$ ein Isomorphismus.

Beweis: Beide Integrale stimmen auf charakteristischen Funktionen von Intervallen überein, aufgrund ihrer Linearität also auch auf Linearkombinationen solcher.

Sei nun $\tau_n \rightarrow f$ eine gleichmäßige Approximation einer Regelfunktion durch solche speziellen Treppenfunktionen. Nach Definition des Integrals von Regelfunktionen gilt dann

$$\int_a^b \tau_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Andererseits gilt für die Lebesgue-Integrale:

$$\left| \underbrace{\int_{[a,b]} f d\lambda^1 - \int_{[a,b]} \tau_n d\lambda^1}_{\int_{[a,b]} (f - \tau_n) d\lambda^1} \right| \leq \int_{[a,b]} |f - \tau_n| d\lambda^1 \leq |b - a| \cdot \underbrace{\sup_{[a,b]} |f - \tau_n|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

Also auch $\int_a^b \tau_n(x) dx = \int_{[a,b]} \tau_n d\lambda^1 \rightarrow \int_{[a,b]} f d\lambda^1$. □

Wir verwenden auch für meßbare numerische Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die *Schreibweise*:

$$\int_{[a,b]} f \underbrace{d\lambda^1}_{\text{kurz } d\lambda^1} = \int_a^b f(x) dx$$

Die ebenfalls früher definierten *uneigentlichen* Integrale über *nichtkompakte* Intervalle werden auch vom Lebesgue-Integral erfaßt. Ist zB $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion (im Sinne der Existenz einseitiger Limiten), so

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{[a', b'] \nearrow (a, b)} \underbrace{\int_{a'}^{b'} f(x) dx}_{\int_{[a', b']} f d\lambda^1} = \int_{(a, b)} f d\lambda^1,$$

falls f Lebesgue-integrierbar ist, bzw äquivalent dazu, falls (in der Terminologie von Analysis I) das Integral $\int_a^b f(x) dx$ *absolut konvergiert*.

2.4 Maße mit Dichten

Wir betrachten Maße auf einem festen Meßraum $(X, \mathcal{A})$.

Ist μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, so definieren wir für eine Funktion $\rho \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X, \mathcal{A})$ das Maß $\rho\mu$ auf $\mathcal{A}$ durch

$$(\rho\mu)(A) = \int_A \rho d\mu = \int_X \chi_A \rho d\mu$$

für $A \in \mathcal{A}$. Die σ -Additivität folgt aus dem Satz von der Monotonen Konvergenz.

Definition. Das Maß $\rho\mu$ heißt das Maß mit *Dichte* ρ relativ zu μ .

μ -Nullmengen sind auch $\rho\mu$ -Nullmengen.

Für die Integration von Funktionen gilt:

Lemma 2.16. (i) Falls $f \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$, so

$$\int_X f d(\rho\mu) = \int_X f \rho d\mu. \quad (2.17)$$

(ii) Eine Funktion $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\rho\mu$ -integrierbar, wenn die Funktion $f\rho$ μ -integrierbar ist, und in diesem Fall gilt auch (2.17).

Beweis: (i) Zunächst gilt (2.17) für charakteristische Funktionen χ_A , $A \in \mathcal{A}$,

$$\int_X \chi_A d(\rho\mu) = (\rho\mu)(A) = \int_X \chi_A \rho d\mu.$$

Wegen der Linearität des Integrals gilt sie allgemeiner für nichtnegative Treppenfunktionen, und wegen des Satzes von der Monotonen Konvergenz sowie der Approximierbarkeit durch Treppenfunktionen auf ganz $\mathcal{M}_{[0,\infty]}$.

(ii) folgt durch Anwenden von (i) auf die Anteile $f^\pm$. □

Aus (2.17) folgt die Assoziativität

$$\rho'(\rho\mu) = (\rho'\rho)\mu$$

für Dichten $\rho, \rho' \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$, denn für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$(\rho'(\rho\mu))(A) = \int_A \rho' d(\rho\mu) = \int_A \rho' \rho d\mu = ((\rho'\rho)\mu)(A).$$

Das Maß $\rho\mu$ ist genau dann *endlich*, wenn ρ μ -integrierbar ist.

Ü Ein Maß μ ist genau dann σ -endlich, wenn eine Dichte $\rho > 0$ existiert, so daß $\rho\mu$ endlich ist.

Zur *Eindeutigkeit* von Dichten gilt im Fall *endlicher* Maße:

Lemma. Sind $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$ und ist $\rho_1\mu = \rho_2\mu$ ein endliches Maß, so $\rho_1 =_\mu \rho_2$.

Beweis: Für $\epsilon > 0$ und $A_\epsilon := \{\rho_1 \geq \rho_2 + \epsilon\} \in \mathcal{A}$ gilt

$$0 = \underbrace{(\rho_1 \mu)(A_\epsilon)}_{< \infty} - (\rho_2 \mu)(A_\epsilon) = \int_{A_\epsilon} \underbrace{(\rho_1 - \rho_2)}_{\geq \epsilon} d\mu \geq \epsilon \mu(A_\epsilon).$$

Also sind die A_ϵ μ -Nullmengen, und damit auch $\{\rho_1 > \rho_2\} = \cup_n A_{1/n}$, ebenso $\{\rho_1 < \rho_2\}$. $\square$

Es gibt eine elegante *Charakterisierung* dafür, wann ein Maß relativ zu einem anderen eine Dichte besitzt. Die folgende Eigenschaft ist notwendig:

Definition (Absolut stetige Maße). Sind μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$, so heißt ν *absolut stetig* bzgl μ , kurz μ -stetig, notiert $\nu \ll \mu$, falls μ -Nullmengen auch ν -Nullmengen sind.

Sie ist im σ -endlichen Fall auch hinreichend. Wir erwähnen dazu ohne Beweis:

Satz (Radon-Nikodým). Ist μ σ -endlich und ist ν absolut stetig bzgl μ , so besitzt ν eine Dichte relativ zu μ , dh $\nu = \rho \mu$ mit $\rho \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}$.

Siehe Elstrodt p 280-282, Bauer p 89-93.

Die Eindeutigkeit von Dichten gilt relativ zu σ -endlichen Maßen allgemein: Ist μ σ -endlich und ist $\nu = \rho \mu$ ein Maß mit Dichte ρ relativ zu μ , so ist ρ durch ν μ -fast überall eindeutig bestimmt. Das Maß ν ist genau dann σ -endlich, wenn ρ μ -fast überall endlich ist. Es ist in diesem Fall daher sinnvoll, von der *Radon-Nikodým-Ableitung* $\rho = \frac{d\nu}{d\mu}$ zu sprechen. Siehe Bauer p 93.

Ü Ein endliches Maß ν ist genau dann absolut stetig bzgl μ , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für $A \in \mathcal{A}$ gilt: $\mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \epsilon$.

Beispiel. Einer schwach monoton wachsenden Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht der *Stieltjes-Inhalt* $\mu_F|_{\mathcal{F}^1} : \mathcal{F}^1 \rightarrow [0, \infty)$ auf dem Ring der Figuren gegeben durch

$$\mu_F|_{\mathcal{F}^1}([a, b)) = F(b) - F(a).$$

Ist F rechtsseitig stetig, so ist dieser Inhalt ein σ -endliches Prämaß (Ü) und setzt sich daher eindeutig zu einem Maß μ_F auf $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ fort (Korollar 1.23).

Ist $F \in \mathcal{C}^1$, so gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\mu_F([a, b)) = \int_a^b F'(x) dx = \int_{[a, b]} F' d\lambda^1 = \int_{[a, b)} F' d\lambda^1.$$

Folglich

$$\mu_F = F' \beta^1$$

zunächst auf $\mathcal{F}^1$, und wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung von $\mu_F|_{\mathcal{F}^1}$ zu μ_F auf ganz $\mathcal{B}^1$.

Ist F ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus, so $\mu_F = F_*^{-1} \beta^1$, ebenfalls zunächst auf $\mathcal{F}^1$ und folglich auf ganz $\mathcal{B}^1$, und es gilt daher

$$F_*^{-1} \beta^1 = F' \beta^1.$$

Dies ist der 1-dim Spezialfall der später zu beweisenden Transformationsformel für das d -dim Lebesgue-Maß unter $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismen (siehe Kap 2.6.2).

Beispiel 2.18. Wir betrachten für $d \geq 1$ die Radius- bzw Abstandsfunktion $r : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ und das Bildmaß

$$r_*\lambda^d$$

auf $[0, \infty)$. Für $R \geq 0$ gilt

$$(r_*\lambda^d)([0, R]) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\overline{B}_R(0)} d\lambda^d = \text{vol}(\overline{B}_R(0)) = R^d \cdot \underbrace{\text{vol}(\overline{B}_1(0))}_{=:v_d},$$

gemäß dem Verhalten des Lebesgue-Maßes unter Streckungen. Für $R_2 > R_1 \geq 0$ folgt

$$(r_*\lambda^d)([R_1, R_2]) = v_d \cdot (R_2^d - R_1^d) = \underbrace{d \cdot v_d}_{=:s_{d-1}} \cdot \underbrace{\int_{R_1}^{R_2} r^{d-1} dr}_{=(r^{d-1}\lambda^1|_{[0,\infty)})([R_1, R_2])}$$

Folglich besitzt das Bildmaß $r_*\lambda^d$ eine Dichte relativ zu λ^1 , nämlich

$$r_*\lambda^d = s_{d-1} \cdot r^{d-1}\lambda^1|_{[0,\infty)},$$

wie im letzten Beispiel wieder zunächst auf Figuren, dann auf Borel-Mengen und schließlich, da beide Maße auf β^1 -Nullmengen verschwinden, weiter auf Lebesgue-meßbaren Teilmengen.

Wir interpretieren s_{d-1} als das $(d-1)$ -dimensionale *Volumen der Einheitssphäre* $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, das mit unserem bisher entwickelten Begriffsansatz allerdings noch nicht definiert werden kann!

2.5 Produktmaße und Mehrfachintegrale

Wir setzen die Diskussion von Produktmaßen (in Kap 1.5.11) fort.

2.5.1 Integraldarstellung von Produktmaßen und Cavalieri-Prinzip

Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ -endliche Maßräume für $i = 1, 2$. Wir haben gezeigt, daß ein eindeutiges Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ existiert mit der Eigenschaft, daß

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

für $A_i \in \mathcal{A}_i$.

Wir geben eine *Integraldarstellung* des Produktmaßes im Sinne des *Cavalieri-Prinzips*. Für eine Teilmenge $M \subset X_1 \times X_2$ definieren wir für $x_1 \in X_1$ den *Querschnitt* $M_{x_1} \subset X_2$ durch

$$\{x_1\} \times M_{x_1} := M \cap (\{x_1\} \times X_2).$$

Satz. Falls $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, so $M_{x_1} \in \mathcal{A}_2$ für alle $x_1 \in X_1$. Weiter ist die Funktion $x_1 \mapsto \mu_2(M_{x_1}) \in [0, \infty]$ dann meßbar, dh liegt in $\mathcal{M}_{[0, \infty]}(X_1, \mathcal{A}_1)$, und es gilt:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(M) = \int_{X_1} \mu_2(M_{x_1}) d\mu_1(x_1) \quad (2.19)$$

Beweis: Wir bezeichnen mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die Familie der meßbaren Teilmengen M , für welche die Behauptung gilt. Zu zeigen ist $\mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Wir beobachten über $\mathcal{F}$:

In $\mathcal{F}$ enthalten ist der Halbring $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ aller Quader $Q = A_1 \times A_2$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$. Denn $Q_{x_1} = A_2$ für $x_1 \in A_1$ und ansonsten leer, so daß $\mu_2(Q_{x_1}) = \chi_{A_1}(x_1) \cdot \mu_2(A_2)$ und (2.19) folgt.

Weiter ist $\mathcal{F}$ abgeschlossen unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen. Denn ist eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen $M_n \in \mathcal{F}$ gegeben, so gilt für ihre Vereinigung $M = \cup_n M_n$, daß $M_{x_1} = \cup_n M_{n, x_1}$, wegen der σ -Additivität von μ_2 daher $\mu_2(M_{x_1}) = \sum_n \mu_2(M_{n, x_1})$, und mit dem Satz von der Monotonen Konvergenz und der σ -Additivität von $\mu_1 \otimes \mu_2$ schließlich

$$\int_{X_1} \mu_2(M_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \sum_n \underbrace{\int_{X_1} \mu_2(M_{n, x_1}) d\mu_1(x_1)}_{(\mu_1 \otimes \mu_2)(M_n)} = (\mu_1 \otimes \mu_2)(M),$$

also $M \in \mathcal{F}$.

Wir wenden jetzt unsere Überlegungen zu *Dynkin-Systemen* an (Kap 1.4.2).

Wir betrachten erst den Fall endlicher Totalvolumina $\mu_i(X_i) < \infty$. Dann ist $\mathcal{F}$ auch $\mathbb{C}$ -stabil, denn für $M \in \mathcal{F}$ gilt $(\mathbb{C}M)_{x_1} = \mathbb{C}M_{x_1}$ und $\mu_2((\mathbb{C}M)_{x_1}) = \mu_2(X_2) - \mu_2(M_{x_1})$, also

$$\int_{X_1} \mu_2((\mathbb{C}M)_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \underbrace{\mu_1(X_1) \cdot \mu_2(X_2)}_{(\mu_1 \otimes \mu_2)(X_1 \times X_2)} - \underbrace{\int_{X_1} \mu_2(M_{x_1}) d\mu_1(x_1)}_{(\mu_1 \otimes \mu_2)(M)} = (\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathbb{C}M).$$

Folglich ist $\mathcal{F}$ ein Dynkin-System. Weil der in $\mathcal{F}$ enthaltene Halbring $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2 \cap$ -stabil ist, ist das von ihm erzeugte Dynkin-System eine σ -Algebra (Satz 1.13), also die von $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ erzeugte σ -Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, und es folgt $\mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Im allgemeinen σ -endlichen Fall betrachten wir ausschöpfende Folgen $E_{i,n} \nearrow X_i$ von Teilmengen $E_{i,n} \in \mathcal{A}_i$ für $n \in \mathbb{N}$ mit endlichen Volumina $\mu_i(E_{i,n}) < \infty$. Für eine beliebige Teilmenge $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt dann nach obigem $M_n := M \cap (E_{1,n} \times E_{2,n}) \in \mathcal{F}$ und ebenso $M'_n := M_n \setminus M_{n-1} \in \mathcal{F}$, wobei wir $M_0 := \emptyset$ setzen. Weil M als die disjunkte Vereinigung der M'_n zerfällt, folgt $M \in \mathcal{F}$. Also $\mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. $\square$

Korollar (Cavalieri-Prinzip). Gilt für $M, M' \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, daß $\mu_2(M_{x_1}) = \mu_2(M'_{x_1})$ für μ_1 -fast alle $x_1 \in X_1$, so $(\mu_1 \otimes \mu_2)(M) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(M')$.

Vgl in der Pinakothek der Moderne die Skulpturen aus Leuchtstoffröhren „Monuments“ for V. Tatlin von Dan Flavin ...

Beispiel (Volumen von Kegeln). Wir zerlegen $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ und betrachten für eine Lebesgue-meßbare Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^{d-1} \cong \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ den Kegel $K \subset \mathbb{R}^d$ mit Basis B , Höhe $h > 0$ und Spitze $p \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{h\}$. Dann sind die Querschnitte $Q_t = K \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{t\})$ für $0 \leq t \leq h$ isometrisch zu $(1 - \frac{t}{h}) \cdot B$. Daher liefert (2.19) für das Kegelvolumen:

$$\lambda^d(K) = \int_0^h \lambda^{d-1}(Q_t) dt = \lambda^{d-1}(B) \cdot \underbrace{\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{d-1} dt}_{\frac{h}{d}} = \frac{1}{d} \cdot h \cdot \lambda^{d-1}(B)$$

ZB erhalten wir für das Volumen des d -dim *Standardsimplex* $\Delta_d \subset \mathbb{R}^d$, also der konvexen Hülle von Ursprung und Standardbasis in $\mathbb{R}^d$:

$$\lambda^d(\Delta_d) = \frac{1}{d} \cdot \lambda^{d-1}(\Delta_{d-1}) \stackrel{\text{Induktion}}{=} \frac{1}{d!}$$

Beispiel (Volumen euklidischer Bälle). Wir interessieren uns für das Volumen

$$v_d := \lambda^d(\overline{B}_1^{\mathbb{R}^d}(0))$$

des d -dim euklidischen Einheitsballes. Wir zerlegen $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$. Dann

$$\overline{B}_1^{\mathbb{R}^d}(0) \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{h\}) = \overline{B}_{(1-h^2)^{1/2}}^{\mathbb{R}^{d-1}}(0) \times \{h\}$$

für $-1 \leq h \leq 1$. Mit (2.19) erhalten wir die Rekursion

$$v_d = \underbrace{(\lambda^{d-1} \otimes \lambda^1)}_{\lambda^d}(\overline{B}_1^{\mathbb{R}^d}(0)) = \int_{-1}^1 \underbrace{\lambda^{d-1}(\overline{B}_{(1-h^2)^{1/2}}^{\mathbb{R}^{d-1}}(0))}_{(1-h^2)^{\frac{d-1}{2}} \cdot v_{d-1}} dh = v_{d-1} \cdot \underbrace{\int_{-1}^1 (1-h^2)^{\frac{d-1}{2}} dh}_{=: I_d},$$

also

$$v_d = v_{d-1} \cdot I_d.$$

Das Integral überführen wir durch die Substitution $h = \sin u$ in ein trigonometrisches Integral,

$$\int_{-1}^1 (1-h^2)^{\frac{d-1}{2}} dh = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{d-1} u \sin' u du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^d u du =: I_d.$$

ZB erhalten wir für die Kreisscheibe ($d = 2$):

$$I_2 = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 u + \sin^2 u) \, du = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 \cdot I_2 = \pi$$

Und für die Kugel ($d = 3$):

$$I_3 = \int_{-1}^1 (1 - h^2) \, dh = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_2 \cdot I_3 = \frac{4\pi}{3}$$

Das Integral I_d läßt sich rekursiv durch partielle Integration berechnen (vgl die Diskussion des *Wallis-Produkts* in Analysis I). Für $d \geq 2$ gilt

$$I_d = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{d-1} x \sin' x \, dx = \underbrace{\cos^{d-1} x \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0} - (d-1) \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{d-2} x \underbrace{(-\sin^2 x)}_{\cos^2 x - 1} \, dx}_{I_d - I_{d-2}},$$

also

$$dI_d = (d-1)I_{d-2}.$$

Es folgt

$$I_d I_{d-1} = \frac{d-1}{d} I_{d-1} I_{d-2} \stackrel{\text{Induktion}}{=} \dots = \frac{1}{d} \underbrace{I_1 I_0}_{2\pi}.$$

Also gilt für $d \geq 2$:

$$\frac{v_d}{v_{d-2}} = \frac{2\pi}{d} \tag{2.20}$$

ZB in Dimension 4:

$$v_4 = \frac{\pi}{2} \cdot v_2 = \frac{\pi^2}{2}$$

Vgl unten Beispiel 2.24.

Beispiel (Berechnung des 3-dim Kugelvolumens nach Archimedes). Archimedes betrachtete einen *Zylinder* Z mit Radius 1 und Höhe 1, eine einbeschriebene *Halbkugel* H vom Radius 1, deren Randscheibe die Zylinderbasis B ist, sowie einen einbeschriebenen *Kegel* K , dessen Spitze der Mittelpunkt der Zylinderbasis und dessen Basisscheibe der Zylinderdeckel ist. Er beobachtete, daß sich die horizontalen Querschnittsflächen aufaddieren. Sind nämlich Zylinderbasis und -deckel in den Ebenen $z = 0$ bzw $z = 1$ enthalten, so haben die Schnitte von Z , H und K mit der Ebene $z = h$, $0 \leq h \leq 1$, die Flächen π , $\pi(1 - h^2)$ bzw πh^2 . Mit dem Cavalieri-Prinzip folgt

$$\lambda^3(Z) = \lambda^3(H) + \lambda^3(K)$$

und mit (2.19) ergibt sich für den Kegel

$$\lambda^3(K) = \lambda^2(B) \cdot \int_0^1 h^2 \, dh = \frac{1}{3} \cdot \lambda^2(B) = \frac{1}{3} \cdot \lambda^3(Z).$$

Das Volumina verhalten sich also wie:

$$\lambda^3(Z) : \lambda^3(H) : \lambda^3(K) \sim 3 : 2 : 1$$

2.5.2 Mehrfachintegrale: Der Satz von Fubini

Wir kommen nun zur Berechnung von Integralen auf Produkträumen.

Wir behalten die obigen Annahmen und Bezeichnungen. Wir beobachten, daß für eine numerische Funktion $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ die Einschränkungen auf Querschnitte wiederum meßbar sind, $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_2, \mathcal{A}_2)$.

Zunächst der Fall nichtnegativer Funktionen:

Satz (Fubini, für nichtnegative Funktionen). Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ -endliche Maßräume für $i = 1, 2$ und sei $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Dann:

- (i) Die Funktion $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2$ ist meßbar, dh liegt in $\mathcal{M}_{[0, \infty]}(X_1, \mathcal{A}_1)$.
- (ii) Es gilt:

$$\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) \quad (2.21)$$

Beweis: Für charakteristische Funktionen χ_M , $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, reduziert sich die Aussage auf den obigen Satz über die Integraldarstellung von Produktmaßen. Wegen der Additivität des Integrals gilt sie allgemeiner für Treppenfunktionen in $\mathcal{M}_{[0, \infty]}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Mit Hilfe des Satzes von der Monotonen Konvergenz überträgt sie sich weiter auf monotone Limiten solcher Treppenfunktionen, also auf ganz $\mathcal{M}_{[0, \infty]}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. $\square$

Im allgemeinen Fall $\overline{\mathbb{R}}$ -wertiger Funktionen müssen wir Integrierbarkeit voraussetzen:

Satz (Fubini, für integrierbare Funktionen). Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ -endliche Maßräume für $i = 1, 2$ und sei $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ eine $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ -integrierbare Funktion. Dann:

- (i) Die Funktionen $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_2, \mathcal{A}_2)$ sind für μ_1 -fast alle $x_1 \in X_1$ μ_2 -integrierbar.
- (ii) Die μ_1 -fast überall definierte Funktion $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2$ ist μ_1 -integrierbar.
- (iii) Es gilt (2.21).

Beweis: Wir wenden die obige Version von Fubini für nichtnegative Funktionen auf $f^\pm$ an und erhalten

$$\int_{X_1 \times X_2} f^\pm d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f^\pm(x_1, \cdot) d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1). \quad (2.22)$$

Die $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ -Integrierbarkeit von f ist äquivalent dazu, daß die Integrale (2.22) endlich sind. Dies wiederum dazu, daß³⁴

$$\int_{X_2} f^\pm(x_1, \cdot) d\mu_2 < \infty \quad \forall_{\mu_1} x_1 \in X_1,$$

also die Funktionen $f^\pm(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X_2, \mathcal{A}_2)$ für μ_1 -fast alle $x_1 \in X_1$ μ_2 -integrierbar sind, und daß die überall definierten $[0, \infty]$ -wertigen Funktionen

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f^\pm(x_1, \cdot) d\mu_2$$

³⁴Wir verwenden die Notation $\forall_\mu$ für „ μ -fast alle“.

μ_1 -integrierbar sind. Daraus folgt, daß die überall definierte Funktion

$$f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X_2, \mathcal{A}_2)$$

für μ_1 -fast alle $x_1 \in X_1$ μ_2 -integrierbar ist, also (i), und daß die μ_1 -fast überall definierte und $\mathbb{R}$ -wertige Funktion

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2 = \int_{X_2} f^+(x_1, \cdot) d\mu_2 - \int_{X_2} f^-(x_1, \cdot) d\mu_2$$

μ_1 -integrierbar ist, also (ii). Für ihr Integral gilt dann mit Fubini_[0,∞]

$$\begin{aligned} \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f^+(x_1, \cdot) d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) - \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f^-(x_1, \cdot) d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_1 \times X_2} f^+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int_{X_1 \times X_2} f^- d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &= \int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2), \end{aligned}$$

also (iii). □

Insbesondere können wir beim Doppelintegral die *Integrationsreihenfolge vertauschen*:

Korollar. Für $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ -integrierbare Funktionen $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ gilt:

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(\cdot, x_2) d\mu_1 \right) d\mu_2$$

Ü Für Funktionen $f_i \in \mathcal{L}^1(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ ist die Funktion $(x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1)f_2(x_2)$ auf $X_1 \times X_2$ $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ -integrierbar und es gilt $\int_{X_1 \times X_2} f_1(x_1)f_2(x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = (\int_{X_1} f_1 d\mu_1) \cdot (\int_{X_2} f_2 d\mu_2)$.

Analysis IIIb: Mannigfaltigkeiten, Differentialformen, Satz von Stokes

Bernhard Leeb

3. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	2
2	Tangentialbündel und Differential	6
3	Totales Differential, 1-Formen und Kotangentialbündel	10
3.1	Integration von 1-Formen längs Kurven	13
4	Höhere Differentialformen	15
5	Lokal-nach-global: Partition der Eins	17
6	Orientierung von Mannigfaltigkeiten	19
7	Integration von Differentialformen	20
8	Die äußere Ableitung von Differentialformen	24
8.1	Der Satz von Stokes: absolute Version	27
9	Mannigfaltigkeiten mit Rand	28
9.1	Gebiete mit differenzierbarem Rand	28
9.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand	29
9.2.1	Mannigfaltigkeiten mit Ecken (Ergänzung)	33
10	Der Satz von Stokes	33
10.1	Die relative Version mit Rand	33
10.1.1	Die relative Version mit Ecken (Ergänzung)	34

10.2	Etwas a posteriori-Motivation für die äußere Ableitung	34
10.3	Beziehungen zur klassischen Vektoranalysis	35
10.3.1	Der Gaußsche Divergenzsatz und die Greenschen Formeln	35
10.3.2	Dimension 3	38

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Wir erinnern an den Begriff der *Untermannigfaltigkeit* eines euklidischen Raums ($\rightarrow$ Ana II):

Definition 1.1 (Differenzierbare Untermannigfaltigkeit). Für $0 \leq m \leq n$ und $1 \leq k \leq \infty$ heißt eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale $\mathcal{C}^k$ (-differenzierbare) *Untermannigfaltigkeit*, falls für jeden Punkt $p \in M$ ein $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so daß

$$\Phi(M \cap U) = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}}_{=:\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}} \cap V.$$

Wir werden im Folgenden $\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}$ mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren.

Der $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus Φ induziert durch Einschränkung einen Homöomorphismus

$$\kappa := \Phi|_{M \cap U} : M \cap U \rightarrow \mathbb{R}^m \cap V \tag{1.2}$$

der offenen Umgebung $M \cap U$ von p in M auf eine offene Teilmenge des „Modells“ $\mathbb{R}^m$. Er belegt M nahe p mit *lokalen Koordinaten* und man spricht von einer *lokalen Karte* für M in p .

Je zwei solche Karten $\kappa_i : M \cap U_i \rightarrow \mathbb{R}^m \cap V_i$ für $i = 1, 2$ sind miteinander $\mathcal{C}^k$ -kompatibel im Sinne, daß der *Koordinaten-* oder *Kartenwechsel*

$$\kappa_1(M \cap U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}} \kappa_2(M \cap U_1 \cap U_2),$$

ein Homöomorphismus offener Teilmengen des $\mathbb{R}^m$, tatsächlich ein $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus ist, denn er ist Einschränkung des $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus

$$\Phi_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}} \Phi_2(U_1 \cap U_2)$$

offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, wobei die Karten κ_i Einschränkungen von $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismen $\Phi_i : U_i \rightarrow V_i$ wie in der Definition seien.

Die $\mathcal{C}^k$ -Kompatibilität der Karten ermöglicht es, *Differentialrechnung auf M zu betreiben, ohne den umgebenden euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ zu benötigen*. ZB können wir von der bis zu k -fachen Differenzierbarkeit *nur auf M* definierter Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sprechen: f heißt in einem Punkt $p \in M$ *l -fach differenzierbar* für $1 \leq l \leq k$, wenn für eine Karte κ in p ihre auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ definierte *lokale Koordinatendarstellung* $f \circ \kappa^{-1}$ im Punkt $\kappa(p)$ *l -fach*

differenzierbar ist. Dies ist unabhängig von der gewählten Karte. Denn ist $\tilde{\kappa}$ eine weitere Karte in p , so gilt

$$f \circ \tilde{\kappa}^{-1} = (f \circ \kappa^{-1}) \circ \underbrace{(\kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1})}_{\mathcal{C}^k\text{-Diffeo}}$$

nahe $\tilde{\kappa}(p)$, und $f \circ \tilde{\kappa}^{-1}$ ist daher genau dann l -fach differenzierbar in $\tilde{\kappa}(p)$, wenn $f \circ \kappa^{-1}$ l -fach differenzierbar in $\kappa(p)$ ist. Höhere als k -fache Differenzierbarkeit kann hingegen nicht sinnvoll definiert werden, weil sie für lokale Koordinatendarstellungen von der Karte abhängt.

Wir definieren nun „abstrakte“, dh nicht von vorneherein in einen euklidischen Raum eingebettete, *differenzierbare Mannigfaltigkeiten* als gewisse topologische Räume mit einer Zusatzstruktur, die es erlaubt, auf ihnen Differentialrechnung zu betreiben.

Die wesentliche Anforderung an die topologischen Räume ist die folgende:

Definition (Lokal euklidischer Raum). Ein topologischer Raum X heißt *m -dim lokal euklidisch*, falls er lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^m$ ist, dh jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ homöomorph ist.

Einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\kappa} V$ einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ nennt man *lokale Karte* oder *lokales Koordinatensystem*, und U heißt *Kartengebiet*. (Die Teilmenge U spielt jetzt die Rolle von $M \cap U$ oben im Fall von Untermannigfaltigkeiten.) Wir werden eine solche Karte auch mit (U, κ) bezeichnen.

Sind (U_i, κ_i) für $i = 1, 2$ zwei Karten, so ist der *Koordinaten- bzw Kartenwechsel*

$$\kappa_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}} \kappa_2(U_1 \cap U_2),$$

vgl oben, ein Homöomorphismus offener (möglicherweise leerer) Teilmengen des Modells $\mathbb{R}^m$. Ein *Atlas* ist eine Familie $\mathcal{A}$ von Karten (U_ι, κ_ι) für $\iota \in I$, die X überdecken, $X = \cup_\iota U_\iota$.

Um Differentialrechnung betreiben zu können, fordern wir dieselbe Verträglichkeit der Karten im Atlas, wie sie im Fall der natürlichen Karten (1.2) differenzierbarer Untermannigfaltigkeiten vorliegt. Zwei Karten heißen *$\mathcal{C}^k$ -kompatibel*, falls der Kartenwechsel ein $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus ist. Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt *$\mathcal{C}^k$ -differenzierbar*, falls seine Karten paarweise $\mathcal{C}^k$ -kompatibel sind. Jeder $\mathcal{C}^k$ -Atlas ist in einem eindeutigen *maximalen* $\mathcal{C}^k$ -Atlas enthalten, der durch Hinzunahme aller Karten entsteht, die mit all seinen Karten $\mathcal{C}^k$ -kompatibel sind.

Definition (Differenzierbare Struktur). Eine *$\mathcal{C}^k$ -differenzierbare Struktur* auf einem m -dim lokal euklidischen Raum ist ein maximaler $\mathcal{C}^k$ -differenzierbarer Atlas.

Eine differenzierbare Struktur erlaubt, *differenzierbare Konzepte* von euklidischen Räumen zu *übertragen*. So zB den Begriff der Differenzierbarkeit von Abbildungen:

Seien X^m und Y^n lokal euklidische Räume versehen mit $\mathcal{C}^k$ -differenzierbaren Strukturen und sei $F : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ist $p \in X$ ein Punkt und sind (U, κ) und (U', κ') lokale Karten für X bzw Y in p bzw $F(p)$, so nennen wir die auf einer offenen Umgebung von $\kappa(p)$ definierte $\mathbb{R}^n$ -wertige Abbildung

$$\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}$$

eine *lokale Koordinatendarstellung* von F in p . Für den Übergang zwischen lokalen Koordinatendarstellungen bei Koordinatenwechseln gilt

$$\tilde{\kappa}' \circ F \circ \tilde{\kappa}^{-1} = \underbrace{(\tilde{\kappa}' \circ \kappa'^{-1})}_{\mathcal{C}^k\text{-Diffeo}} \circ (\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}) \circ \underbrace{(\kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1})}_{\mathcal{C}^k\text{-Diffeo}}$$

nahe $\tilde{\kappa}(p)$. Daher ist sinnvoll:

Definition (Differenzierbare Abbildung). Eine stetige Abbildung $F : X \rightarrow Y$ heißt im Punkt $p \in X$ *l -fach differenzierbar*, $1 \leq l \leq k$, falls eine und damit alle ihrer lokalen Koordinatendarstellungen in p im Punkt $\kappa(p)$ *l -fach differenzierbar* sind.

Analog definiert man *$\mathcal{C}^l$ -Differenzierbarkeit*. Den Raum aller $\mathcal{C}^l$ -Abbildungen $X \rightarrow Y$ bezeichnet man mit $\mathcal{C}^l(X, Y)$, und speziell den Raum der $\mathcal{C}^l$ -Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R}$ auch mit $\mathcal{C}^l(X)$.

Ein *Diffeomorphismus* $X \rightarrow Y$ ist wieder eine bijektive differenzierbare Abbildung, deren Umkehrung ebenfalls differenzierbar ist.

Die *Karten* einer $\mathcal{C}^k$ -differenzierbaren Struktur sind *$\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismen*.

Um gewisse Phänomene auszuschließen bzw gewisse Konstruktionen zu ermöglichen, stellt man noch weitere topologische Bedingungen an die zugrundeliegenden lokal euklidischen Räume:

Definition (Mannigfaltigkeit). (i) Eine *m -dim topologische Mannigfaltigkeit* ist ein *m -dim lokal euklidischer Hausdorff-Raum*, dessen Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

(ii) Eine *m -dim $\mathcal{C}^k$ (-differenzierbare) Mannigfaltigkeit* ist eine *m -dim topologische Mannigfaltigkeit* zusammen mit einer $\mathcal{C}^k$ -differenzierbaren Struktur.

Die Hausdorff-Eigenschaft stellt sicher, daß Punkte durch stetige Funktionen getrennt werden können, und die zusätzliche Forderung einer abzählbaren Basis für die Topologie, daß *Partitionen der Eins* existieren.

$\tilde{\mathbf{U}}$ (abzählbare) Basen von Topologien $\tilde{\mathbf{U}}$ Partition der Eins.

Bem/ $\tilde{\mathbf{U}}$ Topologische Mannigfaltigkeiten sind metrisierbar.

Bem/ $\tilde{\mathbf{U}}$ Jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit läßt sich in einen euklidischen Raum *einbetten*, dh sie ist diffeomorph zu einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit.

Beispiele. (o) Die *Standard- $\mathcal{C}^\infty$ -differenzierbare Struktur* auf dem Modell $\mathbb{R}^m$ besteht aus allen mit der Karte $\text{id}_{\mathbb{R}^m}$ $\mathcal{C}^\infty$ -kompatiblen Karten. So wird $\mathbb{R}^m$ zu einer $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

(i) Eine *m -dim $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit* $M \subset \mathbb{R}^n$ ist, versehen mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Relativtopologie, ein *m -dim lokal euklidischer Raum*. Sie trägt eine natürliche $\mathcal{C}^k$ -differenzierbare Struktur erzeugt von den Karten $\kappa = \Phi|_{M \cap U}$, vgl (1.2).

(i') Sei N^n eine *n -dim $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit*. Dann heißt für $0 \leq m \leq n$ eine Teilmenge $M \subset N$ eine *m -dim bzw $(n - m)$ -kodim $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit* von N , falls in jedem Punkt $p \in N$ eine Karte $\Phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ im $\mathcal{C}^k$ -Atlas von N existiert, so daß $\Phi(M \cap U)$ eine *m -dim $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit* der offenen Teilmenge $\Phi(V) \subset \mathbb{R}^n$ ist. In diesem Fall erbt M von N eine natürliche Struktur als *m -dim $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit*.

Die 0-kodim Untermannigfaltigkeiten sind genau die *offenen Teilmengen*.

(ii) Endliche *Produkte* von $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten tragen natürliche Strukturen als $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten.

(iii) Jede $\mathcal{C}^k$ -differenzierbare Struktur kann für $1 \leq l < k$ zu einer $\mathcal{C}^l$ -differenzierbaren Struktur abgeschwächt werden, indem man den Atlas durch Hinzunahme aller $\mathcal{C}^l$ -kompatiblen Karten erweitert.

Man kann, ausgehend nur von einer *Menge*, mit Hilfe eines geeigneten „Atlas“ direkt sowohl die topologische als auch die differenzierbare Struktur einer Mannigfaltigkeit induzieren. Dies ist oft nützlich für die Konstruktion von Mannigfaltigkeiten.

Satz 1.3. Sei M eine Menge, und seien $m \geq 0$ und $k \geq 1$. Wir nehmen an:

(i) $\mathcal{A}$ ist eine Familie bijektiver Abbildungen („Karten“) $\kappa_\iota: U_\iota \rightarrow V_\iota$, $\iota \in I$, von Teilmengen $U_\iota \subset M$ auf *offene* Teilmengen $V_\iota \subset \mathbb{R}^m$, so daß M von den U_ι überdeckt wird.

(ii) Die Definitionsbereiche der Abbildungen („Koordinatenwechsel“) $\kappa_{\iota'} \circ \kappa_\iota^{-1}$ sind *offene* Teilmengen (der V_ι 's) und die $\kappa_{\iota'} \circ \kappa_\iota^{-1}$ sind $\mathcal{C}^k$ -differenzierbar.

Dann existieren auf M eine eindeutige m -dim lokal euklidische Topologie $\mathcal{T}$ sowie auf $(M, \mathcal{T})$ eine eindeutige $\mathcal{C}^k$ -differenzierbare Struktur, so daß $\mathcal{A}$ für sie ein $\mathcal{C}^k$ -differenzierbarer Atlas ist, dh so daß die U_ι offene Teilmengen und die κ_ι $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismen sind.

Beweisskizze: Wir betrachten die Familie $\mathcal{T}$ aller Teilmenge $O \subset M$ mit der Eigenschaft, daß für alle ι die Teilmengen $\kappa_\iota(O \cap U_\iota)$ in V_ι offen sind. Sie ist eine *Topologie* auf M (Ü). Sie wird von den Teilmengen der Form $\kappa_\iota^{-1}(O'_\iota)$ für offene Teilmengen $O'_\iota \subset V_\iota$ erzeugt. Genauer gesagt, sind die U_ι offen bzgl $\mathcal{T}$ und die κ_ι sind Homöomorphismen (Ü). Also ist der topologische Raum $(M, \mathcal{T})$ m -dim *lokal euklidisch*. Weiter folgt, daß $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{C}^k$ -differenzierbarer Atlas ist. $\square$

Man kann auch Kriterien angeben, wann eine *Mannigfaltigkeit* vorliegt:

Zusatz 1.4. (i) Die Topologie $\mathcal{T}$ ist *Hausdorffsch*, wenn je zwei Punkte in M in einer gemeinsamen Teilmenge U_ι enthalten sind oder in zwei disjunkten U_ι 's (Ü). Nicht notwendig!

(ii) $\mathcal{T}$ hat eine *abzählbare Basis*, wenn M von abzählbar vielen U_ι 's überdeckt wird.

Beweis: Ü $\square$

Das folgende ist ein natürliches und wichtiges Beispiel für eine „abstrakte“ Mannigfaltigkeit im Sinne, daß sie keine bevorzugte Einbettung in einen euklidischen Raum besitzt.

Beispiel. (i) *Reell-projektive Räume.* Der d -dim *reell-projektive Raum* $\mathbb{R}P^d$ ist die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^{d+1}$ durch den Ursprung, dh als die Menge der 1-dim linearen Unterräume. Dem Punkt $\mathbb{R}x \in \mathbb{R}P^d$ repräsentiert von $x \in \mathbb{R}^{d+1} - \{0\}$ ordnet man die *homogenen Koordinaten*

$$[x] = [x_0 : \dots : x_d]$$

zu. Sie sind eindeutig bis auf Skalierung:

$$[x] = [x'] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \text{ so daß } x' = \lambda x$$

Wir betrachten nun für $i = 0, \dots, d$ die wohldefinierten Bijektionen,

$$U_i := \{[x] \in \mathbb{R}P^d \mid x_i \neq 0\} \xrightarrow{\kappa_i} \{x_i = 1\} \cong \mathbb{R}^d, \quad [x_0 : \dots : x_d] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_d}{x_i} \right)$$

genannt *affine Karten*, mit den Umkehrabbildungen

$$[y_1 : \dots : y_i : \underbrace{1}_{\textcircled{1}} : y_{i+1} : \dots : y_d] \leftarrow (y_1, \dots, y_d).$$

Wir überprüfen, daß die Familie der Abbildungen κ_i die Voraussetzungen von Satz 1.3 erfüllt. Dazu stellen wir fest, daß $\kappa_i(U_i) =: V_i = \mathbb{R}^d$, also sicherlich offen in $\mathbb{R}^d$ ist, und daß $\mathbb{R}P^d$ von den U_i überdeckt wird. Weiter sind für $i \neq j$ die Definitionsbereiche $\{x_i = 1 \wedge x_j \neq 0\} \subset \{x_i = 1\}$ der Übergangsabbildungen $\kappa_j \circ \kappa_i^{-1}$ Komplemente von Hyperebenen, also auch offen, und die $\kappa_j \circ \kappa_i^{-1}$ sind als rationale Abbildungen glatt. Also induziert dieser Atlas eine d -dim lokal euklidische Topologie mit abzählbarer Basis auf $\mathbb{R}P^d$ zusammen mit einer glatten Struktur. Man verifiziert leicht (Ü), daß die Topologie auch Hausdorffsch ist. Damit wird $\mathbb{R}P^d$ so zu einer d -dim *glatten Mannigfaltigkeit*.

Für *Verklebekonstruktionen* nützlich ist die folgende Verallgemeinerung des Satzes, die man mit denselben Argumenten erhält:

Verallgemeinerung. Die Aussagen von 1.3 und 1.4 gelten auch, wenn die V_i $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten und die κ_i $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismen sind.

Ü *Stereographische Projektion*, um einen Atlas für die $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur der Einheitssphäre $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ anzugeben.

Ü *Quotienten unter freien Operationen endlicher Gruppen*. (i) Es sei M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit und $G \curvearrowright M$ eine freie $\mathcal{C}^k$ -Operation einer endlichen Gruppe G . Dann ist der Bahnenraum M/G eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit und die Quotientenprojektion $\pi : M \rightarrow M/G$ ein lokaler $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus. (ii) Ist $\{\pm 1\} \curvearrowright S^d$ die Operation der Gruppe $\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf der Einheitssphäre $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, bei der -1 durch die Antipodeninvolution $-\text{id}_{\mathbb{R}^{d+1}}|_{S^d} : x \mapsto -x$ operiert, so ist die natürliche Abbildung $S^d/\{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}P^d$ ein $\mathcal{C}^\infty$ -Diffeomorphismus.

Ü Komplex- und quaternionale projektive Räume, Graßmann-Mannigfaltigkeiten, Stiefel-Mannigfaltigkeiten.

Ü Verklebekonstruktionen, zB zusammenhängende Summen.

Ü Nicht-Hausdorff-Tripoden und Blätterungen. Lange Gerade.

2 Tangentialbündel und Differential

Wir *approximieren* nun *differenzierbare Mannigfaltigkeiten* lokal durch Vektorräume, indem wir den Begriff des Tangentialraums an eine Untermannigfaltigkeit adaptieren. (Die Diskussion kann genauso für *lokal euklidische Räume* mit differenzierbaren Strukturen geführt werden.)

Sei M^m eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit.

Wir betrachten $\mathcal{C}^1$ -Kurven $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ durch einen Punkt $p \in M$. Wir sagen, daß zwei solche Kurven $c_i : (-\epsilon_i, \epsilon_i) \rightarrow M$ durch p in $t = 0$ *erster Ordnung übereinstimmen*, falls für eine

Karte¹ (U, x) in p gilt, daß $(x \circ c_1)'(0) = (x \circ c_2)'(0)$. Dies ist unabhängig von der Karte, denn nach der Kettenregel (für Abbildungen zwischen offenen Teilmengen euklidischer Räume) gilt

$$(\tilde{x} \circ c_i)'(0) = d(\tilde{x} \circ x^{-1})_{x(p)} \circ (x \circ c_i)'(0). \quad (2.1)$$

Eine Äquivalenzklasse in $t = 0$ erster Ordnung übereinstimmender Kurven nennt man einen *1-Jet* von Kurven durch p . Wir bezeichnen den von einer Kurve c repräsentierten 1-Jet mit $[c]$.

Definition (Tangentialvektoren, -räume und bündel). (i) Ein *Tangentialvektor* an M in $p \in M$ ist ein 1-Jet von Kurven durch p .

(ii) Der *Tangentialraum* $T_p M$ an M in p ist die Menge aller Tangentialvektoren in p .

(iii) Das *Tangentialbündel* an M ist die disjunkte Vereinigung $TM = \sqcup_{p \in M} T_p M$ zusammen mit der Fußpunktprojektion $\pi = \pi_{TM} : TM \rightarrow M$.

Die Tangentialräume an die verschiedenen Punkte einer Mannigfaltigkeit sind also *disjunkt*.

Sie tragen natürliche *lineare Strukturen*. Denn weil die Differentiale $d(\tilde{x} \circ x^{-1})_{x(p)}$ der Kartenwechsel lineare Automorphismen sind, existiert angesichts (2.1) sowie der Kettenregel auf $T_p M$ eine eindeutige Struktur als m -dim Vektorraum, so daß die Bijektionen

$$T_p M \xrightarrow{1:1} \mathbb{R}^m, \quad [c] \mapsto (x \circ c)'(0) \quad (2.2)$$

für alle Karten x in p lineare Automorphismen sind.

Jede Karte x zeichnet die *Basis* des Tangentialraums $T_p M$ aus, die aus den *Koordinatenrichtungen*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p := [t \mapsto x^{-1}(x(p) + te_i)] \in T_p M$$

bzgl x besteht, unter der Identifikation (2.2) also in die Standardbasis (e_i) von $\mathbb{R}^m$ übergeht. Die Notation reflektiert, daß Tangentialvektoren *Richtungsableitungen* entsprechen, hier den partiellen Ableitungen bzgl der lokalen Koordinaten x . Wir nennen $(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)$ die *Standardbasis* von $T_p M$ bzgl der Karte x in p . Bzgl ihrer hat ein allgemeiner Tangentialvektor $[c] \in T_p M$ angesichts $(x \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^m (x_i \circ c)'(0) \cdot e_i$ die Darstellung

$$[c] = \sum_{i=1}^m (x_i \circ c)'(0) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \quad (2.3)$$

Eine Karte (U, x) für M induziert, indem man die Identifikationen (2.2) in den verschiedenen Punkten von U zusammennimmt, insgesamt eine *Karte*

$$Tx : TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p M \xrightarrow{1:1} x(U) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}, \quad [c] \mapsto ((x \circ c)(0), (x \circ c)'(0)) \quad (2.4)$$

für den entsprechenden Teil TU von TM .

Ist $(\tilde{U}, \tilde{x})$ eine weitere Karte, so ist der *Kartenwechsel*

$$T\tilde{x} \circ (Tx)^{-1} : x(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{1:1} \tilde{x}(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^m \quad (2.5)$$

¹Wir bezeichnen Karten jetzt im Sinne lokaler Koordinaten suggestiver mit (U, x) .

auf dem Tangentialbündel gegeben durch

$$\begin{aligned} ((x \circ c)(0), (x \circ c)'(0)) &\mapsto ((\tilde{x} \circ c)(0), (\tilde{x} \circ c)'(0)) \\ &= ((\tilde{x} \circ x^{-1})((x \circ c)(0)), d(\tilde{x} \circ x^{-1})_{(x \circ c)(0)}((x \circ c)'(0))), \end{aligned}$$

vgl (2.1). Bezeichnen wir suggestiver die Koordinaten der Punkte in M bzgl der beiden Karten mit x bzw $\tilde{x}$ und den Koordinatenwechsel zwischen ihnen mit $\tilde{x}(x)$, so nimmt der Koordinatenwechsel auf dem Tangentialbündel die Form

$$(x, v) \mapsto (\tilde{x}(x), d\tilde{x}_x(v)) \quad (2.6)$$

an. Das Differential $d\tilde{x}$ von $\tilde{x}(x)$, einer Abbildung offener Teilmengen euklidischer Räume, ist expliziter gegeben durch

$$d\tilde{x}_x(v) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}(x) \right) e_i. \quad (2.7)$$

Insbesondere kann man hieraus den *Basiswechsel* in den Tangentialräumen ablesen. Weil die Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x_j}$ bzgl T_x Vektorkoordinate $v = e_j$ haben, und entsprechend $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$ bzgl $T_{\tilde{x}}$, gilt²

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}(x(p)) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \Big|_p \quad \text{bzw} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}. \quad (2.8)$$

Die induzierten Kartenwechsel $T\tilde{x} \circ (Tx)^{-1}$ auf dem Tangentialbündel sind $\mathcal{C}^{k-1}$, wie (2.7) zeigt, denn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}(x)$ der $\mathcal{C}^k$ -Kartenwechsel $\tilde{x}(x)$ auf M sind $\mathcal{C}^{k-1}$. Es folgt mit Satz 1.3 und Zusatz 1.4, daß die Familie der Karten T_x auf der Menge TM eine natürliche Struktur als $2m$ -dim $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit induziert. (TM erbt von M die Existenz abzählbarer Basen für seine Topologie. Die Hausdorff-Eigenschaft ist für TM ebenfalls erfüllt, weil je zwei Punkte entweder in einer gemeinsamen oder in zwei disjunkten Karten liegen.) Die Fußpunktprojektion $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$ hat in lokalen Koo die Form $(x, v) \mapsto x$, ist also $\mathcal{C}^{k-1}$.

Im Fall einer *offenen Teilmenge* $W \subset \mathbb{R}^m$, die wir als $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit auffassen, werden die Identifikationen (2.2) von Tangentialräumen mittels der natürlichen globalen Karte id_W zu linearen Isomorphismen

$$T_p W \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m, \quad [c] \mapsto c'(0)$$

und die Bündelkarte (2.4) zum $\mathcal{C}^\infty$ -Diffeomorphismus

$$TW = \bigsqcup_{p \in W} T_p W \longrightarrow W \times \mathbb{R}^m, \quad [c] \mapsto (c(0), c'(0)). \quad (2.9)$$

Das *Standardbasenfeld* für TW ist jetzt gegeben durch:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x = [t \mapsto x + te_i] \in T_x W \quad (2.10)$$

Jetzt *approximieren* wir *differenzierbare Abbildungen* von Mannigfaltigkeiten lokal durch lineare Abbildungen ihrer Tangentialräume, indem wir den Begriff des Differentials von Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten anpassen.

²In (2.8) ist $\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}$ eine Kurznotation für die partielle Ableitung $\frac{\partial(\tilde{x}_i \circ x^{-1})}{\partial x_j}$ des Kartenwechsels $\tilde{x} \circ x^{-1}$.

Eine differenzierbare Abbildung $F : M \rightarrow N$ von $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten induziert eine natürliche Abbildung

$$TM \xrightarrow{dF} TN, \quad [c] \mapsto [F \circ c]$$

ihrer Tangentialbündel. Diese ist wohldefiniert, dh der 1-Jet $[F \circ c]$ hängt nur vom 1-Jet $[c]$ ab, denn für lokale Karten (U, x) in $c(0)$ und (U', y) in $F(c(0))$ gilt

$$(y \circ (F \circ c))'(0) = d(y \circ F \circ x^{-1})_{c(0)}((x \circ c)'(0)) \quad (2.11)$$

Definition (Differential). dF heißt das *Differential* von F .

Das Differential bildet Tangentialräume linear auf Tangentialräume ab,

$$dF_p := dF|_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N,$$

wobei sich die Linearität angesichts (2.11) aus der Linearität der Identifikationen (2.2) für x und y sowie der Differentiale der lokalen Koordinatendarstellungen $y \circ F \circ x^{-1}$ ergibt. Das Differential dF ist also eine *Familie linearer Abbildungen* dF_p von Tangentialräumen, der Differentiale von F in den Punkten $p \in M$.

Im Fall von Abbildungen *offener Teilmengen euklidischer Räume* ist das Differential mit dem früher eingeführten Differential konsistent, denn dieses bildet $c'(0) \mapsto (F \circ c)'(0)$ ab.

Für *Kompositionen* $G \circ F$ differenzierbarer Abbildungen gilt die *Kettenregel*

$$d(G \circ F) = dG \circ dF,$$

denn

$$d(G \circ F)([c]) = [G \circ F \circ c] = dG([F \circ c]) = dG(dF([c])).$$

Für die *Identität* $\text{id}_M : M \rightarrow M$ gilt

$$d\text{id}_M = \text{id}_{TM},$$

und das Differential der *Umkehrabbildung* eines Diffeomorphismus $F : M \rightarrow N$ ist die Umkehrung seines Differentials,

$$d(F^{-1}) = (dF)^{-1}.$$

Nachdem wir den Begriff des Differentials nun allgemein für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten eingeführt haben, stellen wir fest, daß die Bündelkarten (2.4) $Tx : TU \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^m$ modulo der natürlichen Identifikation (2.9) $T(x(U)) \cong x(U) \times \mathbb{R}^m$ mit den Differentialen $dx : TU \rightarrow T(x(U)), [c] \mapsto [x \circ c]$ der Kartenabbildungen übereinstimmen; insbesondere ist die Identifikation (2.2) des Tangentialraums das Differential dx_p .

Im Einklang hiermit stimmen die Bündelkartenwechsel (2.5) $T\tilde{x} \circ (Tx)^{-1}$ modulo der Identifikationen (2.9) mit den Differentialen $T(x(U)) \rightarrow T(\tilde{x}(U)), [x \circ c] \mapsto [\tilde{x} \circ c]$ der Kartenwechsel auf M überein und (2.6) ist das Differential $d\tilde{x}$ des Koordinatenwechsels $\tilde{x}(x)$.

Wir sehen: *Die induzierten Karten für TM sind also die Differentiale der Karten für M , und die Kartenwechsel auf TM sind die Differentiale der Kartenwechsel auf M .*

Wir stellen noch Differentiale in *lokalen Koordinaten* dar. Sei wieder $F : M \rightarrow N$ differenzierbar. Weil sich unter den Identifikationen (2.2) die Standardbasen der Tangentialräume $T_p M$ bzw. $T_{F(p)} N$ und der euklidischen Räume $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$ entsprechen, ist das Differential dF_p relativ zu den Standardbasen der Tangentialräume durch die Jacobi-Matrix der lokalen Koordinatendarstellung von F gegeben,

$$dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial(y_i \circ F \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p))}_{\frac{\partial y_i}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{F(p)}. \quad (2.12)$$

Dies verallgemeinert (2.8). Wir bezeichnen hier die lokalen Koordinaten auf M bzw. N mit x bzw. y und die lokale Koordinatendarstellung von F kurz mit $y(x)$. Die lokale Koordinatendarstellung $Ty \circ dF \circ Tx^{-1}$ des Differentials bzgl. der induzierten Bündelkarten stimmt modulo der Identifikationen (2.9) für M und N mit dem Differential dy von $y(x)$ überein und hat die Form

$$(x, v) \xrightarrow{dy} \left(y(x), \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x) \right) e_i}_{dy_x(v)} \right), \quad (2.13)$$

vgl. (2.6) und (2.7). Wir sehen insbesondere, daß Differentiale von $\mathcal{C}^k$ -Abbildungen $\mathcal{C}^{k-1}$ sind.

Dieselbe Form (2.13) hat auch das Differential einer differenzierbaren Abbildung $y(x)$ offener Teilmengen euklidischer Räume.

Die *Ableitung* oder *Geschwindigkeit* einer differenzierbaren *Kurve* $c : I \rightarrow M$ ist gegeben durch

$$c'(\tau) := [c(\cdot + \tau)] \in T_{c(\tau)} M,$$

wobei $c(\cdot + \tau) : t \mapsto c(t + \tau)$ die durch Zeitverschiebung reparametrisierte Kurve meint. Sie ist das Bild des Standardvektorfelds $\tau \mapsto \frac{\partial}{\partial t} \Big|_\tau = [t \mapsto \tau + t] \in T_\tau I \cong T_\tau \mathbb{R}$ auf I unter dem Differential der Kurve,

$$c'(\tau) = dc_\tau \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_\tau \right). \quad (2.14)$$

3 Totales Differential, 1-Formen und Kotangentialbündel

Sei M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit.

Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so nennt man ihr Differential $df : TM \rightarrow T\mathbb{R}$ auch das *totale Differential* von f . Es ist eine Familie linearer Abbildungen $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ für $p \in M$, die man mittels der natürlichen Identifikationen $T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ als *Linearformen*

$$T_p M \xrightarrow{df_p} \mathbb{R}$$

auf den Tangentialräumen, also Elemente von deren Dualräumen auffassen kann, $df_p \in (T_p M)^*$. Hier tritt auf natürliche Weise das zum Tangentialbündel duale Vektorbündel³ auf:

Definition (Kotangentialräume und -bündel). (i) Der Dualraum $T_p^* M := (T_p M)^*$ heißt der *Kotangentialraum* an M in p .

(ii) Das *Kotangentialbündel* an M ist die disjunkte Vereinigung $T^* M = \sqcup_{p \in M} T_p^* M$ zusammen mit der Fußpunktprojektion $\pi = \pi_{T^* M} : T^* M \rightarrow M$.

Das totale Differential df kann dann als Abbildung $M \rightarrow T^* M$ aufgefaßt werden. Weil die Werte $df_p \in T_p^* M$ „über“ den Punkten $p \in M$ liegen, anders ausgedrückt, weil

$$\pi_{T^* M} \circ df = \text{id}_M,$$

spricht man von einem *Schnitt* des Bündels.⁴ Allgemein definiert man:

Definition (1-Form). Eine *Differentialform vom Grad 1*, kurz eine *1-Form*, auf M ist ein *Schnitt* des Kotangentialbündels $\pi_{T^* M}$, dh eine Abbildung $\alpha : M \rightarrow T^* M$ mit $\pi_{T^* M} \circ \alpha = \text{id}_M$.

Eine 1-Form α ist also eine Familie von Linearformen $\alpha_p := \alpha(p)$ auf den Tangentialräumen.

Totale Differentiale sind 1-Formen.

Das totale Differential df einer differenzierbaren Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist per Definition gegeben durch

$$df([c]) = [f \circ c] = (f \circ c)'(0), \quad (3.1)$$

wobei wir wieder die Identifikation $T_{(f \circ c)(0)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ verwenden. Anhand dieser Darstellung (3.1) werden die folgenden grundlegenden *Rechenregeln* für totale Differentiale ersichtlich. Für differenzierbare Funktionen f_i, f, g und Skalare $c_i \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) *$\mathbb{R}$ -Linearität:* $d(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 df_1 + c_2 df_2$

(ii) *Produktregel:* $d(fg) = (df)g + f(dg)$

Das Kotangentialbündel erbt von M ebenfalls eine Struktur als differenzierbare *Mannigfaltigkeit*, indem Karten für M entsprechende Karten für $T^* M$ induzieren.

Sei (U, x) eine Karte für M in p . Dual zu den linearen Identifikationen (2.2) $T_p M \xrightarrow{dx_p} \mathbb{R}^m$ bestehen die linearen Identifikationen

$$dx_p^* : (\mathbb{R}^m)^* \xrightarrow{\cong} T_p^* M, \quad \lambda \mapsto d(\lambda \circ x)_p \quad (3.2)$$

durch Zurückziehen, denn $d(\lambda \circ x)_p = d\lambda_{x(p)} \circ dx_p$ wegen der Kettenregel und $d\lambda_{x(p)} = \lambda$, da λ eine lineare Funktion ist. (Die Funktion $\lambda \circ x$ und ihr totales Differential sind nur lokal auf dem Kartengebiet erklärt.) Wir bestätigen (3.2) noch ergänzend durch die Rechnung

$$((dx_p^*)\lambda)([c]) = (\lambda \circ dx_p)([c]) = \lambda(dx_p([c])) \stackrel{(2.2)}{=} \lambda((x \circ c)'(0)) = \underbrace{(\lambda \circ x \circ c)'(0)}_{= ((\lambda \circ x) \circ c)'(0)} \stackrel{(3.1)}{=} d(\lambda \circ x)_p([c]).$$

³Darunter versteht man, grob gesagt, eine „stetige“ Familie von Vektorräumen gleicher endlicher Dimension.

⁴Geometrisch stellt man sich die *Fasern* des Bündels, dh die Vektorräume $T_p^* M$, *vertikal* vor, und $\pi_{T^* M}$ als vertikale Projektion des *Totalraums* TM auf die *Basis* M des Bündels.

Insbesondere $e_i^* \xrightarrow{dx_p^*} (dx_i)_p$ für die zur Standardbasis (e_i) von $\mathbb{R}^m$ duale Standardbasis (e_i^*) von $(\mathbb{R}^m)^*$. Folglich ist $((dx_i)_p)$ die zur Basis $(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)$ von $T_p M$ *duale Basis* von $T_p^* M$, genannt die *Standardbasis* von $T_p^* M$ *relativ* zur Karte x in p . In der Tat gilt

$$(dx_j)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) = \delta_{ij}.$$

Hier bezeichnen wir mit x_j sowohl die Koordinatenfunktionen auf U als auch diejenigen auf $x(U)$, die sich aus ihnen durch Komposition mit x^{-1} ergeben.⁵

Bzgl der Standardbasen der Kotangentialräume, gegeben durch die auf dem Kartengebiet definierten Differentiale dx_i der Koordinatenfunktionen, hat eine allgemeine 1-Form α auf M lokal die Darstellung

$$\alpha|_U = \sum_{i=1}^m a_i dx_i \quad (3.3)$$

mit Koeffizientenfunktionen $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Totale Differentiale lassen sich in lokalen Koordinaten schreiben als

$$df|_U = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_i} \circ x \right) dx_i, \quad (3.4)$$

vgl (2.12), denn $df_p(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ x^{-1})(x(p) + te_i) = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p))$.

Die Karte (U, x) induziert nun durch faserweises Zurückziehen dual zur Karte (2.4) für TM eine *lokale Parametrisierung*

$$T^*x : x(U) \times (\mathbb{R}^m)^* \xrightarrow{\cong} T^*U = \bigsqcup_{p \in U} T_p^*M, \quad (x(p), \underbrace{\sum_{i=1}^m a_i e_i^*}_a) \mapsto \underbrace{\sum_{i=1}^m a_i (dx_i)_p}_{d(a \circ x)_p = dx_p^* a} \quad (3.5)$$

für den entsprechenden Teil T^*U von T^*M . Ihre Umkehrung $(T^*x)^{-1}$ ist eine lokale *Karte*.

Ist $(\tilde{U}, \tilde{x})$ eine weitere Karte für M , so hat man dual zum Basiswechsel (2.8) der Tangentialräume den *Basiswechsel*

$$d\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x \right) dx_j \quad (3.6)$$

der Kotangentialräume, denn $d\tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_j} = d\tilde{x}_i (\sum_{l=1}^m (\frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_j} \circ x) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l}) = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x$.

Dual zum Kartenwechsel (2.5) auf dem Tangentialbündel haben wir den *Kartenwechsel*

$$(T^*\tilde{x})^{-1} \circ T^*x : x(U \cap \tilde{U}) \times (\mathbb{R}^m)^* \xrightarrow{\cong} \tilde{x}(U \cap \tilde{U}) \times (\mathbb{R}^m)^* \quad (3.7)$$

auf dem Kotangentialbündel dual zu (2.6) und (2.7) gegeben durch

$$(x(p), a) \mapsto \sum_{i=1}^m a_i (dx_i)_p \stackrel{(3.6)}{=} \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}(p)) \right) (d\tilde{x}_j)_p \mapsto \underbrace{\left(\tilde{x}(p), \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}(p)) \right) e_j^* \right)}_{\substack{= \frac{\partial(a \circ x)}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}(p)) \\ = d(a \circ x)_{\tilde{x}(p)} = d(x^* a)_{\tilde{x}(p)}}},$$

⁵Es ist dx_j das totale Differential der Koordinatenfunktion x_j auf U , während $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$ eine Kurznotation für die partielle Ableitung der Koordinatenfunktion $x_j \circ x^{-1}$ auf $x(U)$ ist.

wobei $a = \sum_i a_i x_i$ als lineare Funktion auf $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ angesehen wird und die Funktion $(a \circ x)(\tilde{x}) = (x^*a)(\tilde{x})$ auf $\tilde{x}(U)$ ihre Verknüpfung (Rückzug) mit dem Kartenwechsel $x(\tilde{x})$, also ihre lokale Darstellung als Funktion der Koordinaten $\tilde{x}$, bedeutet.⁶

Also

$$(x, a) \mapsto (\tilde{x}(x), d(x^*a)_{\tilde{x}(x)}).$$

Wie im Fall des Tangentialbündels folgt, daß der Atlas auf T^*M bestehend aus den Karten $(T^*x)^{-1}$ eine Struktur als $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit erzeugt. Die Fußpunktprojektion π_{T^*M} ist $\mathcal{C}^{k-1}$.

Ist $W \subset \mathbb{R}^m$ offen so lassen sich 1-Formen α auf W als Linearkombinationen

$$\alpha = \sum_{i=1}^m a_i dx_i,$$

der totalen Differentiale dx_i der Koordinatenfunktionen ausdrücken, und totale Differentiale lassen sich schreiben als

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

vgl (3.3) und (3.4).

Ü Explizite Rechnungen mit totalen Differentialen in Koordinaten, zB Polarkoordinaten.

Pull-back. Mit differenzierbaren Abbildungen kann man 1-Formen *zurückziehen*. Ist nämlich $F : M^m \rightarrow N^n$ differenzierbar, so induzieren die Differentiale $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ duale lineare Rückzugs-Abbildungen

$$dF_p^* : T_{F(p)}^* N \longrightarrow T_p^* M. \quad (3.8)$$

Indem man diese punktweise anwendet, kann man 1-Formen α auf N zu 1-Formen $F^*\alpha$ auf M zurückziehen,

$$(F^*\alpha)_p = dF_p^* \alpha_{F(p)} = \alpha_{F(p)} \circ dF_p. \quad (3.9)$$

In *lokalen Koordinaten*, mit Notation wie oben, hat $F^*dy_i = dy_i \circ dF$ die lokale Darstellung

$$F^*dy_i = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \circ x \right) dx_j, \quad (3.10)$$

denn wegen (2.12) gilt $(F^*dy_i)(\frac{\partial}{\partial x_j}) = dy_i(dF(\frac{\partial}{\partial x_j})) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \circ x$. Dies verallgemeinert (3.6).

3.1 Integration von 1-Formen längs Kurven

Die Operation des totalen Differentials auf Funktionen wird umgekehrt durch das *Wegintegral*.

Sei M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$ -Funktion. Man kann die Funktion f auf jeder Zusammenhangskomponente von M bis auf additive Konstante aus ihrem totalen Differential df zurückgewinnen, indem man dieses geeignet *aufintegriert*. Sind nämlich $p, q \in M$ Punkte in derselben Zusammenhangskomponente, so können wir sie durch eine $\mathcal{C}^1$ -Kurve $c :$

⁶Hier ist $a \circ x$ eine Kurznotation für $a \circ (x \circ \tilde{x}^{-1})$.

$I = [a, b] \rightarrow M$ verbinden, also $c(a) = p$ und $c(b) = q$. Mit dem „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“ können wir dann die Differenz der Werte in diesen Punkten darstellen als

$$f|_p^q = f \circ c|_a^b = \int_a^b (f \circ c)'(t) dt = \int_a^b df_{c(t)}(c'(t)) dt, \quad (3.11)$$

also als das Integral des totalen Differentials längs einer Verbindungskurve im folgenden Sinne.

Für eine beliebige stetige⁷ 1-Form α auf M ist es natürlich, ihr *Integral längs einer $\mathcal{C}^1$ -Kurve* $c : I = [a, b] \rightarrow M$ zu definieren als

$$\int_c \alpha := \int_I \alpha(c') dt = \int_I \alpha_{c(t)}(c'(t)) dt. \quad (3.12)$$

Der letzte Integrand ist stetig. Man nennt ein solches Integral $\int_c \alpha$ ein *Kurven- oder Wegintegral*.

Wie schon (3.11) nahelegt, ist das Wegintegral *invariant unter orientierungserhaltender Reparametrisierung*: Ist $\phi : \tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow I$ $\mathcal{C}^1$ mit $\phi(\tilde{a}) = a$ und $\phi(\tilde{b}) = b$, zB ein monoton wachsender $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus, so erhalten wir für das Integral von α längs der Kurve $\tilde{c} = c \circ \phi$ mit der Substitutionsregel:

$$\int_{\tilde{c}} \alpha = \int_{\tilde{I}} \alpha_{\tilde{c}(\tilde{t})}(\tilde{c}'(\tilde{t})) d\tilde{t} = \int_{\tilde{I}} \alpha_{c(\phi(\tilde{t}))}(c'(\phi(\tilde{t}))) \phi'(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_I \alpha_{c(t)}(c'(t)) dt = \int_c \alpha$$

Diese Invarianz ermöglicht es, das Integral

$$\int_C \alpha$$

einer stetigen 1-Form α auf M über eine 1-dim Untermannigfaltigkeit $C \subset M$, zB einen eingebetteten Kreis, zu definieren, indem man letztere in Bögen aufteilt, diese parametrisiert und die resultierenden Wegintegrale bildet und aufsummiert. Wir werden dies später in größerer Allgemeinheit (für Integrale von Differentialformen beliebigen Grades über Untermannigfaltigkeiten der entsprechenden Dimension) genauer ausführen.

Wegen $c' = dc(\frac{\partial}{\partial t})$ und $\alpha(c') = (\alpha \circ dc)(\frac{\partial}{\partial t}) = (c^* \alpha)(\frac{\partial}{\partial t})$, vgl (2.14) und (3.9), können wir das Wegintegral auch schreiben als

$$\int_c \alpha = \int_{\text{id}_I} c^* \alpha.$$

Im Spezialfall $c = \text{id}_I$ und einer 1-Form $\alpha = g dt$ auf $I \subset \mathbb{R}$ wird die Definition des Wegintegrals zu

$$\int_{\text{id}_I} g dt = \int_I g dt,$$

dh das Wegintegral $\int_{\text{id}_I} g dt$ der 1-Form $g dt$ ist das Integral $\int_I g dt$ der Funktion g .

Das Wegintegral verhält sich gut unter *differenzierbaren Abbildungen*: Ist $F : M \rightarrow N$ $\mathcal{C}^1$ und β eine stetige 1-Form auf N , so gilt

$$\int_{F \circ c} \beta = \int_c F^* \beta,$$

⁷Eine 1-Form ist stetig, wenn ihre Koeffizientenfunktionen bzgl lokaler Koordinaten stetig sind.

denn $\beta((F \circ c)') = (\beta \circ dF)(c') = (F^*\beta)(c')$, alternativ, $(F \circ c)^*\beta = c^*(F^*\beta)$.

Ü Berechne das Wegintegral der 1-Form $\frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ längs des im positiven Sinn durchlaufenen Einheitskreises.

Bem/Ü Eine 1-Form heißt *exakt*, falls sie das totale Differential einer Funktion ist. Diese nennt man dann ein *Potential* der 1-Form. (i) Eine 1-Form ist genau dann exakt, wenn ihre Wegintegrale nur von den Endpunkten der Integrationswege abhängen. (ii) In Dim 1 sind alle 1-Formen exakt (1-dim Poincaré-Lemma).

Ergänzen: *Untermannigfaltigkeit* einer Mannigfaltigkeit. Tangentialbündel ist Untervektorbündel.

4 Höhere Differentialformen

Sei M^m eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit.

1-Formen auf M sind Familien von Linearformen auf den Tangentialräumen, und sie treten natürlich auf als totale Differentiale von Funktionen.

Auch Familien anderer Typen von „Lineare Algebra-Objekte“, dh *Tensoren*, auf den Tangentialräumen treten in der Geometrie natürlich auf. Für uns relevant sind Familien *alternierender Multilinearformen*, die sog *Differentialformen*. Ein anderes wichtiges Beispiel aus der Differentialgeometrie, das hier nicht diskutiert wird, sind Familien von *Skalarprodukten* auf den Tangentialräumen, die sog *Riemannschen Metriken*. Diese Familien von Tensoren bzw Formen nehmen ihre Werte in entsprechenden *Vektorbündeln* über M an, die aus dem Tangentialbündel TM hervorgehen, indem faserweise auf die Tangentialräume $T_p M$ eine bestimmter Funktor, also eine Konstruktion der (Multi)Linearen Algebra angewandt wird. So entsteht das Kotangenti-
albündel durch die faserweise Bildung des Dualraums.

Ein wichtiger Grund, um Familien *alternierender* Multilinearformen zu betrachten, ist, daß diese eine Volumenmessung (in der ihrem Grad entsprechenden intermediären Dimension) induzieren und in natürlicher Weise über Untermannigfaltigkeiten *integriert* werden können.

Für $0 \leq r \leq m$ betrachtet man das Vektorbündel

$$\Lambda^r TM := \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^r T_p M \xrightarrow{\pi} M,$$

die sog *r-te äußere Potenz* von T^*M . Seine Fasern $\Lambda^r T_p M \cong \Lambda_r T_p^* M \cong \text{Alt}_r(T_p M)$ sind die Vektorräume der alternierenden *r*-Linearformen auf den Tangentialräumen $T_p M$. Kombiniert man diese Bündel für alle *r*, so erhält man das *äußere Algebrenbündel*

$$\Lambda^* TM := \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^* T_p M \xrightarrow{\pi} M,$$

dessen Fasern $\Lambda^* T_p M = \oplus_{r=0}^m \Lambda^r T_p M$ die äußeren Algebren der Kotangentialräume $T_p^* M$ sind ($\rightarrow$ Multilin Alg). $\Lambda^0 TM = \underline{\mathbb{R}}$ ist das triviale Linienbündel und $\Lambda^1 TM = T^*M$ das Kotangenti-
albündel. Das i.a. nichttriviale Linienbündel $\Lambda^m TM$ nennt man das *Determinantenlinienbündel*.

Definition 4.1 (Differentialform). Eine *Differentialform* vom Grad r , kurz r -Form, auf M ist ein Schnitt des Bündels $\Lambda^r TM \rightarrow M$. Eine *gemischte* Differentialform ist ein Schnitt des Bündels $\Lambda^* TM \rightarrow M$.

Eine r -Form α ist also eine Familie alternierender r -Linearformen $\alpha_p := \alpha(p)$ auf den Tangentialräumen $T_p M$.

Die *algebraische Operationen* auf alternierenden Multilinearformen, also Addition und $\wedge$ -Multiplikation, übertragen sich auf Formen, indem man sie punktweise ausführt,

$$(\alpha + \beta)_p := \alpha_p + \beta_p, \quad (\alpha \wedge \beta)_p := \alpha_p \wedge \beta_p.$$

Die Struktur von M als $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit induziert auf $\Lambda^r TM$ wiederum eine Struktur als $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit. Ist (U, x) eine Karte für M , so sind die punktweisen Dachprodukte $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ für $i_1 < \dots < i_r$ r -Formen auf U und bilden ein *lokales Basenfeld* für das eingeschränkte Bündel $\Lambda^r TM|_U = \sqcup_{p \in U} \Lambda^r T_p M \rightarrow U$, das durch die Karte ausgezeichnete *Standardbasenfeld*. Relativ zu ihm hat eine allgemeine r -Form α auf M die *lokale Koordinatendarstellung*

$$\alpha|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_r} a_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

mit Koeffizientenfunktionen $a_{i_1 \dots i_r}$. In Verallgemeinerung von (3.5) liefern die Karten (U, x) lokale Parametrisierungen $x(U) \times \Lambda^r \mathbb{R}^m \rightarrow \Lambda^r TU$ mit

$$(x(p), \sum a_{i_1 \dots i_r} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_r}^*) \mapsto \sum_{i_1 < \dots < i_r} a_{i_1 \dots i_r} (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r})_p,$$

für $\Lambda^r TM$. Ihre Umkehrungen sind Karten für die Struktur von $\Lambda^r TM$ als $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit, analog für $\Lambda^* TM$.

Ist $W \subset \mathbb{R}^m$ offen, so lassen sich r -Formen α auf W mit Hilfe der totalen Differentiale der Koordinatenfunktionen schreiben als

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_r} a_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Pull-back. Mit differenzierbaren Abbildungen kann man Differentialformen beliebiger Grade zurückziehen, vgl die Diskussion für 1-Formen in Kap 3. Ist wieder $F : M^m \rightarrow N^n$ differenzierbar, so setzen sich die linearen Rückzugsabbildungen (3.8) $dF_p^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ der Kotangentiräume fort zu *Homomorphismen*

$$dF_p^* : \Lambda^* T_{F(p)} N \longrightarrow \Lambda^* T_p M$$

der von ihnen erzeugten äußeren Algebren. Diese ziehen alternierende Multilinearformen $\alpha_{F(p)} \in \Lambda^r T_{F(p)} N$ auf $T_{F(p)} N$ zurück zu alternierenden Multilinearformen $dF_p^* \alpha_{F(p)} \in \Lambda^r T_p M$ auf $T_p M$,

$$(dF_p^* \alpha_{F(p)})(v_1, \dots, v_r) = \alpha_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_r))$$

für $v_i \in T_p M$. Wieder kann man durch punktweise Anwendung Differentialformen α auf N zu Differentialformen $F^* \alpha$ auf M zurückziehen,

$$(F^* \alpha)_p = dF_p^* \alpha_{F(p)}.$$

Das Dachprodukt wird dabei respektiert, dh es vertauscht mit dem Rückzug,

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^* \alpha) \wedge (F^* \beta)$$

für Differentialformen α, β auf N .

In *lokalen Koordinaten* verallgemeinert (3.10) zu

$$\begin{aligned} F^*(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_r}) &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_r \leq m} \left(\left(\prod_{l=1}^r \frac{\partial y_{i_l}}{\partial x_{j_l}} \right) \circ x \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} \left(\det \left(\frac{\partial y_{i_s}}{\partial x_{j_t}} \right)_{s,t=1, \dots, r} \circ x \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r}. \end{aligned}$$

Im Fall $r = m = n$ vereinfacht sich die Formel zu

$$F^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m) = \left(\det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1, \dots, k} \circ x \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m. \quad (4.2)$$

Ü Beispiele für die Berechnung zurückgezogener Formen.

Bsp/Ü Volumenform auf der Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

5 Lokal-nach-global: Partition der Eins

Oft konstruiert man globale (stetige und differenzierbare) Objekte auf Mannigfaltigkeiten durch Interpolation bzw. *Verkleben* lokaler Objekte (zB Funktionen, Volumenformen, Riemannsche Metriken, Integrale von Differentialformen, s.u.). Als topologisches Hilfsmittel benötigt dafür man eine sog. *Partition der Eins*, dh eine Zerlegung der konstanten Einsfunktion als Summe lokal getragener (stetiger oder differenzierbarer) Funktionen.

Sei M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit.⁸

Definition (Partition der Eins). Eine $\mathcal{C}^k$ -*Partition der Eins* auf M ist eine Familie $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ von $\mathcal{C}^k$ -Funktionen $\varphi_\iota : M \rightarrow [0, 1]$, so daß gilt:

(i) Die Familie der Träger $(\text{supp } \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ ist lokal endlich, dh jedes Kompaktum in M schneidet nur endlich viele dieser Träger.

(ii) $\sum_\iota \varphi_\iota \equiv 1$. (Die Summe ist überall lokal endlich.)

Die Partition der Eins ist einer Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von M *untergeordnet*, falls eine Abbildung $\alpha : I \rightarrow A$ von Indexmengen existiert, so daß $\text{supp } \varphi_\iota \subset U_{\alpha(\iota)}$ für alle $\iota \in I$.

⁸Die Ergebnisse in diesem Abschnitt gelten mit denselben Argumenten allgemeiner für Mannigfaltigkeiten mit Rand oder mit Ecken.

Ziel dieses Kapitels ist es, zu zeigen:

Satz. Für jede offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von M existiert eine ihr untergeordnete $\mathcal{C}^k$ -Partition der Eins $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ mit kompakten Trägern $\text{supp } \varphi_\iota$ und abzählbarer Indexmenge I .

Die Existenz von Partitionen der Eins ist eine *topologische* Eigenschaft. Sie ist eine Konsequenz aus der Existenz abzählbarer Basen für die Topologie und wird aus der Existenz kompakter Ausschöpfungen abgeleitet, die wir zuerst beweisen.

Definition (Kompakte Ausschöpfung). Eine *kompakte Ausschöpfung* eines topologischen Raums X ist eine geschachtelte Folge relativ kompakter⁹ offener Teilmengen

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset \dots \subset X,$$

so daß $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$ für alle n und $\cup_n G_n = X$.

Proposition. Jede Mannigfaltigkeit läßt eine kompakte Ausschöpfung zu.

Beweis: Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie, so bilden die relativ kompakten Basismengen auch noch eine Basis. (Denn jede Umgebung jedes Punktes enthält eine kompakte Umgebung, und diese wiederum eine offene Umgebung, die eine Basismenge ist.) Es existiert also eine abzählbare Basis $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ für die Topologie bestehend aus relativ kompakten Teilmengen.

Wir konstruieren folgendermaßen induktiv eine aufsteigende Sequenz $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Indizes:

(i) Wir setzen $i_1 := 1$.

(ii) Sei i_n bereits bestimmt. Dann ist $G_n := \cup_{i=1}^{i_n} B_i$ relativ kompakt und wird daher von endlich vielen der B_i überdeckt. Wir wählen $i_{n+1} \geq i_n + 1$, so daß $\overline{G_n} \subset \cup_{i=1}^{i_{n+1}} B_i$.

Die Folge der Teilmengen G_n hat die gewünschten Eigenschaften. □

Bemerkung. Die Proposition gilt allgemeiner für *lokal-kompakte* topologische Räume, deren Topologie eine *abzählbare Basis* besitzt.¹⁰

Beweis des Satzes. Nach der Proposition läßt M eine kompakte Ausschöpfung (G_n) wie oben zu. Für jeden Punkt p im kompakten „Annulus“ $\overline{G_n} - G_{n-1}$ wählen wir eine offene Umgebung $V_p \subset G_{n+1} - \overline{G_{n-2}}$ und eine $\mathcal{C}^k$ -Funktion $\psi_p : M \rightarrow [0, \infty)$, so daß $\text{supp } \psi_p \subset V_p$ und $\psi_p(p) > 0$. Wegen Kompaktheit wird $\overline{G_n} - G_{n-1}$ von endlich vielen offenen Teilmengen $\{\psi_p > 0\}$ überdeckt. Es existiert daher eine abzählbare diskrete abgeschlossene Teilmenge $I \subset M$, die also mit jedem Kompaktum in M endlichen Durchschnitt hat, so daß $(\{\psi_p > 0\})_{p \in I}$ eine offene Überdeckung von M ist. Die Familie von Teilmengen $(V_p)_{p \in I}$ ist lokal endlich und

$$\psi := \sum_{p \in I} \psi_p$$

ist eine wohldefinierte und strikt positive $\mathcal{C}^k$ -Funktion. Die normalisierten Funktionen $\varphi_p := \frac{\psi_p}{\psi}$ bilden eine Partition der Eins mit kompakten Trägern.

⁹Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluß kompakt ist.

¹⁰Ein topologischer Raum heißt *lokal-kompakt*, wenn jede Umgebung eines Punktes eine kompakte Umgebung enthält. Ist der Raum Hausdorffsch, so genügt dazu, daß jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Um eine Partition der Eins zu erhalten, die einer offenen Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ untergeordnet ist, wählen wir jede Umgebung V_p so, daß sie in einer Teilmenge $U_{\alpha(p)}$ enthalten ist. $\square$

Ü (i) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie eines topologischen Raums und ist $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung, so bilden die Teilmengen $B \in \mathcal{B}$, die in einem U_α enthalten sind, ebenfalls eine Basis. (ii) Mannigfaltigkeiten besitzen abzählbare Überdeckungen durch Kartengebiete.

Ü Existenz von *Buckel- bzw. Abschneidefunktionen*. Es existieren $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen (i) $\phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $\phi(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $\phi(x) = 1$ für $x \geq 1$. (Dies wurde schon in Analysis I gezeigt, siehe Blatt 13, Aufgabe 4.) (ii) $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit $\psi(x) = 0$ für $\|x\| \geq 1$ und $\psi(x) = 1$ für $\|x\| \leq \frac{1}{2}$.

Ü Anwendungen: (i) *Approximation stetiger Funktionen durch differenzierbare*. Sind $g_1 < g_2$ stetige Funktionen auf einer $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M , so existiert eine $\mathcal{C}^k$ -Funktion f mit $g_1 < f < g_2$. (ii) Jede glatte Mannigfaltigkeit trägt glatte Riemannsche Metriken.

6 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

Der Begriff der Orientierung von Mannigfaltigkeiten beruht auf dem Begriff der Orientierung von Vektorräumen ($\rightarrow \text{LinAlg}$). Eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit ist, grob gesprochen, eine „stetige“ Familie von Orientierungen der Tangentialräume.

Sei M^m eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit.

Definition (Orientierung). Eine *Orientierung* von M ist eine Familie $o = (o_p)_{p \in M}$ von Orientierungen o_p der Tangentialräume $T_p M$, so daß für jede lokale Karte (U, x) das Vorzeichen der Orientierung der Standardbasis $(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)$ als Funktion von $p \in U$ lokal konstant ist.

Eine Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, falls sie eine Orientierung zuläßt.

Im 0-dim Fall besteht eine Orientierung aus der Wahl eines Vorzeichens $\pm$ in jedem Punkt.

In Dim $m = 1, 2$ ist eine Orientierung die Wahl einer *Richtung* bzw eines *Drehsinns*.

Die *Standard-Orientierung* von $\mathbb{R}^m$ als $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist diejenige, für die das Standardbasenfeld $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ überall positiv orientiert ist.

Wir nennen einen *lokalen Diffeomorphismus* orientierter Mannigfaltigkeiten *orientierungserhaltend*, wenn sein Differential punktweise orientierungserhaltend ist, dh positiv orientierte Basen von Tangentialräume wieder in solche abbildet.

Insbesondere nennen wir eine *Karte* einer orientierten Mannigfaltigkeit orientierungserhaltend, wenn sie es bzgl der Standard-Orientierung des euklidischen Modellraumes ist. Die orientierungserhaltenden $\mathcal{C}^k$ -Karten einer orientierten $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit bilden einen Unteratlas ihrer differenzierbaren Struktur, nämlich einen maximalen $\mathcal{C}^k$ -Atlas mit orientierungserhaltenden Kartenwechseln. Einen solchen Atlas nennt man eine *orientierte $\mathcal{C}^k$ -Struktur*.

Orientierungen können mit Hilfe von Volumenformen beschrieben werden.

Definition (Volumenform). Eine *Volumenform* auf M^m ist eine nirgends verschwindende m -Form ω auf M , dh für alle $p \in M$ ist $\omega_p \neq 0$ eine Volumenform auf $T_p M$.

Eine stetige Volumenform ω induziert eine Orientierung. Eine Basis (v_i) eines Tangentialraums $T_p M$ ist relativ zu ihr positiv orientiert, wenn

$$\omega_p(v_1, \dots, v_m) > 0.$$

Wir nennen die Volumenform *positiv* bzgl der von ihr induzierten Orientierung.

Zwei stetige Volumenformen ω, ω' induzieren dieselbe Orientierung genau dann, wenn $\omega' = f\omega$ mit einer (notwendigerweise stetigen) Funktion $f > 0$.

Die *Standard-Volumenform* $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ auf $\mathbb{R}^m$ induziert die *Standardorientierung*.

Proposition 6.1. Orientierungen von $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit werden immer von $\mathcal{C}^k$ -Volumenformen induziert.

Beweis: Sei M^m eine orientierte $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. Auf jeder Karte existiert eine Volumenform, welche die gegebene Orientierung induziert. Wir verkleben diese lokalen positiven Volumenformen mit Hilfe einer Partition der Eins zu einer globalen. Genauer sei $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ eine abzählbare $\mathcal{C}^k$ -Partition der Eins, so daß jede Funktion φ_ι von einem Kartengebiet getragen wird, und ω_ι seien lokale positive $\mathcal{C}^k$ -Volumenformen definiert auf offenen Umgebungen der Träger $\text{supp } \varphi_\iota$. Dann ist $\omega := \sum_\iota \varphi_\iota \omega_\iota$ eine wohldefinierte globale positive $\mathcal{C}^k$ -Volumenform. $\square$

Korollar. Auf einer $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit existieren genau dann $\mathcal{C}^k$ -Volumenformen, wenn sie orientierbar ist.

Ü Es sei M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit und $G \curvearrowright M$ eine freie $\mathcal{C}^k$ -Operation einer endlichen Gruppe G . (i) Die Quotientenmannigfaltigkeit M/G ist genau dann orientierbar, wenn M orientierbar und die G -Operation orientierungserhaltend ist. (ii) Volumenformen auf M/G entsprechen via Zurückziehen G -invarianten Volumenformen auf M .

Ü (i) S^d ist orientierbar. (ii) Das Möbiusband und die Kleinsche Flasche sind nicht orientierbar. (Das Möbiusband entsteht als Quotient des Zylinders $Z^2 = S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ bei Division durch den orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus $-\text{id}_{\mathbb{R}^3}|_Z$ der Ordnung 2. Die Kleinsche Flasche entsteht als Quotient des Torus $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$ bei Division durch den orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, \bar{z}_2)$ der Ordnung 2.) (iii) Der d -dim reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^d$ ist genau dann orientierbar, wenn d ungerade ist. ($\mathbb{R}P^d$ entsteht als Quotient von $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ bei Division durch den Diffeomorphismus $-\text{id}_{\mathbb{R}^{d+1}}|_{S^d}$ der Ordnung 2. Dieser ist orientierungserhaltend genau für ungerade d .)

7 Integration von Differentialformen

Das Wegintegral verallgemeinernd kann man Differentialformen beliebigen Grades über orientierte Untermannigfaltigkeiten und allgemeiner längs Abbildungen von orientierten Mannigfaltigkeiten der entsprechenden Dimension (gleich dem Grad der Form) integrieren.

Eine r -Form auf einer $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit liefert zunächst eine *infinitesimale Volumenmessung* in Dim r ($\rightarrow$ Multilin Alg), indem sie r -dim Parallelepipeden in den Tangentialräumen orientierte Volumina zuweist. Daraus ergibt sich durch Integration eine *globale* Volumenmessung. Intuitiv denkt man sich ein r -dim orientiertes Objekt in der Mannigfaltigkeit, etwa eine

Untermannigfaltigkeit, in orientierte r -dim infinitesimale Parallelepipede zerlegt, deren Volumina zum Gesamtvolumen des Objekts *aufintegriert* werden. Man kann Integrale von Formen in diesem Sinne als *orientierte Volumina* auffassen.

Modulo des Zurückziehens von Formen ist der wesentliche Fall die Integration von m -Formen über orientierte m -Mannigfaltigkeiten. Wir beginnen mit dem „lokalen“ Fall kompakt getragener m -Formen auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$, den wir mit seiner Standardorientierung versehen. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und α eine stetige m -Form auf U mit kompaktem Träger. Wir können sie schreiben als $\alpha = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ mit einer stetigen Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Sie weist dem orientierten m -dim Standard-Parallelepiped in $T_x U$ aufgespannt von der Standardbasis $(\frac{\partial}{\partial x_i}|_x)$ das Volumen $f(x) = \alpha_x(\frac{\partial}{\partial x_1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_x)$ zu und wir definieren dementsprechend das α -Volume von U als

$$\int_U \alpha := \int_U \alpha_x(\frac{\partial}{\partial x_1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_x) dx_1 \dots dx_m = \int_U f dx_1 \dots dx_m,$$

also als das Integral der Funktion f über U bzgl des Lebesgue-Maßes.

Der Rückzug von Differentialformen ist so konstruiert, daß differenzierbare Abbildungen infinitesimale Volumina (bzgl einer Form und ihres Rückzugs) erhalten. Wir erwarten daher nach Aufintegrieren die Invarianz der eben definierten orientierten Volumina unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen. In der Tat entspricht diese Invarianz der Transformationsformel für die Integrale von Funktionen ($\rightarrow$ Ana IIIa).

Lemma. Für orientierungserhaltende $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismen $F : U \rightarrow V$ offener Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ und stetige m -Formen α auf V mit kompaktem Träger gilt

$$\int_U F^* \alpha = \int_V \alpha. \quad (7.1)$$

Beweis: Wir bezeichnen die Koordinaten auf U und V mit x bzw y und schreiben $\alpha = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$ mit einer stetigen Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Dann

$$F^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m) = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m,$$

vgl (4.2), also

$$F^* \alpha = (f \circ F) \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m.$$

Der Determinantenfaktor gibt die *orientierte infinitesimale Volumendistortion* von F an. Er ist positiv, weil F die Orientierung erhält. Die Transformationsformel für Integrale auf $\mathbb{R}^m$ unter $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismen liefert nun

$$\int_U F^* \alpha = \int_U (f \circ F) \underbrace{\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)}_{>0} dx_1 \dots dx_m = \int_V f dy_1 \dots dy_m = \int_V \alpha,$$

wie behauptet. □

Kehrt F die Orientierung um, so hat das Integral der zurückgezogenen Form das umgekehrte Vorzeichen.

Das Lemma besagt, daß unser Integral von Formen über Gebiete in euklidischen Räumen *invariant unter Orientierungserhaltendem Koordinatenwechsel* ist und ermöglicht deshalb, es auf *Mannigfaltigkeiten* zu übertragen.

Sei M^m eine orientierte $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit und α eine stetige m -Form auf M mit kompaktem Träger. Wir betrachten erst den *lokalen* Fall, daß der Träger im Gebiet einer Orientierungserhaltenden Karte (U, x) enthalten ist, und setzen

$$\int_M \alpha := \int_{x(U)} (x^{-1})^* \alpha. \quad (7.2)$$

Aufgrund des Lemmas ist dies von der Karte unabhängig, denn ist $(\tilde{U}, \tilde{x})$ eine weitere solche Karte, so hat α Träger in $U \cap \tilde{U}$ und es gilt

$$\int_{x(U)} (x^{-1})^* \alpha = \int_{x(U \cap \tilde{U})} (x^{-1})^* (\alpha|_{U \cap \tilde{U}}) \stackrel{(7.1)}{=} \int_{\tilde{x}(U \cap \tilde{U})} \underbrace{(x \circ \tilde{x}^{-1})^* (x^{-1})^* (\alpha|_{U \cap \tilde{U}})}_{(\tilde{x}^{-1})^*} = \int_{\tilde{x}(\tilde{U})} (\tilde{x}^{-1})^* \alpha.$$

Im *allgemeinen* Fall lokalisieren wir das Integral mit Hilfe einer Partition der Eins. Ist $\sum_{i \in I} \varphi_i = 1$ eine abzählbare $\mathcal{C}^k$ -Partition der Eins, die der Überdeckung von M durch Kartengebiete untergeordnet ist, dh für welche die Partitionsfunktionen φ_i von Kartengebieten getragen werden, so setzen wir

$$\int_M \alpha := \sum_{i \in I} \int_M \varphi_i \alpha. \quad (7.3)$$

Die einzelnen Summanden sind durch (7.2) definiert. Wir bemerken, daß nur endlich viele von ihnen nicht verschwinden, denn die Familie der Träger $\text{supp } \varphi_i$ ist lokal endlich und der Träger von α ist nach Annahme kompakt. Das Integral $\int_M \alpha$ ist auf diese Weise wohldefiniert, denn ist $\sum_{j \in J} \psi_j = 1$ eine andere solche Partition der Eins, so

$$\sum_i \underbrace{\int_M \varphi_i \alpha}_{=\sum_j \int_M \varphi_i \psi_j \alpha} = \sum_{i,j} \int_M \varphi_i \psi_j \alpha = \sum_j \int_M \psi_j \alpha, \quad (7.4)$$

wobei alle Summen endlich sind. Wir fassen $\int_M \alpha$ als das α -Volumen von M auf.

Das Lemma verallgemeinert sich unmittelbar:

Proposition (Invarianz unter Zurückziehen). Für Orientierungserhaltende $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismen $F : M_1^m \rightarrow M_2^m$ orientierter $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension m und für stetige m -Formen α auf M_2 mit kompaktem Träger gilt

$$\int_{M_1} F^* \alpha = \int_{M_2} \alpha.$$

Beweis: Ist $\sum_{i \in I} \varphi_i = 1$ eine Partition der Eins auf M_2 wie in (7.3) verwendet, so ziehen wir sie zurück zur Partition der Eins $\sum_{i \in I} (\varphi_i \circ F) = 1$ auf M_1 . Die zurückgezogenen Partitionsfunktionen $\varphi_i \circ F = F^* \varphi_i$ sind dann ebenfalls von Kartengebieten getragen, und mit dem Lemma gilt

$$\int_{M_1} F^* \alpha \stackrel{(7.3)}{=} \sum_{i \in I} \int_{M_1} \underbrace{(\varphi_i \circ F)(F^* \alpha)}_{=F^*(\varphi_i \alpha)} \stackrel{(7.1)}{=} \sum_{i \in I} \int_{M_2} \varphi_i \alpha \stackrel{(7.3)}{=} \int_{M_2} \alpha,$$

wie behauptet. □

In *Dimension 0* reduziert sich Integration zu *Summation*: Ist M^0 ein diskreter topologischer Raum und $\epsilon : M \rightarrow \{\pm 1\}$ eine Orientierung auf M , so ist das Integral einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit endlichem Träger gegeben durch die Summe

$$\int_M f := \sum_{p \in M} \epsilon(p) \cdot f(p).$$

Allgemeiner kann man Differentialformen *beliebigen Grades* über geometrische Objekte der entsprechenden Dimension integrieren: Ist α eine stetige n -Form (nicht notwendig mit kompaktem Träger) auf einer (nicht notwendig orientierten) $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M^m , so ist für jede $\mathcal{C}^1$ -Abbildung $F : N \rightarrow M$ von einer *orientierten kompakten* n -dimensionalen $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit N^n das *Integral* von α *längs* F

$$\int_N F^* \alpha$$

definiert, welches wir als das α -Volumen der Abbildung F interpretieren. (Eine mögliche Variation dieser Annahmen ist, daß α *kompakten Träger* hat und F eine *eigentliche* Abbildung von einer (nicht notwendig kompakten) *orientierten* Mannigfaltigkeit N^n ist.)

Ist insbesondere $N^n \subset M^m$ eine kompakte $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit versehen mit einer Orientierung und ist $\iota : N \rightarrow M$ die Inklusion, so ist das Integral von α längs ι das Integral der eingeschränkten Form $\iota^* \alpha$ über N .

Ein wichtiger Spezialfall des Integrals von Differentialformen längs Abbildungen ist das *Wegintegral* von 1-Formen längs Kurven, siehe Kap 3.1.

Ergänzung.

Allgemeiner kann man die *Integrierbarkeit* und, in diesem Fall, das *Integral* für *meßbare* Formen auf orientierten Mannigfaltigkeiten erklären. Dabei soll eine Differentialform *meßbar* heißen, wenn ihre Koeffizienten in lokalen Koordinaten Borel-meßbar sind.

Sei wieder M^m eine orientierte $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit und sei α eine meßbare m -Form auf M . Wir erklären zunächst eine lokale Version des Integrals $\int_M \alpha$, nämlich das Integral $\int_W \alpha$ über eine Borel-Menge $W \subset M$, die in einem Kartengebiet enthalten ist.

Für jede $\mathcal{C}^k$ -Karte (U, x) können wir $(x^{-1})^* \alpha = f(\omega_{\mathbb{R}^m}|_{x(U)})$ schreiben mit einer meßbaren Funktion $f : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $\omega_{\mathbb{R}^m} := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ die Standard-Volumenform auf $\mathbb{R}^m$ bezeichnet. Der Quotient

$$\frac{(x^{-1})^* \alpha}{\omega_{\mathbb{R}^m}|_{x(U)}} := f$$

von Formen ist also wohldefiniert. Ist $W \subset U$ und die Kartenabbildung x orientierungserhaltend, so setzen wir

$$\|\alpha|_W\|_1 := \int_{x(W)} \underbrace{\left| \frac{(x^{-1})^* \alpha}{\omega_{\mathbb{R}^m}|_{x(U)}} \right|}_{|f|} dx_1 \dots dx_m \in [0, \infty]$$

und sagen, daß α über W integrierbar ist, falls $\|\alpha|_W\|_1 < \infty$. In diesem Fall definieren wir das *Integral* von α über W als

$$\int_W \alpha := \int_{x(W)} \frac{(x^{-1})^* \alpha}{\omega_{\mathbb{R}^m}|_{x(U)}} dx_1 \dots dx_m.$$

Wie oben im Lemma, sind Integrierbarkeit und Integral unabhängig von der Wahl der Karte.

Jetzt können wir das Integral global erklären. Wenn man mit meßbaren (statt stetigen) Objekten auf Mannigfaltigkeiten arbeitet, muß man für eine lokal→global-Konstruktion nicht verkleben, sondern kann einfach zusammensetzen. Wir zerlegen M als abzählbare disjunkte Vereinigung $M = \sqcup_i W_i$ einer lokal endlichen Familie meßbarer Teilmengen $W_i \subset M$, die in Kartengebieten enthalten sind, und definieren

$$\|\alpha\|_1 := \sum_i \|\alpha|_{W_i}\|_1 \in [0, \infty].$$

Falls $\|\alpha\|_1 < \infty$, so nennen wir α integrierbar und definieren das *Integral* von α als

$$\int_M \alpha := \sum_i \int_{W_i} \alpha.$$

Die Wohldefiniertheit des Integrals folgt wie in (7.4), diesmal mit dem Satz von der Majorisierten Konvergenz und dem Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen.

Wir beobachten noch, daß eine positive $\mathcal{C}^k$ -Volumenform ω auf M ein Maß μ auf der Borelschen σ -Algebra $\mathcal{B}(M)$ definiert vermittelt

$$\mu(W) := \int_W \omega := \int_M \chi_W \omega$$

für $W \in \mathcal{B}(M)$. Für jede Karte (U, x) sind die Maße $(x^{-1})^* \mu$ und $\beta^m|_{x(U)}$ äquivalent, dh die μ -Nullmengen in U entsprechen den β^m -Nullmengen in $x(U)$.

Bemerkung. Jede $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit trägt eine natürliche Maßklasse, dh Äquivalenzklasse von Maßen, die dadurch ausgezeichnet ist, daß für jedes Maß μ in dieser Klasse und jede Karte (U, x) das Maß $(x^{-1})^* \mu$ äquivalent zu $\beta^m|_{x(U)}$ ist.

8 Die äußere Ableitung von Differentialformen

Die äußere Ableitung setzt das totale Differential von Funktionen, also 0-Formen,¹¹ auf Differentialformen beliebigen Grades fort. Daß man als Definitions- und Wertebereich der äußeren Ableitung Differentialformen und keine andersartigen Tensorfelder wählt, also die äußeren Ableitungen von 1-Formen als alternierende 2-Formen definiert und dann induktiv fortfahrend die äußeren Ableitungen von k -Formen als $(k+1)$ -Formen, mag auf den ersten Blick nicht zwingend erscheinen. Wir führen die äußere Ableitung hier ein, indem wir sie durch gewisse formale algebraische Eigenschaften, dh Rechenregeln charakterisieren. Geometrische Motivation wird

¹¹Eine Multilinearform in *null* Variablen auf einem Vektorraum ist ein *Skalar*, hier also eine reelle Zahl.

sich a posteriori ergeben durch den Satz von Stokes sowie das Poincaré-Lemma (besagend, daß die äußere Ableitung einer Differentialform die Obstruktion zu ihrer lokalen Exaktheit ist).

Wir erinnern daran, daß das *totale Differential* als Operator $f \mapsto df$ auf differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}$ -linear ist und eine *Produktregel* erfüllt, vgl Kap 3. Auf eine solche Weise charakterisieren wir auch die äußere Ableitung.

Satz (Charakterisierung der äußeren Ableitung). Sei M eine $\mathcal{C}^2$ -Mannigfaltigkeit. Es existiert eine eindeutige Fortsetzung des totalen Differentials auf differenzierbaren Funktionen zu einem $\mathbb{R}$ -linearen Operator d auf differenzierbaren¹² Formen beliebigen Grades, so daß gilt:

(i) d ist *antiderivativ* vom Grad 1, dh bildet k -Formen auf $(k+1)$ -Formen ab und erfüllt die *Produktregel*

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta) \quad (8.1)$$

für differenzierbare k -Formen α und l -Formen β .

(ii) Auf zweimal differenzierbare Formen gilt

$$d^2 = 0. \quad (8.2)$$

Der so festgelegte Operator d heißt die *äußere Ableitung*.

Beweis: Wir notieren zuerst den Spezialfall

$$d(f\alpha) = (df) \wedge \alpha + f d\alpha$$

der Produktregel für differenzierbare Funktionen f (also $k=0$) und Formen α .

Jetzt überzeugen wir uns, daß eine äußere Ableitung d notwendigerweise ein *lokaler* Operator ist, dh daß der Wert $(d\alpha)_p$ in einem Punkt $p \in M$ nur vom lokalen Verhalten (den Werten) der Form α nahe p abhängt. Äquivalent dazu ist, daß $(d\alpha)_p = 0$, wenn α nahe p verschwindet. Um dies zu sehen, wählen wir eine $\mathcal{C}^2$ -(Buckel)Funktion φ auf M , so daß $\varphi \equiv 1$ nahe p und $\varphi\alpha \equiv 0$ überall. Dann

$$0 = d(\varphi\alpha) = (d\varphi) \wedge \alpha + \varphi d\alpha$$

und damit $d\alpha = 0$ nahe p .

Die Lokalität erlaubt es nun, äußere Ableitungen auf offene Teilmengen *einzuschränken*, dh eine äußere Ableitung d auf M induziert auf jeder offenen Teilmenge $U \subset M$ eine äußere Ableitung d_U . Ist nämlich α_U eine differenzierbare Form auf U und $p \in U$, so wählen wir eine differenzierbare Form α auf M , die nahe p mit α_U übereinstimmt, und setzen $(d_U\alpha_U)_p := d\alpha_p$. Dies ist wohldefiniert, dh unabhängig von der Wahl von α . Es gilt dann

$$d_U(\alpha|_U) = (d\alpha)|_U$$

für alle differenzierbaren Formen α auf M .

Als nächstes beweisen wir die Aussage im Spezialfall, daß $M = U$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^m$ ist, aufgefaßt als $\mathcal{C}^2$ -Mannigfaltigkeit. Angesichts $ddx_i = 0$ liefert die Produktregel

$$d\left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (8.3)$$

¹²Eine Differentialform ist *differenzierbar*, wenn es ihre Koeffizientenfunktionen bzgl lokaler Koordinaten sind.

wodurch d festgelegt ist, denn die Faktoren $da_{i_1 \dots i_k}$ sind totale Differentiale.

Wir prüfen nach, daß durch (8.3) andererseits eine äußere Ableitung d auf U definiert wird. Es ist klar, daß d $\mathbb{R}$ -linear ist und Grade von Formen um 1 erhöht. Wir rechnen als nächstes nach, daß die Produktregel (8.1) für die Wirkung von d auf Dachprodukten erfüllt ist. Mit der Produktregel für das totale Differential auf Funktionen erhalten wir für differenzierbare Koeffizientenfunktionen a, b :

$$\begin{aligned}
& d(a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge b dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}) = d(ab dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}) \\
& \stackrel{(8.3)}{=} d(ab) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} = ((da)b + a(db)) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \\
& = da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge b dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} + (-1)^k a \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge db \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \\
& \stackrel{(8.3)}{=} d(a \wedge dx_{i_1} \wedge \dots) \wedge (b dx_{j_1} \wedge \dots) + (-1)^k (a \wedge dx_{i_1} \wedge \dots) \wedge d(b \wedge dx_{j_1} \wedge \dots)
\end{aligned}$$

Das Vorzeichen entsteht dadurch, daß db an den k 1-Formen dx_{i_r} vorbeigeschoben wird. Mit der $\mathbb{R}$ -Linearität des durch (8.3) definierten Operators d und der $\mathbb{R}$ -Bilinearität von $\wedge$ folgt, daß d die Produktregel (8.1) erfüllt.

Um (8.2) zu verifizieren, stellen wir fest, daß für zweimal differenzierbare Funktionen f gilt:

$$d^2 f = d \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \stackrel{(8.3)}{=} \sum_i \left(d \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \wedge dx_i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i < j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)}_{=0} dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Für zweimal differenzierbare Formen vom Grad $k \geq 1$ folgt

$$d^2(a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = d(da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \underbrace{(d^2 a)}_{=0} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0,$$

wobei wir im zweiten Umformungsschritt die bereits etablierte Produktregel (8.1) verwenden. Also ist der Operator d eine äußere Ableitung auf U .

Sei nun allgemein M eine $\mathcal{C}^2$ -Mannigfaltigkeit. Aus obigem folgt, daß auf jedem Kartengebiet $U \subset M$ eine eindeutige äußere Ableitung d_U existiert, denn für eine Karte (U, x) definieren wir

$$d_U := x^* \circ d_{x(U)} \circ (x^{-1})^*$$

mit der eben konstruierten äußeren Ableitung $d_{x(U)}$ auf $x(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dies impliziert schon einmal die *Eindeutigkeit* einer äußeren Ableitung auf M . Die *Existenz* betreffend stellen wir fest, daß für je zwei Kartengebiete $U, \tilde{U} \subset M$ (aufgrund der Eindeutigkeit lokaler äußerer Ableitungen) gilt, daß d_U und $d_{\tilde{U}}$ zum selben Operator auf $U \cap \tilde{U}$ einschränken, also

$$(d_U(\alpha|_U))|_{U \cap U'} = d_{U \cap U'}(\alpha|_{U \cap U'}) = (d_{U'}(\alpha|_{U'}))|_{U \cap U'}$$

für differenzierbare Formen α auf M . Die lokalen äußeren Ableitungen auf den verschiedenen Kartengebieten sind also miteinander kompatibel und setzen sich deshalb zusammen zu bzw werden von einem wohldefinierten globalen Operator $d = d_M$ induziert, so daß

$$(d\alpha)|_U = d_U(\alpha|_U)$$

für alle differenzierbaren Formen α auf M und Kartengebiete $U \subset M$. Weil die d_U äußere Ableitungen sind, trifft dies aufgrund der Lokalität auch auf d zu. $\square$

Die äußere Ableitung vertauscht mit dem *Zurückziehen* von Formen.

Lemma. Ist $F : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung von $\mathcal{C}^2$ -Mannigfaltigkeiten, so gilt

$$d_M \circ F^* = F^* \circ d_N$$

auf differenzierbaren Formen auf N .

Beweis: Die Behauptung für differenzierbare Funktionen f auf N folgt mit der Kettenregel:

$$d(F^* f) = d(f \circ F) = df \circ dF = F^*(df). \quad (8.4)$$

Die Behauptung für Funktionen impliziert sie für exakte 1-Formen auf N , also für 1-Formen der Gestalt dg mit einer zweimal differenzierbaren Funktion g :

$$d(F^*(dg)) \stackrel{(8.4)}{=} d(d(F^*g)) = \underbrace{d^2}_{=0}(F^*g) = 0 = F^*(d^2g) = F^*(d(dg)).$$

Sie gilt dann auch für Formen $f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$ mit differenzierbaren Funktionen f und zweimal differenzierbaren Funktionen g_i , weil das Dachprodukt mit Zurückziehen vertauscht:

$$\underbrace{d(F^*(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k))}_{=(F^*f) \underbrace{F^*dg_1 \wedge \dots \wedge F^*dg_k}_{d(F^*g_1) \wedge \dots \wedge d(F^*g_k)}} \stackrel{d^2=0}{=} \underbrace{(d(F^*f))}_{F^*df} \wedge \underbrace{(d(F^*g_1))}_{F^*dg_1} \wedge \dots \wedge (d(F^*g_k)) = F^* \underbrace{(df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)}_{=d(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)}$$

Weiter gilt sie für endliche Linearkombinationen solcher Formen $f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$.

Da jede differenzierbare Form auf N lokal mit einer solchen Linearkombination übereinstimmt, folgt die Behauptung allgemein. $\square$

8.1 Der Satz von Stokes: absolute Version

Der Satz von Stokes verallgemeinert den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung von Intervallen auf Mannigfaltigkeiten. Seine allgemeinere relative Version behandeln wir, nachdem wir Mannigfaltigkeiten *mit Rand* eingeführt haben. Die absolute Version ohne Rand können wir schon jetzt zeigen.

Die absolute Version des Hauptsatzes ist der Fall von kompakt getragenen Funktionen auf offenen Intervallen. Für eine $\mathcal{C}^1$ -Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\underbrace{\int_I f' dx}_{=\int_I df} = 0.$$

Allgemein gilt:

Satz (Stokes, absolut). Sei $M^{m \geq 1}$ eine orientierte $\mathcal{C}^2$ -Mannigfaltigkeit. Dann gilt für $\mathcal{C}^1$ -($m-1$)-Formen α auf M mit kompaktem Träger:

$$\int_M d\alpha = 0$$

Bemerkung. Die Voraussetzung, daß M eine $\mathcal{C}^2$ -Mannigfaltigkeit ist, brauchen wir, damit TM eine $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit ist und wir von differenzierbaren Formen auf M sprechen können.

Beweis: Wir betrachten zuerst den lokalen Fall $M = \mathbb{R}^m$. Die Form α hat dann in Koordinaten die Gestalt

$$\alpha = \sum_{i=1}^m f_i \underbrace{dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m}_{=: \alpha_i}$$

mit kompakt getragenen $\mathcal{C}^1$ -Funktionen f_i auf $\mathbb{R}$. Die äußeren Ableitungen der Komponenten α_i sind die stetigen m -Formen

$$d\alpha_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} d\alpha_i = (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m.$$

Die Behauptung reduziert sich daher mit dem Satz von Fubini auf

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) dx_i = 0,$$

was wiederum aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt.

Ist M beliebig, so impliziert der lokale Fall die Aussage für alle Formen α , die von Kartengebieten getragen werden. Weil jede Form mit kompaktem Träger mit Hilfe einer Partition der Eins als endliche Summe von Formen darstellbar ist, die von Kartengebieten getragen werden, folgt die Aussage (aufgrund der Linearität in α) allgemein. $\square$

9 Mannigfaltigkeiten mit Rand

9.1 Gebiete mit differenzierbarem Rand

Eine offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist selbst eine Mannigfaltigkeit und man kann auf ihr Analysis betreiben. Will man analytische Betrachtungen *bis zum Rand ausdehnen*, so ist es hilfreich, wenn dieser „schöne Geometrie“ hat. Eine natürliche, wenn auch starke Forderung ist, daß der Rand differenzierbar sei, also eine Hyperfläche (dh 1-kodim Untermannigfaltigkeit).

Wir setzen dies um, indem wir verlangen, daß die offene Teilmenge *entlang des Randes lokal* in geeigneten Koordinaten zu einem offenen *Halbraum* gemacht werden kann. Als *lokales Modell* (für den Abschluß solcher offenen Teilmengen) betrachten wir den abgeschlossenen Halbraum

$$H^m := \{x_1 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Sein *Inneres* (als Teilmenge von $\mathbb{R}^m$) ist die offene Halbebene $\mathring{H}^m = \{x_1 < 0\}$ und sein topologischer *Rand* die Hyperebene $\partial H^m = \{x_1 = 0\}$.

In Analogie zum Begriff der Untermannigfaltigkeit (vgl Definition 1.1) definieren wir nun:

Definition (Differenzierbarer Rand). Eine offene Teilmenge $W \subset M$ einer $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M^m hat $\mathcal{C}^k$ -differenzierbaren Rand, falls in jedem Punkt $p \in \overline{W}$ eine Karte (U, x) existiert, so daß

$$x(\overline{W} \cap U) = H^m \cap x(U).$$

Weil die Kartenabbildungen Homöomorphismen sind, entsprechen sich unter ihnen offene Teilmengen von U und $x(U)$, und es gilt deshalb notwendigerweise auch $x(W \cap U) = \mathring{H}^m \cap x(U)$ und $x(\partial W \cap U) = \partial H^m \cap x(U)$. In inneren Punkten $p \in W$ existieren Karten, wie in der Definition verlangt, trivialerweise. Die eigentliche Forderung bezieht sich auf die Randpunkte $p \in \partial W$. Es folgt, daß der Rand ∂W eine $\mathcal{C}^k$ -Hyperfläche in M ist.

Beispiel. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^k$ -Funktion und a ein regulärer Wert von f , so ist das *Subniveau* $\{f < a\} \subset M$ offen mit $\mathcal{C}^k$ -Rand $\{f = a\}$, wie aus dem Satz über Implizite Funktionen folgt.

ZB hat der offene Ball $B_r(0) \subset \mathbb{R}^m$ als r^2 -Subniveau der $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion $x \mapsto \|x\|^2$ $\mathcal{C}^\infty$ -Rand.

Den Begriff der *Differenzierbarkeit* kann man folgendermaßen zum Rand hin ausweiten.

Definition. Hat $W \subset M$ $\mathcal{C}^k$ -Rand, so nennen wir eine Abbildung $F : \overline{W} \rightarrow N$ in eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit N ($\mathcal{C}^l$ -) differenzierbar, $1 \leq l \leq k$, falls sie sich zu einer ($\mathcal{C}^l$ -)differenzierbaren Abbildung $\tilde{F} : \widetilde{W} \rightarrow N$ auf eine offene Umgebung $\widetilde{W} \subset M$ von $\overline{W}$ in M fortsetzen läßt.

Dies ist (wie man mit einem Partition der Eins-Argument sieht) äquivalent zur lokalen Forderung, daß in jedem Randpunkt $p \in \partial W$ eine ($\mathcal{C}^l$ -)differenzierbare Fortsetzung $U_p \rightarrow N$ von $F|_{U_p \cap \overline{W}}$ auf eine offene Umgebung U_p von p in M existiert.

Die *Tangentialräume* von $\overline{W}$ sollen auch entlang des Randes *Vektorräume* sein, nicht etwa Halbräume, und wir übernehmen sie von M , also $T_p \overline{W} := T_p M$. Das *Tangentialbündel* des Abschlusses $\overline{W}$ definieren wir entsprechend als die Einschränkung

$$T\overline{W} = TM|_{\overline{W}} = \bigsqcup_{p \in \overline{W}} T_p M \xrightarrow{\pi} \overline{W}$$

des Tangentialbündels von M . Als Teilmenge von TM ist $T\overline{W}$ abgeschlossen mit Innerem TW und $\mathcal{C}^{k-1}$ -Rand $\partial(TW) = \sqcup_{p \in \partial W} T_p M$.

Die verwandten Bündel verallgemeinern sich entsprechend, ebenfalls die *Differentialformen* als Schnitte von ihnen. Auch *Integration* und *Differentialformenkalkül* bleiben unverändert.

9.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand

Wir abstrahieren nun den Begriff der offenen Teilmenge mit differenzierbarem Rand zum Begriff der *differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand*. Dazu verallgemeinern wir den Begriff der

Mannigfaltigkeit (ohne Rand), indem wir das lokale Modell $\mathbb{R}^m$ durch das allgemeinere *lokale Modell* H^m ersetzen. Es ist allgemeiner, weil es in den inneren Punkten lokal diffeomorph zum alten Modell $\mathbb{R}^m$ ist, in den Randpunkten jedoch nicht.

Zuerst auf *topologischer Ebene*:

Definition (Topologische Mannigfaltigkeit mit Rand). (i) Ein topologischer Raum heißt *m*-dim *lokal euklidisch mit Rand*, falls er lokal homöomorph zu H^m ist.

(ii) Er heißt eine *m*-dim (topologische) *Mannigfaltigkeit mit Rand*, wenn er zusätzlich Hausdorffsch ist und seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Zusatzstruktur definiert man wiederum als maximale Atlanten lokaler Karten, von denen man verlangt, daß sie in gewisser Weise miteinander verträglich sind. Lokale *Karten* für einen *m*-dim lokal euklidischen Raum X mit Rand sind Homöomorphismen $\kappa : U \rightarrow V$ offener Teilmengen $U \subset X$ auf (bzgl der Relativtopologie) offene Teilmengen $V \subset H^m$ des lokalen Modells. Die *Kartenwechsel* sind also Homöomorphismen offener Teilmengen von H^m .

Um eine *differenzierbare Struktur* zu erhalten, fordert man, daß die Kartenwechsel differenzierbar, also Diffeomorphismen sind:

Definition (Differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand). (i) Eine $\mathcal{C}^k$ -*differenzierbare Struktur* auf einem lokal euklidischen Raum ist ein maximaler $\mathcal{C}^k$ -differenzierbarer Atlas.

(ii) Eine $\mathcal{C}^k$ -*differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand* ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand versehen mit einer $\mathcal{C}^k$ -differenzierbaren Struktur.

Aus dem Umkehrsatz (Analysis II) folgt, daß $\mathcal{C}^1$ -Kartenwechsel Inneres und Rand erhalten.¹³ (Dies gilt auch noch für Homöomorphismen offener Teilmengen von H^m . Der Beweis dafür erfordert jedoch Methoden der Algebraischen Topologie.) Ein Punkt in der Mannigfaltigkeit wird daher von allen Karten entweder auf einen inneren oder auf einen Randpunkt abgebildet. Die Begriffe von Innerem und Rand übertragen sich also vom lokalen Modell H^m auf differenzierbare (sogar topologische) Mannigfaltigkeiten mit Rand:

Definition (Inneres, Rand). Das *Innere* $\overset{\circ}{M}$ bzw der *Rand* ∂M einer $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M mit Rand ist die Teilmenge aller Punkte, die von lokalen Karten ins Innere bzw den Rand von H^m abgebildet werden.

Weiter folgt aus unserer Diskussion, daß das Innere $\overset{\circ}{M}$ einer *m*-dim $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M mit Rand eine *m*-dim $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit ohne (dh mit leerem) Rand ist und der Rand ∂M eine $(m - 1)$ -dim $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Beispiel. Ist M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit ohne Rand und $W \subset M$ eine offene Teilmenge mit $\mathcal{C}^k$ -Rand, so trägt $\overline{W}$ eine natürliche Struktur als $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Rand.

Die *Differenzierbarkeit* von Abbildungen definiert man wie im Fall ohne Rand:

¹³Ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus $V \rightarrow \tilde{V}$ offener Teilmengen $V, \tilde{V} \subset H^m$ bildet das Innere $V \cap \overset{\circ}{H}^m$ auf eine in $\mathbb{R}^m$ offene Teilmenge ab, also nach $\tilde{V} \cap \overset{\circ}{H}^m$, und entsprechend seine Umkehrung.

Definition (Differenzierbar). Eine stetige Abbildung von $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten mit Rand heißt $(\mathcal{C}^l)$ -differenzierbar, $1 \leq l \leq k$, falls ihre lokalen Koordinatendarstellungen es sind.

Das *Tangentialbündel* müssen wir anders konstruieren als im Fall ohne Rand, weil wir Tangentialvektoren in Randpunkten nicht durch Kurven repräsentieren können, wenn sie nicht tangential an den Rand sind. Ein möglicher technischer Ansatz ist, Tangentialvektoren analytisch als Richtungsableitungen zu definieren. Wir gehen anders vor und realisieren sie als Äquivalenzklassen einander entsprechender Tangentialvektoren an lokale Karten, dh wir konstruieren das Tangentialbündel an die Mannigfaltigkeit, indem wir die Tangentialbündel an die (Bilder der) Karten miteinander verkleben.

Sei M^m eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Rand. Sind (U, x) und $(\tilde{U}, \tilde{x})$ Karten für M , so vermittelt das Differential des Kartenwechsels $\tilde{x} \circ x^{-1} : x(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{x}(U \cap \tilde{U})$ den natürlichen $\mathcal{C}^{k-1}$ -Diffeomorphismus von Tangentialbündeln

$$\underbrace{T(x(U \cap \tilde{U}))}_{\cong x(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^m} \xrightarrow{d(\tilde{x} \circ x^{-1})} \underbrace{T(\tilde{x}(U \cap \tilde{U}))}_{\cong \tilde{x}(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^m},$$

der zum Kartenwechsel für das zu konstruierende Tangentialbündel an M werden soll. Wir definieren dessen zugrundeliegende Menge als den Quotienten

$$TM := \bigsqcup_{(U,x)} T(x(U)) / \sim$$

der disjunkten Vereinigung der Tangentialbündel $T(x(U)) \cong x(U) \times \mathbb{R}^m \subset H^m \times \mathbb{R}^m$ über alle Karten (U, x) unter der Äquivalenzrelation

$$v \sim \tilde{v} \quad :\Leftrightarrow \quad \tilde{v} = d(\tilde{x} \circ x^{-1})(v)$$

für $v \in T_{x(p)}(x(U))$, $\tilde{v} \in T_{\tilde{x}(p)}(\tilde{x}(\tilde{U}))$ und $p \in U \cap \tilde{U}$. Aufgrund der Kettenregel ist dies in der Tat eine Äquivalenzrelation. Es gibt eine kanonische Fußpunktprojektion $\pi = \pi_{TM} : TM \rightarrow M$ und die *Tangentialräume* $T_p M = \pi_{TM}^{-1}(p)$ tragen Strukturen als m -dim Vektorräume. Sie entstehen durch konsistente Identifikation der Tangentialräume $T_{x(p)}(x(U))$ für alle Karten (U, x) mit $p \in U$ durch lineare Isomorphismen. Die Karten (U, x) induzieren natürliche Bijektionen

$$TU := \pi_{TM}^{-1}(U) = \bigsqcup_{p \in U} T_p M \xrightarrow{T_x} T(x(U)) \cong x(U) \times \mathbb{R}^m,$$

und der Atlas bestehend aus den Karten (TU, Tx) induziert auf TM eine natürliche Struktur als $2m$ -dim $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit mit Rand, vgl Satz 1.3. Es gilt $\partial(TM) = TM|_{\partial M} = \pi_{TM}^{-1}(\partial M)$.

Ein Tangentialvektor $\nu \in T_p M$ in einem Randpunkt $p \in \partial M$ zeigt nach *außen* bzw *innen*, falls in lokalen Koordinaten x seine $\frac{\partial}{\partial x_1}$ -Komponente positiv bzw negativ ist, und er ist *tangential an den Rand*, wenn diese verschwindet. Er läßt sich genau dann als Geschwindigkeitsvektor $c'(0)$ einer differenzierbaren Kurve $c : [0, \epsilon) \rightarrow M$ mit Anfangspunkt p realisieren, wenn er nicht nach außen zeigt. Intuitiv kann man sich beliebige Tangentialvektoren in p auch als Geschwindigkeitsvektoren von Kurven *durch* p in einer lokalen „Erweiterung“ der Mannigfaltigkeit M nahe p „über den Rand hinaus“ vorstellen.

Eine differenzierbare Abbildung $F : M^m \rightarrow N^n$ von $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten mit Rand hat wiederum ein *Differential*

$$TM \xrightarrow{dF} TN.$$

Seine lokalen Koordinatendarstellungen $Ty \circ dF \circ (Tx)^{-1}$ bzgl von lokalen Koordinaten x und y auf M bzw N induzierter Bündelkarten Tx und Ty sind die Differentiale der lokalen Koordinatendarstellungen $y \circ F \circ x^{-1}$ von F . Ist $F \in \mathcal{C}^k$, so ist $dF \in \mathcal{C}^{k-1}$.

Die Konstruktion des *Kotangentialbündels* $T^*M \rightarrow M$ und seiner *äußeren Potenzen* $\Lambda^k TM \rightarrow M$ verläuft analog, ebenso bleibt der *Differentialformenkalkül* derselbe.

Orientierung des Randes. Ein neuer Aspekt im Fall mit Rand ist die Beschreibung *auf dem Rand induzierter Orientierungen*. Sei $M^{m \geq 2}$ jetzt eine *orientierte* $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit.

Die Einschränkungen der orientierungserhaltenden Karten für M liefern auf ∂M einen $\mathcal{C}^k$ -Atlas mit orientierungserhaltenden Kartenwechseln.¹⁴ Die Wahl einer Orientierung des Vektorraums ∂H^m legt dann eine *Orientierung des Randes* ∂M fest. Wir wählen sie so, daß die Standardbasis $(e_2, \dots, e_m)$ positiv orientiert ist. Für eine orientierungserhaltende Karte (U, x) für M ist dann das lokale Koordinatenbasenfeld $(\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m})|_{(\partial M) \cap U}$ positiv orientiert und die lokale Volumenform $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m|_{(\partial M) \cap U}$ ist positiv bzgl der Orientierung des Randes.

Wir können die so definierte induzierte Orientierung des Randes auch folgendermaßen beschreiben. Es sei $\nu : \partial M \rightarrow TM$ ein längs des Randes definiertes, nach außen weisendes (stetiges) Vektorfeld.¹⁵ Ist $p \in \partial M$ ein Randpunkt, so ist eine geordnete Basis $(v_2, \dots, v_m)$ von $T_p(\partial M)$ genau dann positiv orientiert bzgl der Orientierung von ∂M , wenn die ergänzte Basis $(\nu, v_2, \dots, v_m)$ von $T_p M$ positiv orientiert ist bzgl der Orientierung von M . Es gibt auch eine Beschreibung durch Volumenformen. Ist nämlich ω_M eine positive Volumenform auf M , so ist $i_\nu(\omega_M|_{\partial M})$ eine positive Volumenform auf ∂M .

Bsp: Kreisscheibe $\overline{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

In Dim $m = 1$ gibt es in einem Randpunkt entweder nur orientierungserhaltende oder orientierungsumkehrende Karten, je nachdem ob die nach außen zeigenden Tangentialvektoren positiv oder negativ orientiert sind, und man gibt dem Randpunkt die Orientierung $+$ bzw $-$. Die obige Beschreibung der induzierten Randorientierung durch Volumenformen bleibt bestehen. Ist nämlich ω_M eine positive 1-Form auf M und ν ein nach außen weisendes Vektorfeld längs ∂M , so wird die Orientierung vom Vorzeichen der Funktion $i_\nu \omega = \omega(\nu)$ auf ∂M angegeben.

Bsp: Hat $[a, b]$ die Standard-Orientierung, so ist a negativ und b positiv orientiert.

Die *Integration von Differentialformen* verläuft im Fall mit Rand genauso.

¹⁴Sind (U, x) und $(\tilde{U}, \tilde{x})$ orientierungserhaltende Karten in $p \in M$, so erhält das Differential $A := d(\tilde{x} \circ x^{-1})_{x(p)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ des Kartenwechsels auch die Orientierung, $\det A > 0$, und außerdem den Halbraum $H^m \subset \mathbb{R}^m$, also sowohl innere, äußere als auch tangentielle Richtungen in $x(p)$. Die (Jacobi-)Matrix (a_{ij}) von A hat deshalb eine spezielle Struktur. Weil das Bild des nach außen zeigenden Basisvektors $\frac{\partial}{\partial x_1}|_{x(p)}$ ebenfalls nach außen zeigt, gilt $a_{11} > 0$, und weil die Randhyperebene $\partial H^m = \{x_1 = 0\}$ unter A invariant ist, gilt $a_{1j} = 0$ für $j \geq 2$. Also $\det A = a_{11} \cdot \det(A|_{\partial H^m})$ und folglich $\det(A|_{\partial H^m}) > 0$.

¹⁵Ein *Vektorfeld* auf einer Mannigfaltigkeit ist ein Schnitt des Tangentialbündels.