

MIII – Analysis in mehreren Veränderlichen – WiSe 2007/08

Kurzfassung

Martin Schottenloher

∞ ∞ ∞

Kapitel XI. Untermannigfaltigkeiten

Es handelt sich um differenzierbare Untermannigfaltigkeiten in Zahlenräumen $\mathbb{R}^n$.

§36 Der Fixpunktsatz von Banach

Dieser Satz ist uns schon früher begegnet, aber wegen der Bedeutung gerade für den nachfolgenden Umkehrsatz und für die Theorie der Mannigfaltigkeiten wird er hier noch einmal ausführlich behandelt.

Eine Abbildung $\Phi : M \rightarrow M$ eines metrischen Raumes M mit Metrik d in sich heißt *kontrahierend*, wenn es eine Konstante $L > 0$ mit $L < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in M$ gilt:

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq L d(x, y).$$

(36.1) Satz: (Fixpunktsatz von Banach) *Eine kontrahierende Abbildung $\Phi : M \rightarrow M$ auf einem nichtleeren, vollständigen metrischen Raum M hat einen eindeutig bestimmten Fixpunkt. Es gibt also $\xi \in M$ mit $\Phi(\xi) = \xi$ und ξ mit dieser Eigenschaft ist einzig.*

Als Anwendung haben wir den folgenden allgemeinen Umkehrsatz:

(36.2) Satz: *Es sei E ein Banachraum über $\mathbb{R}$ und es sei $f : \overline{B(0, R)} \rightarrow E$ eine Abbildung auf der abgeschlossenen Kugel $\overline{B(0, R)}$, $R > 0$, von der Form $f(x) = x + h(x)$ für alle $x \in \overline{B(0, R)}$. Gilt dann $h(0) = 0$ und gibt es eine Konstante $L < 1$ mit $\|h(x) - h(y)\| \leq L \|x - y\|$ für alle $x, y \in \overline{B(0, R)}$, so ist f bei 0 lokal umkehrbar mit stetiger Umkehrabbildung. Das bedeutet genauer: Es gibt offene Umgebungen $U, V \subset \overline{B(0, R)}$ von 0, so dass die Restriktion $f|_U : U \rightarrow V$ bijektiv ist mit einer stetigen Umkehrfunktion. $g := (f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ ist also stetig und erfüllt*

$$g \circ f(x) = x, \quad \forall x \in U, \quad \text{bzw.} \quad g \circ f = \text{id}_U,$$

und

$$f \circ g(y) = y, \quad \forall y \in V, \quad \text{bzw.} \quad f \circ g = \text{id}_V.$$

§37 Der Umkehrsatz

Beispiele zur Motivation: $y = Ax$ für $n \times n$ -Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $y = f(x) = x^2$. Im ersten Fall hat man die Umkehrung (Auflösung) $x = A^{-1}y$, wenn $\det A \neq 0$. Im zweiten Fall gibt es keine globale Auflösung und auch nicht überall eine lokale: $x = \pm \sqrt{y}$, $y \in \mathbb{R}_+$. [19.10.07]

(37.1) Satz: (Umkehrsatz für differenzierbare Abbildungen) Gegeben sei eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In einem Punkt $a \in \Omega$ gelte $\det Df(a) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von a und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von $f(a)$, so dass die Restriktion $f|_U : U \rightarrow V$ eine stetig differenzierbare Umkehrung $g : V \rightarrow U$ hat.

(37.2) Zusatz: Unter den Voraussetzungen des Satzes 37.1 gilt $Dg(f(a)) = Df(a)^{-1}$.

(37.3) Lemma: Es sei $f : U \rightarrow V$ stetig differenzierbar und bijektiv für offene Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit stetiger Umkehrabbildung $g := f^{-1} : V \rightarrow U$ und mit $\det Df(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Dann ist g stetig differenzierbar. Ferner gilt: Ist f q -mal stetig differenzierbar, so gilt das auch für g .

Als Wiederholung:

(37.4) Mittelwertsatz: Sei $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $a \in \Omega$ und $h \in \mathbb{R}^n$ mit $a + th \in \Omega$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt dann

$$f(a + h) - f(a) = \int_0^1 Df(a + th) \cdot h \, dt = \left(\int_0^1 Df(a + th) \, dt \right) \cdot h.$$

(37.5) Beispiele:

1° Polarkoordinaten $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto r(\cos \theta, \sin \theta)$. Wegen $\det Df(r, \theta) = r \neq 0$ ist f überall lokal umkehrbar. Beachte: f ist nicht injektiv.

2° $f(x) = x^3$ hat stetige Umkehrung, die in 0 nicht differenzierbar ist. In 0 ist die Bedingung $\det Df(0) = f'(0) \neq 0$ verletzt. [23.10.07]

3° Bedeutung der Stetigkeit von $Df(x)$: Die Funktion $f(x) = x + 2x^2 \sin 1/x$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere $f'(0) = 1$. Dennoch ist f in keiner Umgebung der 0 injektiv, f hat dort keine lokale Umkehrabbildung. Die Stetigkeitsbedingung des Satzes (37.1) ist nicht erfüllt, $x \mapsto f'(x) = \det Df(x)$ ist in 0 nicht stetig.

Man beachte, dass die Aussagen (37.1 – 4) auch für Abbildungen auf offenen Teilmengen Ω von Banachräumen gelten, es muss die Determinantenbedingung jeweils direkt ersetzt werden durch die Aussage, dass $Df(a)$ invertierbar ist.

§38 Implizite Abbildungen

Auflösen von $F(x, y) = 0$ nach y , $y = h(x)$, also $h(x)$ durch $F(x, h(x)) = 0$ implizit gegeben.
Beispiele:

1) $F(x, y) = Ax + Dy = 0$ mit linearen $A : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $D : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. $h(x) = -D^{-1}Ax$, wenn D invertierbar.

2) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ kann nicht global aufgelöst werden. Aber in dem Bereich $U =]-1, 1[\times]0, 1[$ ist $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ eine (lokale) Auflösung: $F(x, h(x)) = 0$ für alle $x \in]-1, 1[$ und es gilt für $(x, y) \in U$: $F(x, y) = 0 \iff y = h(x)$. Zu jedem Punkt auf der Sphäre $\mathbb{S}^2 = F^{-1}(0)$ findet man eine entsprechende lokale Auflösung nach der zweiten oder nach der ersten Variablen.

(38.1) Satz: (Implizite Funktionen) Es seien $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, und $a = (\dot{x}, \dot{y}) \in \Omega$ mit $F(\dot{x}, \dot{y}) = 0$. Es gelte

$$\partial_y F(a) \neq 0.$$

Dann existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von $\dot{x}$, eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}$ von $\dot{y}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \rightarrow V$ mit

$$(U \times V) \cap F^{-1}(0) = \{(x, h(x)) : x \in U\},$$

das heißt, dass für alle $(x, y) \in U \times V$ gilt

$$F(x, y) = 0 \iff y = h(x).$$

Ferner ist

$$h'(x) = -\frac{\partial_x F(x, h(x))}{\partial_y F(x, h(x))}.$$

Schließlich gilt: Ist F q -mal stetig differenzierbar, dann auch h .

(38.2) Satz: (Implizite Abbildungen) Es seien $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ offen, und $a = (\dot{x}, \dot{y}) \in \Omega$ mit $F(\dot{x}, \dot{y}) = 0$. Es gelte

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(a) \neq 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a) = \left(\frac{\partial F^j}{\partial y^i}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq m}.$$

Dann existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ von $\dot{x}$, eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ von $\dot{y}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$(U \times V) \cap F^{-1}(0) = \{(x, h(x)) : x \in U\},$$

das heißt, dass für alle $(x, y) \in U \times V$ gilt

$$F(x, y) = 0 \iff y = h(x).$$

Ferner ist

$$Dh(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, h(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, h(x)).$$

Schließlich gilt: Ist F q -mal stetig differenzierbar, dann auch h .

Beispiel: $F(x, y, z) = z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1$ erfüllt $F(1, 1, 1) = 0$. Durch $F(x, y, z) = 0$ wird dann implizit in einer geeigneten offenen Umgebung U von $(1, 1)$ eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Das folgt aus dem Satz über implizite Abbildungen 38.2 wegen

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = -1 \neq 0.$$

Es ist (ebenfalls nach dem Satz 38.2)

$$\partial_x g(1, 1) = -\partial_x F(1, 1, 1) = -2$$

und

$$\partial_y g(1, 1) = \partial_y F(1, 1, 1) = 4.$$

Wieder gilt, dass die Aussagen auch im Falle von unendlichdimensionalen Banachräumen E ihre Richtigkeit haben. Allerdings muss man von einer direkten Zerlegung $E = E_1 \times E_2$ in abgeschlossene Unterräume $E_i \subset E$ ausgehen. Für eine $\mathcal{C}^q$ -Abbildung $F : \Omega \rightarrow E_3$, $\Omega \subset \mathbb{E}$ offen, in einen weiteren Banachraum E_3 mit $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ erhält man dann analog eine lokale Auflösung, wenn die Ableitung $D_y F(\hat{x}, \hat{y}) : E_2 \rightarrow E_3$ eine stetige lineare Inverse hat.

§39 Untermannigfaltigkeiten

(39.1) Sprachgebrauch: $\varphi : U \rightarrow V$ ist ein $\mathcal{C}^q$ -Diffeomorphismus für offene $U, V \subset \mathbb{R}^n$ (oder $\subset E$ mit einem Banachraum E), wenn φ q -mal stetig differenzierbar und bijektiv mit q -mal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung ist.

(39.2) Definition: (Untermannigfaltigkeiten) Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt k -dimensionale $\mathcal{C}^q$ -Untermannigfaltigkeit ($n, k, q \in \mathbb{N}$) des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und einen $\mathcal{C}^q$ -Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ so gibt, dass

$$\Phi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

gilt.

[26.10.07]

Dabei ist $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ der Untervektorraum $\mathbb{R}^k \times \{0\} = \{(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) : x^j \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{R}^n$.

Sprachgebrauch:

1) Das „Unter“ lassen wir gelegentlich fort. Wenn wir von Mannigfaltigkeiten sprechen, meinen wir Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ für eine geeignetes n . Tatsächlich gibt es auch „abstrakte“ Mannigfaltigkeiten die in der Art, wie sie auftreten, a priori nicht Untermannigfaltigkeiten sind. Das ergibt das Konzept einer allgemeinen Mannigfaltigkeiten, das wir voraussichtlich zum Schluss der Vorlesung kennen lernen werden.

2) $k = 1$: Eindimensionale Mannigfaltigkeiten heißen auch *Kurven*; allerdings stimmt der Begriff nicht ganz mit dem im letzten Semester gefassten Begriff einer Kurve überein. Siehe Präsenzaufgaben 2.

3) $k = 2$: Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten nennt man auch *Flächen*.

4) $k = n - 1$: $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ nennt man auch *Hyperflächen*.

5) Die Differentiationsordnung q wird gelegentlich weggelassen. Dann spricht man von *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten*, wenn man eine $\mathcal{C}^q$ -Mannigfaltigkeit vorliegen hat mit $q \geq 1$.

6) $q = 0$ gibt in der Definition auch Sinn, wenn man unter einem $\mathcal{C}^0$ -Diffeomorphismus eine topologische Abbildung versteht. Man hat dann das Konzept einer topologischen Mannigfaltigkeit. Die folgenden Ausführungen allerdings benutzen die Differenzierbarkeit, insbesondere die Sätze der letzten beiden Paragraphen. Daher nehmen wir im folgenden stets $q \geq 1$ an.

Das bedeutet: $n, k, q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 1$ und $k \leq n$.

(39.3) Beispiele:

1° $M \subset \mathbb{R}^n$ n -dimensional $\iff M$ ist offen in $\mathbb{R}^n$.

2° Eine endliche Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist 0-dimensional.

3° $\mathbb{S}^1$ ist eine $\mathcal{C}^q$ -Mannigfaltigkeit der Dimension 1. Der Nachweis fällt überraschend kompliziert aus, wenn man die in der Definition geforderten Eigenschaft bestätigen will. Der Grund liegt darin, dass in der Definition relativ viel von dem umgebenden System der Mannigfaltigkeit benötigt wird. Sich davon zu lösen, ist der Sinn der folgenden Resultate, in denen drei hinreichende Kriterien beschrieben werden, die sicherstellen, dass eine vorgegebene Menge eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Dass diese Kriterien auch notwendig sind, wird in einem abschließendem Satz (vgl. 39.17) festgestellt.

(39.4) Satz: Sei $W \subset \mathbb{R}^k$ offen und $g \in \mathcal{C}^q(W, \mathbb{R}^m)$. Dann ist der Graph von g , also die Menge

$$\text{Graph}(g) = \Gamma(g) := \{(x, g(x)) : x \in W\}$$

eine k -dimensionale $\mathcal{C}^q$ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ ($k + m = n$).

Der Satz bedeutet, dass eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ bereits dann eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, wenn es zu jedem $a \in M$ eine Umgebung U gibt, so dass $M \cap U$ Graph einer stetig differenzierbaren Abbildung ist.

Jetzt ist ganz leicht zu sehen, dass $\mathbb{S}^1$ eine Mannigfaltigkeit ist, weil z.B. zu $(0, 1) \in \mathbb{S}^1$ für $U =]-1, +1[\times \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\mathbb{S}^1 \cap U = \{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in]-1, +1[\} = \Gamma(g)$$

mit $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Analog für andere Punkte anstelle von $(0, 1)$.

(39.5) Definition: Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine q -mal stetig differenzierbare Abbildung auf einer offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$.

1° $x \in \Omega$ heißt *regulärer Punkt von f* $\iff Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist surjektiv.

2° f heißt *regulär* (oder *Submersion*) $\iff$ alle $x \in \Omega$ sind reguläre Punkte von f .

3° $y \in \mathbb{R}^m$ heißt *regulärer Wert von f* : $\iff$ alle Punkte $x \in f^{-1}(y)$ sind reguläre Punkte von f .

(39.6) Bemerkungen:

1° Im Falle $n < m$ gibt es keine regulären Punkte.

2° $m \leq n$: x regulärer Punkt von $f \iff \operatorname{rg} Df(x) = m$.

3° $m = 1$: x regulärer Punkt von $f \iff \nabla f(x) \neq 0$.

4° $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y \notin f(\Omega)$ ist immer regulärer Wert von f .

5° Es sei $a \in \Omega$ ein regulärer Punkt von f . Aufgrund des Satzes über implizite Abbildungen (38.2) gibt es nach einer eventuell nötigen Permutation der Koordinaten eine Umgebung $U = W \times V \subset \Omega$ von a mit offenen $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ und eine $\mathcal{C}^q$ -Abbildung $h : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$M \cap U = \Gamma(h),$$

wobei $M := f^{-1}(f(a)) = \{x \in \Omega : f(x) = f(a)\}$.

Beweis: Durch f wird ein Gleichungssystem

$$y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m, \dots, x^n)$$

...

$$y^m = f^m(x^1, \dots, x^m, \dots, x^n)$$

gegeben, dass es in a aufzulösen gilt. Mit $b := f(a)$ soll also die Menge der $x \in \Omega$ beschrieben werden, die $b = f(x)$ erfüllen.

Nach Voraussetzung hat $Df(a)$ den Rang m , denn $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist surjektiv. Also gibt es in $Df(a)$ als Jacobimatrix mit den m Gradienten $\nabla f^j(a)$, $j = 1, \dots, m$ als Zeilenvektoren m linear unabhängige Spaltenvektoren, die durch partielle Ableitung nach geeigneten m der n Variablen x^i zustande kommen. Durch geeignete Umordnung der Variablen x^i können wir daher annehmen, dass die letzten m der Spalten von $Df(a)$ linear unabhängig sind, also die $(\partial_i f^j(a))_{1 \leq j \leq m}$, $i = n - m + 1, \dots, n$. Zur Anpassung des Problems an die Voraussetzungen des Satzes über implizite Abbildungen schreiben wir $k = n - m$ und $x = (z, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$ mit $z = (x^1, \dots, x^k)$ und $y = (y^1, \dots, y^m) = (x^{k+1}, \dots, x^n)$; weiterhin $F(z, y) := f(z, y) - f(a)$. Dann ist offensichtlich $F(a) = 0$ und $F^{-1}(0) = M = f^{-1}(f(a))$. Und die Matrix

$$\left(\frac{\partial F^j}{\partial y^i}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq m} = \left(\frac{\partial f^j}{\partial y^i}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$$

hat nichtverschwindende Determinate entsprechend der Wahl der Koordinaten $y^j = x^{k+j}$. Es sind also die Voraussetzungen des Satzes über implizite Abbildungen erfüllt, und wir wissen, dass es mit der Notation $a = (\hat{z}, \hat{y})$ eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ von $\hat{z}$, eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ von $\hat{y}$ und eine $\mathcal{C}^q$ -Abbildung $h : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$F^{-1}(0) \cap (W \times V) = \Gamma(h)$$

gilt. Damit ist $M \cap U = \Gamma(h)$ bewiesen. ■

Aus diesem Resultat (39.6.5°) folgt unmittelbar:

(39.7) Satz: (Kriterium) $0 \in f(\Omega)$ sei regulärer Wert einer q -mal stetig differenzierbaren Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $M = f^{-1}(0)$ eine $n - m$ -dimensionale $\mathcal{C}^q$ -Mannigfaltigkeit.

Zusatz: M ist lokal Graph einer $\mathcal{C}^q$ -Abbildung, vgl. Herleitung in 39.6.5°.

(39.8) Beispiele:

1° Jetzt ist es ganz leicht, $\mathbb{S}^n$ als Hyperfläche nachzuweisen. Es ist $\mathbb{S}^n = f^{-1}(0)$ mit $f(x) = (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 - 1 = \|x\|^2 - 1$ und es gilt $\nabla f(x) = 2x$ (bzw. $= 2x^T$). Für $x \in \mathbb{S}^n$ ist $2x \neq 0$.

[30.10.07]

2° Eine *Niveaufläche* zu einer C^q -Abbildung $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist definitionsgemäß eine Menge der Form $f^{-1}(c)$ für einen regulären Wert $c \in f(\Omega)$. Eine Niveaufläche ist dann nach dem Kriterium 39.7 eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$. Ein einfaches Beispiel dazu ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. f ist surjektiv und beliebig oft stetig differenzierbar mit $\nabla f(x, y) = 2(x, -y)^T$. Für $c \neq 0$ ist daher $f^{-1}(c)$ eine Niveaufläche (der Dimension 1), und zwar besteht $f^{-1}(c)$ für negative c aus 2 Hyperbeln, den Graphen der Funktionen $y = \pm \sqrt{x^2 - c}$, und für positive c entsprechend aus 2 Hyperbeln, den Graphen der Funktionen $x = \pm \sqrt{y^2 + c}$. Die Menge $f^{-1}(0) = \{(x, y) : (x + y)(x - y) = 0\}$ besteht aus zwei Geraden durch $(0, 0)$, den Diagonalen, und diese Menge ist keine Untermannigfaltigkeit, weil es in $(0, 0) \in f^{-1}(0)$ keine Umgebung U mit einem Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$, für den $U \cap f^{-1}(0) = V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ erfüllt wäre, gibt. Gelegentlich nennt man eine solche Menge dann eine *ausgeartete Niveaufläche*.

In Verallgemeinerung hat man in $\mathbb{R}^n$ für $f(x) = (x^1)^2 - \sum_{j=2}^n (x^j)^2$ die Niveaufläche $f^{-1}(c)$, $c \neq 0$, die im positiven Fall $c = m^2$, $m > 0$ aus zwei Hyperboloiden (oder Hyperbelschalen)

$$x^1 = \pm \sqrt{\sum_{j=2}^n (x^j)^2 + m^2}$$

besteht. Und in $c = 0$ hat man analog zum Fall $n = 2$ die Ausartung

$$x^1 = \pm \sqrt{\sum_{j=2}^n (x^j)^2},$$

die aus zwei spitzen Kegeln besteht, die sich in 0 berühren, und die keine Mannigfaltigkeit ist.

3° Die Quadrik als weitere Verallgemeinerung von 2°: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix $A \neq 0$ und $q(x) = x^T A x$ die zugehörige quadratische Form. Es gilt $\nabla q(x) = 2Ax$. Also ist für $c \neq 0$ jeder Punkt $x \in q^{-1}(c)$ regulär wegen $x^T A x = c \neq 0$. $q^{-1}(c)$ ist also Niveaufläche und Hyperfläche, wenn $c \in q(\mathbb{R}^n)$.

4° Vorausbemerkung: Die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ ist offen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ (z.B. weil $\det$ eine stetige Funktion ist), also ist $GL(n, \mathbb{R})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n^2 . $GL(n, \mathbb{R})$ hat diverse wichtige Untergruppen. Zum Beispiel die orthogonale Gruppe $O(n) = \{A : A^T A = \text{id}_{\mathbb{R}^n}\}$. In den Übungen wird mit Hilfe von 39.7 gezeigt, dass $O(n)$ eine C^q -Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ für beliebige $q \in \mathbb{N}$ ist.

Im Falle $n = 2$ ergeben die Bedingungen an die Koeffizienten einer 2×2 -Matrix A , die sicherstellen, dass A zu $O(2)$ gehört, 4 Gleichungen an die 4 Koeffizienten. Diese Gleichungen sind aber nicht unabhängig. Eine der Gleichungen ist überflüssig, und die anderen drei liefern als Lösungsmenge eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die 2 Kreislinien $\mathbb{S}^1$ entspricht.

Die Notwendigkeit, einige der definierenden Funktionen wegzulassen, ergibt sich oft, und man hat in Verallgemeinerung zu 37.7 das folgende Kriterium:

(39.9) Satz: $M \subset \mathbb{R}^n$ k -dimensionale C^q -Untermannigfaltigkeit

$\iff \forall a \in M \exists U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, und $f \in C^q(U, \mathbb{R}^m)$ mit

1° $M \cap U = f^{-1}(0)$

$$2^\circ \forall x \in U : \operatorname{rg} Df(x) = n - k.$$

Im Übrigen hat man für Untergruppen von $\operatorname{GL}(n, \mathbb{R})$ das folgende nützliche Resultat: *Jede abgeschlossen Untergruppe G von $\operatorname{GL}(n, \mathbb{R})$ ist eine $\mathcal{C}^q$ -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit beliebigem $q > 0$.* (abgeschlossene im topologischen Sinne, dass $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine abgeschlossen Teilmenge in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

(39.10) Definition: $f \in \mathcal{C}^q(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt *Immersion* (oder genauer $\mathcal{C}^q$ -Immersion), wenn $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stets injektiv ist für $x \in \Omega$.

Damit f Immersion sein kann, muss $n \leq m$ gelten.

(39.11) Beispiele:

1° $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, ist eine Immersion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. f ist nicht injektiv. Aber es ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$ eine Untermannigfaltigkeit.

2° Ebenso die Immersion auf die Ohrschnecke: $t \mapsto (1 + 2 \cos t)(\cos t, \sin t)$.

3° $t \mapsto f(t) = \sin 2t(-\sin t, \cos t)$, $t \in]-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi[$, ist eine injektive $\mathcal{C}^q$ -Immersion, $q > 0$. Das Bild $f(]-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi[)$ ist aber keine Mannigfaltigkeit. Bei $(0, 0) \in f(]-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi[)$ findet man keine Umgebung U , in der sich $f(]-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi[)$ linearisieren ließe. Jede solche Umgebung U enthält einerseits Punkte $f(t)$ mit t nahe bei 0 und andererseits Punkte $f(t')$ mit t' nahe bei $\frac{1}{2}\pi$.

(39.12) Satz: (Immersionssatz) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine $\mathcal{C}^q$ -Immersion mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $q > 0$. Dann gibt es zu jedem $\hat{x} \in \Omega$ eine offene Umgebung $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, so dass $f(U_0)$ eine n -dimensionale $\mathcal{C}^q$ -Untermannigfaltigkeit ist.

[02.11.07]

(39.13) Beispiele:

1° Die *Neilsche Parabel* N ist die Spur der Kurve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$, also $N := f(\mathbb{R})$. $f : \mathbb{R} \rightarrow N$ ist offensichtlich bijektiv. f ist stetig differenzierbar mit $\dot{f}(t) = (2t, 3t^2)$. Daher ist f auf $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Immersion, während die Ableitung $\dot{f}(0) = (0, 0)$ offensichtliche nicht injektiv ist.

Nach Satz 39.12 gibt es daher zu jedem Punkt $a \in N$, $a \neq (0, 0)$, eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$, so dass $U \cap N$ eine $\mathcal{C}^q$ -Mannigfaltigkeit ist, was sich natürlich auch leicht direkt nachprüfen lässt. Für den Punkt $(0, 0)$ macht der Satz keine Aussage. Es gilt aber hier, dass es keine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^2$ von $(0, 0)$ gibt, so dass $W \cap N$ eine Mannigfaltigkeit ist.

2° Ein geläufige „Parametrisierung“ der Sphäre $\mathbb{S}^2$ wird durch

$$\psi(\varphi, \theta) := (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \quad (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2,$$

gegeben. ψ ist beliebig oft differenzierbar und es gilt $\psi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2$. Wegen der Perioden von $\sin$ und $\cos$ ist ψ nicht injektiv. Die Ableitung $D\psi(\varphi, \theta)$ hat in jedem Punkt (φ, θ) mit $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ den Rang 2, in den anderen Punkten den Rang 1. Also ist ψ auf $\Omega = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \notin \pi\mathbb{Z}\}$ eine $\mathcal{C}^q$ -Immersion.

Auf der Menge $V :=]0, 2\pi[\times]0, \pi[\subset \mathbb{R}^2$ ist ψ injektiv und mit $U := \psi(V)$ existiert die Umkehrabbildung $\phi := \psi^{-1} : U \rightarrow V$. ϕ ist wie ψ bijektiv und stetig, wir haben also eine topologische Abbildung $\phi : U \rightarrow V$, deren Umkehrung ψ eine Immersion ist. So etwas nennt man „Karte“.

(39.14) Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale $\mathcal{C}^q$ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Eine $\mathcal{C}^q$ -Karte $\varphi : U \rightarrow V$ ist durch die folgenden Daten gegeben.

- 1) $U \subset M$ ist offene Teilmenge von M (in der Relativtopologie).
- 2) $V \subset \mathbb{R}^k$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$.
- 3) $\varphi : U \rightarrow V$ ist topologisch.
- 4) $\varphi^{-1} : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine $\mathcal{C}^q$ -Immersion.

(39.15) Beispiele:

1° Das Beispiel 39.13.2° liefert für jede offene Teilmenge $V \subset]0, 2\pi[\times]0, \pi[\subset \mathbb{R}^2$ mit $U := \psi(V) \subset \mathbb{S}^2$ eine Karte $\varphi := (\psi|_V)^{-1}$.

2° Ganz andere Karten für $\mathbb{S}^2$ entstehen durch die so genannte *stereographische Projektion*. Für $\mathbb{S}^n$ und $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ wird bezüglich der Koordinaten $(x, z) = (x^1, \dots, x^n, z)$ ($x^{n+1} = z$) durch $U := \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ und

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{1-z}x$$

eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n = V$ definiert. φ ist bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\|\xi\|^2 + 1} \left(2\xi, \|\xi\|^2 - 1 \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

An den Formeln kann man erkennen, dass φ topologisch ist. Schließlich ist ψ eine Immersion, und damit φ eine $\mathcal{C}^q$ -Karte ($q \geq 1$ beliebig).

3° Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre $\mathcal{C}^q$ -Kurve im Sinne der Vorlesung MIIA, also $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Dann ist $\psi := \gamma|_{]a, b[} :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Sei γ injektiv. Dann ist die Spur $\psi(]a, b[) = M$ eine $\mathcal{C}^q$ -Mannigfaltigkeit und die Umkehrung $\varphi := \psi^{-1} : M \rightarrow]a, b[$ eine Karte. Man beachte: In der Regel ist $\psi([a, b])$ nicht Mannigfaltigkeit.

(39.16) Satz: $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale $\mathcal{C}^q$ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem Punkt $a \in M$ eine $\mathcal{C}^q$ -Karte $\varphi : U \rightarrow V$ mit $a \in U$, wobei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen in $\mathbb{R}^k$ ist.

Ein $\mathcal{C}^q$ -Atlas auf eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Kollektion $(\varphi_\iota : U_\iota \rightarrow V_\iota)_{\iota \in I}$ von Karten mit $M = \bigcup \{U_\iota : \iota \in I\}$. Satz 39.16 besagt also, dass jede k -dimensionale $\mathcal{C}^q$ -Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ einen $\mathcal{C}^q$ -Atlas besitzt.

Zusammengefasst liefern die Resultate dieses Paragraphen:

(39.17) Äquivalenzsatz: Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1° M ist k -dimensionale $\mathcal{C}^q$ -Untermannigfaltigkeit.
- 2° M ist lokal Graph einer $\mathcal{C}^q$ -Abbildung¹.
- 3° M ist lokal Nullstellengebilde einer $\mathcal{C}^q$ -Abbildung mit konstantem Rang $n - k$ der Ableitung².
- 4° M hat einen $\mathcal{C}^q$ -Atlas aus Karten $\varphi_\iota : U_\iota \rightarrow V_\iota \subset \mathbb{R}^k$ mit Werten in der offenen Menge $V_\iota \subset \mathbb{R}^k$.

In den Übungen wurde der Satz vom Rang behandelt.

¹das heißt, es gibt zu jedem Punkt $a \in M$ nach einer geeigneten Permutation der Koordinaten eine offene Umgebung $U = W \times V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ von a mit $W \subset \mathbb{R}^k$ offen und eine $\mathcal{C}^q$ -Abbildung $h : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $M \cap U = \Gamma(h)$.

²das heißt, es gibt zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine $\mathcal{C}^q$ -Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\text{rg} Df(x) = n - k$ für alle $x \in U$ und $M \cap U = f^{-1}(0)$.

(40.18) Rangsatz: Die $\mathcal{C}^q$ -Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ habe auf der offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ einen konstanten Rang r in der Umgebung U eines Punktes $a \in \Omega$, d.h. $\text{rg} Df(x) = r$ für alle $x \in U$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_1 \subset U$ von a und eine offene Umgebung $V_1 \subset \mathbb{R}^m$ von $f(a)$, so wie $\mathcal{C}^q$ -Diffeomorphismen $g : U_1 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^n$ und $h : V_1 \rightarrow V_2$ mit $g(a) = 0$, $h(f(a)) = 0$, so dass

$$h \circ f \circ g^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$$

für alle $x \in U_2$ gilt. Mit der linearen Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$ auf die ersten r Koordinaten gilt also

$$h \circ f \circ g^{-1} = \pi|_{U_2}.$$

Auch für das Konzept der Untermannigfaltigkeiten gibt es eine entsprechende Version für unendlichdimensionale Banachräume, wobei man sich bei der Definition wie im Falle des Satzes über implizite Abbildungen wieder auf direkte Zerlegungen $E = E_1 \times E_2$ mit abgeschlossenen Unterräumen E_i beschränken muss.

§40 Tangentialraum

Im Folgenden sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale $\mathcal{C}^q$ -Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $a \in M$ ein Punkt und $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ eine $\mathcal{C}^q$ -Karte mit $a \in U$, zu der ja die Immersion $\psi = \varphi^{-1} : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ gehört. Ferner: $b = \varphi(a)$.

U wird auch *Koordinatenumgebung* genannt und V der *Parameterbereich*. ψ die *Parametrisierung*. Für $x \in U$ ist $\varphi(x) = q \in V$ der Parameter, der x beschreibt. $q = (q^1, \dots, q^k)$ sind die durch die Karte gegebenen *Koordinaten*. Diese Notation gilt für den gesamten Paragraphen.

(40.1) Definition: $v \in \mathbb{R}^n$ ist ein *Tangentialvektor an M in a* , wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit $\gamma(0) = a$ und $\dot{\gamma}(0) = v$. $T_a M$ ist die Gesamtheit der Tangentialvektoren an M in a .

(40.2) Lemma: $T_a M$ ist k -dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

[06.11.07]

(40.3) Bemerkungen:

1° Es gilt $T_a M = \text{im} D\psi(b) = \{D\psi(b) \cdot w : w \in \mathbb{R}^k\}$ und es ist

$$D\psi(b) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_a M$$

ein $\mathbb{R}$ -Vektorraumisomorphismus. Außerdem wird durch

$$\psi_j := \partial_j \psi = \frac{d}{dt} \psi(b + te_j)|_{t=0} \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, k,$$

eine Basis von $T_a M$ gegeben. Für $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$ mit den Komponenten $\psi^j : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\psi_j = (\partial_j \psi^1(b), \dots, \partial_j \psi^n(b)) \in T_a M \subset \mathbb{R}^n.$$

2° Im Falle von $\Phi(U' \cap M) = V' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ für einen $\mathcal{C}^q$ -Diffeomorphismus $\Phi : U' \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U'$, $U' \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V' \subset \mathbb{R}^n$ offen, gilt

$$T_a M = D\Phi(a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

3° Im Falle, dass M lokal ein Graph ist, also $(W \times V'') \cap M = \Gamma(h)$ mit $h \in \mathcal{C}^q(W, \mathbb{R}^{n-k})$, $a = (\dot{x}, \dot{y}) \in W \times V''$, $W \subset \mathbb{R}^k$ offen, $V'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ offen, gilt

$$T_a M = \Gamma(Dh(\dot{x})).$$

4° Im Falle von $U' \cap M = f^{-1}(0)$ für eine $\mathcal{C}^q$ -Abbildung $f : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U' \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $\text{rg} Df(x) = n - k$ für alle $x \in U'$ gilt

$$T_a M = \ker Df(a).$$

Beispiel: $\mathbb{S}^n$ mit $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Für $\mathcal{C}^1$ -Kurven γ mit $\gamma(t) \in \mathbb{S}^n$ für alle t und $\gamma(0) = a \in \mathbb{S}^2$ gilt $f(\gamma(t)) = 0$ also $\nabla f(a) \cdot \dot{\gamma}(0) = 0$. Das bedeutet insbesondere:

$$v \in T_a \mathbb{S}^n \iff v \perp \nabla f(a).$$

(40.4) Definition: $N_a M := (T_a M)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ ist der *Normalenraum* an M im Punkte $a \in M$.

(40.5) Lemma:

$$1^\circ \quad N_a M \oplus T_a M^\perp.$$

2° Wenn $U' \cap M = f^{-1}(0)$ für $f : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ in einer in $\mathbb{R}^n$ offenen Umgebung U' von $a \in M$ mit $\text{rg} Df(a) = n - k$, dann gilt

$$N_a M = \text{span}\{\nabla f^j(a) : j = 1, \dots, m\}.$$

(40.6) Bemerkungen:

1° $T_a M$ ist intrinsisch, $N_a M$ nicht.

2° Im Falle einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ im Raum und einer Karte $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ von M mit Parametrisierung $\psi = \varphi^{-1}$ hat die Tangentialebene $T_a M$ an M in a die Basis (ψ_1, ψ_2) (siehe oben 40.3.1°) und $N_a M$ wird durch den Normalenvektor $\psi_1 \times \psi_2$ aufgespannt. Der Einheitsnormalenvektor

$$\frac{\psi_1 \times \psi_2}{\|\psi_1 \times \psi_2\|}$$

ist eindeutig bis auf Vorzeichen.

Geometrie auf Mannigfaltigkeiten:

Die Tangentialräume an eine Mannigfaltigkeit gehören also zur Mannigfaltigkeit, ähnlich wie die Ableitungen zu den differenzierbaren Abbildungen gehören. Die Tangentialräume gestatten, die euklidische Geometrie des $\mathbb{R}^n$ auf Untermannigfaltigkeiten zu übertragen: $T_a M$ ist als Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ein euklidischer Raum der Dimension k , in dem Tangentialraum hat man daher den Begriff der Länge von Vektoren und das Konzept eines Winkels zwischen Vektoren.

Bezüglich einer durch eine Karte gegebenen Basis (ψ_j) von $T_a M$ hat man insbesondere den

(40.7) Definition: Maßtensor $g = (g_{ij})$, $g_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq k$. Für Tangentialvektoren $X = X^i \psi_i$, $Y = Y^j \psi_j \in T_a M$ gilt

$$\langle X, Y \rangle = g_{ij} X^i Y^j = X^T g Y.$$

(g_{ij}) wird auch die *Fundamentalform* von M bezüglich der Karte φ genannt.

Bemerkungen:

1) Das funktioniert auch für den Fall eines unendlichdimensionalen reellen Hilbertraumes anstelle von $\mathbb{R}^n$, allerdings ohne die zum Schluss beschriebenen Basisdarstellungen.

2) Analog zum euklidischen Skalarprodukt ist es auch interessant, andere Skalarprodukte zu betrachten (z.B. Minkowski-Skalarprodukt).

Es seien jetzt zwei Karten $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ und $\bar{\varphi} : \bar{U} \rightarrow \bar{V} \subset \mathbb{R}^k$ mit $a \in U \cap \bar{U}$ gegeben, und wir nehmen $U = \bar{U} = U \cap \bar{U}$ an. Es sei $b = \varphi(a)$, $\bar{b} = \bar{\varphi}(a)$. Nach den Voraussetzungen an die Karten ist

$$F := \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} = (\bar{\psi})^{-1} \circ \psi : V \rightarrow \bar{V}$$

ein $\mathcal{C}^q$ -Diffeomorphismus der in $\mathbb{R}^k$ offenen V und $\bar{V}$ (dabei $\bar{\psi} = (\bar{\varphi})^{-1}$). F wird *Koordinatenwechsel* (auch: Koordinatentransformation) oder *Kartenwechsel* genannt.

(40.8) Satz: (Transformationsverhalten)

$$1^\circ \quad \psi_j(b) = \partial_j F^k(b) \psi_k(\bar{b}).$$

$$2^\circ \quad \bar{X}^j = \partial_i F^j(b) X^i \text{ für Tangentialvektoren } X = X^i \psi_i = \bar{X}^j \bar{\psi}_j \in T_a M.$$

$$3^\circ \quad g_{\mu\nu}(b) = \bar{g}_{ij}(\bar{b}) \partial_\mu F^i(b) \partial_\nu F^j(b).$$

[09.11.07]

(40.9) Beispiele:

1° Sphäre $\mathbb{S}^2$ mit der Parametrisierung $\psi(\phi, \theta) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$:

$$g_{\phi\phi} = g_{11} = \sin^2 \theta, \quad g_{\phi\theta} = g_{12} = 0, \quad g_{\theta\theta} = g_{22} = 1.$$

2° Graph: Es sei $M = \Gamma(h)$ für eine $\mathcal{C}^q$ -Funktion $h : W \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer in $\mathbb{R}^k$ offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^k$. Dann ist $\psi(x) = (x, h(x))$, $x \in W$, eine $\mathcal{C}^q$ -Immersion und topologisch als Abbildung $\psi : W \rightarrow \Gamma(h)$. Daher ist $\varphi = \psi^{-1}$ eine (globale) Karte. Die Basisvektoren ψ_j haben die Form

$$\psi_j(x) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \partial_j h(x))$$

und es folgt

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \partial_i h(x) \partial_j h(x).$$

Man beachte, dass (g_{ij}) nicht Diagonalmatrix ist, anders als im vorangehenden Beispiel.

3° Spezialfall zu 2°: Im Falle der oberen Schale des Hyperboloids zu

$$\omega(p) := \sqrt{(\|p\|^2 + m^2)}, \quad p = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^k.$$

also $M = \{(p, \omega(p)) : p \in \mathbb{R}^k\}$ („Massenschale“) und

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} + \frac{p_i p_j}{\omega(p)^2}.$$

Wozu wird der Maßtensor eingeführt? Die Länge eines Tangentialvektors $X = X^j \psi_j \in T_a M$ lässt sich mit Hilfe des Maßtensors formulieren, und zwar gilt

$$\|X\| = \sqrt{\langle X^i \psi_i, X^j \psi_j \rangle} = \sqrt{g_{ij} X^i X^j}.$$

Die Kurvenlänge einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ in $\mathbb{R}^n$, die ganz in U bezüglich einer Karte $\varphi : U \subset V$ von M verläuft, ist

$$s(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j} \, dt.$$

Will man den Integranden noch genauer bezeichnen, insbesondere die Abhängigkeit von t , so seien $(\varphi \circ \gamma)^i : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ die Komponenten von $\varphi \circ \gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ und man erhält mit $\dot{\gamma}^j(t) = (\varphi \circ \gamma)^j(t)$

$$s(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(\varphi \circ \gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)} dt.$$

Diese Notation ist nicht ganz konsistent, aber man möchte die g_{ij} in ihrer Abhängigkeit von den Punkten der Mannigfaltigkeiten so schreiben, dass die Abhängigkeit von der Parameterwerten $q \in V$ zum Ausdruck kommt. Eine konsistente Notation erhält man mit $q = \varphi \circ \gamma$ und dann

$$s(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(q(t)) \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t)} dt.$$

Im Übrigen haben wir hier einmal mehr verwendet, dass in dieser Situation die Komposition $\varphi \circ \gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar ist (vgl. Präsenzaufgaben 4).

(40.10) Definition: Die *Distanz* dist_M in der Mannigfaltigkeit M zwischen Punkten $a, b \in M$ ist

$$\text{dist}_M(a, b) := \inf\{s(\gamma) : \gamma \in \mathcal{W}(a, b)\}.$$

Dabei ist $\mathcal{W}(a, b)$ die Menge aller stückweise stetig differenzierbaren Kurven $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die ganz in M verlaufen, also $\gamma([t_0, t_1]) \subset M$ erfüllen, und die a mit b verbinden, für die also auch noch $\gamma(t_0) = a$, $\gamma(t_1) = b$ gilt.

(40.11) Beispiele:

1° Euklidischer Abstand: Es gilt $\text{dist}_{\mathbb{R}^n}(a, b) = \|a - b\|$ in der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$. Denn die Geraden sind die kürzesten Verbindungen zwischen den Punkten des $\mathbb{R}^n$. (Vgl. Präsenzübungen 4).

2° In einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^n$ als n -dimensionaler Mannigfaltigkeit ist 1° in der Regel nicht richtig, z.B. im Falle von 2 sich schneidenden offenen Kugeln. Auf der Vereinigung zweier offenen Kugeln B_1, B_2 , die sich nicht schneiden, wird die Distanz ∞ für Punkte $a \in B_1$ und $b \in B_2$.

3° Auf $\mathbb{S}^2$: $\text{dist}_{\mathbb{S}^2}(N, S) = \pi$, $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$.

4° *Distanz* in $M = \mathbb{S}^n$: Für $a, b \in \mathbb{S}^n$ mit $a = -b$ (Antipoden) gilt $\text{dist}_{\mathbb{S}^n}(a, b) = \pi$. Für $a, b \in \mathbb{S}^n$ mit $a \neq b$ und $a \neq -b$ gibt es den eindeutig bestimmten „Großkreis“ $S' = \mathbb{S}^n \cap (\mathbb{R}a + \mathbb{R}b)$ und es ist $\text{dist}_{\mathbb{S}^n}(a, b) = \text{dist}_{S'}(a, b)$ mit $S' \cong \mathbb{S}^1$. Schließlich ist $\text{dist}_{\mathbb{S}^n}(a, b) = \phi$ für den (kleineren) positiven Winkel zwischen a und b .

(40.12) Satz:

1° dist_M ist eine Metrik auf M , wenn M wegweise zusammenhängend ist.

2° dist_M erzeugt die von $\mathbb{R}^n$ induzierte Topologie auf M .

In der Regel wird das Infimum in $\text{dist}_M(a, b) = \inf\{s(\gamma) : \gamma \in \mathcal{W}(a, b)\}$ nicht angenommen. Zum Beispiel gilt das für $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $a = (1, 0)$, $b = (-1, 0)$.

(40.13) Definition: (Geodätische) Eine natürlich parametrisierte Kurve $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die ganz in M verläuft, ist eine *Geodätische* in M , wenn sie im Kleinen eine kürzeste Verbindung ist, das soll heißen:

Zu jedem Parameter $t^* \in [0, L]$ gibt es im Falle $t^* < L$ ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\gamma|_{[t^*, t^* + \varepsilon]}$ für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ kürzeste Verbindung in M von $\gamma(t^*)$ und $\gamma(t^* + \varepsilon)$ ist, d.h. $s(\gamma|_{[t^*, t^* + \varepsilon]}) =$

$\text{dist}_M(\gamma(t^*), \gamma(t^* + \varepsilon))$. Und im Falle $0 < t^*$ analog ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\gamma|_{[t^* - \varepsilon, t^*]}$ für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ kürzeste Verbindung in M von $\gamma(t^*)$ und $\gamma(t^* - \varepsilon)$ ist, d.h. $s(\gamma|_{[t^* - \varepsilon, t^*]}) = \text{dist}_M(\gamma(t^*), \gamma(t^* - \varepsilon))$.

(Ergänzende Bemerkung: Die Definition setzt voraus, dass eine Geodätische immer mindestens einmal stetig differenzierbar ist. Wenn man diese Bedingung abschwächt z.B. zu stückweise stetig differenzierbar wie in einer Übungsaufgabe, dann muss die Minimalisierungsbedingung, im Kleinen eine kürzeste Verbindung zu sein, anders gefasst werden, und zwar wie folgt:

Zu jedem Parameter $t^* \in [0, L]$ gibt es im Falle $0 < t^* < L$ ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\gamma|_{[t^* - \varepsilon', t^* + \varepsilon]}$ für alle $\varepsilon, \varepsilon' \in [0, \varepsilon_0]$ kürzeste Verbindung in M von $\gamma(t^* - \varepsilon')$ und $\gamma(t^* + \varepsilon)$ ist, d.h. $s(\gamma|_{[t^* - \varepsilon', t^* + \varepsilon]}) = \text{dist}_M(\gamma(t^* - \varepsilon'), \gamma(t^* + \varepsilon))$. Und im Falle $t^* = 0$ (bzw. $t^* = L$) gibt es analog ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\gamma|_{[0, \varepsilon]}$ (bzw. $\gamma|_{[L - \varepsilon, L]}$) für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ kürzeste Verbindung in M von $\gamma(0)$ und $\gamma(\varepsilon)$ (bzw. $\gamma(L)$ und $\gamma(L - \varepsilon)$) ist, d.h. $s(\gamma|_{[0, \varepsilon]}) = \text{dist}_M(\gamma(0), \gamma(\varepsilon))$. $s(\gamma|_{[L - \varepsilon, L]}) = \text{dist}_M(\gamma(L), \gamma(L - \varepsilon))$.)

Zum Beispiel sind die natürlich parametrisierten Großkreise in $M = \mathbb{S}^n$ Geodätische. Auf Geodätische als Lösung eines Variationsproblems kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

(40.14) Definition: (Kritischer Punkt unter einer Nebenbedingung) Sei $f \in \mathcal{C}^1(U', \mathbb{R})$ in einer offenen Umgebung $U' \subset \mathbb{R}^n$ eines Punktes $a \in M$ einer $\mathcal{C}^q$ -Mannigfaltigkeit definiert. a ist ein *kritischer Punkt von $f|_M$* (oder *kritischer Punkt von f unter der Nebenbedingung M*), wenn für alle stetig differenzierbaren $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = a$ gilt: 0 ist kritischer Punkt von $f \circ \gamma$, also $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} = 0$.

Offensichtlich ist ein Punkt $a \in M$, in dem $f|_M$ ein lokales Minimum oder Maximum, also ein lokales Extremum, hat, stets ein kritischer Punkt für f unter der Nebenbedingung M .

(40.15) Lemma: $a \in M$ ist genau dann kritisch für f unter der Nebenbedingung M , wenn

$$Df(a)|_{T_a M} = 0.$$

(40.16) Satz: (Methode der Lagrange-Multiplikatoren) In der offenen Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^n$ sei die Mannigfaltigkeit $M = g^{-1}(0)$ durch $g \in \mathcal{C}^1(U', \mathbb{R}^{n-k})$ mit der Rangbedingung $\text{rg} Dg(x) = n - k$ für alle $x \in U'$ gegeben. Es sei $f \in \mathcal{C}^1(U', \mathbb{R})$ und $a \in M$. Dann ist f genau dann kritisch in a unter der Nebenbedingung $g = 0$, wenn es $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n - k$, mit

$$D(f + \lambda_1 g^1 + \dots + \lambda_{n-k} g^{n-k})(a) = 0$$

gibt, wobei $g = (g^1, \dots, g^{n-k})$.

[13.11.07]

Die Methode besteht darin, das nichtlineare Gleichungssystem in den $2n - k$ Unbestimmten $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$

$$g(a) = 0$$

$$\nabla f(a) + \lambda_j \nabla g^j(a) = 0$$

zu lösen.

(40.17) Beispiele:

1° Pendel: In welchen Punkten ist $f(x, y) = y$ extremal unter $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$?

Der Ansatz $f_x + \lambda g_x = 2\lambda x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 1 + 2\lambda y = 0$ liefert als mögliche kritische Punkte $a = (x, y)$ von f unter $g = 0$ zunächst $x = 0$ und $y = -(2\lambda)^{-1}$, und daher $a = (0, \pm r)$. Das sind

in der Tat die beiden einzigen Extremwerte von f unter $g = 0$, da stets $f(x, y) = y \in [-r, r]$. Es handelt sich auch um die beiden Gleichgewichtspunkte des Pendels.

2° Wo ist $f(x, y) = x$ extremal unter $g = 0$ für $g(x, y) = y^2 - x^3$? (In $(0, 0)$ ist $g^{-1}(0)$ keine Mannigfaltigkeit, aber $M = g^{-1}(0) \setminus \{(0, 0)\}$ ist Mannigfaltigkeit.)

Der Ansatz $f_x + \lambda g_x = 1 - 3\lambda x^2 = 0$, $f_y + \lambda g_y = 2\lambda y = 0$ liefert entsprechend $y = 0$ und damit sofort $x = 0$. Daher hat f kein Extremum in M , aber möglicherweise in der Singularität $(0, 0)$. Tatsächlich gilt für alle (x, y) mit $g(x, y) = 0$ sofort $x^3 = y^2 \geq 0$ also auch $f(x) = x \geq 0$. Also hat f in $a = (0, 0)$ ein absolutes Minimum unter $g = 0$ und ansonsten kein lokales Extremum.

§41 Euler-Lagrange-Gleichungen

Es geht um Variationsrechnung als Verallgemeinerung der Bestimmung von Extrema bei Funktionen. Statt Funktionen $f = f(x)$ haben wir in der Variationsrechnung Funktionale $S = S(\gamma)$ auf Räumen von Funktionen γ , die hier in diesem Paragraphen stets Kurven sind. Anstelle von kleinen Änderungen von Punkten x im Definitionsbereich der Funktion f werden jetzt die Kurven γ verändert und diese Veränderung nennt man „Variation“. Daher die Bezeichnung Variationsrechnung. Die Variation der Kurve γ hat typischerweise die Form $\gamma + \varepsilon \eta$ mit einer (kleinen) Konstanten $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und einer weiteren Kurve η , die in 0 beginnt und auch dort endet.

Zur Motivation ein Beispiel aus der Geometrie, das wir aus dem vorangehenden Paragraphen kennen: Zu Punkten $a, b \in M$ in einer Mannigfaltigkeit wird eine Kurve γ gesucht, welche die Distanz in M minimiert:

$$\text{dist}_M(a, b) = s(\gamma)$$

wobei $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ natürlich $\gamma(t_0) = a, \gamma(t_1) = b$, erfüllt und außerdem noch $\|\dot{\gamma}\| = 1$.

Dabei ist

$$s(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j} dt$$

für die symmetrische Matrix $g = (g_{ij})$ mit Funktionen $g_{ij} : Q \rightarrow \mathbb{R}$, die von einer lokalen Parametrisierung $\psi : Q \rightarrow U \subset M$ kommen.

Allgemeiner betrachten wir zu einer offenen Teilmenge $Q = V \subset \mathbb{R}^n$ (zum Beispiel als Parameterbereich einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit) eine so genannte *Lagrangefunktion* $L : Q \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $L = L(q, v)$, von der in der Regel nicht mehr vorausgesetzt wird, als dass sie zweimal stetig differenzierbar ist. Zu einer solchen Funktion und zu vorgegebenen Punkten $a, b \in Q$ gehört das *Wirkungsfunktional*

$$S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}) dt$$

zu $\mathcal{C}^1$ -Abbildungen (Kurven) $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow Q$ mit $\gamma(t_0) = a, \gamma(t_1) = b$. Gesucht wird γ , so dass $S(\gamma)$ minimal wird

$$S(\gamma) = \min S!$$

In Abschwächung dazu wird ein γ gesucht, das extremal oder gar nur stationär ist für S . Wir präzisieren im Folgenden, was das genau bedeuten soll:

Für Punkte $a, b \in Q$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\mathcal{W}(a, b)$ die Menge aller stückweise stetig differenzierbaren Kurven $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow Q$, die a mit b verbinden, für die also $\gamma(t_0) = a, \gamma(t_1) = b$ gilt. $\mathcal{W}(a, b)$ ist Teilmenge des Vektorraumes $\mathcal{C}_{\text{st}}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ aller stückweise stetig differenzierbaren Kurven

in $\mathbb{R}^n$. Dieser Raum $\mathcal{C}_{\text{st}}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ kann mit der Norm $\|\gamma\|_1 := \sup\{\|\gamma(t)\| + \|\dot{\gamma}(t)\| : t \in [t_0, t_1]\}$ versehen werden und wird damit zu einem Banachraum. Daher steht in dieser Situation der Kalkül der Differentialrechnung in Banachräumen zur Verfügung. Das Folgende ist im wesentlichen eine Anwendung der Differentialrechnung in Banachräumen, die allerdings hier weniger abstrakt formuliert wird, wie das der Tradition entspricht. Bereits lange vor der Einführung des Begriffs des Banachraumes wurde die Variationsrechnung (Newton, Lagrange, Euler, Bernoulli) begründet.

Zu einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $L : Q \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soll das Wirkungsfunktional

$$S_L(\gamma) = S(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}) dt$$

auf Extremale untersucht werden. Notwendig dafür, dass in γ ein Extremum vorliegt, ist offensichtlich die Bedingung

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma + \varepsilon\eta)|_{\varepsilon=0} = 0$$

für stückweise stetig differenzierbare Vergleichsfunktionen $\eta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\eta(t_0) = 0 = \eta(t_1)$, sofern diese Ableitungen stets existieren. Aufgrund der Stetigkeit von η und γ gibt es jedenfalls zu einer solchen Kurve η stets ein $r > 0$, so dass $(\gamma + \varepsilon\eta)([t_0, t_1]) \subset Q$ gilt für alle $\varepsilon \in [-r, r]$.

Die oben genannte Bedingung hat formale Verwandtschaft mit der Extremwertbestimmung mit Nebenbedingungen, also auf Mannigfaltigkeiten.

$$\varepsilon \mapsto \gamma + \varepsilon\eta$$

mit $\gamma + \varepsilon\eta$ wieder in $\mathcal{W}(a, b)$ ist eine (lineare) Kurve in $\mathcal{W}(a, b)$ mit Ableitung η in 0. Der Ausdruck $\frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma + \varepsilon\eta)|_{\varepsilon=0}$ kann als

$$DS(\gamma) \cdot \eta$$

verstanden werden für die Ableitung $DS(\gamma)$ an der Stelle γ , die als eine lineare Abbildung auf einem geeigneten Unterraum von $\mathcal{C}_{\text{st}}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ anzusehen ist. Und die oben genannte Bedingung ist dann nichts anderes als

$$DS(\gamma)|_{\mathcal{V}} = 0,$$

wobei $\mathcal{V}$ der Vektorraum $\mathcal{V} = \{\eta \in \mathcal{C}_{\text{st}}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) : \eta(t_0) = 0 = \eta(t_1)\}$ ist und als Tangentialraum an $\mathcal{W}(a, b)$ in γ verstanden werden kann. Damit ist die folgende Definition vorbereitet:

(41.1) Definition: $\gamma \in \mathcal{W}(a, b)$ heißt *kritisch* für S unter $\mathcal{M}$ (oder auch *stationär*), wenn die gerade beschriebene Bedingung vorliegt, d.h. wenn

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma + \varepsilon\eta)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{V}$$

gilt für den Untervektorraum $\mathcal{V} = \{\eta \in \mathcal{C}_{\text{st}}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) : \eta(t_0) = 0 = \eta(t_1)\}$.

Eine kritische Kurve heißt dann auch (*stationäre*) *Lösung des Variationsproblems*

$$\delta S = 0,$$

obwohl sie das eigentliche Variationsproblem nicht immer löst.

Achtung: Eine stationäre Lösung des Variationsproblems ist nicht notwendig auch eine Lösung des Variationsproblems, es muss im allgemeinen weder ein (lokales) Minimum noch ein (lokales) Maximum vorliegen. Das ist genauso wie für Funktionen: $f'(x) = 0$ garantiert noch

nicht, das in x auch ein (lokales) Extremum von f vorliegt, trotzdem nennt man x stationär.

Bemerkungen:

1° Die Menge $\mathcal{W}(a, b)$ wird gelegentlich verkleinert, z.B. durch Zusatzbedingungen wie etwa $\|\dot{\gamma}\| = 1$ oder auch höhere Differenzierbarkeit für γ oder auch η .

2° Die Menge $\mathcal{W}(a, b)$ wird gelegentlich auch vergrößert, wenn man zunächst so genannte schwache Lösungen aufspüren will.

3° Auch $\mathcal{V}$ wird gelegentlich je nach Aufgabenstellung verändert.

(41.2) Satz: Jede zweimal stetig differenzierbare stationäre Lösung des Variationsproblems $\delta S = 0$ erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Das soll heißen: Ist γ stationär, so erfüllt die Kurve die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^j}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial q^j}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad j = 1, \dots, n.$$

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass eine Differentialgleichung wie oben zu jeder Vorgabe von $\dot{q} \in Q$ und $\dot{v} \in \mathbb{R}^n$, $\dot{v} \neq 0$, eine eindeutig bestimmte Lösung mit $\gamma(t_0) = \dot{q}$, $\dot{\gamma}(t_0) = \dot{v}$ hat, zumindestens dann, wenn wir die Differentialgleichungen nach $\ddot{\gamma}$ auflösen können.

(41.3) Beispiele:

1° Grundgleichungen der Klassischen Mechanik:

$$L(q, v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - U(q)$$

für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$ führt zu den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\ddot{q}(t) = -\nabla U(q(t)).$$

Hier haben wir $\gamma(t) = q(t)$ gesetzt, wie es in der Physik üblich ist. L kann interpretiert werden als Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie und $\ddot{q} = \nabla U(q)$ ist die zugehörige Bewegungsgleichung. Die stationären Lösungen sind aus Sicht der Physik die Bewegungen des physikalischen Systems, unabhängig davon, ob sie tatsächlich ein Extremum beschreiben.

Das ist das *Hamiltonsche Prinzip* der Klassischen Mechanik!

Statt der oben genannten Lagrangefunktion wird oft von der koordinatenunabhängigen Version

$$L(q, v) = \frac{1}{2} g_{ij}(q) v^i v^j - U(q)$$

mit einer symmetrischen Matrix (g_{ij}) von stetig differenzierbaren Funktionen ausgegangen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen werden komplizierter, siehe 3° und Präsenzübngen.

2° Kürzeste Verbindung im euklidischen Raum $M = \mathbb{R}^n$: $L(q, v) = \|v\|$ ($Q = \mathbb{R}^n$) unter der Zusatzbedingung $\|\dot{q}\| = 1$.

Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichungen sind $\ddot{q} = 0$. Die Lösungen sind $q(t) = t\dot{v} + \dot{q}$ mit $\|\dot{v}\| = 1$, also die Geraden. Daher sind die Geraden die Kandidaten für das Variationsproblem

der kürzesten Verbindung, also Kandidaten, Geodätische in $M = \mathbb{R}^n$ zu sein. Die Geraden sind tatsächlich Geodätische des euklidischen $\mathbb{R}^n$, und es gibt keine anderen (vgl. Präsenzübungen) bis auf Reparametrisierung.

3° Geodätische auf einer n -dimensionalen $\mathcal{C}^3$ -Mannigfaltigkeit M . (Wir verlangen dreimal stetig differenzierbar, damit der Integrand der Kurvenlängenfunktion $s(\gamma)$ zweimal stetig differenzierbar ist.)

Es sei $\varphi : U \rightarrow Q \in \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^3$ -Karte mit Parametrisierung $\psi = \varphi^{-1}$, $g_{ij}(q) = \langle \partial_i \psi(q), \partial_j \psi(q) \rangle$. Zu Kurven $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U \subset M$ verwenden wir $q := \psi \circ \gamma : [t_0, t_1] \rightarrow Q$ mit den Komponenten q^j . Es ist dann $D\psi(q(t))^{-1} \cdot \dot{\gamma}(t) = \dot{q}(t)$ und $\dot{\gamma}(t) = D\psi(q(t)) \cdot (\dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$. Daher ist die Kurvenlänge $s(\gamma)$ gerade

$$s(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(q(t)) \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t)} dt.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen für dieses Variationsproblem ($L(q, v) = \sqrt{g_{ij}(q) v^i v^j}$) mit der Zusatzbedingung $\|\dot{\gamma}\| = 1$ sind äquivalent zu der

Geodätischengleichung:

$$\ddot{\gamma}^m = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{ij,k} - 2g_{ik,j}) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j, \quad m = 1, \dots, n.$$

Notationen dabei: (g^{mk}) ist die zu (g_{ij}) inverse Matrix; $g_{ij,k} := \partial_k g_{ij}$.

[16.11.07]

Eine andere Form der Geodätischengleichung ist

$$\ddot{\gamma}^m + \frac{1}{2} g^{mk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0, \quad m = 1, \dots, n.$$

Mit der Abkürzung

$$\Gamma_{ij}^m := \frac{1}{2} g^{mk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$$

(die Γ_{ij}^m heißen die *Christoffelsymbole*) wird die Geodätischengleichung verkürzt zu

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Unbewiesen bleibt in dieser Vorlesung die für $\mathcal{C}^3$ -Mannigfaltigkeiten richtige und wichtige Aussage: Eine Kurve, die die Geodätengleichung erfüllt, ist eine Geodätische und es gibt keine weiteren Geodätischen bis auf Reparametrisierungen.³

Die Euler-Lagrange-Gleichungen zu 1° können in der Form

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = g^{mk} U_{,k}, \quad k = 1, \dots, n$$

geschrieben werden, wenn die Matrix g positiv definit ist.

4° Für den harmonischen Oszillator ist $T = \frac{1}{2} m \|v\|^2$ die kinetische und $U = k \|q\|^2$ die potentielle Energie mit positiven Konstanten $m, k > 0$. Mit der Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2} m \|v\|^2 - k \|q\|^2$ erhalten wir als Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{q}(t) = -2kq(t)$$

³für einen Beweis sehe man z.B. in dem Lehrbuch von J. Jost: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer-Verlag, 1998, nach.

und explizit

$$\ddot{q} = -\frac{2k}{m}q.$$

Die allgemeine Lösung dazu ist $q(t) = \cos \omega t A + \sin \omega t B$, wobei $\omega := \sqrt{2\frac{k}{m}}$, mit $q(0) = A \in \mathbb{R}^n$ und $\dot{q}(0) = B \in \mathbb{R}^n$.

Man kommt auf die Lösung zum Beispiel durch den Ansatz $v(t) := \dot{q}(t)$, so dass aus dem System $m\ddot{q}(t) = -2kq(t)$ von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung das einfachere System

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = \omega^2 q$$

von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung wird.

Diese Umwandlung bzw. Vereinfachung hat eine weitreichende Verallgemeinerung.

(41.4) Satz: Sei eine Lagrangefunktion $L : Q \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}(\dot{q}, \dot{v}) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$$

in einem Punkt $(\dot{q}, \dot{v}) \in Q \times \mathbb{R}^n$ gegeben. (L heißt dann regulär in $(\dot{q}, \dot{v})$.) Dann hat die Gleichung

$$F(p, q, v) := p - L_v(q, v) = 0$$

eine Auflösung nach v in einer offenen Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n$ von $(\dot{p}, \dot{q}, \dot{v})$, $\dot{p} := L_v(\dot{q}, \dot{v})$. Also gibt es eine C^1 -Abbildung $g : U \rightarrow V$ mit der Eigenschaft, dass $F(p, q, v) = 0$ genau dann gilt, wenn $v = g(p, q)$. Diese Auflösung führt zu der so genannten Hamiltonfunktion

$$H(q, p) := \langle p, g(p, q) \rangle - L(q, g(p, q)), \quad (p, q) \in U,$$

(kurz: $H = pv - L$) mit der folgenden Eigenschaft. Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind in der gegebenen Umgebung von $(\dot{q}, \dot{v})$ äquivalent zu den so genannten Hamiltonschen (oder kanonischen) Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = H_p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -H_q. \end{aligned}$$

(41.5) Beispiele:

1° Beim harmonischen Oszillator gilt $L_v = mv$ und die Auflösung von $p - mv = 0$ ist $v = \frac{p}{m}$, also $H = +\frac{1}{2}\frac{1}{m}\|p\|^2 + k\|q\|^2$ mit $H_q = 2kq$, $H_p = \frac{1}{m}p$ und den kanonischen Gleichungen sind

$$\dot{q} = \frac{1}{m}p, \quad \dot{p} = -2kq.$$

2° Allgemeiner: Sei $F(q) = \varphi(\|q\|)\frac{q}{\|q\|}$, $q \in \mathbb{R}^n$, $q \neq 0$ ein Zentralfeld mit stetiger Funktion φ , also $F = \nabla U$ mit $U(q) = \Phi(\|q\|)$ für eine Stammfunktion Φ von φ . Eine typische Lagrangefunktion aus der Physik ist $L(q, v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - U(q)$. Die kanonischen Differentialgleichungen lauten

$$\dot{q} = \frac{1}{m}p, \quad \dot{p} = -F(q).$$

Man beachte im Falle $n = 3$: Der Drehimpuls $I = q \times p$ bleibt auf den Lösungen konstant: $\dot{I} = \dot{q} \times p + q \times \dot{p} = \frac{1}{m}p \times p + q \times (-F(q)) = 0$ aufgrund der Eigenschaften des „Kreuzproduktes $\times$ “.

(41.6) Definition: Eine *Bewegungskonstante* auf $W \subset Q \times \mathbb{R}^n$, bzw. ein *erstes Integral* zum Lagrangesystem $(Q \times \mathbb{R}^n, L)$ ist eine Funktion $I : W \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $I(\gamma)$ konstant ist für alle Lösungen γ der Euler-Lagrange-Gleichungen, die ganz in W verlaufen. Analog für das zugehörige Hamiltonsystem.

(41.7) Beispiele:

1° Die Komponenten des Drehimpulses $I = (I_1, I_2, I_3)$ in dem gerade beschriebenen Beispiel $L(q, v) = \frac{1}{2}m \|v\|^2 - U(q)$ sind Bewegungskonstante. Es gibt dazu eine n -dimensionale Verallgemeinerung, vgl. Präsenzaufgaben 5.

2° $H = I$ ist immer eine Bewegungskonstante.

$$\frac{d}{dt}H(q(t), p(t)) = H_q \dot{q} + H_p \dot{p} = H_q H_p + H_p(-H_q) = 0.$$

3° Weitere erste Integrale beim harmonischen Oszillator (neben der Gesamtenergie $H = \frac{1}{2}m \|v\|^2 - k \|q\|^2$) sind die „Teilenergien“ $H_j = \frac{1}{2}m(v^j)^2 + k(q^j)^2$ und die Drehimpulskomponenten. Eine Lösung $q(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichungen, also wie in 41.3.4°, mit $E_j := H(q(0), v(0)) \in \mathbb{R}$ erfüllt $(q(t), v(t)) \in M := \bigcap H_j^{-1}(E_j)$. Analog im Hamiltonsystem.

(41.8) Bemerkung: Reduktion der Freiheitsgrade durch erste Integrale als Lösungsmethode.

Eine nicht triviale Bewegungskonstante I verhilft dazu, das System der Euler-Lagrange-Gleichungen um einen Freiheitsgrad (das bedeutet um eine Dimension, bzw. eine Gleichung) zu verringern. Denn zu einem regulären Wert $\dot{I} \in \mathbb{R}$ von I hat jede Lösung γ mit $I(\gamma(t_0)) = \dot{I}$ die Eigenschaft, ganz in der Niveaulfläche $M := I^{-1}(\dot{I})$ zu bleiben, das heißt $\gamma(t) \in M$ für alle t zu erfüllen. Wenn also das ursprüngliche System auf $Q \times \mathbb{R}^n$ definiert ist, mit $L \in \mathcal{C}^2(Q \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, so genügt es, sich bei der Vorgabe von $\dot{I}$ auf M zu reduzieren, denn alle Lösungen mit $I(\gamma(t_0)) = \dot{I}$ liegen in M . Und M ist eine $n-1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, ist also um eine Dimension reduziert. Es gilt jetzt, die Euler-Lagrange-Gleichungen auf M zu betrachten, und eine weitere Bewegungskonstante aufzuspüren, um den Freiheitsgrad weiter auf $n-2$ zu senken etc., um schließlich zu der Bahn einer Lösung zu kommen.

Analog, und besser für den Fall einer Hamiltonfunktion.

Dieses Verfahren, bei der man durch sukzessive Reduktion bis zu der Bahn einer Lösung kommt, funktioniert nicht allgemein, aber für so genannte *vollständig integrierbare Systeme*.

Bevor diese Programm ernsthaft durchgeführt werden kann, muss noch die gesamte Differentialrechnung auf M übertragen werden, d.h. es wird definiert, was eine differenzierbare Abbildung mit Werten in M und was eine differenzierbare Abbildung auf M ist (über die Karten). Insbesondere, stellt man fest, dass die Lagrangefunktion jeweils auf dem Tangentialbündel $TM = \{(a, v) : a \in M, v \in T_a M\}$ definiert ist, wobei TM wieder Mannigfaltigkeit ist. Die Hamiltonfunktion dagegen lebt auf dem entsprechenden Kotangentialraum.

MIII – Analysis in mehreren Veränderlichen – WiSe 2007/08

Kurzfassung
Martin Schottenloher

∞ ∞ ∞

Kapitel XII. Maßtheorie

Worum geht es?

1. Grundlegung einer Integrationstheorie in mehreren Veränderlichen: Das Lebesgue-Integral im euklidischen n -dimensionalen Raum.
2. Verbesserung der bisherigen Integrationstheorie in einer Veränderlichen: Zusammenfassung der verschiedenen Ansätze zu einer einheitlichen Theorie mit guten Permanenzsätzen für konvergente Funktionenfolgen.
3. Grundlegung zur Wahrscheinlichkeitstheorie.

Es geht nicht um die Maßtheorie an sich. Die Maßtheorie soll nur kurz als Werkzeug bereitgestellt werden.

Zur Begründung der Integrationstheorie wollen wir drei Schritte beschreiben:

1. Welche Mengen der jeweiligen Grundmenge sollen überhaupt zu einer „Messung“ zugelassen werden? Das sind die messbaren Teilmengen, vgl. § 42 *Messräume*.
2. Was bedeutet „Messung“? Das ist die Festlegung eines Maßes, vgl. § 43 *Maße*. In diesen Problembereich gehört insbesondere die Konstruktion des Lebesgue-Maßes, die in § 44 durchgeführt wird.
3. Und was ist dann Integration unter Vorgabe eines Maßes? Das Integral einer Funktion wird definiert als der Grenzwert von Integralen über einfache Funktionen, die die vorgegebene Funktion geeignet approximieren, vgl. Kapitel XIII.

Vor der Beschäftigung mit der Integration stellen wir in § 44 noch eine wichtige Konstruktion von Maßen dar, die wir vor allem für die Beschreibung des Lebesgue-Maßes benötigen.

Dieses Kapitel richtet sich weitgehend nach dem Lehrbuch von Th. Bröcker, Analysis II, mit gelegentlichen Ergänzungen aus Amann/Escher, Analysis III.

Ein Klassiker zur Maßtheorie ist P. Halmos, Measure Theory, Springer-Verlag, 1974 (Neuaufgabe).

§42 Messräume

(42.1) Definition: (Messraum) Ein *Messraum* (auch *messbarer Raum*) $(X, \mathcal{A})$ ist eine nichtleere Menge X zusammen mit einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf X . Dabei ist eine σ -Algebra ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X , also $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, mit den folgenden Eigenschaften:

$\sigma 1$ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

$\sigma 2$ Für alle $M \in \mathcal{A}$ gilt $X \setminus M \in \mathcal{A}$.

$\sigma 3$ Für alle $M_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, gilt $\bigcup M_k \in \mathcal{A}$.

Die Teilmengen $M \subset X$, $M \in \mathcal{A}$, sind die *messbaren Mengen*.

(42.2) Bemerkungen:

1° $X \in \mathcal{A}$.

2° Abzählbare Durchschnitte messbarer Mengen sind messbar.

3° Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *messbar* (in Bezug auf σ -Algebren $\mathcal{A}$ auf X und $\mathcal{B}$ auf Y), wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ stets $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

4° Kompositionen messbarer Abbildungen sind messbar und die Identität $\text{id} : X \rightarrow X$, $x \mapsto x$, ist messbar. Die messbaren Räume mit den messbaren Abbildungen als Morphismen bilden daher eine Kategorie.

(42.3) Beispiele:

1° $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$, die *triviale* σ -Algebra.

2° $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, die *größte* σ -Algebra.

3° Zu einem Messraum $(X, \mathcal{A})$ und einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ in eine nichtleere Menge Y ist $f_*\mathcal{A} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ eine σ -Algebra auf Y , das direkte Bild von $\mathcal{A}$ unter f . f ist messbare Abbildung in Bezug auf $\mathcal{A}$ und $f_*\mathcal{A}$.

4° Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen messbaren Räumen $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ ist genau dann messbar, wenn $\mathcal{B} \subset f_*\mathcal{A}$.

(42.4) Satz - Definition: (Erzeuger, Erzeugendensystem) Zu jedem System $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X gibt es die (eindeutig bestimmte) kleinste σ -Algebra $\sigma(\mathcal{S})$, die $\mathcal{S}$ enthält. Es gilt

1. $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$ und $\sigma(\mathcal{S})$ ist eine σ -Algebra.

2. Für jede weitere σ -Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ gilt $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$.

$\sigma(\mathcal{S})$ ist das *Erzeugnis* von $\mathcal{S}$ oder die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ -Algebra. Ein *Erzeugendensystem* einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Teilsystem $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$.

(42.5) Lemma: Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ -Algebren auf X . Dann ist auch

$$\mathcal{A} = \bigcap \{ \mathcal{A}_i : i \in I \}$$

eine σ -Algebra auf X .

Bemerkungen: 1. Es gilt

$$\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{S} \subset \mathcal{A} \}.$$

2. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Messräumen $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ ist genau dann messbar, wenn für ein Erzeugendensystem $\mathcal{S}$ von $\mathcal{B}$ gilt: Für alle $S \in \mathcal{S}$ ist $f^{-1}(S) \in \mathcal{A}$.

(42.6) Definition: (Borel algebra) Sei X ein topologischer Raum mit der Topologie $\mathcal{T}$, dem System aller offenen Teilmengen von X , $X \neq \emptyset$. Dann heißt die σ -Algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$ die (zur Topologie gehörige) Borel algebra von X .

(42.7) Lemma: Sei X topologischer Raum und $\mathcal{B}$ die zugehörige Borel algebra.

1° $\mathcal{B} = \sigma(\{A \subset X : A \text{ abgeschlossen}\})$.

2° Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ mit der induzierten Topologie. Dann gilt

$$\mathcal{B} = \sigma(\{B(x, r) \cap X : x \in X, r \in \mathbb{Q}\}),$$

wobei die offenen Kugeln bezüglich irgendeiner Norm auf $\mathbb{R}^n$ gebildet werden.

Man kommt sogar mit einer abzählbaren Menge von Kugeln aus, vgl. Übungen. Diese Aussage stimmt so auch noch für separable metrische Räume und allgemeiner für topologische Räume mit abzählbarer Basis. Sie stimmt aber nicht für allgemeine metrische Räume.

3° $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie. Dann

$$\mathcal{B} = \sigma(\{[a, b] : a, b \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{[r, \infty[: r \in \mathbb{Q}\}).$$

4° Sei $f : Y \rightarrow X$ Abbildung auf einem Messraum $(Y, \mathcal{A})$. Dann

$$f \text{ messbar} \iff \forall U \subset X \text{ offen} : f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \iff \forall B \subset X \text{ abgeschlossen} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Konvention: messbar $\equiv$ borelmessbar $\equiv$ messbar in Bezug auf die (jeweilige) Borel algebra.

Wiederholung: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ mit den üblichen Rechenregeln und als topologischer Raum mit der Ordnungstopologie. 42.7.3° gilt analog.

Zufallsvariable. Eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ wird auch *Zufallsvariable* genannt. Notation: $\{f > a\} = \{f(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}(y \in \overline{\mathbb{R}} : y > a)$.

(42.8) Satz: $(X, \mathcal{A})$ sei Messraum.

1° $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\iff \forall a \in \mathbb{R} : \{f > a\}$ messbar.

2° $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ messbar $\iff f = (f^1, \dots, f^n)$ und $f^1, f^2, \dots, f^n$ messbar.

3° Die Summe von zwei $\mathbb{R}^n$ -wertigen messbaren Abbildungen und die skalaren Vielfachen sind wieder messbar. $\mathcal{M}(X, \mathbb{R}^n) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ messbar}\}$ ist daher ein (in der Regel unendlichdimensionaler) $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

4° $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar $\implies |f|$ messbar.

5° $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar $\implies fg$ messbar.

Anders als für Folgen stetiger oder differenzierbarer Funktionen hat man für messbare Funktionen die folgenden bemerkenswerten Resultate:

(42.9) Satz: Sei X Messraum mit der σ -Algebra $\mathcal{A}$.

1° Für jede Folge (f_j) messbarer Funktionen $f_j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind die Funktionen

$$\sup f_j, \inf f_j, \limsup f_j = \overline{\lim} f_j, \liminf f_j = \underline{\lim} f_j$$

stets messbar.

2° Für jede punktweise konvergente Folge (f_j) messbarer Funktionen $f_j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist die Grenzfunktion $f(x) = \lim f_j(x)$, $x \in X$, messbar.

3° Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$. Dann gibt es eine aufsteigende Folge (φ_j) von Stufenfunktionen $\varphi_j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ so dass

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \varphi_j(x)$$

punktweise gilt.

[23.11.07]

(42.10) Korollar: Eine Abbildung $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn es eine Folge (φ_j) von Stufenfunktionen $\varphi_j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gibt mit $f = \lim \varphi_j$ punktweise.

Produkte von Messräumen:

(42.11) Definition: Zu Messräumen $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ definiert die von $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ erzeugte σ -Algebra die Produktstruktur auf $X \times Y$ als Messraum. Sie wird mit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bezeichnet.

(42.12) Satz: Die σ -Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ wird durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert.

1° Die Projektionen $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$, sind stets messbar.

2° Eine Abbildung $f : Z \rightarrow X \times Y$ ist bereits dann messbar, wenn die Kompositionen mit den beiden Projektionen messbar sind.

Eine σ -Algebra $\mathcal{C}$ auf dem Produkt $X \times Y$ erfüllt 1° genau dann, wenn $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$ erfüllt 2° genau dann, wenn $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

(42.13) Satz: Im Fall $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gilt für die Produktalgebra

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Vgl. Übungen. Im allgemeinen hat man für topologische Räume X, Y nur

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y).$$

§43 Maße

(43.1) Definition: Ein *Maß* auf einem Messraum $(X, \mathcal{A})$ ist eine Abbildung $\mu : X \rightarrow [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\mu 1 \quad \mu(\emptyset) = 0.$$

$\mu 2$ μ ist σ -additiv, das heißt für alle Folgen (M_k) auf $\mathcal{A}$, also $M_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, mit paarweise disjunkten Elementen, das heißt $M_k \cap M_j = \emptyset$ im Falle $k \neq j$, gilt

$$\mu\left(\bigcup M_k\right) = \sum \mu(M_k).$$

Mit den üblichen Regeln für das Rechnen mit ∞ , insbesondere als Grenzwert.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann *Maßraum*.

Ein Maß μ mit $\mu(X) = 1$ heißt auch *Wahrscheinlichkeitsmaß*.

(43.2) Beispiele:

1° $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ mit $\mu(X) = r \geq 0$ ist Maß.

2° $\mu(M) = 0$ für alle $M \in \mathcal{A}$ liefert Maß.

3° Für einen Messraum $(X, \mathcal{A})$ gibt es zu jedem Punkt $p \in X$ das *Dirac-Maß* δ_p definiert durch $\delta_p(M) = 1$, falls $p \in M$, und $\delta_p(M) = 0$ sonst.

4° Das Zählmaß ζ ist auf jedem Messraum $(X, \mathcal{A})$ definiert, für den die endlichen Mengen alle messbar sind. Es wird gesetzt: $\zeta(M)$ ist die Anzahl der Elemente von M , wenn M endlich ist, und $\zeta(M) = \infty$, wenn M nicht endlich ist.

(43.3) Entscheidende Fragestellung: (im Kontext der Integration im euklidischen $\mathbb{R}^n$) Gibt es auf der Borelalgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ein Maß μ , welches für die Quader des $\mathbb{R}^n$ mit dem elementargeometrischen euklidischen Inhalt der Quader übereinstimmt? Dabei sei der Inhalt eines Quaders $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ gerade das Produkt

$$\text{Vol}_n(Q) = \text{Vol}(Q) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

der Seitenlängen. Die Forderung ist also $\mu(Q) = \text{Vol}(Q)$.

Die Antwort lautet ja. Die Konstruktion, die wir im nächsten Paragraphen erklären, ist nicht trivial.

Zuvor stellen wir in diesem Paragraphen noch einige Standardeigenschaften von Maßen mit ausführlichen Beweisführungen bereit, nicht zuletzt auch, um den fundamentalen Begriff des Maßes einzuüben. Und wir behandeln die Nullmengen eines Maßraumes sowie die Vervollständigung von Maßräumen.

(43.4) Bemerkungen: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

1° Für $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ gilt

$$\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2).$$

2° Für allgemeine $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(M_1 \cup M_2) + \mu(M_1 \cap M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2).$$

3° Für $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ mit $M_1 \subset M_2$ gilt

$$\mu(M_1) \leq \mu(M_2).$$

4° Für Folgen (A_k) , $A_k \in \mathcal{A}$, gilt

$$\mu\left(\bigcup A_k\right) \leq \sum \mu(A_k).$$

5° Für aufsteigende Folgen (A_k) , $A_k \in \mathcal{A}$, also $A_k \subset A_{k+1}$, gilt

$$\mu\left(\bigcup A_k\right) \leq \sup \mu(A_k).$$

(43.5) Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine messbare Teilmenge $N \subset X$ heißt dann μ -Nullmenge, oder einfach Nullmenge, wenn $\mu(N) = 0$.

Ein Maßraum heißt *vollständig*, wenn alle Teilmengen von Nullmengen messbar sind.

Für eine Teilmenge M einer Nullmenge N ist $\mu(M)$ eventuell nicht definiert, weil M nicht messbar sein muss. Das kann vorkommen, wenn der Maßraum nicht vollständig ist. Es wird sich zeigen, dass zum Beispiel das oben angesprochene (und noch nicht konstruierte) Maß auf den Borelschen Mengen des $\mathbb{R}^n$ nicht vollständig ist: Es gibt borelsche Nullmengen mit Teilmengen, die nicht borelmessbar sind (jedenfalls in der üblichen Mengenlehre mit Auswahlaxiom).

Ein nicht vollständiger Maßraum lässt sich aber in natürlicher Weise vervollständigen. Dazu betrachte man die Mengensysteme

$$\mathcal{N}_\mu := \{N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0\},$$

$$\overline{\mathcal{N}_\mu} := \{M \subset X : M \subset N, N \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

[27.11.07]

Vor der entsprechenden Konstruktion ein paar elementare Bemerkungen.

(43.6) Bemerkungen:

1° Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

2° Jedes Maß auf der größten σ -Algebra $\mathcal{P}(X)$ ist vollständig. Also sind das Dirac-Maß und das Zählmaß vollständig (in Bezug auf $\mathcal{P}(X)$).

3° Der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist genau dann vollständig, wenn $\overline{\mathcal{N}_\mu} \subset \mathcal{A}$.

Für die Vervollständigung setze man

$$\overline{\mathcal{A}}_\mu := \{A \cup M : A \in \mathcal{A}, M \in \overline{\mathcal{N}_\mu}\}, \quad \overline{\mu}(A \cup M) := \mu(A), \quad A \cup M \in \overline{\mathcal{A}}_\mu.$$

Dadurch wird ein vollständiger Maßraum definiert, die *Vervollständigung* von $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(43.5) Satz: Mit den gerade eingeführten Bezeichnungen gilt: $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ ist eine σ -Algebra und $\overline{\mu}$ ist ein Maß. Ferner ist $(X, \overline{\mathcal{A}}_\mu, \overline{\mu})$ ein vollständiger Maßraum.

Weiterhin gilt: Ist $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ und $\mu = \nu|_{\mathcal{A}}$, so folgt $\overline{\mathcal{A}}_\mu \subset \mathcal{B}$ und $\overline{\mu} = \nu|_{\overline{\mathcal{A}}_\mu}$.

§44 Konstruktion von Maßen

Gesucht: Maß μ auf der σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelmengen mit $\mu(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ für alle Quader $Q = \prod_{i=1}^n [b_i - a_i]$, $b_i \geq a_i$.

Beschränken wir uns zunächst auf den Fall $n = 1$: Wir studieren das System $\mathcal{S}$ der endlichen Vereinigungen von Intervallen in $\mathbb{R}$. Dabei sind alle Intervalle zugelassen, seien sie offen, halboffen, abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt.

(44.1) Satz - Definition: Sei $\mathcal{S}$ das System der endlichen Intervalle.

- 1° Jedes $S \in \mathcal{S}$ ist Vereinigung von endlich vielen disjunkten Intervallen.
- 2° Für ein beschränktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, also $I = [a, b]$, $I =]a, b]$, $I = [a, b[$, oder $I :=]a, b[$ mit $a \leq b$ setze man $\lambda(I) = b - a$.
- 3° Für die unbeschränkten Intervalle J setze man $\lambda(J) := \infty$.
- 4° Für eine disjunkte Vereinigung $S = \bigcup_{k=1}^m I_k$ setze man $\lambda(S) := \sum_{k=1}^m \lambda(I_k)$. Dann ist λ auf $\mathcal{S}$ wohldefiniert.

(44.2) Bemerkungen: Für $\mathcal{S}$ und λ aus 44.1 gilt:

- 1° $\mathcal{S}$ ist eine Mengenalgebra, d.h. für $S, T \in \mathcal{S}$ gilt: $S \cap T$, $X \setminus S$, $S \cup T \in \mathcal{S}$.
- 2° $\lambda(\emptyset) = 0$ und $\lambda(S \cup T) = \lambda(S) + \lambda(T)$, falls $S, T \in \mathcal{S}$ mit $S \cap T = \emptyset$.
- 3° $\lambda(\bigcup S_k) = \sum \lambda(S_k)$ für $S_k \in \mathcal{S}$, falls $\bigcup S_k \in \mathcal{S}$ gilt und die S_k paarweise disjunkt sind.
- 4° $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{S})$.

(44.3) Definition: (Prämaß) Sei $\mathcal{S}$ eine Mengenalgebra auf X , $X \neq \emptyset$. Ein *Prämaß* ist eine Funktion $\nu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\nu(\emptyset) = 0.$$

Für alle disjunkten Folgen (S_k) aus $\mathcal{S}$, also $S_k \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N}$, $S_k \cap S_j = \emptyset$ falls $k \neq j$, für die noch $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \in \mathcal{S}$ gilt, ist die Identität $\nu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(S_k)$ erfüllt.

Ein Maß ist also ein Prämaß. Die Umkehrung gilt nicht, aber es gibt eine Erweiterung des Prämaßes zu einem Maß, wie in dem folgenden wichtigen Satz formuliert.

(44.4) Satz: (Fortsetzungssatz von Hahn) Jedes Prämaß auf einer Mengenalgebra $\mathcal{S}$ hat eine Fortsetzung auf die σ -Algebra $\sigma(\mathcal{S})$ als ein Maß.

Ansatz: Die Mengenfunktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$

$$\mu^*(M) := \inf \left\{ \sum \nu(S_k) \mid M \subset \bigcup S_k, S_k \in \mathcal{S} \right\}$$

hat die Eigenschaften eines äußeren Maßes:

(44.5) Definition: (Äußeres Maß) Das ist eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ($X \neq \emptyset$) mit

$$\alpha 1 \mu^*(\emptyset) = 0.$$

$$\alpha 2 \forall A, B \subset X, A \subset B : \mu^*(A) \leq \mu^*(B), \mu^* \text{ ist } \textit{monoton}.$$

$$\alpha 3 \forall A_k \subset X, k \in \mathbb{N} : \mu^*\left(\bigcup A_k\right) \leq \sum \mu^*(A_k), \mu^* \text{ ist } \sigma\text{-subadditiv}.$$

(44.6) Satz: (Satz von Carathéodory) Sei μ^* ein äußeres Maß. Dann ist

$$\mathcal{A}(\mu^*) := \{A \subset X \mid \forall D \subset X : \mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap (X \setminus A))\}$$

eine σ -Algebra und $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$ ist ein Maß.

[30.11.07]

MIII – Analysis in mehreren Veränderlichen – WiSe 2007/08

Kurzfassung
Martin Schottenloher

∞ ∞ ∞

Kapitel XIII. Integrationstheorie

Das Integral $\int f d\mu$ für Abbildungen $f : X \rightarrow E$ mit Werten in einem Banachraum E , insbesondere also für $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen, wird zunächst im Falle eines allgemeinen Maßraumes $(X, \mathcal{A}, \mu)$ eingeführt und untersucht. Die wesentlichen Konvergenzsätze der Integrationstheorie und Folgerungen für Parameterintegrale werden bewiesen. Danach werden die Eigenschaften des Integrals zum Lebesguemaß auf dem $\mathbb{R}^n$, also für den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ bzw. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$, eingehender studiert. Insbesondere wird genauer auf die Produktstruktur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, $n = k + m$, mit den Konsequenzen für die Integration und auf die Transformationsformel für das Lebesgueintegral auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eingegangen.

§46 Integration

Im folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ stets ein Maßraum und E ein Banachraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. In Bezug auf die Borelalgebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ ist $(E, \mathcal{B})$ ein Messraum.

Unter einer Stufenfunktion verstehen wir wie zuvor eine messbare Abbildung $\varphi : X \rightarrow E$, die nur endlich viele Bildpunkte $\varphi(X) = \{v_0, \dots, v_m\}$ hat (Funktionen mit nur endlich vielen Bildpunkten werden oft auch *einfache Funktionen* genannt). Die Messbarkeit bedeutet dann, dass die Mengen $\varphi^{-1}(v_j) = A_j$ messbar sind. Es gilt

$$\varphi = \sum_{j=0}^m \chi_{A_j} v_j,$$

wenn die v_j paarweise verschieden sind, wobei $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion einer Teilmenge $A \subset X$ ist: $\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ für $x \in X \setminus A$.

Eine Stufenfunktion wird auch durch eine endliche, disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{k=0}^n B_k$, $B_k \in \mathcal{A}$, und beliebige $w_k \in E$ gegeben, indem $\varphi = \sum_{k=0}^n \chi_{B_k} w_k$ gesetzt wird. In dieser Darstellung kann $w_k = w_j$ für $k \neq j$ vorkommen. Im Falle $w_j \neq w_k$ für alle $j \neq k$ spricht man von der *Normalform* der Darstellung von φ , das ist wieder die oben eingeführte Darstellung mit $\varphi = \sum_{j=0}^m \chi_{A_j} v_j$, $A_j = \varphi^{-1}(v_j)$, $v_j \neq v_k$, $j \neq k$.

Die Skalarmultiplikation auf E wird ergänzt durch die folgende Festlegung für den Nullvektor $0 \in E$ (auch im Falle $E = \mathbb{R}$):

$$\infty 0 := 0, \quad -\infty 0 := 0.$$

(46.1) Definition: (Integration von Treppenfunktion) Eine Stufenfunktion $\varphi = \sum_{j=0}^m \chi_{A_j} v_j$ (mit paarweise verschiedenen A_j , aber nicht notwendigerweise auch paarweise verschiedener v_j) ist *integrierbar* (genauer: μ -*integrierbar*) und heißt dann eine *Treppenfunktion*, wenn

$$\sum_{j=0}^m \|v_j\| \mu(A_j) < \infty$$

gilt. In diesem Falle wird das *Integral* von φ (bezuglich μ) durch

$$\int \varphi d\mu := \sum_{j=0}^m \mu(A_j) v_j \in E$$

definiert.

Man schreibt auch $\int \varphi d\mu = \int_X \varphi d\mu$, $\int \varphi d\mu = \int \varphi$ oder $\int \varphi d\mu = \int \varphi(x) d\mu(x)$ und ähnliches.

Die Menge der Treppenfunktionen auf X mit Werten in E wird mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mu) = \mathcal{T}(X, E)$ oder $\mathcal{T}_\mu(X, E)$ bezeichnet.

(46.2) Bemerkung: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $v_0 = 0$ und $v_j \neq 0$ für $j > 0$ in einer Darstellung einer Stufenfunktion $\varphi = \sum_{j=0}^m \chi_{A_j} v_j$ von φ mit paarweise disjunkten Teilmengen $A_j \subset X$ von X . Dann sind die folgenden Aussagen quivalent:

- 1° φ ist Treppenfunktion.
- 2° $\mu(A_j) < \infty$ für alle $j > 0$.
- 3° $\mu(\varphi^{-1}(E \setminus \{0\})) < \infty$.

(46.3) Lemma:

1° Das Integral $\int \varphi d\mu$ für eine Treppenfunktion φ ist unabhängig von der speziellen Darstellung $\varphi = \sum_{j=0}^m \chi_{A_j} v_j$, und damit ist das Integral nach Definition 46.1 überhaupt erst wohl-definiert.

2° Die Treppenfunktionen $\mathcal{T}$ bilden einen Vektorraum, im Falle $E = \mathbb{R}$ sogar eine Algebra bezüglich der punktweisen Addition und Multiplikation.

3° Die Abbildung $\int : \mathcal{T} \rightarrow E$, $\varphi \mapsto \int \varphi d\mu$, ist linear.

4° Im Falle $E = \mathbb{R}$ ist das Integral positiv in folgendem Sinne: Aus $\varphi \geq 0$, also $v_j \geq 0$ für alle $j = 0, \dots, m$, folgt $\int \varphi d\mu \geq 0$. quivalent dazu:

$$\varphi \leq \psi \implies \int \varphi d\mu \leq \int \psi d\mu$$

für eine weitere Treppenfunktion $\psi \in \mathcal{T}$.

5° Eine Stufenfunktion $\varphi : X \rightarrow E$ ist genau dann integrierbar, wenn das für $\|\varphi\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|\varphi(x)\|$, gilt und es ist

$$\left\| \int \varphi d\mu \right\| \leq \int \|\varphi\| d\mu < \infty.$$

(46.4) Beispiele:

1° Mit $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und $\mu = \zeta$ (das Zählmaß) erhält man für Treppenfunktionen $\varphi : X \rightarrow E$:

$$\int \varphi d\zeta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n).$$

2° Für das Dirac-Maß $\delta_p : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Menge X ist jede Abbildung $\varphi : X \rightarrow E$ mit endlichem Bild eine Treppenfunktion und es gilt für $\varphi = \sum \chi_{A_j} v_j$:

$$\int \varphi d\zeta = \sum \chi_{A_j}(p) v_j = v_k,$$

wenn $p \in A_k$. (Zur Treppenfunktion gehört die Zerlegung von X in paarweise disjunkte Teilmengen A_j , und $p \in X$ liegt in genau einem A_k .)

11.12.2007

3° Die Treppenfunktionen aus Kapitel IX.A auf einem kompakten Intervall $J = [a, b] = X$ mit Werten in $\mathbb{R}$ (vgl. 27.2) sind auch Treppenfunktionen im Sinne der neuen Definition 46.1 für das Lebesguemaß. Die Definition 46.1 liefert eine Ausdehnung des in 27.2 getroffenen Begriffs: Eine Treppenfunktion g nach 27.2 hat als Urbilder $g^{-1}(v)$, $v \in \mathbb{R}$, stets endliche Vereinigungen von (evtl. ausgearteten) Intervallen in J , während eine $\mathbb{R}$ -wertige Treppenfunktion φ nach 46.1 für $X = J$ mit dem Lebesguemaß als Urbilder $\varphi^{-1}(v)$, $v \in \mathbb{R}$, beliebige lebesguemessbare Teilmengen aus J haben kann. Das kann man so verstehen, daß in Paragraph 27 die Treppenfunktion zum Prämaß „Intervalllänge“ definiert werden, während die Definition jetzt auf Treppenfunktionen zum Lebesguemaß ausgedehnt wird.

4° Die Definition des Integrals in 27.2 für die eingeschränkte Klasse von Treppenfunktionen (vgl. 3°) liefert denselben Integralwert wie 46.1.

Das folgende Resultat ermöglicht die Ausdehnung des Integrals auf eine größere Klasse von Abbildungen. Diese Art der sukzessiven Einführung des Integrals ist uns aus dem Kapitel IX.B bekannt. Es handelt sich hier wie dort um die lineare und stetige Fortsetzung auf einen wesentlich größeren Raum von Funktionen, und zwar jetzt bezüglich der Seminorm, die im folgenden Satz beschrieben wird.

(46.5) Satz: Das Integral $\|\varphi\|_1 := \int \|\varphi\| d\mu$ definiert eine Seminorm auf dem Raum $\mathcal{T}(\mu)$ der Treppenfunktionen zu einem Maßraum. Das heißt, für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\in \mathbb{C}$) gelten die folgenden Eigenschaften

1° $\|\varphi\|_1 \geq 0$.

2° $\|\lambda\varphi\|_1 = |\lambda| \|\varphi\|_1$.

3° $\|\varphi + \psi\|_1 \leq \|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1$.

Zu einer Norm fehlt die Eigenschaft $\|\varphi\|_1 = 0 \implies \varphi = 0$. Diese Eigenschaft ist z.B. im Falle des Lebesguemaßes verletzt, denn für eine Nullmenge $N \neq \emptyset$ ist die charakteristische Funktion $\varphi = \chi_N$ eine Treppenfunktion mit $\varphi \neq 0$ und $\|\varphi\|_1 = 0$.

Die Seminorm $\|\cdot\|_1$ ist genau dann auch eine Norm, wenn $\emptyset$ die einzige Nullmenge ist, z.B. im Falle des Zählmaßes.

Aufgrund von Satz 46.5 ist die Menge $\mathcal{N}(\mu) := \{\varphi \in \mathcal{T} : \|\varphi\|_1 = 0\}$ ein Untervektorraum des Raumes $\mathcal{T}(\mu)$ der Treppenfunktionen. Auf dem Quotientenraum¹ $\mathcal{T}(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$ induziert dann die Seminorm $\|\cdot\|_1$ eine richtige Norm. Im Falle des Zählmaßes verändert sich nichts, im Falle des Dirac-Maßes allerdings ist der Quotient erheblich kleiner als $\mathcal{T}(\mu)$. Der für uns interessanten Fall des Lebesguemaßes liegt dazwischen.

Man weiß, was in dem normierten Raum $\mathcal{T}(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$ die Cauchyfolgen sind. Wir wollen aber in $\mathcal{T}(\mu)$ bleiben und übertragen den Begriff in nahe liegender und natürlicher Weise:

Definition: Eine Folge (φ_j) von Treppenfunktionen, $\varphi_j \in \mathcal{T}(\mu)$, heiße $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $j, k \in \mathbb{N}$ mit $j, k \geq N$ stets $\|\varphi_j - \varphi_k\|_1 < \varepsilon$ gilt.

Konvergenz in Bezug auf die Seminorm $\|\cdot\|_1$ ist dann nicht wohldefiniert in dem Sinne, wie wir das bisher kennen gelernt haben.

Um das genau zu beschreiben, führen wir das folgende grundlegende Konzept ein, das in der Maß- und Integrationstheorie wie auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie ständig Verwendung findet:

(46.6) Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Eigenschaft von Punkten $x \in X$ gilt *fast überall* (oder für *fast alle* x bzw. *fast jedes* x , genauer μ -fast überall), wenn sie außerhalb einer Nullmenge gilt. Das bedeutet, dass die Teilmenge in X , für die sie nicht gilt, in einer Nullmenge enthalten ist.

Abkürzung dazu: „f.ü.“ oder „ μ -f.ü.“.

In Formeln: Ist $\mathcal{E}(x)$ die angesprochene Eigenschaft, so gilt $\mathcal{E}(x)$ f.ü., wenn die Teilmenge $\{x \in X : \mathcal{E}(x) \text{ gilt nicht}\}$ von X in einer geeigneten Nullmenge enthalten ist.

Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig, so vereinfacht sich die Bedingung, indem es genügt, dass die Ausnahmemenge $\{x \in X : \mathcal{E}(x) \text{ gilt nicht}\}$ selbst eine Nullmenge zu sein hat.

Beispiele: Zwei Funktionen $f, g : X \rightarrow E$ sind f.ü. gleich, wenn $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ in einer geeigneten Nullmenge enthalten ist. Und eine Folge $f_j : X \rightarrow E$ konvergiert punktweise f.ü. gegen $f : X \rightarrow E$, wenn es eine Nullmenge $Z \subset X$ gibt, so dass für alle $x \in X \setminus Z$ die Konvergenzbedingung $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x)$ gilt.

Testen wir diesen Begriff, indem wir **die zentrale technische Aussage der Integrationstheorie** im folgenden Satz formulieren und ausführlich beweisen.

(46.7) Satz: Eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge (φ_j) von Treppenfunktionen hat stets eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen eine Funktion $f : X \rightarrow E$ konvergiert. Es gilt sogar: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine messbare Teilmenge $Z \subset X$ mit $\mu(Z) < \varepsilon$, so dass die Teilfolge auf $X \setminus Z$ gleich-

¹Hier wird der Begriff des Quotientenvektorraumes V/U zu einem Untervektorraum U eines Vektorraumes V vorausgesetzt.

mäßig gegen f konvergiert.

Beweis: Weil (φ_j) nach Voraussetzung eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $j_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall m, n \geq j_k : \|\varphi_m - \varphi_n\|_1 < 2^{-2k}.$$

Rekursiv kann $j_{k+1} > j_k$ gewählt werden, so dass auch

$$\forall m \geq j_k : \|\varphi_m - \varphi_{j_k}\|_1 < 2^{-2k}$$

gilt. Für die Teilfolge (φ_{j_k}) wird im Folgenden die Behauptung des Satzes bewiesen.

Setze $Y_k := \{x \in X : \|\varphi_{j_{k+1}}(x) - \varphi_{j_k}(x)\| \geq 2^{-k}\}$. Dann ist Y_k messbar, weil φ_{j_k} eine messbare Funktion ist, also auch die Funktion

$$x \mapsto \|\varphi_{j_{k+1}}(x) - \varphi_{j_k}(x)\|$$

als Komposition von $\varphi_{j_{k+1}} - \varphi_{j_k}$ und der stetigen Abbildung $\|\cdot\|$ messbar ist. Es gilt für beliebige $x \in X$:

$$2^{-k} \chi_{Y_k}(x) \leq \|\varphi_{j_{k+1}}(x) - \varphi_{j_k}(x)\|.$$

Denn für $x \notin Y_k$ ist die linke Seite 0, und für $x \in Y_k$ gilt $2^{-k} \leq \|\varphi_{j_{k+1}}(x) - \varphi_{j_k}(x)\|$ nach Definition der Menge Y_k . Es folgt (nach 46.3.4°)

$$2^{-k} \mu(Y_k) = \int 2^{-k} \chi_{Y_k}(x) d\mu(x) \leq \int \|\varphi_{j_{k+1}}(x) - \varphi_{j_k}(x)\| d\mu(x) = \|\varphi_{j_{k+1}} - \varphi_{j_k}\|_1$$

und damit $\mu(Y_k) < 2^{-k}$ nach Wahl der Teilfolge (φ_{j_k}) . Die Teilmenge $Z_k := \bigcup_{m=k}^{\infty} Y_m$ ist messbar mit $\mu(Z_k) \leq \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m} = 2 \cdot 2^{-k}$, weil μ σ -additiv ist.

Jetzt gilt für $x \notin Z_k$: Für alle $m \geq k$ ist $x \notin Y_m$, also gilt $\|\varphi_{j_{m+1}}(x) - \varphi_{j_m}(x)\| < 2^{-m}$ mit der Konsequenz, dass die oben ausgewählte Teilfolge die Cauchybedingung erfüllt: Für $n \geq m$ ist

$$\|\varphi_{j_n}(x) - \varphi_{j_m}(x)\| \leq \sum_{l=m}^{n-1} \|\varphi_{j_{l+1}}(x) - \varphi_{j_l}(x)\| < 2 \cdot 2^{-m}.$$

Daher konvergiert $(\varphi_{j_m}(x))$ wegen der Vollständigkeit des Banachraumes E gegen einen Vektor $f(x) \in E$, die Teilfolge (φ_{j_m}) konvergiert also punktweise gegen f auf $X \setminus Z_k$. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig auf $X \setminus Z_k$, weil die letzten Ungleichungen gleichmäßig für alle $x \in X \setminus Z_k$ gelten.

Schließlich konvergiert (φ_{j_m}) punktweise außerhalb der messbaren Menge $N := \bigcap Z_k$. Diese Menge hat das Maß $\mu(N) = 0$ wegen $\mu(N) \leq \mu(Z_k) < 2 \cdot 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. N ist also Nullmenge. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Für eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge (φ_j) von Treppenfunktionen $\varphi_j \in \mathcal{T}(\mu, E)$ ist auch $(\int \varphi_j d\mu)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E , denn nach 46.3.3° und 46.3.5° ist

$$\left\| \int \varphi_j d\mu - \int \varphi_k d\mu \right\| \leq \int \|\varphi_j - \varphi_k\| d\mu = \|\varphi_j - \varphi_k\|_1,$$

und das bedeutet, dass $(\int \varphi_j d\mu)$ in E konvergiert (E ist als Banachraum vollständig). Diese Beobachtung führt zu folgendem Ansatz für den Begriff des Integrals.

(46.8) Definition: Eine Funktion $f : X \rightarrow E$ heißt *integrierbar* (genauer: μ -*integrierbar*), wenn es eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge (φ_j) von Treppenfunktionen gibt, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Das *Integral* (von f über X in Bezug auf μ) ist

$$\int f \, d\mu := \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_j \, d\mu.$$

Außerdem wird für messbare Teilmengen $Y \subset X$ das *Integral von f über Y* durch

$$\int_Y f \, d\mu = \int \chi_Y f \, d\mu$$

festgelegt.

Dabei steht die Notation $\chi_Y f$ nicht nur für Funktionen f , die auf ganz X vorgegeben sind, sondern auch für Funktionen $f : Z \rightarrow E$ auf Teilmengen $Z \subset X$ mit $Y \subset Z$: $\chi_Y f$ ist insofern zu verstehen als die Funktion, die in Y die Werte einer vorgegebenen Funktion f annimmt und die in $X \setminus Y$ konstant gleich 0 ist.

Insbesondere erhalten wir für den Spezialfall $f = 1$ für messbare Teilmengen $Y \subset X$ endlichen Maßes $\mu(Y) < \infty$ die Identität

$$\int_Y 1 \, d\mu = \int \chi_Y \, d\mu = \mu(Y).$$

Um aber einzusehen, dass dieser Ansatz (Definition 46.8) überhaupt wohldefiniert ist, gilt es, das folgenden Lemma zu beweisen.

(46.9) Lemma: Es seien (φ_j) und (ψ_j) zwei $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolgen aus $\mathcal{T}(\mu, E)$, die beide fast überall gegen dieselbe Funktion $f : X \rightarrow E$ konvergieren. Dann gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j - \psi_j\|_1 = 0,$$

also auch

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_j \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_j \, d\mu \in E.$$

Beweis:² Für die Folge (τ_j) der Differenzen $\tau_j := \varphi_j - \psi_j$, $j \in \mathbb{N}$, die fast überall gegen 0 konvergiert, muss nur $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tau_j\|_1 = 0$ gezeigt werden, und dafür genügt es, weil (τ_j) eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge ist, die Bedingung $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tau_{j_k}\|_1 = 0$ für eine geeignete Teilfolge nachzuweisen. Wir wählen eine Teilfolge (τ_{j_k}) mit den Eigenschaften von Satz 46.7. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei $k \in \mathbb{N}$ groß genug, so dass für alle $m \geq k$ stets

$$\|\tau_{j_m} - \tau_{j_k}\|_1 < \varepsilon.$$

Und es sei $Z \subset X$ eine messbare Teilmenge, so dass (τ_{j_k}) auf $X \setminus Z$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert mit $\mu(Z) < \frac{\varepsilon}{C}$, wobei

$$C := \sup\{\|\tau_{j_k}(x)\| : x \in X\}$$

²nicht vorgetragen

($C < \infty$, weil τ_{j_k} nur endlich viele Werte annimmt). Da τ_{j_k} eine integrierbare Stufenfunktion ist, gilt außerdem $\mu(A) < \infty$ für $A := \{x \in X : \tau_{j_k}(x) \neq 0\}$. Es gilt schließlich

$$\|\tau_{j_m}\|_1 = \int_X \|\tau_{j_m}\| d\mu \leq \int_Z \|\tau_{j_m}\| d\mu + \int_{A \setminus Z} \|\tau_{j_m}\| d\mu + \int_{X \setminus A} \|\tau_{j_m}\| d\mu.$$

Die drei Summanden auf der rechten Seite dieser Ungleichung haben der Reihe nach die folgenden Abschätzungen:

$$1. \int_Z \|\tau_{j_m}\| d\mu \leq \int_Z \|\tau_{j_m} - \tau_{j_k}\| d\mu + \int_Z \|\tau_{j_k}\| d\mu \leq \|\tau_{j_m} - \tau_{j_k}\|_1 + \mu(Z)C < 2\varepsilon.$$

$$2. \int_{A \setminus Z} \|\tau_{j_m}\| d\mu \leq \sup\{\|\tau_{j_m}(x)\| : x \in X \setminus Z\} \cdot \mu(A) < \varepsilon,$$

wenn m groß genug ist, weil (τ_{j_m}) gleichmäßig gegen 0 auf $X \setminus Z$ gegen 0 konvergiert.

$$3. \int_{X \setminus A} \|\tau_{j_m}\| d\mu \leq \int_{X \setminus A} \|\tau_{j_m} - \tau_{j_k}\| d\mu + \int_{X \setminus A} \|\tau_{j_k}\| d\mu \leq \|\tau_{j_m} - \tau_{j_k}\|_1 < \varepsilon.$$

Insgesamt ergibt sich $\|\tau_{j_m}\|_1 < 4\varepsilon$ für genügend große $m \in \mathbb{N}$, also $\|\tau_{j_m}\|_1 \rightarrow 0$, und das war zu zeigen. $\square$

(46.10) Regeln:

1° Die integrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow E$ bilden einen Vektorraum, den wir mit $\mathcal{L}_1(\mu)$ oder $\mathcal{L}_1(\mu, E)$ bezeichnen.

2° Das Integral als Abbildung

$$\int : \mathcal{L}_1(\mu, E) \rightarrow E, f \mapsto \int f d\mu,$$

ist eine lineare Abbildung.

3° Das Integral ist monoton: Im Falle $E = \mathbb{R}$ gilt für $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu)$:

$$f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

4° Für disjunkte messbare Teilmengen $Y, Z \subset X$ und integrierbare $f : Y \cup Z \rightarrow E$ (das heißt, die Fortsetzung $\chi_{Y \cup Z} f$ auf X , die außerhalb von $Y \cup Z$ Null gesetzt wird, ist integrierbar im Sinne der Definition 46.8) gilt

$$\int_{Y \cup Z} f d\mu = \int_Y f d\mu + \int_Z f d\mu.$$

5° Wenn f integrierbar ist, so gilt das auch für $\|f\|$, also für die $\mathbb{R}$ -wertige Funktion $x \mapsto \|f(x)\|$, und es ist

$$\left\| \int f d\mu \right\| \leq \int \|f\| d\mu =: \|f\|_1.$$

6° Die in 5° definierte Funktion $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}_1(\mu, E) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Seminorm und das Integral $\int : \mathcal{L}_1(\mu, E) \rightarrow E$ ist nach 5° stetig in Bezug auf diese Seminorm: $\left\| \int f d\mu \right\| \leq \|f\|_1$.

Insofern ist das Integral in der Definition 46.8 eine stetige und lineare Fortsetzung auf einen größeren Raum von Funktionen als dem Raum der Treppenfunktionen analog zu den Erörterungen in Paragraf 27. Nach Definition von $\mathcal{L}_1(\mu, E)$ ist $\mathcal{T}(\mu, E)$ dicht in $\mathcal{L}_1(\mu, E)$.

7° Für $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ gilt: $\|f\|_1 = 0 \implies f = 0$ fast überall.

(Die Umkehrung „ $f = 0$ fast überall $\implies \|f\|_1 = 0$ “ gilt direkt nach Definition.)

8° Eine Abänderung von f auf einer Nullmenge $N \subset X$ ändert weder die Integrierbarkeit von f noch den Wert des Integrals $\int f d\mu$.

9° Im Falle $E = \mathbb{R}$ sind für $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ das Maximum $\max\{f, g\}$ und das Minimum $\min\{f, g\}$ integrierbar.

10° Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)$, ist genau dann integrierbar, wenn das für die Komponenten f^j richtig ist, und es gilt

$$\int f d\mu = \left(\int f^1 d\mu, \dots, \int f^n d\mu \right).$$

Beweisskizzen:³

1° & 2°. Wenn $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu, E)$ integrierbar sind mit $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolgen $(\varphi_j), (\psi_j)$ von Treppenfunktionen $\varphi_j, \psi_j \in \mathcal{T}(\mu, E)$, die $\varphi_j \rightarrow f$ und $\psi_j \rightarrow g$ fast überall erfüllen, so ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ die Folge $(\varphi_j + \lambda\psi_j)$ ebenfalls eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge (weil $\|\cdot\|_1$ Seminorm ist), die fast überall punktweise gegen $f + \lambda g$ konvergiert. Also ist $f + \lambda g$ integrierbar und es ist

$$\int (f + \lambda g) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int (\varphi_j + \lambda\psi_j) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_j d\mu + \lambda \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_j d\mu = \int f d\mu + \lambda \int g d\mu$$

wegen der Linearität von $\int$ auf den Treppenfunktionen nach 46.3.3°.

3° folgt ebenso direkt aus der Monotonie des Integrals auf den Treppenfunktionen (46.3.4°).

4°. Auch diese Eigenschaft folgt sofort aus der entsprechenden Eigenschaft auf dem Niveau der Treppenfunktionen, die wir allerdings noch nicht festgestellt haben. Für eine Treppenfunktion φ ist $\chi_{Y \cup Z} \varphi$ ebenso eine Treppenfunktion und es ist $\chi_{Y \cup Z} \varphi = \chi_Y \varphi + \chi_Z \varphi$. Daher

$$\int_{Y \cup Z} \varphi d\mu = \int \chi_{Y \cup Z} \varphi d\mu = \int \chi_Y \varphi d\mu + \int \chi_Z \varphi d\mu = \int_Y \varphi d\mu + \int_Z \varphi d\mu.$$

5°. Sei (φ_j) eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge von Treppenfunktionen, die gegen f punktweise f.ü. konvergiert. Dann konvergiert die skalare $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge von Treppenfunktionen $(\|\varphi_j\|)$ f.ü. gegen $\|f\|$. Also ist $\|f\|$ integrierbar mit $\int \|f\| d\mu = \lim \int \|\varphi_j\| d\mu$. Aus 46.3.5° folgt die Behauptung 5°

$$\left\| \int f d\mu \right\| = \left\| \lim \int \varphi_j d\mu \right\| = \lim \left(\left\| \int \varphi_j d\mu \right\| \right) \leq \lim \left(\int \|\varphi_j\| d\mu \right) = \int \|f\| d\mu.$$

6°. Es übertragen sich die entsprechenden Seminorm-Eigenschaften von $\|\cdot\|_1$ für Treppenfunktionen (vgl. Satz 46.5) direkt unter Verwendung der Definition des Integrals für allgemeine integrierbare Funktionen.

7°. Nach 5° ist $\|f\|$ integrierbar und f.ü. punktw. Limes von Treppenfunktionen. Also gibt es eine Folge (φ_j) von Treppenfunktionen und eine Nullmenge Z , so dass $\lim_j \varphi_j(x) = \|f(x)\|$ für alle $x \in X \setminus Z$. Nach Änderung auf der Nullmenge Z , wo $\|f\|$ und alle φ_j Null gesetzt werden, haben wir die folgende Situation: Alle $\psi_j := \chi_{X \setminus Z} \varphi_j$, $j \in \mathbb{N}$, sind wieder Treppenfunktionen und die Folge (ψ_j) konvergiert überall punktweise gegen $h := \chi_{X \setminus Z} \|f\|$. h ist daher nach Satz 42.9.2° messbar als punktw. Limes von Treppenfunktionen. Die Folge (φ_j) kann im übrigen

³nur zum Teil vorgetragen

(nach 46.7) so gewählt werden, dass sie außerhalb einer Menge $W \subset X$ vom Maß $\mu(W) < 1$ gleichmäßig konvergiert.

Als messbare Funktion mit Werten in $[0, \infty]$ ist h nach Satz 42.9.3° punktweiser Limes einer aufsteigenden Folge γ_j von Stufenfunktionen. Diese sind auch Treppenfunktionen. Ansonsten wäre $\gamma_j = c > 0$ auf einer Menge $A \subset X$ vom Maß $\mu(A) = \infty$. Und dann wäre eine der Treppenfunktionen ψ_k wegen der gleichmäßigen Konvergenz außerhalb W größer als $\frac{1}{2}c$ auf $A \setminus W$ mit $\mu(A \setminus W) = \infty$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass die Stufenfunktion ψ_k integrierbar ist.

Es ist $\gamma_j \leq h$, also $\gamma_j \leq \|f\|$ f.ü. (nämlich außerhalb von Z). Ist nun $\|f\|_1 = 0$, so folgt $\int \gamma_j d\mu \leq \int \|f\| d\mu = \|f\|_1 = 0$ aus 3°. Daher ist $\mu(\{\gamma_j > 0\}) = 0$ nach Definition des Integrals für nichtnegative Treppenfunktionen und weiterhin $\mu(\{h > 0\}) = \bigcup_j \mu(\{\gamma_j > 0\}) = 0$. Schließlich ist $\{\|f\| > 0\} \subset \{h > 0\} \cup Z$ und das bedeutet $\|f(x)\| = 0$ f.ü. und damit auch $f = 0$ f.ü., weil $\|\cdot\|$ eine Norm auf E ist.

8°. Diese Aussage ergibt sich direkt aus der Definition der Integrierbarkeit für eine Funktion f , die ja eine approximierende $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge von Treppenfunktionen verlangt, welche nur f.ü. gegen die Funktion f konvergieren muss.

Bemerkung: Im vorangehenden Beweis zu 7° hätte man also einfacher gleich beginnen können: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\|f\|$ messbar.

9°. Diese Regel zeigt man wieder unter direkten Rückgriff auf die approximierenden Treppenfunktionen.

10° wird in den Übungen behandelt, genauso wie das nachfolgende Beispiel. □

Für das Zählmaß ζ auf einer nichtleeren Menge X ist der Raum der integrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow E$ in einen Banachraum E gerade der Raum aller absolutsummierbaren Familien $(v_x)_{x \in X}$ von Vektoren $v_x \in E$. Dabei heißt eine solche Familie genau dann *absolut summierbar*, wenn die endlichen Summen $\sum_{x \in Y} \|v_x\|$ eine obere Schranke haben. Für summierbare Familien (v_x) gilt:

1. Es ist $v_x = 0$ abgesehen von einer abzählbaren Teilmenge $Y \subset X$.
2. (v_x) hat als Summe einen Wert $s = \sum v_x$ in folgendem Sinne: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $Z \subset X$ so dass für alle weiteren endlichen Menge $H \subset X$, $Z \subset H$, die Ungleichung $\|s - \sum_{x \in H} v_x\| < \varepsilon$ zutrifft.

Diese Summe $s = \sum v_x$ ist völlig klar im Falle, dass Y endlich ist. Wenn Y abzählbar unendlich ist, kann man sich diese Summe auch vorstellen als den gemeinsamen Grenzwert $s = \sum_{n=0}^{\infty} v_{y(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m v_{y(n)}$ für die Bijektionen $y : \mathbb{N} \rightarrow Y$: Für jede Abzählung von Y hat die unendliche Reihe den gleichen Wert s .

Der Raum der bezüglich des Zählmaßes integrierbaren Funktionen ist ein normierter Raum, weil es zum Zählmaß keine nichtleeren Nullmengen gibt, und es kann gezeigt werden, dass dieser Raum, der mit $\ell_1(X, E)$ bezeichnet wird, vollständig ist (das folgt auch aus 46.14). Im Falle $X = \mathbb{N}$ und $E = \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nennt man $\ell_1 = \ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ auch den Banachraum der absolut konvergenten Zahlenfolgen.

(46.11) Satz: *Integrierbare Funktionen sind fast überall messbar, das heißt, eine integrierbare Funktion wird nach einer gegebenenfalls nötigen Änderung auf einer Nullmenge eine messbare Funktion. Das bedeutet: Ist $f : X \rightarrow E$ integrierbar, so gibt es eine Nullmenge $N \subset X$, so dass $\chi_{X \setminus N} f$ messbar ist.*

Ist das Maß μ vollständig, so ist jede μ -integrierbare Funktion messbar.

Einen Beweis findet man z.B. in Amann-Escher.

Die für die Definition des Integrals entscheidende Aussage des Satzes 46.7 überträgt sich auf die integrierbaren Funktionen, wie das im folgenden Satz formuliert ist.

(46.12) Satz: (Normkonvergenzsatz) Es sei (f_n) eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge von integrierbaren Funktionen $f_n \in \mathcal{L}_1(\mu, E)$ (d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert stets $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$). Dann gilt:

1° Es gibt eine Teilfolge von (f_n) , die f.ü. gegen eine Funktion $f : X \rightarrow E$ konvergiert, und die zu jedem $\varepsilon > 0$ außerhalb einer Teilmenge $Z = Z(\varepsilon) \subset X$ vom Maß $\mu(Z) < \varepsilon$ gleichmäßig konvergiert.

2° Eine Grenzfunktion f nach 1° ist integrierbar und je zwei solche Grenzfunktionen sind f.ü. gleich.

3° Für jede Grenzfunktion f nach 1° gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ und daher auch

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu. \quad [18.12.2007]$$

Beweis:⁴ 1°. Nach 46.11 kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass alle f_n messbar sind. Dann kann aber der Beweis zu 46.7 komplett übernommen werden, um 1° zu zeigen: Es werden lediglich die Treppenfunktion φ_j aus dem Beweis zu 46.7 durch die messbaren und integrierbaren Funktionen f_n ersetzt.

2° & 3°. Um zunächst zu zeigen, dass f integrierbar ist, gehen wir nach 1° von einer Teilfolge (f_{n_k}) aus, die ohne Einschränkung der Allgemeinheit überall punktweise gegen f konvergiert (sonst kann man sie auf einer Menge vom Maß 0 abändern) und zu der es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $Z \subset X$ mit Maß $\mu(Z) < \varepsilon$ so gibt, dass gleichmäßige Konvergenz außerhalb von Z vorliegt. Da f_{n_k} für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ integrierbar ist, gibt es nach Definition der Integrierbarkeit von f_{n_k} eine Treppenfunktion τ_k und eine messbare Menge $Z_k \subset X$ mit $\mu(Z_k) < 2^{-k}$ und $\|\tau_k(x) - f_{n_k}(x)\| < 2^{-k}$ für alle $x \in X \setminus Z_k$. Die Treppenfunktion τ_k kann außerdem noch so gewählt werden, dass auch $\|\tau_k - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$ gilt, indem wir den nachfolgenden Hilfssatz 46.13 auf $g = f_{n_k}$ anwenden.

Die Folge (τ_k) ist eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge wegen

$$\|\tau_k - \tau_l\|_1 \leq \|\tau_k - f_{n_k}\|_1 + \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_1 + \|f_{n_l} - \tau_l\|_1 < 2^{-k} + 2^{-l} + \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_1,$$

denn $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge. Für $x \in X \setminus Z$, wobei

$$Z := \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} Z_m \in \mathcal{A},$$

gibt es $k \in \mathbb{N}$, so dass $x \notin Z_m$ für alle $m \geq k$, also ist $\|\tau_m(x) - f_{n_m}(x)\| < 2^{-m}$. Es folgt

$$\|\tau_m(x) - f(x)\| \leq \|\tau_m(x) - f_{n_m}(x)\| + \|f_{n_m}(x) - f(x)\| < 2^{-m} + \|f_{n_m}(x) - f(x)\|,$$

und daher $\tau_k(x) \rightarrow f(x)$ ($\|f_{n_m}(x) - f(x)\| \rightarrow 0$, denn die Folge (f_n) konvergiert ja punktweise gegen f). Ferner ist

$$\mu(Z) \leq \mu\left(\bigcup_{m=k}^{\infty} Z_m\right) \leq \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-k+1}$$

⁴in Ergänzung zu der unvollständigen Darstellung in der Vorlesung

für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\mu(Z) = 0$. Das bedeutet, dass $\tau_k(x)$ gegen $f(x)$ f.ü. konvergiert. Daher ist f integrierbar, und der erste Teil von 2° ist bewiesen.

Aus dem nachfolgenden Hilfsatz ergibt sich für $f = g$ sogar $\lim \|\tau_k - f\|_1 = 0$. Wegen $\lim \|\tau_k - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$ folgt $\lim \|f_{n_k} - f\|_1 = 0$, und da nach Voraussetzung (f_n) eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge ist, folgt schließlich $\lim \|f_n - f\|_1 = 0$. Das ist die Aussage in 3°.

Es bleibt zu zeigen, dass die Grenzfunktion g einer weiteren Teilfolge von (f_n) mit den in 1° beschriebenen Eigenschaften fast überall mit f übereinstimmt. Dazu ist festzustellen, dass genauso wie zuvor gezeigt werden kann, dass $\lim \|f_n - g\|_1 = 0$ gilt. Es folgt $\|f - g\|_1 = 0$ und daher schließlich $f = g$ f.ü. nach 46.10.7°. $\square$

(46.13) Hilfsatz: Ist die integrierbare Funktion $g : X \rightarrow E$ f.ü. der Limes einer $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge (φ_n) von Treppenfunktionen, so gilt $\lim_n \|\varphi_n - g\|_1 = 0$.

Bemerkung: Diese Aussage ist so selbstverständlich, dass sie fast schon verwirrend erscheint. Sie ist leicht zu zeigen (siehe unten), sie ist aber in der Tat nicht Bestandteil der Definition des Integrals und der Integrierbarkeit. Denn die Integrierbarkeit von g erfordert eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge von Treppenfunktionen φ_n , die f.ü. punktweise gegen g konvergiert, und es ist dann $\int g \, d\mu = \lim \int \varphi_n \, d\mu$. Damit ist viel über die punktweise Konvergenz von $(\varphi_n - g)$ gesagt und mittels Satz 46.7 auch über die gleichmäßige Konvergenz von $(\|\varphi_n - g\|)$ außerhalb von Mengen beliebig kleinen Maßes, aber noch nichts über die Konvergenz von $\|\varphi_n - g\|_1 = \int \|\varphi_n - g\| \, d\mu$.

Beweis von 46.13: Unter diesen Voraussetzungen ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(\|\varphi_n - \varphi_k\|)_{k \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolge von Treppenfunktionen, die f.ü. gegen $\|\varphi_n - g\|$ konvergiert. Also gilt für jedes feste $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\varphi_n - g\|_1 = \int \|\varphi_n - g\| \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \|\varphi_n - \varphi_k\| \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_k\|_1.$$

Wegen der Cauchybedingung für (φ_n) ist aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_k\|_1 = 0,$$

und daher auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - g\|_1 = 0$. $\square$

Sei $\mathcal{N}(\mu) := \{f \in \mathcal{L}_1(\mu, E) : \|f\|_1 = 0\}$.

(46.14) Satz: Der Quotientenraum $L_1(X, \mu, E) := \mathcal{L}_1(\mu, E) / \mathcal{N}(\mu)$ mit der durch die Seminorm $\| \cdot \|_1$ induzierten Norm $\|[f]\|_1 := \|f\|_1$, $f \in \mathcal{L}_1(\mu, E)$, ist ein Banachraum.

Das ist im Wesentlichen die Aussage des Normkonvergenzssatzes 46.12.

§47 Konvergenzsätze

Die folgenden beiden Sätze sind das Kernstück der Integrationstheorie. Die ganze Mühe der allgemeinen Einführung der Integration in dem vorangehenden Paragraphen hat man sich gemacht, um diese beiden Sätze zu erzielen, die viele wichtige Anwendungen haben (z.B. Parameterintegrale, wie sie noch in diesem Paragraphen behandelt werden).

Beweistechnisch basieren die beiden Sätze direkt auf den Normkonvergenzssatz 46.12.

(47.1) Satz: (Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von Levi) (f_n) sei eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\sup \left\{ \int f_n d\mu : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

Dann konvergiert (f_n) f.ü. gegen eine integrierbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und es gilt

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu = \sup \int f_n d\mu.$$

(47.2) Satz: (Satz von der dominierten Konvergenz, Satz von Lebesgue) (f_n) sei eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow E$, die punktweise f.ü. gegen eine Funktion $f : X \rightarrow E$ konvergiere, und zu der es eine integrierbare skalare Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ gebe mit

$$\|f_n(x)\| \leq g(x)$$

für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

In den Beweisen zu beiden Sätzen muss lediglich gezeigt werden, dass die Folgen (f_n) unter den gegebenen Voraussetzungen $\mathcal{L}_1$ -Cauchyfolgen sind, um dann unmittelbar den Normkonvergenzsatz 46.12 anzuwenden. [21.12.2007]

Der fundamentale Satz von Lebesgue 47.2 heißt auch der Satz von der *majorisierten Konvergenz*.

Der Vergleich mit der Integrierbarkeit nach MIA / MIIA:

(47.3) Satz: Es sei $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : X \rightarrow E$.

- 1° Ist f stetig, so ist f lebesgueintegrierbar.
- 2° Ist f sprungstetig, so ist f ebenfalls lebesgueintegrierbar.

Dabei ist das Lebesgueintegral auf $X \subset \mathbb{R}$ wie zuvor durch Restriktion von $\mathbb{R}$ auf X definiert: f ist definitionsgemäß genau dann lebesgueintegrierbar, wenn die durch 0 fortgesetzte Funktion auf $\mathbb{R}$ lebesgueintegrierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Analog für beliebige (messbare) Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis: 1°. Natürlich folgt 1° sofort unmittelbar 2°. Wir wollen aber 1° direkt beweisen unter Ausnutzung der Stetigkeit und mit Verwendung von Satz 47.2, dessen Wirkung in den Anwendungen auf diese Weise gezeigt werden soll.

Wir betrachten die Zerlegungsfolge $Z_k := \{a + j2^{-k}(b-a) : 0 \leq j \leq 2^{-k}\}$ des Intervalls X und setzen

$$f_k(t) := f\left(a + j2^{-k}(b-a)\right), \text{ wenn } t \in \left[(j-1)2^{-k}(b-a), j2^{-k}(b-a)\right].$$

Offensichtlich ist f_k eine Treppenfunktion, also insbesondere integrierbar, und es gilt $\|f_k(x)\| \leq \|f\|$ mit $\|f\| = \sup\{\|f(t)\| : t \in X\} =: M < \infty$ wegen der Stetigkeit von f . Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit der stetigen Funktion f konvergieren die f_k gleichmäßig gegen f , insbesondere auch punktweise. Schließlich ist die konstante Funktion $g(t) = M, t \in X$, lebesgueintegrierbar mit Integral $\int_X g d\lambda = M(b-a)$, und wir haben $\|f_k(x)\| \leq g(x)$. Nach Satz

47.2 ist daher f als Grenzfunktion der f_k lebesgueintegrierbar (mit $\int_X f d\lambda = \lim \int f_k d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-k}(b-a) \sum_{j=1}^k f(a + j2^{-k}(b-a))$).

Der Beweis von 2° geht analog oder noch direkter, denn die sprungstetigen Funktionen sind ja gerade die gleichmäßigen Limites von Treppenfunktionen, vgl. 27.15. $\square$

Der Vergleich mit den integrierbaren Funktionen nach Riemann:

(47.4) Satz: Jede beschränkte, riemannintegrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch lebesgueintegrierbar.

Dazu muss nur an den Satz 28.10 appelliert werden, der besagt, dass f außerhalb einer Nullmenge stetig ist.

(47.5) Satz: (Parameterintegral) Sei

$$f : X \times \Omega \rightarrow E$$

eine Abbildung mit Werten in einem Banachraum E , wobei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und Ω ein metrischer Raum ist, und es sei für alle Parameterwerte $t \in \Omega$ die Funktion $x \mapsto f(x, t)$ integrierbar. Setze

$$g(t) := \int f(x, t) d\mu, \quad t \in \Omega.$$

Ist dann für alle $x \in X$ die Funktion $t \mapsto f(x, t)$ stetig, und gibt es eine integrierbare Funktion $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|f(x, t)\| \leq h(x), \quad \forall (x, t) \in X \times \Omega,$$

so ist $g : \Omega \rightarrow E$ stetig.

Beweis: Für eine konvergente Folge (t_n) mit $t_n \rightarrow t_0$ in Ω ist $f_n(x) := f(x, t_n)$ integrierbar und konvergiert punktweise gegen $f(x, t_0)$. Ferner ist $\|f_n(x)\| \leq h(x)$. Also gilt $\int f(x, t_0) d\mu = \lim \int f_n d\mu$ und das ist gerade $g(t_0) = \lim g(t_n)$. $\square$

(47.6) Satz: (Parameterintegral) Sei

$$f : X \times \Omega \rightarrow E$$

eine Abbildung mit Werten in einem Banachraum E , wobei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, und es sei für alle Parameterwerte $t \in \Omega$ die Funktion $x \mapsto f(x, t)$ integrierbar. Setze

$$g(t) := \int f(x, t) d\mu, \quad t \in \Omega.$$

Ist dann für alle $x \in X$ die Funktion $t \mapsto f(x, t)$ stetig differenzierbar mit Ableitung $f'(x, t)$, und gibt es eine integrierbare Funktion $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|f'(x, t)\| \leq h(x), \quad \forall (x, t) \in X \times \Omega,$$

so ist $g : \Omega \rightarrow E$ stetig differenzierbar mit

$$g'(t) = \int f'(x, t) d\mu(x).$$

(47.7) Satz:

Bemerkung: Diverse Varianten mit „f.ü.“.

(47.8) Satz:

(47.9) Folgerung: $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sei lebesgueintegrierbar auf jedem kompakten Teilintervall $I \subset]a, b[$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1° f integrierbar.
- 2° $|f|$ integrierbar.
- 3° $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} |f| d\lambda$ existiert für Folgen $a_n \searrow a, b_n \nearrow b$.

§48 Produktmaß

Wir kennen das Produkt von Messräumen $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$:

Die unterliegende Menge ist das kartesische Produkt $X \times Y$:

Die Produktalgebra ist die „Tensoralgebra“ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, das ist die von den Produkten $A \times B$ („Rechtecken“) erzeugte σ -Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$.

Seien jetzt μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und ν ein Maß auf $(Y, \mathcal{B})$ vorgegeben. Gesucht ist ein kanonisch gegebenes Maß $\mu \otimes \nu$ auf dem Produkt $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, welches in gewisser Weise iterativ gegeben ist. Ein solches Maß existiert eindeutig im Falle, dass man von σ -endlichen Mäßen ausgeht (vgl. 48.9).

Wichtigste Anwendung im Rahmen der Vorlesung: Das Lebesguemaß λ_2 auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist als Produktmaß $\lambda_1 \otimes \lambda_1$ darstellbar, und allgemeiner $\lambda_{m+n} = \lambda_m \otimes \lambda_n$ sowie $\lambda_n = \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_1$.

(48.1) Satz von Fubini: Zu zwei σ -endlichen Maßräumen gilt für das Produktmaß $\mu \otimes \nu$: Für $f \in \mathcal{L}_1(X \times Y, \mu \otimes \nu, E)$ ist

$$\int_{X \times Y} f d\mu \otimes d\nu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

Dazu benötigt man die Eigenschaften

- $X \rightarrow E, x \mapsto f(x, y)$ ist μ -integrierbar f.ü. in Y
- $Y \rightarrow E, y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$, ist ν -integrierbar,

und dasselbe mit den Rollen von X und Y vertauscht.

(48.2) Beobachtung:

(48.3) Definition: (monotone Klasse)

(48.4) Lemma:

(48.5) Definition: (Numerische Integrale, Ausdehnung des Integralbegriffs)

(48.6) Lemma:

(48.7) Konvention:

(48.8) Satz:

(48.9) Cavalieriprinzip: Auf $X \times Y$ gibt es genau ein Produktmaß $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ mit

1° $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B},$

2° *for all* $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$:

$$\mu \otimes \nu(M) = \int_X \left(\int_Y \chi_M(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_M(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

(48.10) Folgerung: Sei $f : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann ist die Menge $M^f := \{(x, t) \in X \times [0, \infty[: t < f(x)\}$ messbar in $X \times [0, \infty[$ mit

$$\mu \otimes \lambda(M^f) = \int_X f d\mu.$$

§49 Transformationssatz – Das euklidische Lebesgueintegral

Wir haben jetzt alle abstrakten Resultate der Maß- und Integrationstheorie beisammen, um die euklidische Integrationstheorie zu formulieren und anzuwenden: $\lambda = \lambda_n$ sei wie zuvor das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.

(49.1) Zusammenfassung: Drei Wege zum euklidischen Lebesgueintegral.

(49.2) Satz: (Invarianz)

(49.3) Beispiel:

(49.4) Transformationsformel: Es seien $\Omega, \Sigma \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und es sei $\Phi : \Omega \rightarrow \Sigma$ ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. Dann gilt für $f : \Sigma \rightarrow E$:

$$f \text{ ist integrierbar} \iff f \circ \Phi |\det D\Phi| \text{ ist integrierbar}$$

jeweils bezüglich λ_n , und es gilt

$$\int_{\Sigma} f(x) d\lambda(x) = \int_{\Omega} f \circ \Phi(y) |\det D\Phi(y)| d\lambda(y).$$

(49.5) Folgerung: (Maßtransformation)

(49.6) Fouriertransformation:

MIII – Analysis in mehreren Veränderlichen – WiSe 2007/08

Kurzfassung
Martin Schottenloher

∞ ∞ ∞

Kapitel XIV. Integration auf Mannigfaltigkeiten – Integralsätze

Die beiden Themen des Kapitels

- Integration auf (Unter-) Mannigfaltigkeiten
- Integralsätze

sind eng miteinander verwoben, und so sollen sie im Folgenden auch dargestellt werden. Wir beginnen mit den Integralsatz von Green (in der Ebene) im Paragraphen 50, verallgemeinern diesen Satz zum Satz von Stokes auf Flächen, und führen dabei im Paragraphen 51 die Integration auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ und allgemeiner auf k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ein. Schließlich formulieren wir in § 52 den Satz von Gauß, der es erlaubt, das Integral über eine offene, beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ unter guten Voraussetzungen an den Rand von Ω auf ein entsprechendes Integral über den Rand (als $(n - 1)$ -dimensionale) Untermannigfaltigkeit zurückzuführen.

Damit sind die klassischen Integralsätze (der Vektoranalysis) erst einmal eingeführt und bewiesen. Für die weitere Behandlung aller Integralsätze, die letztlich die Form

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

haben (auch der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung), muss der Kalkül der Differentialformen eingeführt werden. Mit Hilfe dieses Werkzeugs wird dann der allgemeine Satz von Stokes formuliert und bewiesen.

§50 Integralsatz von Green

In der Literatur heißt der Satz auch „Satz von Gauß in der Ebene“. Bewiesen wurde er zum ersten Mal von B. Riemann, bekannt geworden ist er vor allem aufgrund einer Arbeit aus dem Jahre 1828 von George Green, einem Müllermeister aus Nottingham.

(50.1) Satz: (Satz von Green für Rechtecke) Auf $R = [a, b] \times [c, d]$ sei ein C^1 -Vektorfeld $F = (P, Q) : R \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben (d.h. F ist die Restriktion eines C^1 -Vektorfeldes auf einer offenen Umgebung von R). Dann gilt:

$$\int_{\partial R} \langle F, dx \rangle = \int_{\partial R} P dx + Q dy = \int_R (Q_x - P_y) d\lambda_2.$$

Dabei ist mit ∂R unter dem Integralzeichen der orientierte Rand als Weg gemeint. Genauer: Die vier Kurvenstücke

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (t, c), & a \leq t \leq b, \\ \beta(t) &= (b, t), & c \leq t \leq d, \\ \gamma(t) &= (a + b - t, d), & a \leq t \leq b, \\ \delta(t) &= (a, c + d - t), & c \leq t \leq d,\end{aligned}$$

werden zusammengesetzt (addiert) und liefern die (richtig orientierte) stückweise $\mathcal{C}^1$ -Parametrisierung des Randes ∂R . Der Beweis des Satzes ergibt sich direkt durch mehrfache Anwendung des Hauptsatzes.

(50.2) Hilfssatz: Es seien $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige und rektifizierbare Funktionen (also stetige Funktionen von beschränkter Variation, vgl. Definition 25.5) mit $g \leq h$. Sei

$$B := \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

(Ein solcher Bereich wird Normalbereich in Bezug auf die x -Achse genannt, vgl. Abb. 50.1.) Ist $P : B \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar nach y und P_y integrierbar, so gilt

$$-\int_B P_y(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_{\partial B} P dx.$$

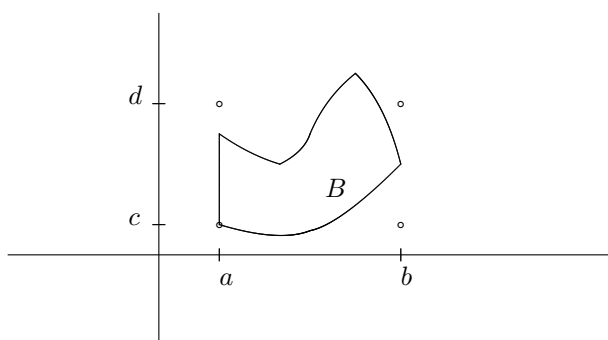


Abb. 50.1: B ist Normalbereich in Bezug auf die x -Achse.

Als Beispiele von stetigen Funktionen mit beschränkter Variation sind in erster Linie die stückweise stetig differenzierbaren Funktionen zu nennen.

Wir wollen das zu (50.2) analoge Resultat $\int_{\partial B} Q dy = \int_B Q_x d\lambda_2$ für Normalbereiche B bezüglich der y -Achse anwenden, um ein allgemeines Resultat für Bereiche zu erzielen, die Normalbereiche bezüglich der x -Achse und der y -Achse zugleich sind.

Beispielsweise ist jede Kreisscheibe $B \subset \mathbb{R}^2$ Normalbereich in Bezug auf die x -Achse und in Bezug auf die y -Achse, und das gilt ebenso für konvexe Bereiche mit genügend glattem Rand. Für das gezeichnete Beispiel B oben gilt das nicht. B ist nicht Normalbereich in Bezug auf die y -Achse. Aber dieses Beispiel kann in 2 Bereiche zerlegt werden, die beide Normalbereiche in Bezug auf die x -Achse und in Bezug auf die y -Achse sind (vgl. Abb. 50.2). Für B_1 und B_2 erhält man dann jeweils das gewünschte Resultat (Satz 50.3), welches daher auch für B gilt.

(Die Integrale über den doppelt durchlaufenen Weg löschen sich aus.)

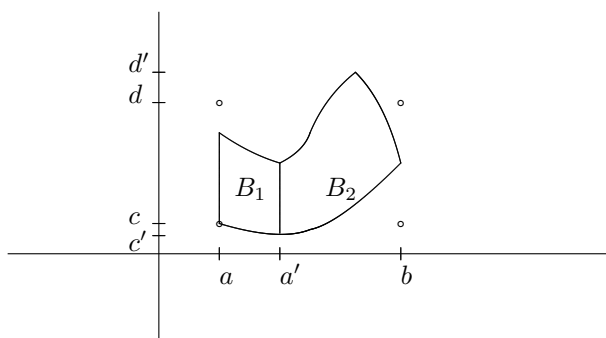


Abb. 50.2: B ist zerlegt in B_1, B_2 , die beide Normalbereiche in Bezug auf die x -Achse und auf die y -Achse sind. Und es gilt:

$$\int_{\partial B} (P dx + Q dy) = \int_{\partial B_1} (P dx + Q dy) + \int_{\partial B_2} (P dx + Q dy),$$

wenn die Ränder jeweils positiv orientiert durchlaufen werden.

(50.3) Satz: (Integralsatz von Green) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $B = \overline{\Omega}$ ein Normalbereich bezüglich der x -Achse und der y -Achse. Sei $F = (P, Q) : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein $\mathcal{C}^1$ -Vektorfeld. Dann

$$\int_{\partial \Omega} \langle F, dx \rangle = \int_{\partial \Omega} P dx + Q dy = \int_{\Omega} (Q_x - P_y) d\lambda_2.$$

Dabei ist $\partial \Omega$ positiv zu durchlaufen.

Dieselbe Formel gilt für ein Ω , das sich aus endlich vielen Normalbereichen zusammensetzt.

Dieselbe Formel gilt weiterhin für eine beschränkte, offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, wenn der Rand $\partial \Omega$ von Ω eine stückweise stetig differenzierbare und stückweise reguläre Parametrisierung besitzt.

Im letzten Fall lässt sich der Rand durch endlich viele Graphen von $\mathcal{C}^1$ -Funktionen beschreiben. Man kann Ω daher in endlich viele Normalbereiche in Bezug auf die x -Achse und zugleich auf die y -Achse zerlegen, mit jeweils differenzierbaren Begrenzungsfunktionen (vgl. Abb. 50.2), die sich nur in den Rändern schneiden, und die Aussage folgt aus dem Satz für Normalbereiche.

(50.4) Anwendungen:

1° $F = (P, Q)$ sei Potentialfeld auf einer offenen Menge Σ , d.h. $P = U_x, Q = U_y$, für ein Potential $U : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $Q_x - P_y = 0$, jedenfalls immer dann, wenn U zweimal stetig differenzierbar ist. Für Ω mit gutem Rand wie in 50.3 und $\overline{\Omega} \subset \Sigma$ gilt daher nach Satz 50.3:

$$\int_{\partial \Omega} \langle F, dx \rangle = 0,$$

das heißt, das Wegintegral über die geschlossene Kurve $\partial \Omega$ ist immer Null. Das wussten wir schon aus der Diskussion in MIIA, vgl. Paragraf 30, insbesondere Satz 30.12, denn ein Potentialfeld ist immer konservativ, was sich direkt ergibt, ohne den Umweg über den Satz von Green.

2° Es sei $B = \overline{\Omega}$ Normalbereich, oder der Satz von Green gelte für Ω aus anderen Gründen, z.B. weil der Rand von Ω stückweise stetig differenzierbar und regulär ist. Dann ist der Inhalt $\lambda_2(\Omega)$ durch das folgende Integral ausdrückbar:

$$\lambda(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (x dy - y dx).$$

Wichtige Anwendungen des Satzes von Green finden sich in der Funktionentheorie:

Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn sie in allen Punkten $z \in \Omega$ stetig komplex differenzierbar ist, wenn also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z)$$

existiert und die Funktion $z \mapsto f'(z)$ stetig ist.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= f_x(z) = f'(z), \\ \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} &= -if_y(z) = f'(z). \end{aligned}$$

Für holomorphe Funktionen gilt also: Sie sind stetig (reell) partiell differenzierbar mit $f_x + if_y = 0$.

Wenn wir $f = u + iv$ schreiben mit $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dann erfüllen Real- und Imaginärteil u, v von f also im Falle der Holomorphie die so genannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CR-DGln):

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

(50.5) Satz: $f = u + iv$ sei stetig partiell differenzierbar als reelle Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1° f ist holomorph.
- 2° u, v erfüllen die CR-DGln.
- 3° Die Jacobi-Matrix

$$Df(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

wirkt als komplexe Multiplikation.

Zur Erinnerung: Das komplexe Kurvenintegral für eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und eine stetige Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma([a, b]) \subset \Omega$ ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Mit $\gamma = \alpha + i\beta$ also

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \left(u(\gamma(t)) \dot{\alpha}(t) - v(\gamma(t)) \dot{\beta}(t) \right) dt + i \int_a^b \left(v(\gamma(t)) \dot{\alpha}(t) + u(\gamma(t)) \dot{\beta}(t) \right) dt,$$

und das ist die folgende Kombination von zwei reellen Kurvenintegralen

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \left(\int_{\gamma} u dx - v dy \right) + i \left(\int_{\gamma} v dx + u dy \right).$$

(50.6) Integralsatz von Cauchy: Es sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf der offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zu $a \in \Omega$ sei $r > 0$ mit $B = \{z \in \mathbb{C} : |a - z| \leq r\} \subset \Omega$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} f(z) dz = 0.$$

Dabei ist das Integral zu verstehen als das Integral über eine positive orientierte Kurve γ des Randes ∂B . Hier z.B. die Kurve $\gamma(t) = a + r \exp it$, $t \in [0, 2\pi]$, also

$$\int_0^{2\pi} f(a + r e^{it}) i r e^{it} dt = 0.$$

B ist Normalbereich.

Natürlich verschwindet das komplexe Kurvenintegral für viele weitere geschlossene Kurven. In der Tat für alle geschlossene rektifizierbare Kurven, die sich innerhalb Ω zu einem konstanten Weg stetig deformieren lassen (Homotopie).

(50.7) Integralformel von Cauchy: Es sei jetzt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig partiell (reell) differenzierbar, und es seien a, r, B, γ wie in 50.6. Dann gilt für alle $z \in \mathring{B}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_B \frac{\bar{\partial} f(x + iy)}{x + iy - z} d\lambda_2(x, y).$$

Dabei ist $\bar{\partial} f := \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$, also $\bar{\partial} f = 0$ für holomorphe f . Im holomorphen Fall gilt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

§51 Integration auf Flächen

Im Folgenden sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ offen (der „Parameterbereich“) und $\psi : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine injektive stetig differenzierbare Immersion, die topologisch auf das Bild $S := \psi(Q)$ sei, für die also die Umkehrung $\varphi = \psi^{-1} : S \rightarrow Q$ stetig ist. Insbesondere ist S eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, also eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, und φ ist eine (globale) Karte. S oder ψ heißt auch *Flächenstück* und ψ wird „Parametrisierung“ oder in diesem Fall auch *C^1 -Einbettung* genannt. Jede zweidimensionale Untermannigfaltigkeit M ist aus solchen Flächenstücken wie S zusammengesetzt: Es gibt eine offene Überdeckung $(S_i)_{i \in I}$ von M , und dazu topologische C^1 -Immersionen $\psi_i : Q_i \rightarrow S_i$ (die Karten $\varphi_i = \psi_i^{-1}$ bilden also eine Atlas). Analog für abstrakte (also nicht in $\mathbb{R}^n$ eingebettete) Flächen wie z.B. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Wie wird die Integration von Q auf S übertragen? (Die Restriktion von $\mathbb{R}^3$ auf S gibt keinen Sinn, die Integration ergibt stets Null, weil S in $\mathbb{R}^3$ eine Nullmenge ist.)

Messbarkeit lässt sich leicht übertragen: Eine Teilmenge $A \subset S$ wird einfach messbar genannt, wenn $\psi^{-1}(A) \subset Q$ lebesguemessbar ist.

Damit ist auf S eine σ -Algebra $\mathcal{L}_S$ definiert, weil ψ bijektiv ist. Und $\mathcal{L}_S$ enthält die Borel algebra $\mathcal{B}(S)$, weil ψ topologisch ist. Zu einer Integrationstheorie auf S fehlt jetzt ein Maß, die den Messraum $(S, \mathcal{L}_S)$ zu einem Maßraum macht. Es gilt also, einen verallgemeinerten Flächeninhalt

$$\lambda_S(A) \in [0, \infty]$$

für messbare Teilmengen $A \subset S$ zu finden.

Einige heuristische Überlegungen zur geometrischen Bedeutung des Vektors $\psi_1 \times \psi_2$ und seiner euklidischen Länge $\|\psi_1 \times \psi_2\|$ im $\mathbb{R}^3$ als Flächeninhalt des von den beiden Vektoren ψ_j , $j = 1, 2$, aufgespannten Parallelogramms führen zu der Feststellung, dass die Bilder von

kleinen Rechtecken $R \subset Q$ mit den Seitenlängen r und s , $R = q + [0, r] \times [0, s]$, also $\text{Vol}_2(R) = \|re_1 \times se_2\| = rs$ angenähert den Wert $\|r\psi_1(q) \times s\psi_2(q)\| = rs \|\psi_1(q) \times \psi_2(q)\|$ als den neuen Flächeninhalt erhalten sollten. Dabei ist wie zuvor $\psi_i(q) := \partial_i \psi(q)$, $i = 1, 2$, die durch die Parametrisierung ψ gegebene Basis des Tangentialraums von S im Punkte $\psi(q)$.

Im Grenzübergang führt das zu dem Ansatz

$$\lambda_S(A) = \int_Q \chi_A \circ \psi(q) \|\psi_1 \times \psi_2(q)\| d\lambda_2(q).$$

Wir erinnern an $\|\psi_1 \times \psi_2\|^2 = \det(g_{ij})$, wobei (g_{ij}) der Maßtensor mit den Komponenten $g_{ij}(q) = \langle \psi_i(q), \psi_j(q) \rangle$ ist.

(51.1) Satz – Definition: Durch

$$\lambda_S(A) = \int_Q \chi_A \circ \psi(q) \sqrt{\det(g_{ij}(q))} d\lambda_2(q)$$

wird ein Maß auf $\mathcal{L}_S$ definiert, das unabhängig von der Parametrisierung ψ ist.

[22.1.08]

Es gilt also für eine weitere topologische, stetig differenzierbare Immersion $\bar{\psi} : \bar{Q} \rightarrow S$ zu zeigen, dass

$$\int_Q \chi_A \circ \psi(q) \sqrt{\det(g_{ij}(q))} d\lambda_2(q) = \int_{\bar{Q}} \chi_A \circ \bar{\psi}(\bar{q}) \sqrt{\det(\bar{g}_{ij}(\bar{q}))} d\lambda_2(\bar{q})$$

zutrifft. Diese Identität folgt aus dem Transformationssatz, denn für den $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus $\Phi := \psi^{-1} \circ \bar{\psi} : \bar{Q} \rightarrow Q$ liefert die Kettenregel

$$\det(\bar{g}_{ij}(\bar{q})) = \det(g_{kl}(\Phi(\bar{q}))) (\det D\Phi(\bar{q}))^2.$$

(51.2) Folgerung: Die Integration von Funktionen $f : S \rightarrow E$ erfolgt über die Formel

$$\int_S f d\lambda_S = \int f d\lambda_S = \int_Q f \circ \psi \sqrt{\det(g_{ij})} d\lambda_2.$$

Das Integral ist das *Oberflächenintegral*.

(51.3) Beispiel: Oberfläche der 2-Sphäre $\mathbb{S}_R^2$ vom Radius R durch Bestimmung der Oberfläche der Halbsphäre S mit der Parametrisierung $\psi : Q \rightarrow S$, $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$, wobei $Q = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$:

$$g_{11} = \left\langle \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right), \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) \right\rangle = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2},$$

$$g_{12} = \left\langle \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right), \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) \right\rangle = \frac{xy}{R^2 - x^2 - y^2},$$

$$g_{22} = 1 + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

$$\det(g_{ij}) = (R^2 - x^2 - y^2)^{-2} ((R^2 - y^2)(R^2 - x^2) - x^2 y^2) = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Daher folgt

$$\lambda_{\mathbb{S}_R^2}(S) = \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr d\varphi,$$

und schließlich

$$\lambda_{\mathbb{S}_R^2}(S) = 2\pi R \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 2\pi R \left(-\sqrt{R^2 - r^2} \Big|_{r=0}^{r=R} \right) = 2\pi R^2.$$

Deshalb ist $\lambda_{\mathbb{S}_R^2}(\mathbb{S}_R^2) = 4\pi R^2$ die Oberfläche der 2-Sphäre vom Radius R .

(51.4) Bemerkung: Auf dieselbe Weise wie 51.1 / 51.2 übertragen sich Maß und Integral auf Untermannigfaltigkeiten beliebiger Dimension: Wenn nur $\psi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine topologische $\mathcal{C}^1$ -Immersion ist auf einer offenen Menge $Q \subset \mathbb{R}^k$, $k < n$, $M = \psi(Q)$ (solch eine Abbildung ψ wird auch eine $\mathcal{C}^1$ -Einbettung genannt), so hat man ja den Maßtensor

$$g_{ij}(q) = \langle \partial_i \psi(q), \partial_j \psi(q) \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq k,$$

auf der Mannigfaltigkeit M , und dieselben Formeln wie in 51.1 und 51.2 liefern Maß und Integration, unabhängig von der Parametrisierung:

$$\lambda_M(A) = \int_Q \chi_A \circ \psi(q) \sqrt{\det(g_{ij})} d\lambda_k(q),$$

für messbare $A \subset M$, und

$$\int_M f d\lambda_M = \int_Q f \circ \psi \sqrt{\det(g_{ij})} d\lambda_k,$$

für Funktionen $f : S \rightarrow E$.

(51.5) Bemerkung: Es gilt für $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3) : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$:

$$\det(g_{ij}) = \left(\frac{\partial(\psi^1, \psi^2)}{\partial(q^1, q^2)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\psi^2, \psi^3)}{\partial(q^1, q^2)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\psi^3, \psi^1)}{\partial(q^1, q^2)} \right)^2,$$

dabei ist $\frac{\partial(\psi^1, \psi^2)}{\partial(q^1, q^2)}$ die Determinante der Jacobimatrix zu $(\psi^1, \psi^2) : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$, also $\det D(\psi^1, \psi^2)$, etc.

Mit diesem Ausdruck erweist sich die Formel in 51.1 für den Inhalt

$$\lambda_S(S) = \int_Q \sqrt{\left(\frac{\partial(\psi^1, \psi^2)}{\partial(q^1, q^2)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\psi^2, \psi^3)}{\partial(q^1, q^2)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\psi^3, \psi^1)}{\partial(q^1, q^2)} \right)^2} d\lambda_2$$

als eine direkte Verallgemeinerung der Kurvenlänge

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{\gamma}^1(t))^2 + (\dot{\gamma}^2(t))^2 + (\dot{\gamma}^3(t))^2} dt.$$

Das gilt auch analog für das Integral.

In Analogie zum Wegintegral $\int_\gamma \langle F, dx \rangle$ im Eindimensionalen wird auch über Flächen ein Integral von Vektorfeldern über die Fläche S eingeführt. Im Spezialfall, kommt das bereits im

Integralsatz von Green vor.

(51.6) Definition: Ist $F = (P, Q, R) : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, so setze

$$\begin{aligned}\int_S P \, dy \wedge dz &:= \int_Q P \circ \psi(q) \frac{\partial(\psi^2, \psi^3)}{\partial(q^1, q^2)}(q) \, d\lambda_2(q), \\ \int_S Q \, dz \wedge dx &:= \int_Q Q \circ \psi(q) \frac{\partial(\psi^3, \psi^1)}{\partial(q^1, q^2)}(q) \, d\lambda_2(q), \\ \int_S R \, dx \wedge dy &:= \int_Q R \circ \psi(q) \frac{\partial(\psi^1, \psi^2)}{\partial(q^1, q^2)}(q) \, d\lambda_2(q).\end{aligned}$$

Dann wird die Summe dieser drei Integrale (falls die rechten Seiten alle drei im lebesgueschen Sinne existieren) mit

$$\int_S P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy$$

bezeichnet und das *Oberflächenintegral von F über S* genannt.

Man kann das Integral auch in der Form $\int_S \langle F, do \rangle$ schreiben und erhält damit eine formale Analogie zu den bekannten Wegintegralen $\int_\gamma \langle F, dx \rangle$.

Damit das Sinn gibt, muss nach die Unabhängigkeit von der Parametrisierung ψ gezeigt werden. Sie gilt nicht total sondern nur bis auf Vorzeichen, welches davon abhängt, ob der Parameterwechsel orientierungstreu ist oder nicht. Trotzdem erlaubt man sich, das Integral in Abhängigkeit von S zu schreiben, im Kontext wird jeweils klar, wie mit dem Vorzeichen umzugehen ist. Oft genug beschränkt man sich auf orientierungstreue Koordinatenwechsel.

(51.7) Satz: Die Definition 51.6 ist unabhängig gegenüber Parameterwechsel bis auf Vorzeichen, das durch die Orientierung des Parameterwechsels bestimmt wird. Das Vorzeichen ist „+“, wenn die Determinante von $F = \psi^{-1} \circ \bar{\psi}$ positiv ist, und „–“ wenn sie negativ ist. [25.1.08]

Es ist sinnvoll, den Parameterbereich Q als zusammenhängend vorauszusetzen, weil dann nur zwei Werte insgesamt für das Integral möglich sind.

Andere Schreibweise:

(51.8) Satz: Es gilt

$$\int_S P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy = \int_Q \langle F \circ \psi(q), \psi_1 \times \psi_2(q) \rangle \, d\lambda_2(q).$$

Rückführung auf das bereits vorher eingeführte Oberflächenintegral über den Normaleneinheitsvektor

$$\nu(q) := \frac{\psi_1(q) \times \psi_2(q)}{\|\psi_1(q) \times \psi_2(q)\|} :$$

(51.9) Folgerung: Es gilt

$$\int_S P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy = \int_S \langle F, \nu \rangle \, d\lambda_S.$$

Die Normalenrichtung in einem Punkte $p \in S$ der Fläche S , also der eindimensionale Raum $N_p S$ ist durch $\nu(q)$, $\psi(q) = p$, gegeben: $N_p S = \mathbb{R}\nu(q)$. Es gibt genau 2 Normaleneinheitsvektoren $\pm\nu(q)$ im Punkte p an die Fläche S , und je nach Orientierung der Parametrisierung ψ

wird durch $\nu(q)$ ein vorgegebener Normalenvektor gegeben oder durch $-\nu(q)$: Für eine weitere (topologische immersive $\mathcal{C}^1$ -) Parametrisierung $\bar{\psi} : \bar{Q} \rightarrow S$ mit $p = \bar{\psi}(\bar{q})$ gilt $\nu(q) = \bar{\nu}(\bar{q})$, wenn $\det D(\psi^{-1} \circ \bar{\psi})(\bar{q}) > 0$ und es gilt $\nu(q) = -\bar{\nu}(\bar{q})$, wenn $\det D(\psi^{-1} \circ \bar{\psi})(\bar{q}) < 0$.

Die Vorzeichenmehrdeutigkeit der Normalen ist also dieselbe wie die des neuen Integrals, wie sich aus der Formel in 51.9 ablesen lässt.

(51.10) Satz: (Der Stokessche Integralsatz für Flächen) Die Einbettung $\psi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ sei zweimal stetig differenzierbar. Es sei $B \subset Q \subset \mathbb{R}^2$ ein kompakter Bereich, dessen Rand eine stückweise stetig differenzierbare und reguläre Parametrisierung hat. Sei $\Omega := \psi(\mathring{B}) \subset S$ und sei γ eine stückweise reguläre $\mathcal{C}^1$ -Parametrisierung des Randes $\partial\Omega$ mit der richtigen Orientierung. Sei $F = (P, Q, R) : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, welches die Restriktion eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes auf einer offenen Umgebung von S ist. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Man erkennt den Satz von Green 50.3, wenn man alles als von z unabhängig ansieht. Das heißt konkret: $\psi(x, y) = (x, y, 0)$ und $S = Q \times \{0\}$ ist die durch Q gegebene ebene Fläche. Umgekehrt kann man sich vorstellen, dass der Satz 51.10 aus dreifacher Anwendung des Integralsatzes von Green 50.3 besteht.

Beweis. Sei $\alpha := \psi^{-1} \circ \gamma$ die entsprechende Parametrisierung von ∂B , also $\gamma = \psi \circ \alpha$. Wir konzentrieren uns auf den Term $\int_{\gamma} P dx$ und setzen $u := P \circ \psi$. Dann ist

$$\int_{\gamma} P dx = \int_a^b P(\gamma(t)) \dot{\gamma}^1(t) dt = \int_a^b P(\gamma(t)) \frac{d}{dt} (\psi^1 \circ \alpha)(t) dt = \int_a^b u(\alpha(t)) \psi_1^1 \dot{\alpha}^1(t) dt = \int_{\alpha} u \psi_1^1 dq^1 + u \psi_2^1 dq^2.$$

Wir wenden auf $\int_{\alpha} (u \psi_1^1) dq^1 + (u \psi_2^1) dq^2$ den Integralsatz von Green 50.3 an und erhalten

$$\int_{\alpha} P dx = \int_{\alpha} (u \psi_1^1) dq^1 + (u \psi_2^1) dq^2 = \int_B (\partial_1(u \psi_2^1) - \partial_2(u \psi_1^1)) d\lambda_2.$$

Um das gewünschte Ergebnis zu erzielen, muss noch der Integrand im letzten Integral geeignet umformuliert werden: Es ist $\partial_1(u \psi_2^1) = \partial_1(P \circ \psi) \psi_2^1 + P \circ \psi \partial_1 \psi_2^1 = \sum_{k=1}^3 (\partial_k P) \psi_1^k \psi_2^1 + P \circ \psi \partial_1 \psi_2^1$ und $\partial_2(u \psi_1^1) = \sum_{k=1}^3 (\partial_k P) \psi_2^k \psi_1^1 + P \circ \psi \partial_2 \psi_1^1$. Weil ψ als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird, ist $\partial_2 \psi_1^1 = \partial_1 \psi_2^1$. Der Integrand hat also die Form:

$$\sum_{k=1}^3 (\partial_k P) (\psi_1^k \psi_2^1 - \psi_2^k \psi_1^1).$$

$\sum_{k=1}^3 (\partial_k P) (\psi_1^k \psi_2^1 - \psi_2^k \psi_1^1) = \partial_1 P (\psi_1^1 \psi_2^1 - \psi_2^1 \psi_1^1) + \partial_2 P (\psi_1^2 \psi_2^1 - \psi_2^2 \psi_1^1) + \partial_3 P (\psi_1^3 \psi_2^1 - \psi_2^3 \psi_1^1)$, also ist der Integrand

$$-\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(\psi^1, \psi^2)}{\partial(q^1, q^2)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(\psi^3, \psi^1)}{\partial(q^1, q^2)}.$$

Damit ist nach Definition 51.6 die Identität

$$\int_{\gamma} P dx = \int -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \int \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx$$

gezeigt. Analog verfährt man mit $\int_{\gamma} Q dy$ und $\int_{\gamma} R dz$, um das Ergebnis schließlich durch Aufsummieren zu erhalten. $\square$

(51.11) Definition: Rotation. Für ein Vektorfeld F wie im Satz 51.10 setzt man

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Man erhält die folgende Formulierung des Satzes 51.10:

(51.12) Integralsatz:

$$\int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle d\lambda_S = \int_{\partial\Omega} \langle F, dx \rangle.$$

§52 Der Integralsatz von Gauß

(52.1) Satz: (Integralsatz von Gauß für Rechtecke) Sei $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ein kompakter Quader und es sei $F : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$ -Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_R \operatorname{div} F d\lambda_n = \int_{\partial R} \langle F, N \rangle d\lambda_S,$$

wobei N die äußere Normale auf ∂R ist und $\operatorname{div} F := \partial_k F^k$ die Divergenz.

(52.2) Definition: Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $a \in \partial B$.

1° a heißt *regulärer Randpunkt*, wenn es eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine $\mathcal{C}^1$ -Funktion $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla u(x) \neq 0$ für alle $x \in V$, so dass

$$B \cap V = \{x \in V : u(x) \leq 0\}.$$

Es gilt dann $\partial B \cap V = u^{-1}(0)$, und diese Menge ist $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Ansonsten heißt a *singulär*.

2° $\partial_r B := \{a \in \partial B : a \text{ regulär}\}$, $\partial_s B := \partial B \setminus \partial_r B$. $\partial_r B$ ist $n-1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, also eine Hyperfläche.

3° B ist $\mathcal{C}^1$ -Polyeder, wenn $\partial_s B$ eine $(n-1)$ -Nullmenge ist. N ist eine $(n-1)$ -Nullmenge (vgl. Hausdorffmaß), wenn

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{n-1} \mid \exists b_k \in \mathbb{R}^n : N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} (b_k + [0, r_k]^n) \right\} = 0.$$

Zum Beispiel sei N in der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = M$ enthalten. Dann ist N genau dann $(n-1)$ -Nullmenge, wenn N als Teilmenge der $(n-1)$ -Untermannigfaltigkeit M eine Nullmenge ist (dh. alle Bilder von N unter allen Karten sind Nullmengen in $\mathbb{R}^{n-1}$). Analog für beliebige Hyperflächen $M \subset \mathbb{R}^n$.

4° Das *äußere Normalenfeld* $N : \partial_r B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist folgendermaßen festgelegt: $N(a)$ ist der eindeutig bestimmte Normalenvektor zu $a \in \partial_r B$, zu dem es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $t \in]0, \varepsilon[$ stets

$$\begin{aligned} a + t N(a) &\notin B, \\ a - t N(a) &\in B, \\ T_a(\partial_r B) &\perp N(a). \end{aligned}$$

Es ist

$$N(a) = \frac{\nabla u(a)}{\|\nabla u(a)\|},$$

wenn immer u die in 1° genannten Eigenschaften hat.

(52.3) Integralsatz von Gauß: $B \subset \mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{C}^1$ -Polyeder mit messbaren Rand. Dann gilt für $\mathcal{C}^1$ -Vektorfelder $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\int_B \operatorname{div} F \, d\lambda_n = \int_{\partial_r B} \langle F, N \rangle \, d\lambda_S, \quad (S = \partial_r B).$$

(52.4) Interpretation: Es sei $F : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen, strömenden Flüssigkeit. Die *mittlere Ergiebigkeit* innerhalb eines Quaders $R \subset B$ (die Summe dessen, was hinein fließt und was heraus fließt in Relation zum Volumen) ist

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}_3(R)} \int_{\partial R} \langle F, N \rangle \, d\lambda_S.$$

Im Falle, dass man R gegen einen Punkt konvergieren lässt, ergibt sich bereits aus (52.1) (und auch aus dem Satz von Gauß) der Wert

$$\lim_{R \rightarrow p} \frac{1}{\operatorname{Vol}_3(R)} \int_{\partial R} \langle F, N \rangle \, d\lambda_S = \lim_{R \rightarrow p} \frac{1}{\operatorname{Vol}_3(R)} \int_B \operatorname{div} F \, d\lambda_3 = \operatorname{div} F(p).$$

Die Größe $\operatorname{div} F(p)$ wird daher auch die *Quelldichte* von F in p genannt.

[29.1.08]

(52.5) Beispiele: $B \subset \mathbb{R}^n$ sei ein $\mathcal{C}^1$ -Polyeder mit messbaren Rand.

1° $F(x) = x, x \in B$. Dann ist $\operatorname{div} F = n$ konstant und (52.3) liefert

$$\operatorname{Vol}_n(B) = \frac{1}{n} \int_{\partial_r B} \langle F, N \rangle \, d\lambda_S.$$

2° Für $a \in \mathbb{R}^n$ sei

$$F(x) = \frac{x - a}{\|x - a\|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}.$$

Dann ist im Falle $a \in \mathring{B}$

$$\int_{\partial_r B} \langle F, N \rangle \, d\lambda_S = \omega_n,$$

wobei ω_n die Oberfläche der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.

Ansatz: $B_\varepsilon := B \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq \varepsilon\}$: Wegen $\operatorname{div} F = 0$ ist

$$0 = \int_{\partial_r B} \langle F, N \rangle \, d\lambda_S - \int_{\partial B(a, \varepsilon)} \langle F, N \rangle \, d\lambda_S.$$

Und $\int_{\partial B(a, \varepsilon)} \langle F, N \rangle \, d\lambda_S = \int_{\partial B(a, \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \, d\lambda_S = \omega_n$.