

Die wichtigsten Sätze auf einen Blick

Definitionen, Sätze und Rechenwerkzeuge kompakt zum Nachschlagen und Wiederholen – von Fixpunkten über Maß und Integral bis zu den Integralsätzen. Alle Aussagen ohne Beweis; die genauen Voraussetzungen stehen im Skript der Vorlesung.

1 Fixpunkte, implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeiten

Kontraktion Eine Abbildung $f: X \rightarrow X$ auf einem metrischen Raum (X, d) heißt *Kontraktion*, wenn es ein $q < 1$ gibt mit $d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Fixpunktsatz von Banach Ist (X, d) vollständig und $f: X \rightarrow X$ eine Kontraktion mit Konstante $q < 1$, so besitzt f genau einen Fixpunkt x^* . Für jeden Startwert x_0 konvergiert $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen x^* , und es gilt

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \quad (\text{a priori}), \quad d(x_n, x^*) \leq \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1}) \quad (\text{a posteriori}).$$

Satz über implizite Funktionen Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $F(a, b) = 0$ und $D_y F(a, b) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen $V \ni a$, $W \ni b$ und genau eine Funktion $g: V \rightarrow W$ mit $\{(x, y) \in V \times W : F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) : x \in V\}$. Es ist $g \in C^1$ und

$$Dg(x) = -D_y F(x, g(x))^{-1} D_x F(x, g(x)).$$

Umkehrsatz Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $Df(a)$ invertierbar, so ist f nahe a ein C^1 -Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von $f(a)$, und $D(f^{-1})(f(x)) = Df(x)^{-1}$.

Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine k -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung U und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$ gibt mit $M \cap U = \{f = 0\}$ und $\text{Rang } Df(x) = n - k$ für alle $x \in M \cap U$. Dann ist der Tangentialraum $T_p M = \ker Df(p)$.

Extrema unter Nebenbedingungen (Lagrange) Hat $h \in C^1$ auf $M = \{f_1 = \dots = f_{n-k} = 0\}$ (wie oben) in p ein lokales Extremum, so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ mit $\nabla h(p) = \sum_i \lambda_i \nabla f_i(p)$.

2 Maßtheorie

σ -Algebra und Maß $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt σ -Algebra, wenn $X \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$. Ein *Maß* ist eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ für paarweise disjunkte A_n . Die *Borel- σ -Algebra* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Mengen enthält.

Rechenregeln für Maße

- Monotonie: $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$; σ -Subadditivität: $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.
- Stetigkeit von unten: $A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

- Stetigkeit von oben: $A_n \downarrow A$ und $\mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$. Ohne $\mu(A_1) < \infty$ falsch: $A_n = [n, \infty)$.

Eindeutigkeitssatz Stimmen zwei Maße auf einem $\cap$ -stabilen Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ überein und gibt es $E_n \in \mathcal{E}$ mit $E_n \uparrow X$ und endlichem Maß, so stimmen sie auf ganz $\mathcal{A}$ überein. (Beweiswerkzeug: Dynkin-Systeme.)

Fortsetzungssatz von Carathéodory Ist μ^* ein äußeres Maß, so bilden die μ^* -messbaren Mengen $\{A : \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \forall Q \subseteq X\}$ eine σ -Algebra, auf der μ^* ein vollständiges Maß ist. Jedes Prämaß auf einem Ring lässt sich so zu einem Maß auf der erzeugten σ -Algebra fortsetzen.

Lebesgue-Maß Es gibt genau ein Maß λ^d auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda^d(\prod_i [a_i, b_i]) = \prod_i (b_i - a_i)$. Es ist translationsinvariant, und für lineares T gilt $\lambda^d(T(A)) = |\det T| \lambda^d(A)$. Abzählbare Mengen und Hyperebenen sind Nullmengen.

3 Messbare Funktionen und das Lebesgue-Integral

Messbarkeit und Integral $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, wenn $\{f > a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Summen, Produkte, sup, inf, lim sup und punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar. Für $f \geq 0$ messbar ist $\int f d\mu = \sup\{\int \varphi d\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ einfach}\}$ mit $\int \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i)$. f heißt integrierbar, wenn $\int |f| d\mu < \infty$; dann $\int f = \int f^+ - \int f^-$.

Monotone Konvergenz (Beppo Levi) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ messbar, $f_n \rightarrow f$ punktweise $\Rightarrow \int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Lemma von Fatou $f_n \geq 0$ messbar $\Rightarrow \int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$.

Dominierte Konvergenz (Lebesgue) $f_n \rightarrow f$ fast überall und $|f_n| \leq g$ mit g integrierbar $\Rightarrow f$ ist integrierbar, $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ und $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Parameterintegrale Sei $F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$. Ist $t \mapsto f(x, t)$ stetig und $|f(x, t)| \leq g(x)$ mit g integrierbar, so ist F stetig. Ist $t \mapsto f(x, t)$ differenzierbar und $|\partial_t f(x, t)| \leq g(x)$, so ist $F'(t) = \int \partial_t f(x, t) d\mu(x)$.

Riemann und Lebesgue. Jede Riemann-integrierbare Funktion auf $[a, b]$ ist Lebesgue-integrierbar mit demselben Wert. Uneigentliche Riemann-Integrale dagegen nur, wenn sie *absolut* konvergieren: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existiert uneigentlich, $\frac{\sin x}{x}$ ist auf $(0, \infty)$ aber nicht Lebesgue-integrierbar.

4 Produktmaße und der Satz von Fubini

Satz von Tonelli Seien μ, ν σ -endlich und $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ messbar bzgl. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$. Dann sind die iterierten Integrale messbar und

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Satz von Fubini Ist f integrierbar bzgl. $\mu \otimes \nu$, so existieren die inneren Integrale fast überall, sind integrierbar, und die Gleichung oben gilt ebenso.

Erst Tonelli, dann Fubini. Vor dem Vertauschen die Integrierbarkeit prüfen, am einfachsten mit Tonelli für $|f|$. Ohne sie können beide iterierten Integrale existieren und verschieden sein.

Prinzip von Cavalieri Für messbares $A \subseteq \mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ gilt $\lambda^d(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{d-1}(A_x) dx$ mit dem Schnitt $A_x = \{y : (x, y) \in A\}$.

5 Der Transformationssatz

Transformationssatz Sei $\Phi: U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus offener Mengen im $\mathbb{R}^d$. Für messbares $f \geq 0$ oder integrierbares f auf V gilt

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| dx.$$

Koordinaten	Abbildung Φ	$ \det D\Phi $
Polar ($\mathbb{R}^2$)	$(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$	r
Zylinder ($\mathbb{R}^3$)	$(r, \varphi, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$	r
Kugel ($\mathbb{R}^3$)	$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$	$r^2 \sin \theta$

Dabei $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\theta \in (0, \pi)$; die fehlenden Randmengen sind Nullmengen.

Drei Ergebnisse, die man kennen sollte

- Gauß-Integral: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, denn mit Fubini und Polarkoordinaten ist

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\varphi = \pi.$$

- Volumen der Einheitskugel: $\lambda^3(B_1) = \frac{4}{3}\pi$, allgemein $\lambda^d(B_1) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}$.
- $\int_{B_1 \subseteq \mathbb{R}^d} \frac{dx}{|x|^\alpha} < \infty \iff \alpha < d$, $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_1} \frac{dx}{|x|^\alpha} < \infty \iff \alpha > d$.

6 Integration auf Flächen und die Integralsätze

Oberflächenintegral Ist $\phi: T \rightarrow M$ eine Parametrisierung ($T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, ϕ injektive Immersion), so gilt $\int_M f dS = \int_T f(\phi(t)) \sqrt{\det(D\phi(t)^\top D\phi(t))} dt$ (Gramsche Determinante). Für Flächen im $\mathbb{R}^3$ ist $\sqrt{\det(D\phi^\top D\phi)} = |\partial_u \phi \times \partial_v \phi|$, für Graphen $z = h(x, y)$ gleich $\sqrt{1 + |\nabla h|^2}$.

Satz von Gauß (Divergenzsatz) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit C^1 -Rand, äußerer Einheitsnormale ν und F ein C^1 -Vektorfeld auf einer Umgebung von K :

$$\int_K \operatorname{div} F dx = \int_{\partial K} \langle F, \nu \rangle dS.$$

Satz von Green (Ebene) $\int_K (\partial_x Q - \partial_y P) \, d(x, y) = \oint_{\partial K} P \, dx + Q \, dy$, Rand positiv orientiert (Gebiet links).

Klassischer Satz von Stokes ($\mathbb{R}^3$) Für eine orientierte Fläche S mit Randkurve ∂S (passend orientiert):

$$\int_S \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle \, dS = \oint_{\partial S} \langle F, d\gamma \rangle.$$

Differentialformen und allgemeiner Satz von Stokes $d \circ d = 0$, und der Pullback vertauscht mit d und $\wedge$. Für eine kompakte orientierte k -dimensionale Mannigfaltigkeit M mit Rand und eine $(k-1)$ -Form ω der Klasse C^1 :

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Poincaré-Lemma: Auf einer sternförmigen offenen Menge ist jede geschlossene Form ($d\omega = 0$) exakt ($\omega = d\eta$).

7 Typische Stolperfallen

- Banach braucht *alle drei* Voraussetzungen: vollständiger Raum, Selbstabbildung, gleichmäßige Konstante $q < 1$. $|f'| < 1$ allein reicht nicht.
- Implizite Funktionen: Die Ableitung nach den *aufzulösenden* Variablen muss invertierbar sein, nicht die nach allen.
- Stetigkeit von oben braucht ein Glied mit endlichem Maß.
- Konvergenzsätze: Beim monotonen Satz Monotonie und $f_n \geq 0$ prüfen, beim dominierten Satz eine *von n unabhängige* integrierbare Majorante angeben.
- Fubini: erst Integrierbarkeit (Tonelli für $|f|$), dann vertauschen.
- Transformationssatz: Betrag der Determinante nicht vergessen, und Φ muss (bis auf Nullmengen) bijektiv sein.
- Integralsätze: Orientierung von Normale und Randkurve sorgfältig festlegen.