

Blatt 1 erklärt

Extrema auf kompakten Mengen · Banachscher Fixpunktsatz

Begleitmaterial zum Nacharbeiten – mit Skizzen, gestuften Hinweisen, ausführlichen Lösungswegen, typischen Fehlern und Fragen zum Weiterdenken.

Mirkan Deniz Günkaya · Mathematik-Tutorium · mirkan-analysis.de

Bevor ihr loslegt

Dieses Begleitmaterial habe ich für euch geschrieben, damit ihr Blatt 1 in Ruhe nacharbeiten könnt. Es ist ein **freiwilliges Zusatzangebot** von mir und **keine offizielle Datei oder Musterlösung der Vorlesung**. Verbindlich sind immer die Vorlesung, das Skript und die Ankündigungen von Prof. Rauhut und dem Übungsteam.

Weitergeben ausdrücklich erwünscht: Teilt es gern mit Kommilitoninnen und Kommilitonen. Wenn euch ein Fehler auffällt oder etwas unklar bleibt, schreibt mir einfach.

So holt ihr am meisten heraus: Versucht jede Aufgabe zuerst selbst. Wenn ihr hängt, lest nur den nächsten Hinweis und probiert es dann noch einmal. Die Lösung ist zum Vergleichen da – nicht zum Abschreiben.

Inhaltsverzeichnis

1	Werkzeugkasten	2
1.1	Extrema auf kompakten Mengen	2
1.2	Der Banachsche Fixpunktsatz	2
2	Aufgabe 1: Maximum und Minimum auf einer kompakten Menge	2
2.1	Lösung, Schritt für Schritt	3
2.2	Ein eleganter zweiter Weg: Substitution $t = x^2$	4
2.3	Weiterdenken	5
3	Aufgabe 2: Der Banachsche Fixpunktsatz	6
3.1	Teil a), Schritt für Schritt	6
3.2	Teil b), Schritt für Schritt	7
3.3	Was die Iteration wirklich tut	8
3.4	Weiterdenken	9
4	Die schriftlichen Aufgaben 3 und 4	9
4.1	Aufgabe 3: Taylorpolynome	9

4.2	Aufgabe 4: Extrema von $f(x, y) = x e^y + y e^x$	10
-----	--	----

5	Selbsttest	10
---	------------	----

1 Werkzeugkasten

1.1 Extrema auf kompakten Mengen

Satz von Weierstraß Eine stetige Funktion $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer *kompakten* (abgeschlossenen und beschränkten) Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an.

Der Satz sagt nur, dass es Maximum und Minimum gibt – nicht wo. Dafür gibt es ein festes Rezept:

1. **Existenz begründen:** f stetig, B kompakt.
2. **Kandidaten im Inneren:** Dort muss $\nabla f = 0$ gelten, denn man kann sich in jede Richtung ein Stück bewegen.
3. **Kandidaten auf dem Rand:** Den Rand in glatte Stücke zerlegen, jedes Stück parametrisieren und die entstehende Funktion einer Variablen untersuchen. *Ecken* immer extra notieren.
4. **Vergleichen:** Alle Kandidaten einsetzen. Der größte Wert ist das Maximum, der kleinste das Minimum.

Eine Hesse-Matrix braucht man dafür nicht: Sie beantwortet eine andere Frage, nämlich ob ein kritischer Punkt *lokal* ein Extremum ist.

1.2 Der Banachsche Fixpunktsatz

Banachscher Fixpunktsatz Sei U eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums (zum Beispiel $U = \mathbb{R}$ oder ein abgeschlossenes Intervall) und $f: U \rightarrow U$ eine *Kontraktion*, das heißt $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ für alle $x, y \in U$ mit einem festen $\lambda < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x}$, und die Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert von jedem Startwert $x_0 \in U$ gegen $\bar{x}$. Außerdem gilt

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0| \text{ (a priori),} \quad |x_n - \bar{x}| \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} |x_n - x_{n-1}| \text{ (a posteriori).}$$

Das wichtigste Werkzeug, um eine Kontraktion nachzuweisen, ist der **Mittelwertsatz**: Ist f differenzierbar, so gibt es zu x, y ein ξ dazwischen mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Also

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup |f'| \cdot |x - y|,$$

und es genügt, eine *feste* Schranke $\sup |f'| \leq \lambda < 1$ zu finden.

2 Aufgabe 1: Maximum und Minimum auf einer kompakten Menge

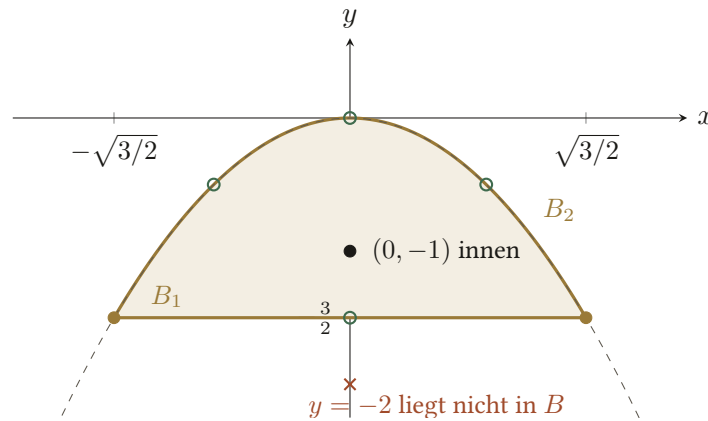
Aufgabe 1 (in eigenen Worten)

Bestimme den größten Wert M und den kleinsten Wert m von

$$f(x, y) = e^{x^2+y} (y^2 + y + 1) \quad \text{auf} \quad B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{3}{2} \leq y \leq -x^2 \right\}.$$

Worum es geht

B liegt zwischen der Geraden $y = -\frac{3}{2}$ (unten) und der nach unten geöffneten Parabel $y = -x^2$ (oben). Die beiden schneiden sich bei $x^2 = \frac{3}{2}$, also in den Ecken $(\pm\sqrt{3/2}, -\frac{3}{2})$. Weil f stetig und B kompakt ist, existieren M und m – wir müssen sie nur finden: Kandidaten im Inneren, Kandidaten auf dem Rand, alles vergleichen.



Die Menge B (hell). Gold: die beiden Randstücke B_1 (unten) und B_2 (Parabel) mit den Ecken. Schwarz: der kritische Punkt im Inneren. Grün: weitere Kandidaten auf dem Rand.

Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Zeichnet B . Wo verläuft der Rand, wo sind Ecken? Warum existieren M und m überhaupt?

Hinweis 2. Trennt Inneres und Rand. Im Inneren gilt $\nabla f = 0$. Den Rand zerlegt ihr in zwei glatte Stücke, die ihr jeweils durch x parametrisiert. Die Ecken notiert ihr extra.

Hinweis 3. Auf der Parabel $y = -x^2$ wird der Exponent $x^2 + y$ zu 0. Was bleibt dann von f übrig?

2.1 Lösung, Schritt für Schritt

Schritt 0: Existenz. B ist abgeschlossen (zwei nicht-strikte Ungleichungen zwischen stetigen Funktionen) und beschränkt: Aus $-\frac{3}{2} \leq -x^2$ folgt $|x| \leq \sqrt{3/2}$, und $y \in [-\frac{3}{2}, 0]$. Also ist B kompakt, f ist stetig, und nach Weierstraß existieren M und m .

Schritt 1: Das Innere. Mit Produkt- und Kettenregel:

$$f_x = 2x e^{x^2+y}(y^2 + y + 1), \quad f_y = e^{x^2+y}(y^2 + y + 1) + e^{x^2+y}(2y + 1) = e^{x^2+y}(y + 1)(y + 2).$$

Die Exponentialfunktion ist nie null, also gilt $f_y = 0$ genau für $y \in \{-1, -2\}$. Der Wert $y = -2$ liegt unter $-\frac{3}{2}$, also *außerhalb* von B . Bleibt $y = -1$.

Für $f_x = 0$ hilft eine Beobachtung, die ihr euch merken solltet: $y^2 + y + 1$ hat die Diskriminante $1 - 4 < 0$, ist also *für alle* y positiv (genauer $y^2 + y + 1 = (y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$). Damit gilt $f_x = 0 \iff x = 0$. Der einzige kritische Punkt im Inneren ist

$$(0, -1), \quad f(0, -1) = e^{-1}(1 - 1 + 1) = e^{-1} \approx 0,368.$$

Schritt 2: Unterer Rand B_1 ($y = -\frac{3}{2}$, $|x| \leq \sqrt{3/2}$). Einsetzen:

$$g(x) = f(x, -\frac{3}{2}) = e^{x^2-3/2}(\frac{9}{4} - \frac{3}{2} + 1) = \frac{7}{4} e^{x^2-3/2}.$$

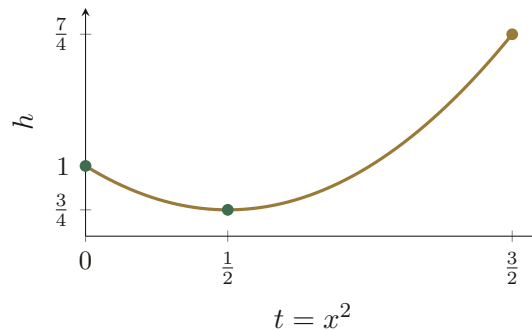
g hängt nur von x^2 ab und wächst mit x^2 : Minimum bei $x = 0$, Maximum an den Enden.

$$f(0, -\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} e^{-3/2} \approx 0,390, \quad f(\pm\sqrt{3/2}, -\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} = 1,75.$$

Schritt 3: Oberer Rand B_2 ($y = -x^2$, $|x| \leq \sqrt{3/2}$). Hier ist $x^2 + y = 0$ und damit $e^{x^2+y} = 1$:

$$h(x) = f(x, -x^2) = x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

Mit $t = x^2 \in [0, \frac{3}{2}]$ ist das eine Parabel in t mit Scheitel bei $t = \frac{1}{2}$. Minimal bei $t = \frac{1}{2}$, maximal am weitesten davon entfernt – also bei $t = \frac{3}{2}$, nicht bei $t = 0$, denn $|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}| = 1 > \frac{1}{2}$.



Der Rand B_2 als Funktion von $t = x^2$: eine Parabel mit Scheitel bei $t = \frac{1}{2}$.

Die Kandidaten auf B_2 :

$$f(\pm\sqrt{1/2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}, \quad f(0, 0) = 1, \quad f(\pm\sqrt{3/2}, -\frac{3}{2}) = \frac{7}{4}.$$

Selbstkontrolle: Die Ecken gehören zu B_1 und zu B_2 – in beiden Rechnungen muss derselbe Wert $\frac{7}{4}$ herauskommen. Stimmt.

Schritt 4: Vergleich.

$$\underbrace{e^{-1}}_{\approx 0,368} < \underbrace{\frac{7}{4}e^{-3/2}}_{\approx 0,390} < \underbrace{\frac{3}{4}}_{0,75} < \underbrace{1}_{f(0,0)} < \underbrace{\frac{7}{4}}_{1,75}.$$

$$m = e^{-1} \text{ im Punkt } (0, -1), \quad M = \frac{7}{4} \text{ in den Ecken } (\pm\sqrt{3/2}, -\frac{3}{2}).$$

Die erste Ungleichung geht auch ohne Taschenrechner:

$$e^{-1} < \frac{7}{4}e^{-3/2} \iff e^{1/2} < \frac{7}{4} \iff e < \frac{49}{16} = 3,0625,$$

und das stimmt wegen $e < 3$. Das Muster: Quotienten auf eine Seite bringen, Exponentialfunktionen zusammenfassen, notfalls quadrieren und mit $2 < e < 3$ vergleichen.

2.2 Ein eleganter zweiter Weg: Substitution $t = x^2$

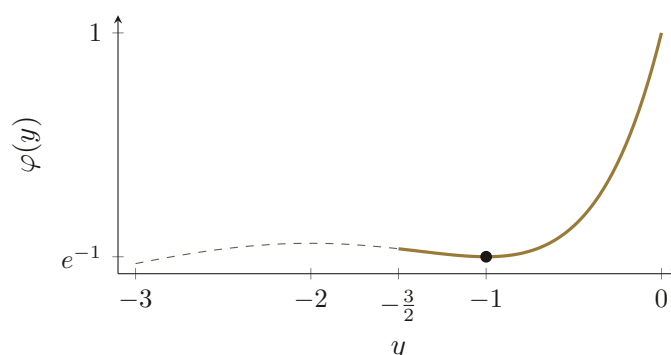
f hängt von x nur über $t = x^2$ ab. Die Menge B wird zu $\{(t, y) : -\frac{3}{2} \leq y \leq 0, 0 \leq t \leq -y\}$. Für festes y ist

$$t \mapsto e^{t+y}(y^2 + y + 1)$$

streng wachsend, weil $y^2 + y + 1 > 0$. Daraus folgt sofort:

- Das **Maximum** bei festem y liegt bei $t = -y$, also auf der Parabel. Dort ist $f = y^2 + y + 1$, und das ist auf $[-\frac{3}{2}, 0]$ maximal bei $y = -\frac{3}{2}$: Wert $\frac{7}{4}$.

- Das **Minimum** bei festem y liegt bei $t = 0$, also auf der y -Achse. Dort ist $\varphi(y) = e^y(y^2 + y + 1)$ mit $\varphi'(y) = e^y(y+1)(y+2)$. Auf $[-\frac{3}{2}, 0]$ ist $y+2 > 0$, also fällt φ auf $[-\frac{3}{2}, -1]$ und steigt auf $[-1, 0]$: Minimum $\varphi(-1) = e^{-1}$.



$\varphi(y) = e^y(y^2 + y + 1)$. Gold: der Bereich $[-\frac{3}{2}, 0]$ der Aufgabe. Gestrichelt: was passiert, wenn man B nach unten bis $y = -3$ verlängert (siehe Weiterdenken).

Dasselbe Ergebnis – aber ohne Fallunterscheidung über drei Randstücke.

Tipps und Tricks

- Vor dem Ableiten auf Symmetrien schauen: $f(x, y) = f(-x, y)$, und B ist symmetrisch zur y -Achse.
- Faktoren, die nie null werden (e^y , $y^2 + y + 1$), sofort abspalten. Aus $\nabla f = 0$ wird dann ein Polynomproblem.
- Randstücke, die Graphen sind ($y = -x^2$), einfach einsetzen – Lagrange ist hier unnötig schwer.
- Ecken immer als eigene Kandidaten aufschreiben. Dort ist der Rand nicht glatt, und hier liegt genau dort das Maximum.

Typische Fehler

- Die Existenz nicht begründen. Ohne Kompaktheit gäbe es vielleicht gar kein Maximum – dann wäre die ganze Kandidatensuche wertlos.
- $y = -2$ als kritischen Punkt mitnehmen, ohne zu prüfen, ob er in B liegt.
- Bei $(0, -1)$ die Hesse-Matrix ausrechnen und denken, damit sei man fertig. „Lokales Minimum“ heißt noch lange nicht „globales Minimum auf B “ – erst der Vergleich mit dem Rand entscheidet.
- Auf B_2 das Maximum bei $x = 0$ vermuten. Es liegt bei $x^2 = \frac{3}{2}$.
- Auf dem Rand nach $\nabla f = 0$ suchen. Dort zählt nur die Ableitung *entlang* des Randes.

2.3 Weiterdenken

1. Was passiert, wenn die untere Grenze bei $y = -3$ liegt? Dann liegt auch $(0, -2)$ im Inneren und ist kritischer Punkt mit Wert $3e^{-2} \approx 0,406$. Er ist aber kein Extremum: An kritischen Stellen auf der y -Achse ist $f_{xx} = 2e^y(y^2 + y + 1)$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = e^y(2y + 3)$; bei $(0, -2)$ ergibt das $e^{-2} \text{diag}(6, -1)$ – ein Sattelpunkt. Spannender ist das Minimum: φ steigt auf $[-3, -2]$, und $\varphi(-3) = 7e^{-3} \approx 0,349$ ist kleiner als $e^{-1} \approx 0,368$. Das globale Minimum wandert also vom Inneren auf den Rand, nach $(0, -3)$. Das Maximum liegt dann in den neuen Ecken $(\pm\sqrt{3}, -3)$ mit Wert 7. *Die Botschaft:* Der innere kritische Punkt bleibt derselbe – ob er gewinnt, entscheidet der Vergleich mit dem Rand.

2. Und ohne untere Grenze? Dann ist $B = \{y \leq -x^2\}$ unbeschränkt, also nicht kompakt. Ein Maximum gibt es nicht, denn auf der Parabel ist $f = x^4 - x^2 + 1 \rightarrow \infty$. Ein Minimum auch nicht: $f > 0$ überall,

aber für $x = 0$ und $y \rightarrow -\infty$ geht $\varphi(y) \rightarrow 0$. Also $\inf_B f = 0$, ohne angenommen zu werden – Weierstraß braucht die Kompaktheit wirklich.

3. Welche Eigenschaft von $y^2 + y + 1$ haben wir mehrfach benutzt? Die Positivität. Ohne sie könnte f_x auch dort verschwinden, wo $y^2 + y + 1 = 0$ ist, und das Monotonie-Argument der Substitution würde zusammenbrechen.

3 Aufgabe 2: Der Banachsche Fixpunktsatz

Aufgabe 2 (in eigenen Worten)

a) Zeige mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left(x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \pi \right)$$

genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R}$ hat. b) Schätze den Fehler der Iteration mit $x_0 = 0$ a priori ab: Wie viele Schritte braucht man für eine Genauigkeit von 10^{-3} ?

Worum es geht

Der Fixpunktsatz sagt: Wenn f eine vollständige Menge in sich abbildet und dabei alle Abstände um mindestens den Faktor $\lambda < 1$ verkleinert, dann gibt es genau einen Fixpunkt, und die Iteration läuft von jedem Startwert dorthin. *Bildlich:* Bei jedem Schritt schrumpft der Abstand zum Fixpunkt mindestens um den Faktor λ . Nach n Schritten ist man höchstens $\lambda^n \cdot$ (Anfangsabstand) entfernt. Die a-priori-Formel ersetzt den unbekannten Anfangsabstand $|x_0 - \bar{x}|$ durch etwas Berechenbares, nämlich $\frac{|x_1 - x_0|}{1 - \lambda}$.

Checkliste der Voraussetzungen – schreibt sie in der Lösung ausdrücklich hin:

- (i) $U = \mathbb{R}$ mit dem Betrag ist vollständig (abgeschlossen im Banachraum $\mathbb{R}$).
- (ii) $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ – hier trivial.
- (iii) f ist eine Kontraktion: $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ mit einem *festen* $\lambda < 1$.

Dann liefert der Satz Existenz, Eindeutigkeit und die Fehlerabschätzungen.

Gestufte Hinweise – erst selbst versuchen!

Hinweis 1. Welche Voraussetzungen hat der Fixpunktsatz? Schreibt sie untereinander und hakt sie ab.

Hinweis 2. Kontraktion für differenzierbares f : Mittelwertsatz. Es reicht $\sup |f'| \leq \lambda < 1$.

Hinweis 3. Schätzt die beiden Summanden von $\pi f'(x) = \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}$ einzeln ab. Für den zweiten hilft $(1 - |x|)^2 \geq 0$.

3.1 Teil a), Schritt für Schritt

Ableitung. Produktregel auf $x \arctan x$, Kettenregel auf $\ln(1 + x^2)$:

$$f'(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{2x}{1+x^2} \right).$$

Warum reicht eine Schranke für $|f'|$? Mittelwertsatz: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gibt es ξ dazwischen mit $f(x) -$

$f(y) = f'(\xi)(x - y)$, also $|f(x) - f(y)| \leq \sup |f'| \cdot |x - y|$. Diesen Schritt bitte nicht überspringen – er ist der eigentliche Grund, warum die Ableitung hier hilft.

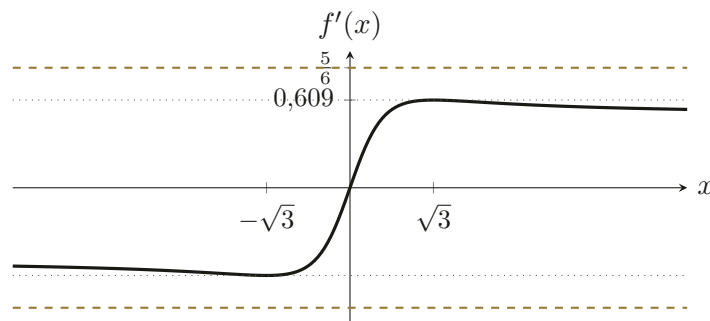
Variante 1 – grob, reicht völlig. $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, und aus $(1 - |x|)^2 \geq 0$ folgt $2|x| \leq 1 + x^2$, also $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$. Damit

$$|f'(x)| < \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} =: \lambda < 1.$$

Variante 2 – scharf. $f''(x) = \frac{3 - x^2}{\pi(1 + x^2)^2}$, also hat f' Extremstellen bei $\pm\sqrt{3}$. Wegen $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$:

$$|f'(\pm\sqrt{3})| = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,609 < \frac{2}{3}.$$

Für $|x| \rightarrow \infty$ geht $f'(x) \rightarrow \pm\frac{1}{2}$, das ist kleiner. Also $\sup |f'| \approx 0,609$.



f' bleibt im Streifen $(-0,61; 0,61)$. Die grobe Schranke $\frac{5}{6}$ (gold) ist weit weg – aber kleiner als 1, und nur das zählt für a).

Beide Varianten zeigen: f ist eine Kontraktion auf $\mathbb{R}$, also gibt es **genau einen Fixpunkt** $\bar{x}$. Numerisch ist $\bar{x} \approx -0,76675$.

3.2 Teil b), Schritt für Schritt

Ab $x_0 = 0$: $x_1 = f(0) = \frac{1}{\pi}(0 + 0 - \pi) = -1$, also $|x_1 - x_0| = 1$. Die a-priori-Abschätzung verlangt

$$\frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0| \leq 10^{-3} \iff \lambda^n \leq 10^{-3}(1 - \lambda) \iff n \geq \frac{\ln(10^{-3}(1 - \lambda))}{\ln \lambda}.$$

Achtung: $\ln \lambda < 0$ – beim Teilen dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

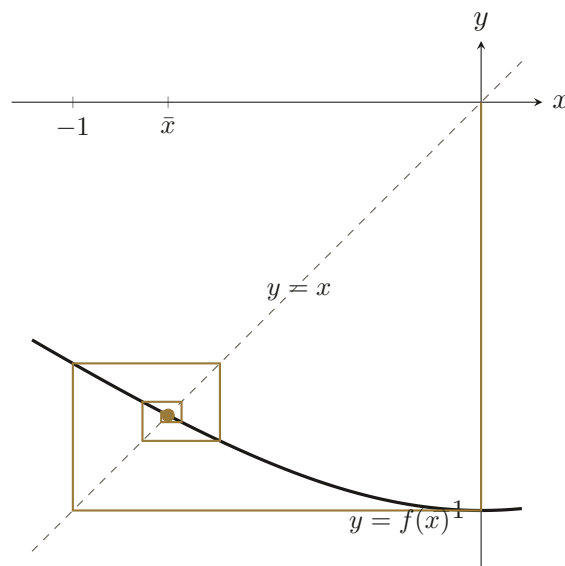
Lipschitz-Konstante	Bedingung	Schritte
$\lambda = \frac{5}{6}$	$n \geq \ln 6000 / \ln \frac{6}{5} \approx 47,7$	48
$\lambda = \frac{2}{3}$	$n \geq \ln 3000 / \ln \frac{3}{2} \approx 19,7$	20
$\lambda = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,609$	$n \geq 15,8$	16
tatsächlich (nachgerechnet)	$ x_n - \bar{x} < 10^{-3}$ ab	10

Die a-priori-Abschätzung ist eine *Garantie*, keine Vorhersage. Sie ist pessimistisch, weil sie mit der schlechtesten Steigung im ganzen Raum rechnet, während nahe $\bar{x}$ nur $|f'(\bar{x})| \approx 0,516$ wirkt.

3.3 Was die Iteration wirklich tut

n	x_n	$ x_n - \bar{x} $	n	x_n	$ x_n - \bar{x} $
0	0,0000	0,767	6	-0,7580	0,0087
1	-1,0000	0,233	7	-0,7712	0,0045
2	-0,6397	0,127	8	-0,7644	0,0023
3	-0,8295	0,063	9	-0,7679	0,0012
4	-0,7338	0,033	10	-0,7661	0,0006
5	-0,7836	0,017	11	-0,7671	0,0003

Die Folge springt abwechselnd über und unter $\bar{x}$, und der Fehler halbiert sich ungefähr in jedem Schritt. Beides liegt an $f'(\bar{x}) \approx -0,516$: Das *Vorzeichen* bestimmt das Pendeln, der *Betrag* die Geschwindigkeit. (Zum Nachrechnen: $x_2 = f(-1) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 - \pi) = -\frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2\pi} \approx -0,6397$.)



Spinnwebdiagramm ab $x_0 = 0$: senkrecht zum Graphen, waagrecht zur Diagonalen, wieder senkrecht. Weil f dort fällt, entsteht eine Spirale statt einer Treppe.

Tipps und Tricks

- Faustregel für das Spinnwebdiagramm: Steigung zwischen 0 und 1 ergibt eine Treppe, zwischen -1 und 0 eine Spirale, Betrag größer als 1 – die Folge läuft weg.
- Schrittzahl ohne Taschenrechner: Potenzen von λ grob nach oben abschätzen. Mit $\lambda = \frac{2}{3}$: $\lambda^2 < \frac{1}{2}$, $\lambda^4 < \frac{1}{5}$, $\lambda^6 < \frac{1}{10}$, also $\lambda^{21} = \lambda \cdot \lambda^2 \cdot (\lambda^6)^3 < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{3000}$. Man bekommt 21 statt 20 Schritte – fast ohne Verlust.
- In der Klausur reicht die grobe Lipschitz-Konstante, solange sie kleiner als 1 ist. Die scharfe Konstante lohnt sich nur, wenn nach einer möglichst guten Schrittzahl gefragt ist.
- Die a-posteriori-Abschätzung $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} |x_n - x_{n-1}|$ nutzt die schon berechneten Werte und ist meist besser: Mit $\lambda \approx 0,609$ garantiert sie die Genauigkeit 10^{-3} ab $n = 12$.

Typische Fehler

- Nur $|f'(x)| < 1$ für alle x zeigen. Das reicht nicht – man braucht *eine feste* Schranke $\lambda < 1$ für alle

x gleichzeitig (siehe Weiterdenken 1).

- Selbstabbildung oder Vollständigkeit nicht erwähnen. Hier trivial, aber auf einem Intervall wie $[-1, 0]$ müsste man $f([-1, 0]) \subseteq [-1, 0]$ wirklich nachrechnen.
- Beim Auflösen nach n das Ungleichheitszeichen nicht umdrehen, obwohl $\ln \lambda < 0$.
- Die Ableitung von $\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ ist $\frac{x}{1+x^2}$, nicht $\frac{2x}{1+x^2}$. Erst zusammen mit dem Term aus der Produktregel entsteht $\frac{2x}{1+x^2}$.

3.4 Weiterdenken

1. Reicht $|f'(x)| < 1$ für alle x ? Nein. Gegenbeispiel: $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ auf $\mathbb{R}$. Es gilt $|g'(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$ für alle x , aber $g(x) > |x| \geq x$ – also gibt es keinen Fixpunkt. Das Supremum von $|g'|$ ist 1, und genau das ist das Problem. Bei unserer Aufgabe ist $\sup |f'| \approx 0,61$, deshalb klappt es.

2. Warum ist Vollständigkeit wichtig? Auf $(0, 1)$ ist $h(x) = \frac{x}{2}$ eine Kontraktion mit $\lambda = \frac{1}{2}$, die $(0, 1)$ in sich abbildet – aber der einzige Kandidat für einen Fixpunkt, die 0, liegt nicht in der Menge. Ohne Vollständigkeit kann die Iterationsfolge gegen etwas *außerhalb* laufen.

3. Geht Existenz und Eindeutigkeit auch ohne Banach? Ja. Setzt $g(x) = f(x) - x$. Dann ist $g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0,61 - 1 < 0$, also g streng fallend. Außerdem $g(0) = -1 < 0$ und $g(-1) = f(-1) + 1 \approx 0,36 > 0$. Zwischenwertsatz plus strenge Monotonie: genau eine Nullstelle in $(-1, 0)$. Was Banach zusätzlich liefert: ein *Verfahren*, das den Fixpunkt berechnet, und eine Fehlerabschätzung.

4. Was ändert sich mit dem Vorfaktor c statt $\frac{1}{\pi}$? Dann ist $\sup |f'| = c(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}) \approx 1,913c$. Für $c < \frac{1}{1,913} \approx 0,52$ ist f eine Kontraktion auf ganz $\mathbb{R}$. Für größeres c nicht mehr global – eventuell aber noch auf einem kleineren abgeschlossenen Intervall um den Fixpunkt, wo man dann Selbstabbildung und $\sup |f'| < 1$ eigens prüfen muss. Genau deshalb funktionieren Fixpunktverfahren in der Praxis oft nur *lokal*.

5. Warum reichen tatsächlich 10 statt 16 Schritte? Für große n verhält sich der Fehler wie $|f'(\bar{x})|^n \approx 0,52^n$, nicht wie $0,61^n$. Die a-priori-Schranke rechnet mit der schlechtesten Steigung – nahe am Fixpunkt ist es besser.

4 Die schriftlichen Aufgaben 3 und 4

Die Abgabefrist ist vorbei – hier deshalb kurze Lösungswege zum Vergleichen mit eurer Abgabe.

4.1 Aufgabe 3: Taylorpolynome

a) $f(x, y) = \sin x \cos y$, $a = (0, 0)$, $k = 2$. Statt sechs partielle Ableitungen auszurechnen, multipliziert man die eindimensionalen Taylorentwicklungen und behält nur Terme bis Grad 2:

$$\sin x \cos y = \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right) \left(1 - \frac{y^2}{2} + \dots\right) = x - \frac{xy^2}{2} + \dots \quad \implies \quad P_2(x, y) = x.$$

Der Term $\frac{xy^2}{2}$ hat Grad 3 und fällt weg. Zur Kontrolle über Ableitungen: $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$, und alle zweiten Ableitungen verschwinden in $(0, 0)$.

b) $f(x, y) = \ln(1 + 2x^2 + 2y^2)$, $a = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $k = 1$. Mit $1 + 2 \cdot \frac{9}{16} + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{13}{4}$:

$$f(a) = \ln \frac{13}{4}, \quad f_x = \frac{4x}{1 + 2x^2 + 2y^2} \Rightarrow f_x(a) = \frac{3}{13/4} = \frac{12}{13}, \quad f_y(a) = \frac{12}{13}.$$

$$P_1(x, y) = \ln \frac{13}{4} + \frac{12}{13} \left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{12}{13} \left(y - \frac{3}{4}\right).$$

4.2 Aufgabe 4: Extrema von $f(x, y) = x e^y + y e^x$

Erst schauen, dann rechnen: $f(x, 0) = x$ ist nach oben und unten unbeschränkt. Es gibt also *keine globalen Extrema*.

Kritische Punkte. $f_x = e^y + y e^x = 0$ und $f_y = x e^y + e^x = 0$. Aus der ersten Gleichung folgt $y < 0$, aus der zweiten $x < 0$. Setzt man $e^y = -y e^x$ in die zweite Gleichung ein, erhält man $e^x(1 - xy) = 0$, also $xy = 1$, das heißt $y = \frac{1}{x}$. Eingesetzt in die erste Gleichung: $x e^{1/x} + e^x = 0$. Die Funktion $h(x) = e^x + x e^{1/x}$ ist auf $(-\infty, 0)$ streng wachsend, denn $h'(x) = e^x + e^{1/x}(1 - \frac{1}{x}) > 0$. Wegen $h(-1) = e^{-1} - e^{-1} = 0$ ist $x = -1$ die einzige Lösung: Der einzige kritische Punkt ist $(-1, -1)$.

Art des kritischen Punktes. $f_{xx} = y e^x$, $f_{yy} = x e^y$, $f_{xy} = e^y + e^x$. In $(-1, -1)$:

$$H_f(-1, -1) = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det H_f = \frac{1-4}{e^2} = -\frac{3}{e^2} < 0.$$

Die Hesse-Matrix ist indefinit, also ist $(-1, -1)$ ein **Sattelpunkt** mit $f(-1, -1) = -\frac{2}{e}$. Insgesamt hat f *keine* lokalen oder globalen Extrema, sondern genau einen Sattelpunkt.

5 Selbsttest

- Warum nimmt $f(x, y) = x^2 - y$ auf dem Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ ein Maximum an – und wo?
- Hat $g(x) = \frac{1}{2} \cos x$ genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R}$? Begründe mit dem Fixpunktsatz.
- Eine Kontraktion hat $\lambda = \frac{1}{2}$ und $|x_1 - x_0| = 2$. Wie viele Schritte garantiert die a-priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von 10^{-2} ?
- Ist $f(x) = x + \frac{1}{x}$ auf $[1, \infty)$ eine Kontraktion? Hat sie einen Fixpunkt?

Lösungen zum Selbsttest

- Das Dreieck ist kompakt und f stetig, also existiert das Maximum. Im Inneren ist $\nabla f = (2x, -1) \neq 0$, also liegt es auf dem Rand. Auf $y = 0$ ist $f = x^2$ mit Maximum 1 bei $(1, 0)$; auf $x = 0$ ist $f = -y \leq 0$; auf $x + y = 1$ ist $f = x^2 - 1 + x \leq 1$ mit Gleichheit bei $(1, 0)$. Maximum 1 in $(1, 0)$.
- Ja: $|g'(x)| = \frac{1}{2} |\sin x| \leq \frac{1}{2} < 1$, also ist g nach dem Mittelwertsatz eine Kontraktion auf dem vollständigen Raum $\mathbb{R}$, und $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.
- $\frac{(1/2)^n}{1/2} \cdot 2 \leq 10^{-2} \iff (\frac{1}{2})^n \leq \frac{1}{400} \iff 2^n \geq 400 \iff n \geq 9$ (denn $2^8 = 256$, $2^9 = 512$).
- Nein. Für $x \neq y$ gilt zwar $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, aber $|f'(x)| = 1 - \frac{1}{x^2} \rightarrow 1$ – es gibt kein festes $\lambda < 1$. Einen Fixpunkt gibt es auch nicht, denn $f(x) = x$ hieße $\frac{1}{x} = 0$.

Fragen, Fehler gefunden oder Wünsche für das nächste Blatt? Schreibt mir gern.

Weitere Materialien, Skizzen zum Anfassen und Wissens-Checks: mirkan-analysis.de/analysis-3.html