§5 Das Vollständigkeitsaxiom

Definition 1

Sei M $\subset \mathbb{R}$ nicht leer.

i) a $\in \mathbb{R}$ heißt $\left\{ \begin{matrix} obere \\ untere \end{matrix} \right\}$ Schranke von M, falls b $\left\{ \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \right\}$ a für alle b $\in$ M

ii) a* $\in \mathbb{R}$ heißt $\left\{ \begin{matrix} obere \\ untere \end{matrix} \right\}$ Grenze von M, falls

- a* ist $\left\{ \begin{matrix} obere \\ untere \end{matrix} \right\}$ Schranke von M

- Für jede $\left\{ \begin{matrix} obere \\ untere \end{matrix} \right\}$ Schranke a von M gilt a$\left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \right\}$ a*

a* ist $\left\{ \begin{matrix} kleinste\ obere\ (Supremum) \\ grösste\ untere\ (Infimum) \end{matrix} \right\}$ Schranke

iii) M heißt nach $\left\{ \begin{matrix} oben \\ unten \end{matrix} \right\}$ beschränkt, falls eine $\left\{ \begin{matrix} obere \\ untere \end{matrix} \right\}$ Schranke von M existiert.

iv) M heißt beschränkt, wenn M nach oben <u>und</u> nach unten beschränkt ist.

Beispiel

Betrachte folgende Menge

$$M = (0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \,|0 < x \leq 1\}$$

Menge aller oberen Schranken

$$[1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|x \geq 1\}$$

Menge aller unteren Schranken

$$(-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} \,|x \leq 0\}$$

und

obere Grenze $=$ 1 & untere Grenze $= 0$

Bemerkung: Es existiert eine obere bzw. untere Grenze

Vollständigkeitsaxiom

Sei M $\neq 0$ und nach oben beschränkt. Dann existiert eine obere Grenze von M. Benutze folgende Schreibweise

$$\sup M \text{ (Supremum)}$$

Lemma 1

Sei $M \neq 0$ und nach unten beschränkt. Dann existiert eine untere Grenze von M. Benutze folgende Schreibweise:

$$\inf M \text{ (Infinum)}$$

Der folgende Satz zeigt, dass das Vollständigkeitsaxiom sicher stellt, daß $\mathbb{R}$ "groß genug"ist, um Wurzeln zu nehmen.

Satz 1

Zu c $\in \mathbb{R}$, c ≥ 0 und n $\in \mathbb{N}$ existiert genau ein a $\in \mathbb{R}$, a ≥ 0 mit a^n = c. Wir führen folgende Schreibweise ein

$$a = \sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$$

Der nächste Satz zeigt, dass $\mathbb{R}$ im Vergleich zu $\mathbb{Q}$ nicht "allzu groß"ist.

Satz 2

Seien a,b $\in \mathbb{R}$ mit a $<$ b, dann existiert ein c $\in \mathbb{Q}$ mit a $<$ c $<$ b

Satz 3

i) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

ii) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Für den Beweis von Satz 2 benötigen wir:

Lemma 2 (Archimedisches Prinzip)

i) Zu $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$

ii) Zu $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < a$

iii) Zu $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < a$

Beweis Lemma 2

i) Angenommen, es gäbe ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist a eine obere Schranke für $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Also existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom eine obere Grenze a* von $\mathbb{N}$. Nach Def. der oberen Grenze ist a*-1 keine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Nach Def. der oberen Schranke existiert daher ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n > a * -1, \text{ d.h. } n + 1 > a*$$

Nach Def. der natürlichen Zahlen ist $n + 1 \in \mathbb{N}$, es existiert also

$$\tilde{n} \in \mathbb{N} \text{ mit } \tilde{n} > a^*$$

Daher ist a* keine obere Schranke. Aber eine obere Grenze ist insbesondere eine obere Schranke. Wiederspruch

ii) Betrachte $-a \in \mathbb{R}$. Gemäß $i)$ gibt es ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit

$$-a < \tilde{n}, \text{ also } -\tilde{n} < a$$

Setzte

$$-\tilde{n} =: n \in \mathbb{Z}$$

iii) Betrachte

$$\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \quad (a > 0, \text{ also } a \neq 0)$$

Gemäß $i)$ gibt es $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{a} < \tilde{n}$. Wenn $\frac{1}{a} > 0$ (folgt aus $a > 0$) impliziert das $a > \frac{1}{n}$

Beweis Satz 2

Setze $\epsilon := b - a > 0$, gemäß Lemma 2 iii) gibt es ein n $\in \mathbb{N}$ mit $\epsilon > \frac{1}{n}$. Behauptung:

Wir können das gewünschte c von der Form $\frac{l}{n}, l \in \mathbb{Z}$ wählen. Gemäß Lemma 2 ii) existiert ein k $\in \mathbb{Z}$ mit k < a (1) Betrachte die Menge M := $\left\{m \in \mathbb{N} \,|\, k + \frac{m-1}{n} \leq a\right\}$

Wir behaupten:

- 1 $\in$ M folgt aus (1)
- M $\neq \mathbb{N}$

Zur zweiten Behauptung (M $\neq \mathbb{N}$): Nach Lemma 2 i) existiert ein m $\in \mathbb{N}$ mit

$$m > n(a-k) + 1 \Rightarrow k + \frac{m-1}{n} > a \Rightarrow m \notin M$$

Also nach dem Prinzip der voll. Induktion existiert ein m* $\in \mathbb{N}$, m* $\in$ M, m*+1 $\notin$ M

Behauptung: $c = k + \frac{m^*}{n} = \frac{n \cdot k + m^*}{n}$ leistet das Gewünschte

- aus m*+1 $\notin$ M folgt $k + \frac{(m^*+1)-1}{n} = k + \frac{m^*}{n} = c > a$
- aus m* $\in$ M folgt $c = k + \frac{m^*}{n} = k + \frac{m^*-1}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + \epsilon = b$

Definition 2

i) Eine nicht leere Menge M heißt abzählbar, falls es eine *surjektive* Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt

ii) M heißt überabzählbar, wenn M nicht abzählbar ist.

Lemma 3

i) Jede Teilmenge $\widetilde{M}$ einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

ii) Sei M abzählbar und $g : M \to \widetilde{M}$ *surjektiv*, dann ist auch $\widetilde{M}$ abzählbar.

iii) Sei M überabzählbar und $g : M \to \widetilde{M}$ *injektiv* dann ist auch $\widetilde{M}$ überabzählbar.