

Übungsblatt 7

05.12.2025

Aufgabe 1: Definition, Gegenbeispiel, vol. Ind., Abschätzung

Aufgabe 3: Fallunterscheidung, Definition, Abschätzung

Aufgabe 2: Fallunterscheidung, Abschätzung

Aufgabe 2: Fallunterscheidung, Abschätzung

7.1:

i) Falsch.

Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n$ $|a_n| = |(-1)^n| = 1 \rightarrow \text{konvergent}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow \text{divergent}$

ii) Wahr.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

$|x - y| \leq |x| + |y| \rightarrow |a_n - a| \leq |a_n| + |a| < \epsilon$ für $n > N$

$\rightarrow \text{Konvergenz}$

iii) Wahr.
 $\max\{a_n, b_n\} = \frac{a_n + |a_n - b_n|}{2}$

Fall 1: $a_n \geq b_n$
 $\frac{a_n + |a_n - b_n|}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n = \max\{a_n, b_n\}$

Fall 2: $b_n \geq a_n$
 $\frac{a_n + |a_n - b_n|}{2} = \frac{2b_n}{2} = b_n = \max\{a_n, b_n\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} = \frac{a_n + |a_n - b_n|}{2} \rightarrow \text{konvergent}$

iv) Falsch.

Gegenbeispiel:

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$a_n \cdot b_n = 0$ aber
 $a_n \rightarrow \text{divergent}$
 $b_n \rightarrow \text{divergent}$

Aufgabe 3:

$f: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$

$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$x \leq |x|$

$\frac{x}{|x|} \leq 1, \frac{y}{|y|} \leq 1$

Fall 1. $0 \leq x < y$

$\frac{x}{|x|} = 1, \frac{y}{|y|} = 1$

$\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} = 0$

Fall 2. $x < 0 < y$

$\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} = -2$

Fall 3. $x < y < 0$

$\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} = 0$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \leq 0$

$x \leq y \Rightarrow x - y \leq 0$

$\frac{1}{|x||y|}(x-y) \leq 0$

$\frac{x}{|x||y|} - \frac{y}{|x||y|} \leq 0$

$\frac{x}{|x||y|} + \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|x||y|} - \frac{y}{|y|} \leq 0$

$x + x|y| - y - y|x| \leq 0$

$x(1+|y|) \leq y(1+|x|)$

$\frac{x}{1+|x|} \leq \frac{y}{1+|y|} \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$

$f^{-1}:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$x > 0, f(x) > 0$

$f^{-1}(x) > 0 \wedge x > 0$

$x < y$

$f(x) < f(y)$

$f(x) = \frac{x}{1+x}$

(1)

$\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$
 $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \\ +1 & \text{falls } x = \infty \\ -1 & \text{falls } x = -\infty \end{cases}$

$y = \infty$

$x < y \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) < 1 = f(\infty)$

$-\infty < x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$-1 < f(x)$

$= f(-\infty) < f(x)$

$$\bar{f}^{-1} = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{falls } x \in]-1, 1[\\ +\infty & \text{falls } x=1 \\ -\infty & \text{falls } x=-1 \end{cases}$$

$$\bar{f}(\bar{f}^{-1}(+\infty)) = \bar{f}(1) = +\infty$$

$$\bar{f}^{-1}(\bar{f}(1)) = \bar{f}^{-1}(+\infty) = 1$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, Eigentlich bzw. Uneigentlich
 $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Eigentlich

$$f: \mathbb{R} \rightarrow]a, b[$$

$$(\Rightarrow) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon + a < a_n < \varepsilon + a$$

$$f(-\varepsilon + a) < f(a_n) < f(\varepsilon + a)$$

$$f(-\varepsilon + a) - f(a + \varepsilon) < f(a_n) - f(a) < f(\varepsilon + a) - f(a - \varepsilon)$$

$$-\varepsilon + a < a < a + \varepsilon$$

$$f(-\varepsilon + a) < f(a) < f(a + \varepsilon)$$

$$-f(-\varepsilon + a) > -f(a) > -f(a + \varepsilon)$$

$$f(a + \varepsilon) < f(a) < f(a - \varepsilon)$$

$$f(a - \varepsilon) - f(a + \varepsilon) < f(a_n) - f(a) < f(\varepsilon + a) - f(a - \varepsilon) \leq \varepsilon^*$$

$$-\varepsilon^* < -$$

$$f(\mathbb{R}) =]\alpha, \beta[$$

$$|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon^*$$

$$f(\varepsilon + a) - f(a) + f(a) - f(a - \varepsilon)$$

$$a < a + \varepsilon$$

$$f(a) < f(a + \varepsilon)$$

$$0 < f(a + \varepsilon) - f(a) = \varepsilon'$$

$$a - \varepsilon < a$$

$$f(a - \varepsilon) < f(a)$$

$$0 < f(a) - f(a - \varepsilon) = \varepsilon''$$

$$\varepsilon' > 0 \quad \varepsilon'' \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon + a < a_n < \varepsilon + a$$

$$f(-\varepsilon + a) < f(a_n) < f(\varepsilon + a)$$

$$f(-\varepsilon + a) - f(a + \varepsilon) < f(a_n) - f(a) < f(\varepsilon + a) - f(a - \varepsilon)$$

$$f(-\varepsilon + a) < f(a) < f(a + \varepsilon)$$

$$-f(-\varepsilon + a) > -f(a) > -f(a + \varepsilon)$$

$$f(a + \varepsilon) < f(a) < f(a - \varepsilon)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : a_n > x \quad \forall n \geq N$$

$$\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow [\alpha, \beta]$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \\ \beta & \text{falls } x = +\infty \\ \alpha & \text{falls } x = -\infty \end{cases}$$

$$f(x) < f(y) < \beta$$

$$f(a_n) > f(x)$$

$$f(x) < f(a_n) < \beta$$

$$\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

