

Vorlernaufgaben

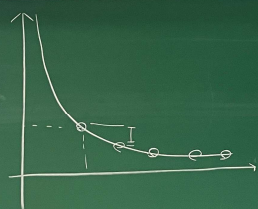
A1: Definition $(-1)^n = (-1, +1, -1, \dots)$ ← kein Beweis für Divergenz

A2: Definition + Abschätzen (Beweis ohne Sandwich-Lemma ist auch möglich) → Dann ist Fallunterscheidung und Nützlichkeits könnten hilfreich sein

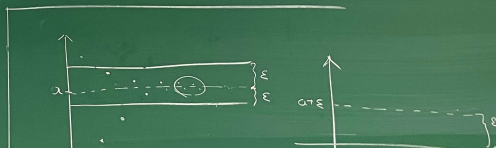
A3: Geometrie + Abschätzen + Konvergenz + Induktion

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{N}$$



$$\frac{1}{1000}, \frac{1}{1001} \mid \frac{1}{9999999} = 0$$



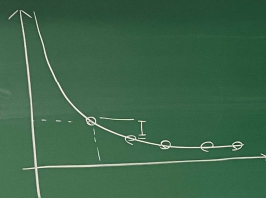
A1: Definition $(-1)^n = (-1, +1, -1, \dots)$ ← kein Beweis für Divergenz

A2: Definition + Abschätzen (Beweis ohne Sandwich-Lemma ist auch möglich) → Dann ist Fallunterscheidung und Nützlichkeits könnten hilfreich sein

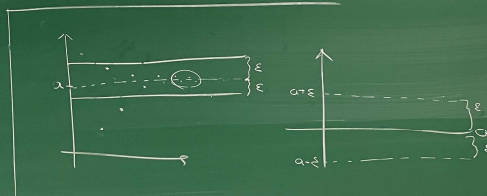
A3: Geometrie + Abschätzen + Konvergenz + Induktion

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

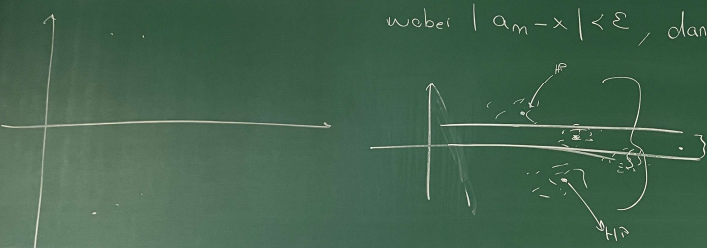
$$\mathbb{D}_f = \mathbb{N}$$



$$\frac{1}{1000}, \frac{1}{1001} \mid \frac{1}{9999999} = 0$$



$\forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists m > n : a_m \in U_\varepsilon(x)$
 wobei $|a_m - x| < \varepsilon$, dann ist Häufungspunkt



$|a_n - a_m|$

$f: \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$

$x \geq 1$ 2. Fall

$(5 - \varepsilon)^n < x$
 $(5 + \varepsilon)^n > x$

1) a) $a_n = (-1)^n$
 Beweis durch Widerspruch
 $L \in \mathbb{R}$ $|a_n - L| < \varepsilon$
 $\varepsilon > 0$
 $n \in \mathbb{N}$
 $n \geq N$

$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$
 $c_n = a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$
 $|b_n - L| = |1 - L| < \varepsilon$
 $|c_n - L| = |-1 - L| < \varepsilon$
 $|1 - (-1)| = 2 \leq |1 - L| + |-1 - L| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$
 $2 \leq 2\varepsilon$

b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|b_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$
 $|-1 - (-1)| = |-1 + 1| = 0 < \varepsilon$

$$a) \sqrt[n]{x} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{Sei } \varepsilon \in (0, 1)$$

$$0 \leq 1 - \varepsilon < 1 \quad (1 - \varepsilon)^n < 1^n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^n = 0$$

$$1 + \varepsilon > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon)^n = \infty$$

$$\exists N_1: n \geq N_1 \quad (1 - \varepsilon)^n < x$$

$$\exists N_2: n \geq N_2 \quad (1 + \varepsilon)^n > x$$

$$\tilde{N} = \max(N_1, N_2): n \geq \tilde{N}: (1 - \varepsilon)^n < x < (1 + \varepsilon)^n$$

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < 1 + \varepsilon \quad | -1 |$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - 1 < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - 1| < \varepsilon$$

$$-\alpha < \quad < \alpha$$

$$S = x - 1$$

$$\frac{2 - \varepsilon}{2}, \varepsilon \in (0, 2)$$

$$\varepsilon_1 \in (0, \alpha - 1)$$

$$\varepsilon_2 \in (0, 1)$$

$$b) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$$x = -\frac{1}{n^2}: \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < 1 + \varepsilon \quad | -1 |$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - 1 < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - 1| < \varepsilon$$

$$-\alpha < \quad < \alpha$$

$$b) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$$x = -\frac{1}{n^2}: \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

