

Übungsblatt 4

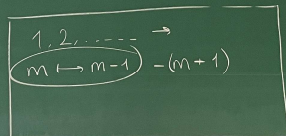
Aufgabe 1 - vollständige Induktion

$$(X^n)^m = X^{n \cdot m} \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad X \in K$$

Fall 1. $m \geq 0$

IA. $m=0$ $\underbrace{(X^n)^0}_k = k^0 = 1 = X^0 = X^{n \cdot 0} = X^{nm} \quad \checkmark$

IV. $m \rightarrow m+1$



IS $(X^n)^{m+1} = (X^n)^m \cdot X^n = X^{nm} \cdot X^n$
 $X^{n \cdot m + n} = X^{n(m+1)} \quad \square$ (i)

$m \leq 0$

IA $k=0$ $m=-k$ für I
 N $k \rightarrow k+1 \quad k \in \mathbb{N}$

d.h. $(X^n)^{-k} = X^{-nk}$

$$(X^n)^{-(k+1)} = (X^n)^{-k-1} = (X^n)^{-k} \cdot (X^n)^{-1} = X^{-nk} \cdot \frac{1}{X^n} = X^{-nk} \cdot X^{-n} = X^{-nk-n} = X^{-n(k+1)}$$

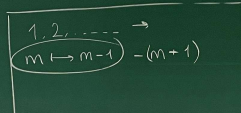
HA) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ Fall $n \leq 0 \quad n = -k$

$$(X^n)^m = X^{n \cdot m} \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad X \in K$$

Fall 1. $m \geq 0$

IA. $m=0$ $\underbrace{(X^n)^0}_k = k^0 = 1 = X^0 = X^{n \cdot 0} = X^{nm} \quad \checkmark$

IV. $m \rightarrow m+1$



$X^{n \cdot m + n} = X^{n(m+1)} \quad \square$ (i)

$m \leq 0$

IA $k=0$ $m=-k$ für Induktion
 N $k \rightarrow k+1 \quad k \in \mathbb{N}$

d.h. $(X^n)^{-k} = X^{-nk}$

$$(X^n)^{-(k+1)} = (X^n)^{-k-1} = (X^n)^{-k} \cdot (X^n)^{-1} = X^{-nk} \cdot \frac{1}{X^n} = X^{-nk} \cdot X^{-n} = X^{-nk-n} = X^{-n(k+1)} \quad \square$$

HA) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

Fall $n \geq 0$

IA $n=0$ $(x \cdot y)^0 = 1 = X^0 \cdot y^0$

IV. $n \rightarrow n+1$

IS $(x \cdot y)^{n+1} = (x \cdot y)^n \cdot (x \cdot y) = X^n \cdot y^n \cdot (x \cdot y)$

Fall $n \leq 0 \quad n = -k$

IA $n=0 \quad \checkmark$

IV $k \rightarrow k+1$

IS $(x \cdot y)^{-(k+1)} = (x \cdot y)^{-k-1} = (x \cdot y)^{-k} \cdot (x \cdot y)^{-1}$

d.h. $(x \cdot y)^{-k} = X^{-k} \cdot y^{-k}$

$$= X^{-k} \cdot y^{-k} \cdot \frac{1}{x \cdot y} = X^{-k-1} \cdot y^{-k-1} = X^{-(k+1)} \cdot y^{-(k+1)}$$

$= (X^n \cdot X) (y^n \cdot y)^n$ "Körper Eigenschaft" $= X^{n+1} \cdot y^{n+1} \quad \square$

$(X^{-k} \cdot X) (y^{-k} \cdot y) = X^{-(k+1)} \cdot y^{-(k+1)}$

Aufgabe 2 - Körperaxiome

$$(ii) \underbrace{y+a-(x+a)}_{y-x} > 0 \Leftrightarrow y > x$$

$$(iii) y+y'-(x+x') = \underbrace{y-x}_{x < y} + \underbrace{y'-x'}_{x' < y'} > 0 \quad (A02)$$

$$(iv) a > 0: ay-ax > 0 \Leftrightarrow \underbrace{a}_{>0} \cdot \underbrace{(y-x)}_{>0} > 0 \quad (A03)$$

$$a < 0: \underbrace{ay-ax}_{<0} < 0 \Leftrightarrow -(\underbrace{ay-ax}_{<0}) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{-a}_{>0} \cdot \underbrace{(y-x)}_{>0} > 0 \quad (A03)$$

$$n \mapsto n-1$$

$$" < 0$$

$$= 0$$

$$(x^n)^{m-1} = (x^n)^m \cdot (x^n)^{-1} = \frac{(x^n)^m}{x^n} < 0$$

$$(v) x \geq 0, x' \geq 0 \Rightarrow x \cdot x' \geq 0$$

Aus $y-x > 0, x' > 0$

folgt lt. (ii) $yx' > xx'$

$$(iii) y+y'-(x+x') = \underbrace{y-x}_{x < y} + \underbrace{y'-x'}_{x' < y'} > 0 \quad (A02)$$

$$(iv) a > 0: ay-ax > 0 \Leftrightarrow \underbrace{a}_{>0} \cdot \underbrace{(y-x)}_{>0} > 0 \quad (A03)$$

$$a < 0: \underbrace{ay-ax}_{<0} < 0 \Leftrightarrow -(\underbrace{ay-ax}_{<0}) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{-a}_{>0} \cdot \underbrace{(y-x)}_{>0} > 0 \quad (A03)$$

$$n \mapsto n-1$$

$$" < 0$$

$$= 0$$

$$(x^n)^{m-1} = (x^n)^m \cdot (x^n)^{-1} = \frac{(x^n)^m}{x^n} < 0$$

$$= x^{n \cdot m} \cdot \frac{1}{x^n}$$

$$= \frac{x^{n \cdot m}}{x^n} = x^{n \cdot m - n} = x^{n(m-1)}$$

$$(v) x \geq 0, x' \geq 0 \Rightarrow x \cdot x' \geq 0$$

Aus $y-x > 0, x' > 0$

folgt lt. (ii) $yx' > xx'$

Aus $y \geq 0$ und $y' \geq x'$

folgt $y \cdot y' \geq x \cdot x'$ lt. (ii)

(viii) $0 < x < y \Leftrightarrow \underbrace{0}_{<0} < \underbrace{xx^{-1}}_{>0} < \underbrace{yx^{-1}}_{>0}$

$\Leftrightarrow 0 < 1 < yx^{-1} \Leftrightarrow 0 < y^{-1} < y^{-1}yx^{-1}$

$ax^2 + bx + c \geq 0 \iff (a > 0 \wedge b^2 \leq 4ac) \vee (a = b = 0 \wedge c \geq 0)$

$\begin{matrix} \text{"} \Rightarrow \text{"} & A & \vee & B \\ \text{"} \Leftarrow \text{"} & \text{Fall 1: } a > 0 & \dots & \dots \end{matrix}$

dann muss $b^2 \leq 4ac$ gelten

Fall 2: $a = 0 = b \wedge c \geq 0$

$\iff c \geq 0$

$\iff ax^2 + bx + c \geq 0$

$ax^2 + bx + c$ für ... hat keine (reale) Nullstellen

$\mathbb{K}$

A	B	
1	0	1
1	1	1
0	1	1
0	0	0

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$|x| = 0 \iff x = 0$

$\begin{matrix} \text{"} \Rightarrow \text{"} & |x| = 0 & \Rightarrow & x = 0 \\ \text{"} \Leftarrow \text{"} & x = 0 & \Rightarrow & |x| = 0 \end{matrix}$

$x \in (\mathbb{K}, +, \cdot, >)$

1. Fall: $x > 0$
 2. Fall: $x = 0$
 3. Fall: $x < 0$

$|x| = 0$

3 Fälle betrachten ...

$y = 2x + 1$

$y = c$

$0 = 2x + 1$

$x = -\frac{1}{2}$

A4
 1. Fall $a > 0$ 2. Fall $a < 0$
 ...
 Aufgabe 5
 ...

$\mathbb{K}$ angeordnet!

Zeige: $|x| \geq 0$

Nach Körperaxiom A01 ist $x \geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 0} \quad \square$$

$$x = 0 \Rightarrow |x| = 0$$

$$x < 0 \Rightarrow |x| > 0$$