

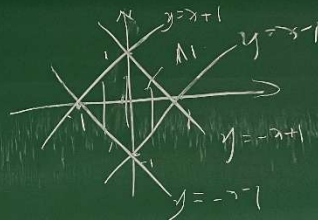
$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \text{Körper}$$

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{aligned} 2 \bmod 8 &\equiv 2 \\ 4 \bmod 8 &\equiv 4 \\ 24 \bmod 8 &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$[\mathbb{C}/2\mathbb{C}] \quad \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} M_1: x \geq 0, y \geq 0 &\Rightarrow x+y \leq 1 \Rightarrow y \leq 1-x \\ x \geq 0, y \leq 0 &\Rightarrow x-y \leq 1 \Rightarrow y \geq x-1 \\ x \leq 0, y \geq 0 &\Rightarrow -x+y \leq 1 \Rightarrow y \leq 1+x \\ x \leq 0, y \leq 0 &\Rightarrow -x-y \leq 1 \Rightarrow y \geq -1-x \end{aligned}$$

$$M_2: \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \Rightarrow (\sqrt{x^2+y^2})^2 \leq 1^2 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1$$



$$\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$x^2+x^2=1$$

$$2x^2=1$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$M_\infty: \max\{|x|, |y|\} \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

$$(i) \textcircled{1} "M_1 \subseteq M_2"$$

$$(x, y) \in M_1$$

$$|x| + |y| \leq 1$$

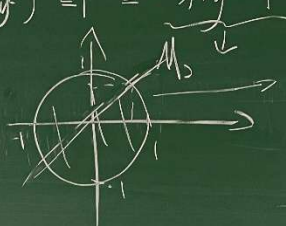
$$\textcircled{2} "M_1 \not\subseteq M_2"$$

$$\text{Sei } P \in M_2$$

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$M_2: \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1$$

$$M_2: \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \Rightarrow (x^2+y^2)^2 \leq 1^2 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1$$


$$\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$x^2+x^2=1$$

$$2x^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$M_\infty: \max\{|x|, |y|\} \leq 1$$

$$\Rightarrow |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$


(i) ① " $M_1 \subseteq M_2$ "

$$(x, y) \in M_1$$

$$|x|+|y| \leq 1$$

$$\Rightarrow (|x|+|y|)^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow x^2+2|x||y|+y^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 \leq x^2+2|x||y|+y^2 \leq 1 \Rightarrow M_1 \subseteq M_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \quad (x, y) \in M_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \quad M_1 \subseteq M_2$$

② " $M_1 \not\subseteq M_2$ " Sei $P \in M_2$.

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$M_2: \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \checkmark$$

$$M_1: \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \neq 1$$

$$\Rightarrow M_1 \not\subseteq M_2 \quad \rightarrow P \notin M_1$$

" $M_2 \subseteq M_\infty$ "

$$(x, y) \in M_2$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 1 \text{ und } y^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \max\{|x|, |y|\} \leq 1$$

Def von M_∞

$$\Rightarrow M_2 \subseteq M_\infty$$

" $M_2 \not\subseteq M_\infty$ "

$$T = (1, 1)$$

$$M_\infty: \max\{|x|, |y|\} \leq 1$$

$$M_2: \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \neq 1$$

$$\Rightarrow M_2 \not\subseteq M_\infty$$

Aufgabe 2.

(a) z.z. $\forall A_1, A_2 \subseteq A$

$$\Rightarrow f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

Beweis.

$$\text{Sei } y \in f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$\Leftrightarrow (y \in f(A_1)) \vee (y \in f(A_2))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A_1: f(x) = y) \vee (\exists x \in A_2: f(x) = y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A_1 \cup A_2: f(x) = y)$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A_1 \cup A_2)$$

$$\Leftrightarrow f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$(b) \text{ z.z. } f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$\forall A_1, A_2 \subseteq A$$

$$\text{Sei } y \in f(A_1 \cap A_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2: f(x) = y$$

$$\Rightarrow (x \in A_1) \wedge (f(x) = y) \Rightarrow (x \in A_1) \wedge (f(x) = y)$$

$$\Rightarrow y \in f(A_1)$$

$$\Rightarrow y \in f(A_2)$$

$$\Rightarrow (y \in f(A_1)) \wedge (y \in f(A_2))$$

$$\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

(" $\Rightarrow$ ")

Seien $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$

$$A_1 := \{x_1\}, A_2 := \{x_2\} \subseteq A$$

$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$\text{Sei } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$x \mapsto x^2$$

$$A_1 = \{-2, -1, 0\}, A_2 = \{0, 1, 2\}$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{0, 1, 4\}$$

$$(c) \text{ z.z. } f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$\Leftrightarrow f \text{ ist injektiv}$$

$$\{0\} \subseteq \{0, 1, 4\}$$

$$\{0\} \neq \{0, 1, 4\}$$

(" $\Leftarrow$ ")

$$\text{Sei } y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$\Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$$

$$= f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{0, 1, 4\}$$

$$\{0\} \subseteq \{0, 1, 4\}$$

$$\{0\} \neq \{0, 1, 4\}$$

(" $\Leftarrow$ ")

$$\text{Sei } y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$\Leftrightarrow (y \in f(A_1)) \wedge (y \in f(A_2))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x_1 \in A_1: f(x_1) = y) \wedge (\exists x_2 \in A_2: f(x_2) = y)$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 =: x$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2: f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A_1 \cap A_2)$$

$$\Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$$

$$= f(A_1 \cap A_2) = f(A_1 \cap A_2)$$

$$\Leftrightarrow (y \in f(A_1)) \vee (y \in f(A_2))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A_1: f(x) = y) \vee (\exists x \in A_2: f(x) = y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A_1 \cup A_2: f(x) = y)$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A_1 \cup A_2)$$

$$\Leftrightarrow f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$\Rightarrow (x \in A_1) \wedge (f(x) = y)$$

$$\Rightarrow y \in f(A_1)$$

$$\Rightarrow (x \in A_2) \wedge (f(x) = y)$$

$$\Rightarrow y \in f(A_2)$$

$$\Rightarrow (y \in f(A_1)) \wedge (y \in f(A_2))$$

$$\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

(" $\Rightarrow$ ")

$$\text{Seien } x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$$

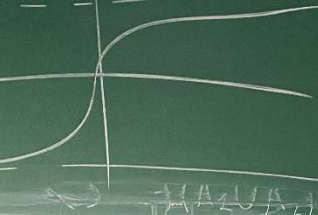
$$A_1 := \{x_1\}, A_2 := \{x_2\} \subseteq A$$

$$\Rightarrow f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$= \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \emptyset$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



↓
3 Versuche

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

$\mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

Umkehrfunktion

- Bijektiv
- stetig
- Wertebereich



(i) Injektiv, surjektiv, bijektiv

$f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_1(n) := 2n-1$

$f_1(1) = 1$
 $f_1(2) = 3$
 $f_1(3) = 5$

$2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$
 $2n_1 = 2n_2$
 $n_1 = n_2$

$f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$
 $f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

(ii) $f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f_2(n) := (-1)^n \cdot n$

$f_2(1) = -1$
 $f_2(2) = 2$
 $f_2(3) = -3$

$|(-1)^{n_1} \cdot n_1| = |(-1)^{n_2} \cdot n_2|$
 $n_1 = n_2$

$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f_3(x) := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$

$f_3(3.3) = 3$
 $f_3(3.4) = 3$

GCP $\approx$ Analysis I

↓
3 Semester

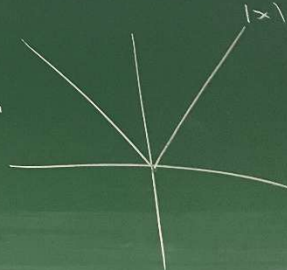
↓
3 Versuche

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

$\mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

PO21

- Umkehrfunktion
- Bijektiv
- stetig
- Wertebereich



(i) Injektiv, surjektiv, bijektiv

$f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_1(n) := 2n-1$

(ii) $f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f_2(n) := (-1)^n \cdot n$

$f_2(1) = -1$
 $f_2(2) = 2$

$|(-1)^{n_1} \cdot n_1| = |(-1)^{n_2} \cdot n_2|$
 $n_1 = n_2$

$$f(n) = f(m)$$

$$\Rightarrow (-1)^n \cdot n = (-1)^m \cdot m \quad \left\{ \begin{array}{l} n \text{ ungerade} \\ m \text{ ungerade} \end{array} \right. \quad -n = -m \Rightarrow n = m$$

$$(\forall n) \quad f_n: \underbrace{P(\{1, \dots, n\})}_{2^n} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad f_n(n) = 1$$

$n > 1$ nichts
 $n = 1$ 1
 $2^n \rightarrow 2^{n+1}$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\boxed{n=1}$$

$$n=2$$

$$\{\emptyset, \{1\}\} \rightarrow \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$$

$$P(1) = 2$$

$$1$$

$$P(1) = 4$$

$$2$$

Aufgabe 3 - Blatt 2

Teil iii

$$f(n) = (-1)^n \cdot n$$

$\Rightarrow$ Sei $f(n) = f(m)$, dann gilt:

$$(-1)^n \cdot n = (-1)^m \cdot m$$

- Ist n gerade und m gerade $\Rightarrow n = m$ ✓
- Ist n ungerade und m gerade $\Rightarrow -n = m$ $\hookrightarrow$ zur $f(n) \neq f(m)$
- Ist n ungerade und m ungerade $\Rightarrow -n = -m$ ✓
- Ist n gerade und m ungerade $\Rightarrow n = -m$ $\hookrightarrow$ zur $f(n) \neq f(m)$

Sind n ungerade und m gerade sowie n gerade und m ungerade so ist es ein Widerspruch zur Annahme $f(n) = f(m)$. Deshalb setzen wir voraus, dass n und m entweder gerade sind oder ungerade.

Weiter ist die Abbildung nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv da $0 \in \mathbb{Z}$ nicht im Bild liegt.