Analysis II
VERSION 13.7.2016

Prof. Dr. D. Müller

SoSe 2016

Inhaltsverzeichnis

Literatur

1. Einige Standardlehrbücher, welche alle im Kern mehr oder weniger denselben Standardlehrstoff vermitteln, doch mit teils deutlich unterschiedlichem Stil:

[F] O. Forster, Analysis 2. Vieweg Studium
[K] K. Königsberger, Analysis 2, Springer-Lehrbuch 1992
[AE] A. Amann, J. Escher, Analysis II, Birkhäuser 1998
[Br] Th. Bröcker, Analysis II, BI Wissenschaftsverlag 1992
[B] C. Blatter, Analysis II, Heidelberger Taschenbuch 151

2. Ein Klassiker, zwar mit einem etwas altmodischen Zugang, dafür aber sehr konkret und insbesondere für Lehramtsstudierende als Ergänzung zur Vorlesung sehr zu empfehlen:

[C] R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung Bd. 2, Springer 1971

3. Ausländische „Klassiker“, teils im Stoff deutlich weitergehend:

[R] W. Rudin, Analysis, Oldenbourg Verlag München, 2009 (Der „Baby-Rudin“)
[L] S. Lang, Real and Functional Analysis, Springer Graduate Texts in Math., 1993
[D] J. Dieudonné, Foundations of modern analysis, Academic Press 1960
[HS] E. Hewitt, K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer 1969

4. Ein kürzlich ins Deutsche übersetztes typisches amerikanisches „textbook“, welches sehr ausführlich und umfangreich an den Lehrstoff heranführt, mit sehr vielen Beispielen und Übungsaufgaben:

G.B. Thomas, M.D. Weir, J. Hass, Analysis 2, Pearson Higher Education, München 2014.

Hinweis: Die mit einem Stern* gekennzeichneten Abschnitte liefern Zusatzinformationen und geghörien nicht mehr zum regulären Vorlesungsumfang.

Kapitel 1

Integration

1.1 Motivation

Eines der Probleme, welches zur Einführung des Begriffes des Integrals geführt hat, ist die Berechnung des Flächeninhalts eines krummlinig berandeten Flächenstückes der Ebene. Durch Zerlegung in endliche viele Teilstücke lässt sich dieses i.A. auf folgendes Problem zurückführen:

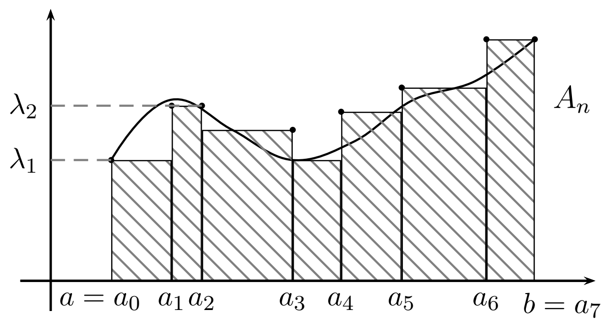
Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine „geeignete“, z.B. stetige Funktion. Wie lässt sich der Flächeninhalt der Fläche

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b, \; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

zwischen dem Graphen von f und der x-Achse bestimmen?

In der obigen Form ist die Frage genau genommen noch nicht einmal richtig formuliert. Sie suggeriert nämlich, dass ein solcher „Flächeninhalt“ existieren muss – dies entspricht zwar unserer Intuition, verschleiert aber die Tatsache, dass die „Berechnung“ des Flächeninhalts zunächst einmal eine sinnvolle Definition voraussetzt. Die obige Frage sollte also genauer die nach der Definition des Flächeninhalts einschließen.

Folgender Weg zur Lösung dieses Problems liegt nahe: Man „approximiere“ die Fläche A durch Flächen A_n, welche sich aus endlich vielen achsenparallelen Rechtecken, deren untere Kanten auf der x-Achse liegen, zusammensetzen, berechne auf die offenkundige Art und Weise den Flächeninhalt $|A_n|$ von A_n, und bestimme den Grenzwert der Folge der $|A_n|$ für $n \to \infty$, wobei für $n \to \infty$ die „Güte der Approximation“ immer besser werden sollte. Den Grenzwert $|A| = \lim_{n\to\infty} |A_n|$, vorausgesetzt er existiert, wird man dann als den Flächeninhalt von A bezeichnen.



Natürlich muss hier noch zusätzlich festgelegt werden, was wir unter einer Approximation von A durch A_n sowie ihrer Güte verstehen wollen.
Die Berechnung der Flächeninhalte der A_n ist dagegen unstrittig. Ordnen wir nämlich die Rechtecke, aus denen A_n sich zusammensetzt, von links nach rechts, so bilden ihre unteren Kanten eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in Intervalle

$$[a_0,a_1],\ [a_1,a_2],\ldots,[a_{m-1},a_m],$$

mit $a_0 = a,\ a_m = b$ (welche strenggenommen noch von n abhängt). Besitzt das Rechteck mit Basis $[a_{j-1},a_j]$ die Höhe λ_j, so wird man den Flächeninhalt von A_n als

$$|A_n| := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(a_j - a_{j-1}) \tag{1.1}$$

definieren. Definiert man die Funktion $f_n : I \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} \lambda_j, & \text{falls } x \in]a_{j-1},a_j[, \\ \max\{\lambda_j,\lambda_{j+1}\} & \text{falls } x = a_j, \quad 1 \le j \le m-1, \\ \lambda_1 & \text{falls } x = a, \\ \lambda_m & \text{falls } x = b, \end{cases}$$

so ist übrigens

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f_n(x)\}.$$

Man bezeichnet $|A_n|$ daher auch als das „Integral der Treppenfunktion“ f_n.

1.2 Das Riemannsche Integral einer Treppenfunktion

Sei im Folgenden $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stets ein gegebenes, kompaktes Intervall. Es sei daran erinnert, dass für eine gegebene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ mit $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus A, \end{cases}$$

bezeichnet wird. Ist $A \subset [a,b]$, so werden wir $\mathbb{1}_A$ auch als Funktion $\mathbb{1}_A : [a,b] \to \mathbb{C}$ betrachten.

Definitionen. Eine Funktion $\varphi : [a,b] \to\in \mathbb{C}$ heiße **Treppenfunktion** auf $[a,b]$, wenn es endlich viele Unterteilungspunkte

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

dieses Intervalls gibt so, dass φ auf jedem der offenen beschränkten Teilintervalle $I_j :=]x_{j-1}, x_j[,\ j = 1, \ldots, m$, konstant ist.
Nimmt φ auf I_j den konstanten Wert $\lambda_j \in \mathbb{C}$ an, und bezeichnen wir zudem mit $I_{m+l} := \{x_l\} = [x_l, x_l],\ l = 0, \ldots m$, die Menge der einpunktigen Intervalle, die aus den Unterteilungspunkten bestehen, und setzen wir $\lambda_{m+l} := \varphi(x_l),\ l = 0, \ldots, m$, sowie $n := 2m+1$, so lässt sich f folglich schreiben in der Form

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{1}_{I_k}. \tag{1.2}$$

Es bezeichne $\mathcal{T} = \mathcal{T}([a,b])$ die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$.

Es sei daran erinnert, dass die Menge $\mathbb{C}^{[a,b]}$ aller komplexwertigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ einen Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen bildet bzgl. der üblichen Addition von Funktionen sowie der Multiplikation mit komplexen Skalaren.

Lemma 1.1 *$\mathcal{T} = \mathcal{T}([a,b])$ bildet einen linearen Teilraum des Vektorraums $\mathbb{C}^{[a,b]}$.*

Beweis. Es sind folgende Eigenschaften nachzuprüfen:

(i) $0 \in \mathcal{T}$,

(ii) $\varphi, \psi \in \mathcal{T} \Rightarrow \varphi + \psi \in \mathcal{T}$,

(iii) $\varphi \in \mathcal{T},\ \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda\psi \in \mathcal{T}$.

Die Eigenschaften (i) und (iii) sind trivial. Es genügt daher, die Aussage (ii) zu beweisen:
Die Treppenfunktion φ sei definiert bzgl. der Menge Z der Unterteilungspunkte

$$Z : x_0 < x_1 < \cdots < x_m,$$

und ψ bzgl. der Menge Z' der Unterteilungspunkte

$$Z' : x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_l.$$

Dann bezeichne $Z \vee Z'$ die geordnete Menge der Unterteilungspunkte

$$Z \vee Z' : t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

welche man dadurch erhält, dass man die Menge

$$\{t_0, t_1, \ldots, t_n\} := \{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \cup \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_l\}$$

betrachtet, welche alle Unterteilungspunkte von Z und von Z' enthält, und diese linear ordnet. Dann sind φ und ψ konstant auf jeden Teilintervall $]t_{j-1}, t_j[,\ j = 1, \ldots, n$. Das Gleiche trifft dann offenbar auf $\varphi + \psi$ zu, und folglich ist $\varphi + \psi \in \mathcal{T}$.

Q.E.D.

Bemerkungen: (a) Offenbar trifft der letzte Schluss auch auf das Produkt $\varphi\psi$ zu, d.h. mit $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ ist auch stets $\varphi\psi \in \mathcal{T}$. Dies bedeutet, dass $\mathcal{T}$ (wie auch $\mathbb{C}^{[a,b]}$) sogar eine **kommutative Algebra** bildet, in der folgende Rechenregeln gelten für alle $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{T}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$:

(i) $(\lambda\varphi_1)\varphi_2 = \varphi_1(\lambda\varphi_2) = \lambda(\varphi_1\varphi_2)$;

(ii) $\varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3) = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3$;

(iii) $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$.

(b) Ferner liegt mit $\varphi \in \mathcal{T}$ auch die durch

$$|\varphi|(x) := |\varphi(x)|,\ x \in [a, b],$$

definierte Funktion $|\varphi|$ in $\mathcal{T}$.
(c) Offenbar ist für jedes beschränkte Intervall $I \subset [a, b]$ dessen charakteristische Funktion $\mathbb{1}_I$ eine Treppenfunktion, und die Darstellung (1.2) einer beliebigen Treppenfunktion zeigt, dass $\mathcal{T}([a, b])$ *gerade der lineare Teilraum von* $\mathbb{C}^{[a,b]}$ *ist, welcher von der Menge aller charakteristischen Funktionen* $\mathbb{1}_I$ *von Intervallen* $I \subset [a, b]$ *aufgespannt wird.*

Definition (Integral einer Treppenfunktion). Sei $\varphi \in \mathcal{T}([a, b])$ definiert durch die Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$

und sei $\varphi|_{]x_{j-1},x_j[} = \lambda_j$ für $j = 1, \ldots, m$. Dann setzt man

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx := \sum_{j=1}^m \lambda_j (x_j - x_{j-1}).$$

Wir schreiben dafür oft auch kürzer $\int \varphi(x)\, dx$ oder $\int \varphi\, dx$, oder nur $\int \varphi$.
Damit diese Definition sinnvoll ist, muss noch gezeigt werden, dass sie unabhängig von der gewählten Unterteilung ist (man sagt dann auch, dass Integral sei **wohldefiniert**). Es seien

$$\begin{aligned} Z:&\quad x_0 < x_1 < \cdots < x_m, \\ Z':&\quad t_0 < t_1 < \cdots < t_l, \end{aligned}$$

zwei Unterteilungen, auf deren offenen beschränkten Teilintervallen die Funktion φ konstant ist, und zwar sei

$$\varphi|_{]x_{j-1},x_j[} = \lambda_j, \qquad \varphi|_{]t_{k-1},t_k[} = \lambda'_k.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\int_{(Z)} \varphi := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x_j - x_{j-1}), \quad \int_{(Z')} \varphi := \sum_{k=1}^{l} \lambda'_k(t_k - t_{k-1}).$$

Es muss gezeigt werden, dass $\int_{(Z)} \varphi = \int_{(Z')} \varphi$.

1.Fall. Jeder Unterteilungspunkt aus Z sei auch Teilpunkt von Z', etwa $x_j = t_{k_j}$. Dann gilt

$$x_{j-1} = t_{k_{j-1}} < t_{k_{j-1}+1} < \cdots < t_{k_j} = x_j, \quad (j = 1, \ldots, m),$$

und

$$\lambda'_k = \lambda_j \quad \text{für } k_{j-1} < k \leq k_j.$$

Daraus folgt

$$\int_{(Z')} \varphi = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} \lambda_j(t_k - t_{k-1}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x_j - x_{j-1}) = \int_{(Z)} \varphi.$$

2.Fall. Seien Z und Z' beliebige Unterteilungen zu φ. Mit $Z \vee Z'$ bezeichnen wir wie zuvor die Unterteilung, die alle Teilpunkte von Z und Z' umfasst. Dann gilt nach dem 1. Fall

$$\int_{(Z)} \varphi = \int_{(Z \vee Z')} \varphi = \int_{(Z')} \varphi.$$

Q.E.D.

Satz 1.2 *Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) $\int (\varphi + \psi)\, dx = \int \varphi\, dx + \int \psi\, dx$.

(b) $\int (\lambda\varphi)\, dx = \lambda \int \varphi\, dx$.

(c) Sind φ und ψ reellwertige Treppenfunktionen, so ist auch deren Integral reell, und es gilt:

aus $\varphi \leq \psi$ folgt $\int \varphi\, dx \leq \int \psi\, dx$.

(d) Das Integral erfüllt die folgende **„Dreiecksungleichung“***:*

$$\left| \int \varphi(x)\, dx \right| \leq \int |\varphi(x)|\, dx.$$

Dabei wird für reellwertige Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X definiert:

$$f \leq g \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 1.1 können φ und ψ bzgl. derselben Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

definiert werden, und ist dann $\varphi|_{]x_{j-1},x_j[} = \alpha_j$ und $\psi|_{]x_{j-1},x_j[} = \beta_j$, so folgt

$$\begin{aligned}\int (\varphi + \psi)\,dx &= \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + \beta_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j (x_j - x_{j-1}) \\ &= \int \varphi\,dx + \int \psi\,dx.\end{aligned}$$

Die übrigen Aussagen folgen auf ähnlich triviale Weise. Q.E.D.

Bemerkungen. (i) Die Aussagen (a) und (b) von Satz 1.2 bedeuten, dass das Integral ein *lineares Funktional* auf dem Vekrtorraum $\mathcal{T}$ ist. Die Eigenschaft (c) drückt aus, dass dieses Funktional *monoton* ist.

(ii) Ist $I \subset [a, b]$ ein beschränktes Intervall mit den Endpunkten $c \leq d$, so gilt offenbar

$$\int \mathbb{1}_I\,dx = 1 \cdot (d - c) = |I|,$$

wobei $|I|$ wieder die Länge des Intervalls I bezeichne.

(iii) Schreiben wir $\varphi \in \mathcal{T}$ wie in (1.2) in der Form $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{1}_{I_k}$, so gilt nach (i) und (ii)

$$\int \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |I_k|. \tag{1.3}$$

(iv) Ist φ eine komplexwertige Treppenfunktion, so sind ihr Realteil $\mathrm{Re}\,\varphi$ und ihr Imaginärteil $\mathrm{Im}\,\varphi$ ebenfalls Treppenfunktionen. Aus $\varphi = \mathrm{Re}\,\varphi + i\mathrm{Im}\,\varphi$ folgt mittels der Linearität des Integrals:

$$\int \varphi\,dx = \int \mathrm{Re}\,\varphi\,dx + i \int \mathrm{Im}\,\varphi\,dx, \qquad \varphi \in \mathcal{T}. \tag{1.4}$$

Definitionen. Sei X eine nichtleere Menge. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt bekanntlich *beschränkt*, wenn die Bildmenge $f(X) \subset \mathbb{C}$ beschränkt ist, d.h. wenn es eine reelle Konstante $C \geq 0$ gibt so, dass

$$|f(x)| \leq C \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Mit $\mathcal{B}(X)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$. Offenbar bildet $\mathcal{B}(X)$ einen linearen Teilraum des Raumes $\mathbb{C}^X$. Für $f \in \mathcal{B}(X)$ ist dann

$$\|f\|_u := \sup\{|f(x)| : x \in X\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

wohldefiniert, und es gilt insbesondere

$$|f(x)| \leq \|f\|_u \quad \text{für alle } x \in X. \tag{1.5}$$

Offenbar ist also $\|f\|_u$ gerade die kleinste Konstante C, durch welche f beschränkt wird.
Jede Treppenfunktion ist offenbar beschränkt.

Lemma 1.3 *Für alle $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ gilt*

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \leq \|\varphi\|_u\,(b-a).$$

Beweis. Offenbar gilt nach (1.5) $|\varphi| \leq \|\varphi\|_u \mathbb{1}_{[a,b]}$. Mit Satz 1.2 folgt daher

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\,dx \leq \int_a^b \|\varphi\|_u \mathbb{1}_{[a,b]}\,dx = \|\varphi\|_u(b-a).$$

Q.E.D.

Bemerkungen 1.4 a) Für die Abbildung

$$\|\cdot\|_u : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f \mapsto \|f\|_u,$$

weist man folgende Eigenschaften für alle $f, g \in \mathcal{B}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ nach (Übung), welche denen des Absolutbetrags einer komplexen Zahl ähneln:

(a) $\|f\|_u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$;

(b) $\|\lambda f\|_u = |\lambda|\ \|f\|_u$;

(c) $\|f+g\|_u \leq \|f\|_u + \|g\|_u$;

(d) $\|\overline{f}\|_u = \|f\|_u$;

(e) $\|fg\|_u \leq \|f\|_u\|g\|_u$.

Z.B. folgt aus (1.5)

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_u + \|g\|_u,$$

und somit aufgrund der Definition des Supremums $\|f+g\|_u \leq \|f\|_u + \|g\|_u$. Die übrigen Eigenschaften folgen ähnlich leicht.

b) Die Eigenschaften (a) bis (c) bedeuten, dass $\|\cdot\|_u$ eine sogenannte **Norm** auf dem Vektorraum $\mathcal{B}(X)$ ist – auf diesen Begriff werden wir in Kapitel 2 ausführlicher eingehen. $\|f\|_u$ bezeichnet man als die **Supremumsnorm** von f.

c) Mit Hilfe dieser Supremumsnorm lässt sich die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_n$ in $\mathcal{B}(X)$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{B}(X)$ ähnlich beschreiben wie die Konvergenz einer Zahlenfolge mit Hilfe des Absolutbetrages:

Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert dann und nur dann gleichmäßig auf X gegen f, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_u = 0. \tag{1.6}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt nämlich offenbar

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in X$$

genau dann, wenn

$$\|f_n - f\|_u \leq \varepsilon.$$

d) Beachte auch: *Ist die Funktion f der gleichmäßige Limes einer Folge $(f_n)_n$ beschränkter Funktionen $f_n \in \mathcal{B}(X)$, so ist auch f beschränkt, d.h. $f \in \mathcal{B}(X)$.*

Wählen wir nämlich in c) z.B. $\varepsilon := 1$, so gibt es ein n mit $|f(x) - f_n(x)| \leq 1$ für alle $x \in X$, also

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq 1 + \|f_n\|_u < \infty \quad \text{für alle } x \in X.$$

1.3 Erweiterung des Integrals: das bestimmte Integral einer Regelfunktion

Wir wollen nun das Integral auf eine größere Klasse von Funktionen erweitern. Dazu beobachten wir folgende Konsequenz aus Lemma 1.3:

Lemma 1.5 *Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ der gleichmäßige Limes einer Folge von Treppenfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}([a, b])$, so bildet die Folge der Integrale $(\int_a^b f_n\,dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Insbesondere existiert der Grenzwert*

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx.$$

Dieser hängt nur ab von f, nicht jedoch von der approximierenden Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und es gelte (1.6). Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|f - f_n\|_u < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Für $n, m \geq n_0$ erhält man somit mittels Bemerkung 1.4

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_u &= \|(f - f_n) - (f - f_m)\|_u \\ &\leq \|f - f_n\|_u + \|f - f_m\|_u < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Die Folge $(f_n)_n$ bildet also eine „gleichmäßige Cauchy-Folge“. Für $n, m \geq n_0$ folgt zusammen mit Lemma 1.3 :

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^b f_n\, dx - \int_a^b f_m\, dx \Big| &= \Big| \int_a^b (f_n - f_m)\, dx \Big| \\ &\leq (b-a)\|f_n - f_m\|_u < (b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Folge $(\int_a^b f_n\, dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ bildet. Sei

$$I := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, dx.$$

Sei ferner $(g_n)_n$ eine weitere Folge in $\mathcal{T}([a,b])$, welche gleichmäßig gegen f konvergiert, und sei $J = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g_n\, dx$.
Wegen

$$\begin{aligned} \|f_n - g_n\|_u &= \|(f_n - f) + (f - g_n)\|_u \\ &\leq \|f_n - f\|_u + \|f - g_n\|_u \end{aligned}$$

ist dann offenbar

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\|_u = 0.$$

Wieder mittels Lemma 1.3 folgt hieraus:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b (f_n - g_n)\, dx \right| = 0,$$

und somit $I = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g_n\, dx = J$.

Q.E.D.

Definitionen. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, die sich als Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge $(f_n)_n$ aus $\mathcal{T}([a,b])$ darstellen lässt, wird als **Regelfunktion** auf $[a,b]$ bezeichnet. Es sei $\mathcal{R} = \mathcal{R}([a,b])$ die Menge aller solcher Regelfunktionen auf $[a,b]$. Jede Regelfunktion ist beschränkt, d.h. es gilt

$$\mathcal{R}([a,b]) \subset \mathcal{B}([a,b])$$

(vgl. Bemerkung 1.4). Sind $(f_n)_n$ bzw. $(g_n)_n$ Folgen in $\mathcal{T}([a,b])$, welche gleichmäßig gegen f bzw. g aus $\mathcal{R}([a,b])$ konvergieren, so weist man mittels Bemerkung 1.4 ganz analog wie für konvergente Zahlenfolgen nach, dass die Folge $(f_n+g_n)_n$ gleichmäßig gegen $f+g$, die Folge $(f_ng_n)_n$ gleichmäßig gegen fg (hier nutzt man auch die Beschränkheit von Regelfunktionen aus!) und die Folge $(\alpha f_n)_n$ gleichmäßig gegen αf konvergiert, für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$. Dies zeigt, dass mit f und g aus $\mathcal{R}([a,b])$ sowie $\alpha \in \mathbb{C}$ auch $f+g$, αf und fg in $\mathcal{R}([a,b])$ liegen, d.h. dass auch $\mathcal{R}([a,b])$ eine Algebra ist. Ähnlich zeigt man, dass mit $f \in \mathcal{R}$ auch $|f|$, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ in $\mathcal{R}([a,b])$ liegen.

Aufgrund von Lemma 1.5 können wir nun definieren:

Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$, und sei $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{T}([a,b])$, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

heißt das **(bestimmte) Riemannsche Integral der Funktion f über das Intervall** $[a,b]$ (oder „**von** a **bis** b“).
Ist die Funktion f auf einer Obermenge von $[a,b]$ definiert (wie z.B. die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist), und ist deren Einschränkung auf $[a,b]$ eine Regelfunktion (solche Funktion wollen wir als **über** $[a,b]$ **integrierbar** bezeichnen), so definiert man das **Riemannsche Integral dieser Funktion über das Intervall** $[a,b]$ durch

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f|_{[a,b]}(x)\,dx.$$

Satz 1.6 (Eigenschaften des Integrals) *Es bezeichne wieder* $\mathcal{R} = \mathcal{R}([a,b])$.

(i) *Die Abbildung* $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ *ist komplex linear von* $\mathcal{R}$ *nach* $\mathbb{C}$, *d.h. es gilt*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx \qquad \textit{(Linearität)}$$

für alle $f, g \in \mathcal{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(ii) *Ist* $f \in \mathcal{R}$ *reellwertig, so ist* $\int_a^b f\,dx \in \mathbb{R}$.

Ist zusätzlich $f \geq 0$, *so ist* $\int_a^b f\,dx \geq 0$. *D.h., aus* $f, g \in \mathcal{R}$, $f \leq g$, *folgt*

$$\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx. \qquad \textit{(Monotonie)}$$

Ferner gilt $\int_a^b 1\,dx = b - a$. *(Normierung)*

(iii) *Es gilt die „***Dreiecksungleichung***“ für Integrale, d.h.*

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx, \quad f \in \mathcal{R}\ .$$

(iv) *Ist $a \le b \le c$, und ist die Funktion f über das kompakte Intervall $[a,c]$ integrierbar (d.h. $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$), so gilt:*

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx. \qquad \textit{(Bereichsadditivität)} \tag{1.8}$$

Beweis. (i) Sind $(f_n)_n$ bzw. $(g_n)_n$ Folgen in $\mathcal{T} = \mathcal{T}([a,b])$, welche gleichmäßig gegen f bzw. g konvergieren, so folgt mittels Bemerkung 1.4

$$\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\|_u = \|(\alpha(f-f_n)+\beta(g-g_n)\|_u \le |\alpha|\|f-f_n\|_u+|\beta|\|g-g_n\|_u,$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\|_u = 0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\alpha f+\beta g)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha f_n+\beta g_n)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} (\alpha \int_a^b f_n\,dx + \beta \int_a^b g_n\,dx) \\
&= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx + \beta \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n\,dx \\
&= \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx\ .
\end{aligned}$$

(ii) Ist $f \in \mathcal{R}$ reellwertig, und ist f der gleichmäßige Limes der Folge $(f_n)_n$ aus $\mathcal{T}$, so konvergiert wegen $\|f - \mathrm{Re}\,(f_n)\|_u := \|\mathrm{Re}\,(f-f_n)\|_u \le \|f-f_n\|_u$ auch die Folge $(\mathrm{Re}\,f_n)_n$ aus $\mathcal{T}$ gleichmäßig gegen f, d.h. man kann o.B.d.A. annehmen, dass die Folge $(f_n)_n$ aus reellwertigen Funktionen besteht. Damit ist

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx \in \mathbb{R}.$$

Ist zusätzlich $f \ge 0$, so kann man, indem man f_n durch $\max\{0, f_n\}$ ersetzt, zusätzlich $f_n \ge 0$ für alle n annehmen, so dass $\int_a^b f\,dx \ge 0$ folgt.

(iii) Ist f der gleichmäßige Limes der Folge $(f_n)_n$ aus $\mathcal{T}$, so konvergiert die Folge $(|f_n|)_n$ gleichmäßig gegen $|f|$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f\,dx\Big| &= \lim_{n\to\infty} \Big|\int_a^b f_n\,dx\Big| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \Big|\int_a^b f_n\,dx\Big| \\
&\le \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_a^b |f_n|\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n|\,dx = \int_a^b |f|\,dx,
\end{aligned}$$

da die Dreiecksungleichung ja für $f_n \in \mathcal{T}$ gilt.

(iv) Laut Voraussetzung ist $f|_{[a,c]}$ auf $[a,c]$ der gleichmäßige Limes einer Folge $(f_n)_n$ aus $\mathcal{T}([a,c])$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt zudem

$$\mathbb{1}_{[a,c]} f_n = \mathbb{1}_{[a,b]} f_n + \mathbb{1}_{[b,c]} f_n - \mathbb{1}_{\{b\}} f_n(b),$$

und somit

$$\int_a^c f_n \, dx = \int_a^b f_n \, dx + \int_b^c f_n \, dx.$$

Durch Grenzübergang für $n \to \infty$ folgt die Identität (1.8). Q.E.D.

Bemerkung 1.7 Ist $a > b$, und ist f über das Intervall $[b,a]$ integrierbar, so setzen wir

$$\int_a^b f \, dx := -\int_b^a f \, dx.$$

Man prüft leicht nach, dass die Gleichung (1.8) dann für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ gültig ist.

Welche Funktionen sind in $\mathcal{R}([a,b])$ enthalten?

Definition. Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heiße **stückweise stetig**, wenn es eine Unterteilung

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m = b$$

von $[a,b]$ sowie stetige Funktionen $F_k \in C(\,[\xi_k, \xi_{k+1}]),\ k = 0, \ldots, m-1$, gibt so, dass

$$f\Big|_{]\xi_k,\xi_{k+1}[} = F_k\Big|_{]\xi_k,\xi_{k+1}[}, \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

Satz 1.8 $\mathcal{R}([a,b])$ *enthält alle stückweise stetigen Funktionen auf* $[a,b]$.

Der Schlüssel zum Beweis dieses Satzes liegt in der folgenden Definition und dem anschließenden Satz.

Definition. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ (oder auch $A \subset \mathbb{C}$). Die Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ heiße **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt so, dass gilt:

(1.9) $$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in A \text{ mit } |x - y| < \delta\ .$$

Offenbar ist eine gleichmäßig stetige Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ stetig auf A; die Umkehrung hiervon ist jedoch falsch.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}_{>0}$, jedoch nicht gleichmäßig stetig.
Für $x_n := \frac{1}{2\pi n},\ y_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, gilt nämlich:

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |0 - 1| = 1,$$

und

$$|x_n - y_n| = \frac{\pi/2}{(2\pi n)(2\pi n + \frac{\pi}{2})} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Zu $\varepsilon = 1$ kann es hier also kein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft (1.9) geben.

Theorem 1.9 *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, so ist jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig.*

Beweis (durch Widerspruch). Wir nehmen an, dass $f \in C(I)$ nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sowie zu jedem $\delta := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$ ein Paar x_n, y_n in I mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Dies impliziert insbesondere, dass $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ ist.
Da I ein kompaktes Intervall ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ der Folge $(x_n)_n$, welche gegen ein $\xi \in I$ konvergiert. Durch Übergang zu dieser Teilfolge können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Folge $(x_n)_n$ bereits gegen ξ konvergiert. Wegen $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ ist dann auch $\lim_{n\to\infty} y_n = \xi$.
Da f im Punkte ξ stetig ist, folgt damit:

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n),$$

also

$$0 = \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)|.$$

Dies steht im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon,\ \forall n \geq 1.$

Q.E.D.

Beweis von Satz 1.8. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig. Dann gibt es eine Unterteilung $a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m = b$ des Intervalls $[a, b]$ sowie stetige Funktionen $F_k \in C([\xi_k, \xi_{k+1}])$ mit $f\big|_{]\xi_k,\xi_{k+1}[} = F_k\big|_{]\xi_k,\xi_{k+1}[},\ k = 0, \ldots, m-1$.
Sei $\varepsilon > 0$. Da die Funktion F_k nach Theorem 1.9 gleichmäßig stetig ist auf dem kompakten Intervall $[\xi_k, \xi_{k+1}]$, ist auch $f|_{I_k}$ gleichmäßig stetig auf jedem der Intervalle $I_k :=]\xi_k, \xi_{k+1}[$.
Wir halten vorübergehend k fest. Dann gibt es also zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta_k > 0$ so, dass gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } x, y \in I_k \text{ mit } |x - y| < \delta_k.$$

Indem wir gegebenenfalls δ_k verkleinern dürfen wir o.B.d.A annehmen, dass $N_k := \frac{\xi_{k+1}-\xi_k}{\delta_k} \in \mathbb{N}$. Wir setzen dann

$$a_j := \xi_k + j\delta_k, \quad j = 0, \ldots, N_k.$$

Das Intervall I_k zerfällt dann in die Teilintervalle

$$]a_0, a_1], \;]a_1, a_2], \ldots,]a_{N_k-1}, a_{N_k}[,$$

welche alle dieselbe Länge δ_k haben.
Wir wählen zu jedem $j = 0, \ldots, N_k - 1$ einen Punkt $b_j \in]a_j, a_{j+1}[$ aus, und setzen

$$\varphi_k := \sum_{j=0}^{N_k-1} f(b_j) \mathbb{1}_{]a_j, a_{j+1}[} + \sum_{j=1}^{N_k-1} f(a_j) \mathbb{1}_{\{a_j\}} \; .$$

Dann gilt $\|(f - \varphi_k)\big|_{I_k}\|_u \leq \varepsilon$, denn ist $x \in I_k$, so existiert ein j mit $x \in]a_j, a_{j+1}[$, oder $x = a_j$. Im ersten Falle ist

$$|f(x) - \varphi_k(x)| = |f(x) - f(b_j)| < \varepsilon,$$

da $|x - b_j| < \delta_k$ ist, und im zweiten Falle ist

$$|f(x) - \varphi_k(x)| = |f(a_j) - f(a_j)| = 0 < \varepsilon \; .$$

Setzen wir schließlich

$$\varphi := \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k + \sum_{k=0}^{m} f(x_k) \mathbb{1}_{\{x_k\}} \; ,$$

so ist $\varphi \in \mathcal{T}([a, b])$, und es gilt offenbar

$$\|f - \varphi\|_u \leq \varepsilon \; .$$

Insbesondere erhalten wir auf diese Weise zu jedem $\varepsilon = 1/n, \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1$, ein φ_n in $\mathcal{T}([a, b])$ mit $\|f - \varphi_n\|_u \leq 1/n$. Damit ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Q.E.D.

Bemerkung: Der Beweis von Satz 1.8 zeigt bei genauer Betrachtung sogar Folgendes:

Ist f auf $[a, b]$ stückweise stetig, und sind $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ Punkte in $[a, b]$, welche eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in die Teilintervalle $[x_j, x_{j+1}]$ der Länge $\Delta_j := x_{j+1} - x_j$ liefern, und sind $b_j \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, n-1$, beliebige **Stützstellen** im Intervall $[x_j, x_{j+1}]$, so lässt sich zu diesen Daten die **Riemann-Summe** zu f der Gestalt

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(b_j)(x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{n-1} f(b_j) \Delta_j,$$

bilden. Betrachte wieder die zugehörige Treppenfunktion

$$\varphi := \sum_{j=0}^{n-1} f(b_j) \mathbb{1}_{]x_j, x_{j+1}[} + \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \mathbb{1}_{\{x_j\}}.$$

Dann gilt offenbar

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} f(b_j)\Delta_j.$$

Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ferner zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass für jede Zerlegung mit **Feinheit** $\max\limits_{j=0,\ldots,n-1} \Delta_j < \delta$ gilt:

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| = \|f - \varphi\|_u < \frac{\varepsilon}{1+b-a},$$

und somit

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx\Big| = \Big|\int_a^b (f(x) - \varphi(x))\,dx\Big| \leq \|f - \varphi\|_u(b-a) < \varepsilon,$$

d.h.

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=0}^{n-1} f(b_j)\Delta_j\Big| < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist also der Grenzwert jeder Folge von Riemann-Summen zu f, deren Feinheiten gegen Null streben!

Dagegen ist die Dirichlet-Funktion $\varphi := 1\!\!1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nicht integierbar über $[0,1]$ (Übung).

Bemerkung 1.10 Eine schwächere Form der Approximation durch Treppenfunktionen ist die Folgende:

Definition. Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heiße **Riemannsch integrierbar** auf $[a,b]$, wenn es zwei Folgen $(f_n)_n$ und $(\psi_n)_n$ von Treppenfunktion auf $[a,b]$ gibt so, dass gilt:

$$|f - f_n| \leq \psi_n \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_n\,dx \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

(offenbar muss $\psi_n \geq 0$ sein).

Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ aus $\mathcal{T}([a,b])$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f, so kann man offenbar $\psi_n := \|f - f_n\|_u \; 1\!\!1_{[a,b]}$ wählen, d.h. jede Regelfunktion auf $[a,b]$ ist Riemannsch integrierbar.

Man kann zeigen, dass sich für alle Riemannsch integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ ein Integral durch

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

definieren lässt, welches ähnliche Eigenschaften wie die des von uns betrachteten Integrals besitzt.

Allerdings ist die Dirichlet-Funktion auch im Riemannschen Sinne nicht integrierbar. Klassischere (jedoch äquivalente) Zugänge zum Riemannschen Integral findet man in zahlreichen Lehrbüchern, wie z.B. in [F].

Wann kann man aus der Konvergenz einer Folge $(f_n)_n$ integrierbarer Funktionen f_n gegen eine Funktion f schließen, dass auch die Grenzfunktion f integrierbar ist, und dass die Integrale der f_n gegen das Integral von f streben?
Das Beispiel der Dirichlet-Funktion zeigt bereits, dass hierfür die punktweise Konvergenz der f_n gegen f nicht ausreicht.
Ist nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Punkte in $\mathbb{Q}\cap[0,1]$, und setzen wir

$$\varphi_n := \sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{x_j\}} \ ,$$

so ist offenbar φ der punktweise Limes der Folge der $(\varphi_n)_n$, welche alle in $\mathcal{T}$ liegen, also integrierbar sind auf $[0,1]$ (übrigens ist $\int\limits_0^1 \varphi_n \, dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

Satz 1.11 *Ist $(f_n)_n$ eine Folge von Regelfunktionen auf $[a,b]$, und konvergiert diese gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, so ist auch f eine Regelfunktion auf $[a,b]$, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f \, dx.$$

Beweis. Da f_n in $\mathcal{R}([a,b])$ liegt, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ein $\varphi_n \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\|f_n - \varphi_n\|_u < \frac{1}{n}$. Mit Hilfe der Ungleichungen

$$\|f - \varphi_n\|_u \leq \|f - f_n\|_u + \|f_n - \varphi_n\|_u < \|f - f_n\|_u + \frac{1}{n}$$

folgern wir, dass dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_u = 0$. Somit ist auch $f \in \mathcal{R}([a,b])$.
Aus

$$\Big| \int_a^b f \, dx - \int_a^b f_n \, dx \Big| \leq (b-a)\|f - f_n\|_u$$

folgt schließlich auch $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f \, dx$. Q.E.D.

Korollar 1.12 *Besitzt die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ den Konvergenzradius $R > 0$, und ist $a \leq b$ mit $|a|, |b| < R$, so ist*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b x^k \, dx.$$

Beweis. Setze $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Nach dem Beweis von Satz 9.14 (Analysis I) konvergiert dann die Folge der Polynome f_n auf dem Intervall $[a,b]$ gleichmäßig gegen die (stetige) Funktion f, so dass die Aussage unmittelbar aus Satz 1.11 folgt.

Q.E.D.

Um das Integral einer Funktion, welche durch eine Potenzreihe dargestellt ist, zu berechnen, genügt es also im Prinzip, die Integrale $\int_a^b x^k\,dx,\ k\in\mathbb{N}$, zu kennen. Diese lassen sich in der Tat mit ein wenig Fleiß mittels Approximation durch Treppenfunktionen berechnen. Einfacher ist es jedoch, hierzu den von Newton und Leibniz entdeckten engen Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration auszunutzen, welcher im nächsten Abschnitt besprochen wird.

1.4 Integration und Differentiation

Definition. Es sei $f\in C(I)$ eine stetige Funktion auf dem Intervall $I=[a,b]$. Eine differenzierbare Funktion F auf I heiße **Stammfunktion** von f, wenn gilt

$$f=F'\quad \text{auf } I.$$

Theorem 1.13 (Newton-Leibniz) *Sei $f\in C([a,b])$. Dann ist*

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b],$$

eine Stammfunktion von f.

Beweis. Sind x und $x+h$ in $I=[a,b]$, so gilt:

$$\begin{aligned}&F(x+h)-F(x)-f(x)h\\&=\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt-f(x)h\\&=\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt\ ,\end{aligned}$$

da $\int_a^{x+h}f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h}f(t)\,dt$ ist, und da $f(x)h=\int_x^{x+h}f(x)\,dt$ ist. Somit ist für festes x und $h\neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt=:r(h).$$

Wir müssen zeigen, dass $\lim_{h\to 0}r(h)=0$ ist. Sei dazu $\varepsilon>0$ gegeben. Da f in x stetig ist, existiert ein $\delta>0$, so dass $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ ist für alle $t\in[a,b]$ mit $|t-x|<\delta$. Für $|h|<\delta$ gilt somit für alle $t\in[a,b]$, welche zwischen x und $x+h$ liegen:

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon.$$

Somit folgt für $|h| < \delta$:

$$|r(h)| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt \right| \leq \frac{|h|\varepsilon}{|h|} = \varepsilon \ .$$

Q.E.D.

Bemerkung 1.14 Sind F und G zwei Stammfunktionen von f auf $[a, b]$, so ist $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$, d.h. $F - G$ ist eine konstante Funktion (vgl. Satz 10.11 (ii), Analysis I).

Zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich also nur um eine additive Konstante. Umgekehrt ist mit F auch $F + c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f.

Satz 1.15 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Ist F eine Stammfunktion der stetigen Funktion f auf $[a, b]$, so gilt für alle $x, y \in [a, b]$:*

$$\int_x^y f(t) \, dt = F(y) - F(x) \ .$$

Beweis. Wir definieren für $x \in [a, b]$

$$G(x) := \int_a^x f(t) \, dt \ .$$

Dann existiert nach Theorem 1.13 und Bemerkung 1.14 eine Konstante $c \in \mathbb{C}$, so dass gilt

$$F(x) = G(x) + c \ , \quad x \in [a, b] \ .$$

Somit ist

$$F(y) - F(x) = G(y) - G(x) = \int_a^y f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt = \int_x^y f(t) \, dt \ . \quad Q.E.D.$$

Bezeichnung: Man setzt

$$F(t)\Big|_x^y := F(y) - F(x) \ .$$

Die Formel in Satz 1.15 schreibt sich dann als

$$\int_x^y f(t)dt = F(t)\Big|_x^y \ .$$

Die folgende Tabelle lässt sich durch Differentiation der angegebenen Funktionen F leicht überprüfen.

Tabelle einiger Stammfunktionen

f	F (bis auf additive Konstante)
$x^k, \quad x \neq 0$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad k \neq -1$
$x^{-1}, \quad x \neq 0$	$\log\lvert x\rvert$
$x^\alpha, \quad x > 0$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \ \alpha \neq -1$
e^x	e^x
e^{ix}	$\frac{1}{i}e^{ix}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x\rvert < 1$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \lvert x\rvert > 1$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$\frac{1}{\sinh^2 x}, \quad x \neq 0$	$-\coth x$
$\frac{1}{\cos^2 x}, \quad \lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}, \quad 0 < x < \pi$	$-\cot x$

Beispielsweise erhält man nun für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^a = \frac{a^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{a^{n+1}}{n+1} \ ,$$

oder auch

$$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \log x \bigg|_a^b = \log b - \log a = \log\left(\frac{b}{a}\right) \ ,$$

für $0 < a < b$.

Weitere Regeln, welche für gewisse Klassen von Funktionen eine „explizite“ Integration ermöglichen, lassen sich mittels Satz 1.16 aus entsprechenden Regeln für die Differentiation herleiten:

Satz 1.16 (Partielle Integration) *Seien $f \in C([a,b])$, $g \in C^1([a,b])$, und sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis. Sei $h = Fg$. Dann ist $h \in C^1([a,b])$, und es gilt nach der Produktregel

$$h' = F'g + Fg' = fg + Fg'.$$

Damit folgt

$$F(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b h'(x)\,dx = \int_a^b fg\,dx + \int_a^b Fg'\,dx.$$

Q.E.D.

Beispiele. a) Für $0 < a < b$ ist

$$\int_a^b \log x\,dx = \int_a^b 1\cdot \log x\,dx = x\log x\Big|_a^b - \int_a^b x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x\Big|_a^b - x\Big|_a^b = x(\log x - 1)\Big|_a^b.$$

b) Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx &= \int_0^{\pi/2} \sin x\,\sin^{n-1} x\,dx \\
&= (-\cos x)\,\sin^{n-1} x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)\,(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x)\,(n-1)\sin^{n-2} x\,dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\,\sin^{n-2} x\,dx, \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx,
\end{aligned}$$

woraus man sofort

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx \tag{1.11}$$

erhält. Wegen

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1,\ \int_0^{\pi/2} \sin^0 x\,dx = \pi/2$$

folgert man hieraus per Induktion nach n, dass

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}, \tag{1.12}$$

$$(1.13) \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \, dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Per Division ergibt sich aus diesen Formeln

$$(1.14) \qquad \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x \, dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m+1}{2m}$$

Setze nun $s_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Auf dem Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$, wo $0 < \sin x < 1$ gilt, ist offenbar

$$0 < \sin^{2m+1} x \leq \sin^{2m} x \leq \sin^{2m-1} x.$$

Daraus folgt wegen der Monotonie des Integrals

$$0 < s_{2m+1} \leq s_{2m} \leq s_{2m-1}.$$

Teilt man hier jeden Term durch s_{2m+1}, so folgt

$$1 \leq \frac{s_{2m}}{s_{2m+1}} \leq \frac{s_{2m-1}}{s_{2m+1}} = 1 + \frac{1}{2m},$$

wobei wir bei der letzten Identität Formel (1.11) benutzt haben. Hieraus erhalten wir sofort

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} \, dx} = 1,$$

und zusammen mit (1.14) folgt

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m+1}{2m}$$

(vergleiche das Beispiel zu Satz 5.3, Analysis I). Gehen wir zu den Kehrwerten über, so erhalten wir die **Wallissche Produktdarstellung von** π :

$$(1.15) \qquad \frac{\pi}{2} = \lim_{m \to \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1}.$$

Satz 1.17 (Substitutionsregel) *Sei I ein kompaktes Intervall und $f \in C(I)$. Sei ferner $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi([a, b]) \subset I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f auf I. Dann ist $F \circ \varphi \in C^1([a,b])$, und es ist nach der Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Somit ist nach Satz 1.16

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F \circ \varphi(t)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Q.E.D.

Beispiele. a) Berechne $\int_0^{\pi/2} e^{-\sin x} \cos x\,dx$.

Die Substitution $y = \sin x =: \varphi(x)$ liefert wegen $\frac{dy}{dx}(x) = \varphi'(x) = \cos x$ (was man gerne auch in der suggestiven Kurzform

$$\text{“}\cos x\,dx = dy''$$

schreibt)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{-\sin x} \cos x\,dx &= \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} e^{-y}\,dy \\ &= -e^{-y}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

b) Bestimme $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt, \quad 0 \le x < 1.$

Die Substitution $t = \sin y,\ 0 < t < \pi/2$, mit $dt = \cos y\,dy$, liefert

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \int\limits_0^{\arcsin x} \sqrt{1-\sin^2 y}\cos y\,dy = \int\limits_0^{\arcsin x} \cos^2 y\,dy.$$

Ferner erhält man mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^s \cos^2 y\,dy \quad &= \sin y \cos y\Big|_0^s + \int_0^s \sin^2 y\,dy = \sin s \cos s + \int_0^s (1 - \cos^2 y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\sin(2s) + s - \int_0^s \cos^2 y\,dy, \end{aligned}$$

woraus

$$\int_0^s \cos^2 y\,dy = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(2s) + s) = \frac{1}{2}(\sin s \cos + s)$$

folgt. Für $s := \arcsin x$ mit $0 \le x < 1$ ist aber $0 \le s < \pi/2$, also $\cos s > 0$, so dass

$$\sin s = x, \quad \cos s = \sqrt{1 - \sin^2 s} = \sqrt{1-x^2}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x).$$

Man überprüfe durch Differentiation nach x, dass die rechte Seite dieser Identität in der Tat eine Stammfunktion zu $\sqrt{1-x^2}$ ist!

c) Bestimme das unbestimmte Integral $\int \arctan x\,dx$.

Unter dem **unbestimmten Integral** $\int f(x)\,dx$ von f versteht man dabei eine beliebige Stammfunktion von f; das unbestimmte Integral ist also im Grunde nur bis auf eine additive Konstante wohldefiniert!.

Mit der Produktregel erhalten wir zunächst

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int x\arctan'(x)\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Die Substitution $y = x^2$ liefert ferner

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \tfrac{1}{2}\frac{1}{1+y}\,dy = \tfrac{1}{2}\log(1+y) + c = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + c,$$

so dass

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + c,$$

wobei c eine beliebige Konstante ist (man prüfe dies durch Ableiten nach!).

Satz 1.18 (Differentiation von Grenzfunktionen) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf dem Intervall $[a,b]$, $a < b$. Ist f der punktweise Limes einer Folge von Funktionen $(f_n)_n$ in $C^1([a,b])$, und konvergiert die Folge der Ableitungen $(f_n')_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion $g \in C([a,b])$, so ist f bereits stetig differenzierbar auf $[a,b]$, und es gilt:*

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Beweis. Wir setzen $G(x) := \int_a^x g(t)dt,\ x \in [a,b]$. Nach Satz 1.11 ist dann

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

für alle $x \in [a,b]$, also nach Satz 1.16

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a).$$

Da G nach Satz 1.14 in $C^1([a,b])$ liegt, gilt dies auch für $f = G + f(a)$, und es ist $f' = G' = g$.

Q.E.D.

1.5 Integration rationaler Funktionen

1.5.1 Partialbruchzerlegung

Die folgenden Aussagen über rationale Funktionen gehören eher in den Bereich der Algebra und sollen daher nur kurz skizziert werden.

Sei $R = \frac{p}{q}$ mit Polynomen p und q eine rationale Funktion auf $\mathbb{C}$. Bezeichnen wir mit $\operatorname{Grad} P$ den Grad eines Polynoms P, und setzen wir o.B.d.A. $\operatorname{Grad} q \geq 1$ voraus, so erhält man mittels **Polynomdivision mit Rest** leicht folgende Aussage:

Es existieren eindeutige Polynome v und r, so dass

$$p = vq + r \quad \text{und } \operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} q. \tag{1.16}$$

Damit ist

$$R = \frac{p}{q} = v + \frac{r}{q}, \quad \text{mit } \operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} q. \tag{1.17}$$

Satz 1.19 (Zerlegung in Linearfaktoren) *Sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ auf $\mathbb{C}$. Dann gibt es komplexe Zahlen $a \neq 0$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so dass*

$$P(z) = a(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt P eine Nullstelle $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Wenden wir (1.16) an auf $p = P$ und $q(z) := (z - \alpha_n)$, so folgt:

$$P(z) = v(z)(z - \alpha_n) + c,$$

wobei c eine komplexe Konstante ist. Wegen $P(\alpha_n) = 0$ ergibt sich $c = 0$, d.h. $P(z) = v(z)(z - \alpha_n)$. Da $\operatorname{Grad} v = \operatorname{Grad} P - 1$, folgt die Behauptung nun per Induktion nach dem Grad des Polynoms.

Q.E.D.

Wenden wir diesen Satz auf q in (1.17) an, und fassen wir alle Linearfaktoren $(z-\alpha_j)$ von q mit gleichem α_j zusammen, so sehen wir:

Es gibt paarweise verschiedene komplexe Zahlen $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ sowie $n_1, \ldots n_m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so dass $n_1 + \cdots + n_m = \operatorname{Grad} q$ und

$$q(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \cdots (z - \lambda_m)^{n_m}. \tag{1.18}$$

Die Zahl n_j bezeichnet man dann auch als die **Vielfachheit** der Nullstelle λ_j des Polynoms q, und die Polynome $(z - \lambda_j)$ auch als die **Primfaktoren** von q.

Einschub: Algebraische Theorie der Partialbruchzerlegung*

Die nachfolgenden Argumente erfordern Kenntnisse aus der Idealtheorie von Polynomringen - wer diese noch nicht besitzt, kann diesen Abschnitt einfach überspringen und Satz 1.20 ohne Beweis zur Kenntnis nehmen.

Da die Polynome

$$q_k(z) := \prod_{j \neq k} (z - \lambda_j)^{n_j}, \quad k = 1, \dots, m,$$

„teilerfremd " im Ring $\mathbb{C}[x]$ aller komplexen Polynome sind, d.h., da die einzigen Teilerpolynome von $q_1, \dots, q_m$ die nicht-trivialen konstanten Polynome sind, und da dieser Ring ein „Hauptidealring"ist, kann man mit Methoden der Algebra zeigen, dass Polynome $u_1, \dots, u_m$ existieren, so dass

$$1 = u_1(z) \prod_{j \neq 1} (z - \lambda_j)^{n_j} + \dots + u_m(z) \prod_{j \neq m} (z - \lambda_j)^{n_j}. \tag{1.19}$$

Der Beweis gehört eher in die Algebra, soll aber dennoch hier kurz skizziert werden:

Betrachte die Teilmenge

$$J := \{v_1 q_1 + \dots v_m q_m : v_1, \dots, v_m \in \mathbb{C}[x]\}$$

des Rings $\mathbb{C}[x]$. Dann sieht man rasch, dass J ein **Ideal** in $\mathbb{C}[x]$ ist, d.h. mit $Q, L \in J$ und $P \in \mathbb{C}[x]$ liegen stets auch $Q + L$ sowie PQ in J. Wähle nun ein Polynom $Q \neq 0$ minimalen Grades in J. Ist dann $L \in J$ ein beliebiges Polynom in J, so erhält man durch Polynomdivision mit Rest

$$L = UQ + R,$$

mit Polynomen U und R, wobei $\mathrm{Grad}\, R < \mathrm{Grad}\, Q$. Offenbar liegt mit Q und L jedoch auch $R = L + (-U)Q$ in J, und da der Grad von Q minimal in J gewählt wurde, muss somit $R = 0$ sein, d.h., das Polynom Q teilt jedes Polynom aus J. Insbesondere teilt es die Polynome $q_1, \dots, q_m$, und da diese teilerfremd sind, muss notwendig Q eine nichttriviale Konstante $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sein. Da diese in J liegt, folgt sofort (1.19).

Multipliziert man nun (1.19) mit $\frac{r}{q}$, so erhält man unter Ausnutzung von (1.18)

$$\frac{r(z)}{q(z)} = \frac{p_1(z)}{(z - \lambda_1)^{n_1}} + \dots + \frac{p_m(z)}{(z - \lambda_m)^{n_m}},$$

mit gewissen Polynomen $p_1, \dots, p_m$.
Teilt man schließlich $p_j(z)$ durch das Polynom $(z - \lambda_j)$ mit Rest, und wiederholt diesen Vorgang genügend oft, so erhält man schließlich

$$\frac{p_j(z)}{(z - \lambda_j)^{n_j}} = v_j(z) + \sum_{k=1}^{n_j} \frac{a_{jk}}{(z - \lambda_j)^k},$$

für gewisse Polynome v_j und Koeffizienten $a_{jk} \in \mathbb{C}$. Zusammen mit (1.17) erhalten wir

Satz 1.20 (Partialbruchzerlegung) *Sei $R = \frac{p}{q}$ eine rationale Funktion auf $\mathbb{C}$. Dann besitzt R eine (eindeutige) Darstellung*

$$R(z) = P(z) + h_1(z) + \dots h_m(z), \tag{1.20}$$

mit einer Polynomfunktion P und **Hauptteilen** *h_j der Form*

$$h_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{a_{jk}}{(z - \lambda_j)^k}. \tag{1.21}$$

Dabei sind die λ_j die paarweise verschiedenen Nullstellen und n_j deren Vielfachheiten des Nennerpolynoms q, falls wir voraussetzen, dass die Polynome p und q keine gemeinsamen Linearfaktoren haben.

Setzen wir o.B.d.A. voraus, dass $a_{j\,n_j} \neq 0$, so nennt man λ_j einen **Pol der Ordnung** n_j von R.

Zur konkreten Durchführung einer Partialbruchzerlegung: Hierzu ist die folgende offenkundige Beobachtung nützlich, welche es gestattet, den Koeffizienten $a_{j\,n_j}$ für den Term mit höchstem Exponenten n_j im Hauptteil h_j zu bestimmen:

$$a_{j\,n_j} = \lim_{z \to \lambda_j} R(z)(z - \lambda_j)^{n_j}. \tag{1.22}$$

Anhand zweier Beispiele möchte ich noch zeigen, wir man eine solche Partialbruchzerlegung konkret herstellen kann.

Beispiele 1.21 (a) Sei

$$R(z) := \frac{z+2}{z(z-1)^2}.$$

Da der Grad des Zählerpolynoms bereits kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist, besitzt die Partialbruchzerlegung die Gestalt

$$R(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_1}{(z-1)} + \frac{b_2}{(z-1)^2}. \tag{1.23}$$

a und b_2 berechnen wir nach (1.22):

Wegen $R(z)z = \frac{z+2}{(z-1)^2}$ ist $a = \lim\limits_{z \to 0} R(z)z = 2$, und wegen $R(z)(z-1)^2 = \frac{z+2}{z}$ ist $b_2 = \lim\limits_{z \to 1} R(z)(z-1)^2 = 3$.
Um b_1 zu bestimmen, betrachten wir die Differenz

$$R_1(z) := R(z) - \left(\frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2}\right) = \frac{b_1}{(z-1)}.$$

Beachte, dass die rechte Seite gerade die Partialbruchzerlegung der neuen rationalen Funktion R_1 ist. Da $a = 2, b_2 = 3$ bekannt sind, erhalten wir

$$R_1(z) = \frac{z+2}{z(z-1)^2} - \frac{2}{z} - \frac{3}{(z-1)^2} = \frac{z+2-2(z-1)^2-3z}{z(z-1)^2} = \frac{-2z^2+2z}{z(z-1)^2} = \frac{-2}{z-1}.$$

Hieraus ergibt sich durch Vergleich sofort $b_1 = -2$, also insgesamt

$$\frac{z+2}{z(z-1)^2} = \frac{2}{z} - \frac{2}{(z-1)} + \frac{3}{(z-1)^2}.$$

Alternativ kann man b_1 auch aus (1.22), angewandt auf R_1, gewinnen.

Diese Bemerkung ist vor allem für den Fall von Polen höherer Ordnung von Bedeutung, da sich mit unserem Vorgehen ein *Rekursionsschema zur Berechnung der Koeffizienten der Partialbruchzerlegung* ergibt (damit erhalten wir dann auch die behauptete Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung).

(b) Sei

$$R(z) := \frac{1}{(z-2)^2+1}.$$

Die Nullstellen λ des Nennerpolynoms $(z-2)^2+1$ sind offenbar gegeben durch $\lambda - 2 = \pm i$, d.h. durch $\lambda = 2 \pm i$, so dass wir folgende Zerlegung in Linearfaktoren erhalten:

$$(z-2)^2 + 1 = (z-(2+i))(z-(2-i)).$$

Somit besitzt die Partialbruchzerlegung von R die Gestalt

$$R(z) = \frac{a}{z-(2+i)} + \frac{b}{z-(2-i)}.$$

Mit (1.22) erhält man sofort

$$a = \lim_{z \to 2+i} R(z)(z-(2+i)) = \lim_{z \to 2+i} \frac{1}{z-(2-i)} = \frac{1}{2i}$$

und analog $b = -\frac{1}{2i}$, also insgesamt

$$\frac{1}{(z-2)^2+1} = -\frac{i/2}{z-(2+i)} + \frac{i/2}{z-(2-i)}.$$

Beachte, dass für reelles $z = x \in \mathbb{R}$ der zweite Summand gerade der komplex-konjugierte erste Summand ist; dies muss auch so sein, da ja die rationale Funktion $R(x)$ auf $\mathbb{R}$ reellwertig ist!

1.5.2 Stammfunktionen rationaler Funktionen

Sei $R = \frac{p}{q}$ eine reellwertige rationale Funktion auf $\mathbb{R}$, d.h. p und q sind reelle Polynomfunktionen. Betrachte die Partialbruchzerlegung

$$R(x) = P(x) + h_1(x) + \cdots + h_m(x) \tag{1.24}$$

mit einer Polynomfunktion P und Hauptteilen h_j der Form

$$h_j(x) = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{a_{jk}}{(x-\lambda_j)^k} \tag{1.25}$$

von R, welche uns jetzt nur für reelles $x \in \mathbb{R}$ interessiert. Die Nullstellen λ_j des Nennerpolynoms q können dabei reell oder auch komplex sein (vgl. obige Beispiele). Da jedoch $\overline{R(x)} = R(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, tritt wegen der Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung mit jedem Term $\frac{a_{jk}}{(x-\lambda_j)^k}$ auch der konjugiert komplexe Term $\frac{\overline{a_{jk}}}{(x-\overline{\lambda_j})^k}$ in der Partialbruchzerlegung auf. Diese Beobachtung ist vor allem für $k = 1$ nützlich, denn ist $\lambda = \alpha + i\beta$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\frac{a}{(x-\lambda)} + \frac{\overline{a}}{(x-\overline{\lambda})} = \frac{(a+\overline{a})x - (a\overline{\lambda} + \overline{a}\lambda)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Wir sehen damit:

Mittels Partialbruchzerlegung können wir die reelle rationale Funktion R zerlegen in eine Summe rationaler Funktionen folgenden Typs:

(a) Eine Polynomfunktion.

(b) Funktionen der Gestalt $\dfrac{a}{(x-\lambda)^n}$ *mit* $n \geq 2$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$, *oder auch* $n = 1$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$;

(c) Funktionen der Gestalt $\dfrac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, *mit* $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *wobei* $\beta \neq 0$.

Derartige Funktionen lassen sich aber leicht integrieren, wie wir nun zeigen wollen. Bei der konkreten Berechnung solcher Integrale ist stets darauf zu achten ist, dass alle reellen Nullstellen der Zählerpolynome nicht in dem Intervall liegen, auf welchem wir eine Stammfunktion bestimmen wollen, da rationale Funktionen in den reellen Nullstellen ihres Zählerpolynoms Polstellen besitzen.

Wir beginnen mit Typ (a): Polynomfunktionen lassen sich leicht integrieren, wie wir bereits gesehen haben.

Eine Funktion vom Typ (b) besitzt z.B.

$$\frac{a}{(1-n)(x-\lambda)^{n-1}}$$

als Stammfunktion (Übung).

Eine Funktionen vom Typ (c) schließlich lässt sich kombinieren aus einer Funktion der Gestalt $\dfrac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, welche offenbar die Funktion

$$\frac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$

als Stammfunktion besitzt (hierauf wird man durch die Substitution $y=(x-\alpha)^2+\beta^2$ geführt), und einer Funktion der Gestalt

$$g(x) := \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Die Substitution $y=\frac{(x-\alpha)}{\beta}$ liefert hier z.B.

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{\beta}\arctan y + c,$$

so dass offenbar eine Stammfunktion G zu g gegeben ist durch

$$G(x) := \frac{1}{\beta}\arctan(\frac{x-\alpha}{\beta}).$$

Damit ist die Frage nach der Integration rationaler Funktionen im Prinzip vollständig gelöst.

1.5.3 Integration von $R(\cos\theta, \sin\theta)$.

Sei $R(x,y)$ eine rationale Funktion in den reellen Variablen x, y, und betrachte die Funktion $f(\theta) := R(\cos\theta, \sin\theta)$. Z.B. könnte dies die Funktion

$$f(\theta) := \frac{\sin\theta\cos^2\theta + 5}{\sin^2\theta + 7\cos^4\theta}$$

sein, nämlich falls $f(x,y) = \frac{x^2y+5}{y^2+7x^4}$ ist. Wir wollen zudem annehmen, dass $-\pi < \theta < \pi$ ist.

Wenden wir die *Substitution*

$$t := \tan(\frac{\theta}{2}), \quad \text{d.h.} \quad \theta = 2\arctan t,$$

an, so ist in unserer formalen Schreibweise $d\theta = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, (d.h. genauer $d\theta/dt = \frac{2}{1+t^2}$), und eine einfache Rechnung (Übung) liefert

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{und} \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Mit dieser Substitution wird also das unbestimmte Integral $\int R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$ in das unbestimmte Integral

$$\int R\Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}\, dt$$

überführt. Unter dem Integralzeichen steht nun eine rationale Funktion in der Variablen t, so dass das Integral mit Hilfe der Methoden des vorherigen Abschnitts prinzipiell berechnet werden kann. Ersetzt man im Ergebnis dieser Berechnung dann wieder t durch $\tan(\frac{\theta}{2})$, so erhält man eine Stammfunktion zu f.

Damit ist die Frage nach der Integration von Funktionen obiger Gestalt $R(\cos\theta, \sin\theta)$ im Prinzip ebenfalls vollständig gelöst.

Die Integrationen weiterer Klassen von Funktionen kann mittels geeigneter Substitutionen ebenfalls auf die Integration rationaler Funktionen zurückgeführt werden. Hierzu, wie auch zu den vorangehenden Betrachtungen zur Integration rationaler Funktionen, sei z.B. auf den „Klassiker“ von R. Courant [C], Kapitel IV, verwiesen. Dort finden man auch einen elementaren, aber etwas technischen Zugang zur Partialbruchzerlegung.

Bemerkungen. Während man die Ableitung einer Funktion, die sich aus den behandelten „elementaren“ Funktionen zusammensetzt, mit den bekannten Regeln direkt berechnen kann, lassen sich neben den „Grundintegralen“ gewisse Klassen von Funktionen noch „elementar integrieren“ in dem Sinne, dass sich explizite analytische Ausdrücke in den betrachteten elementaren Funktionen wie $x^\alpha, e^x, \sin x, \cos x, \log, \arctan$ etc. für Stammfunktionen angeben lassen. Beispielsweise gilt dies für alle rationalen Funktionen, wie wir gesehen haben. Allerdings gelingt dies oftmals nur noch mittels geschickter Ansätze und trickreicher Substitutionen:

„Die Differentiation gehört zum Handwerk, die Integration zur Kunst“.

Viele Integrale widersetzen sich jedoch allen Tricks. Zum Beispiel kann man beweisen, dass sich die „elliptischen Integrale“

$$F_k(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\, dt, \quad (0 \le x < \infty)$$

und

$$E_k(x) := \int_0^x \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\, dt, \quad (0 \le x < \infty)$$

nicht elementar integrieren lassen (hier sei $0 < k < 1$). Die elliptischen Integrale treten zum Beispiel bei der Berechnung der Bogenlänge einer Ellipse auf.

1.6 Taylor-Approximation und Taylor-Reihen

Ist $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ eine polynomiale Abbildung, so ist offenbar

$$c_k = P^{(k)}(0)/k!\ ,$$

d.h.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k \ . \tag{1.26}$$

P ist also schon durch die Ableitungen (bis zur Ordnung n) im Punkte 0 bestimmt.

Sei nun I ein nicht nur aus einem Punkt bestehendes Intervall. Ist $f \in C^n(I)$, und ist a ein beliebiger Punkt aus I, so definieren wir für $k = 0, \ldots, n$ den k-ten **Taylor-Koeffizienten** von f in a durch

$$c_k := \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

sowie (1.26) verallgemeinernd das **Taylor-Polynom** der Ordnung n von f in a durch

$$T_{n,a}(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Wir wollen untersuchen, inwieweit dieses Polynom die gegebene Funktion f zumindest in der Nähe des Punktes a approximiert.

Satz 1.22 (Taylor-Formel) *Sei $f \in C^{n+1}(I)$. Dann ist für alle $x \in I$*

$$f(x) = T_{n,a}(f)(x) + R_n(x) \ ,$$

wobei

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

ist.

Beweis durch Induktion nach n :
Für $n = 0$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt = T_{0,a}\ (f)(x) + R_0(x) \ .$$

Wir nehmen an, dass die Formel für R_n für ein gegebenes $n \geq 0$ gültig ist. Dann folgt für $f \in C^{n+2}(I)$ mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= \frac{1}{n!} \frac{-1}{n+1} (x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=a}^{x} + \frac{1}{n!(n+1)} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. Q.E.D.

Korollar 1.23 (Taylor-Approximation) *Sei $f \in C^{n+1}(I)$, und sei*
$$|f^{(n+1)}(x)| \le M \quad \textit{für alle } x \in I.$$
Dann gilt mit $c_k := \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!},\ k = 0, \ldots, n:$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + R_n(x), \tag{1.27}$$

wobei

$$|R_n(x)| \le M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \ . \tag{1.28}$$

Beweis. Ist $|f^{(n+1)}|$ auf I durch $M \ge 0$ beschränkt, so erhält man für $R_n(x)$ folgende Abschätzung (sei o.B.d.A. $x > a$):
$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n M\, dt = M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \ .$$
Q.E.D.

Ist beispielsweise f ein Polynom vom Grade n, so ist $f^{(n+1)} = 0$, d.h. man kann $M = 0$ wählen und erhält $R_n = 0$. In diesem Falle ist also
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ ,$$
und zwar für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}$. Im allgemeinen Fall liefern (1.27), (1.28) eine Approximation von f durch ein Polynom vom Grade $\le n$, wobei der Fehler, welcher bei dieser Approximation auftritt, durch (1.28) kontrolliert wird und von der Ordnung $O(|x-a|^{n+1})$ ist. Dieser ist offenbar um so geringer, je näher sich x bei a befindet; ferner wird sich i.A. die Güte der Approximation verbessern, je größer n gewählt werden kann.
Für $n = 4, M = 1$ und $|x-a| \le 1/2$ beträgt der Fehler z.B. höchstens $\frac{2^{-5}}{5!} < 0,00027$.

Für reellwertige Funktionen lässt sich das Restglied R_n auch wie folgt darstellen:

Satz 1.24 (Lagrangesche Form des Restglieds) *Sei $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$, und sei $a \in I$. Dann existiert zu jedem $x \in I$ ein ξ zwischen a und x, so dass gilt:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \ . \tag{1.29}$$

Insbesondere gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(|x-a|^{n+1}) \ . \tag{1.30}$$

Für den Beweis benutzen wir den

Satz 1.25 (Mittelwertsatz für Integrale) *Seien $f, w \in C(I, \mathbb{R})$ stetige reellwertige Funktionen auf dem Intervall $I = [a, b]$. Ist $w \geq 0$ auf I, so gibt es einen Punkt $\xi \in I$, so dass gilt:*

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b w(x)\, dx.$$

Beweis. Sei

$$c := \int_a^b w(y)\, dy \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Nach dem Satz vom Maximum gibt es $\xi_1, \xi_2 \in I$ mit

$$f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Es folgt

$$f(\xi_1)\, w(x) \leq f(x)\, w(x) \leq f(\xi_2)\, w(x) \quad \text{für alle } x \in I,$$

also nach Integration über I

$$cf(\xi_1) \leq \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx \leq cf(\xi_2).$$

Wenden wir den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion cf an, so gibt es also ein $\xi \in I$ mit $cf(\xi) = \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx$.

Q.E.D.

Beweis von Satz 1.24. Wenden wir obigen Mittelwertsatz auf das Integral

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

an, mit $w(t) := (x - t)^n$ (x ist hier festgehalten!), so finden wir ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n\, dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1},$$

womit (1.29) bewiesen ist.
Setzen wir

$$r(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!},$$

so gilt damit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + r(x)(x - a)^{n+1}\ .$$

Da ξ zwischen a und x liegt, gilt dabei aufgrund der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ im Punkte a offenbar $\lim_{x \to a} r(x) = 0$. Damit ist auch (1.30) nachgewiesen.

Q.E.D.

Ist $f \in C^\infty(I)$ unendlich oft differenzierbar, und ist $a \in I$, so heißt die Potenzreihe (in $x - a$)

$$T_a(f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die **Taylor-Reihe** von f in a oder auch „um den Punkt a“

WARNUNGEN:

i) Der Konvergenzradius von $T_a(f)$ kann durchaus 0 sein.

ii) Falls die Taylorreihe von f konvergiert, so konvergiert sie nicht notwendig gegen f.

Beispiel 1.26 Betrachte die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass φ unendlich oft differenzierbar ist, auch in der 0, so dass insbesondere $\varphi^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Taylorreihe von φ in $a = 0$ stellt somit die triviale Funktion $f = 0$ dar, welche offenkundig verschieden von φ ist (Übung)!

Es gilt allerdings folgender

Satz 1.27 *Wird die Funktion f auf dem Intervall $]a - R, a + R[$ durch die konvergente Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ dargestellt, so ist f auf diesem Intervall unendlich oft differenzierbar, und diese Reihe stimmt mit der Taylor-Reihe $T_a(f)(x)$ von f in a überein.*

Beweis. Sei $0 < r < R$. Wir haben in der Analysis I gesehen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ auf dem Intervall $I := [a-r, a+r]$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert. Ebenso konvergiert die formal termweise abgeleitete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}$ auf I gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $x \mapsto g(x)$, da diese denselben Konvergenzradius R besitzt. Satz 1.18 zeigt dann, dass f auf I differenzierbar ist, mit Ableitung

$$f'(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}.$$

Iteriert man dieses Argument per vollständiger Induktion nach der Ableitungsordnung, so sieht man, dass f unendlich oft differenzierbar ist, und dass man die Ableitungen von f durch formales termweises Differenzieren der entsprechenden Reihen erhält. Damit erhält man dann rasch wie im Falle von Polynomfunktionen, dass $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ gerade der n-te Taylorkoeffizient von f in a ist. Da $r \in]0, R[$ beliebig, war folgt die Behauptung. Q.E.D.

1.7 Das uneigentliche Riemannsche Integral

Sei I ein halboffenes Intervall der Form $I = [a, b[$ mit $-\infty < a < b \leq \infty$, und sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf I.

Definition. Die Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heiße auf I im **uneigentlichen Sinne integrierbar** oder **uneigentlich integrierbar**, falls f über jedes kompakte Teilintervall $[a, \beta]$ mit $a \leq \beta < b$ integrierbar ist (d.h. $f|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a, \beta])$) und der Grenzwert

$$\lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)\, dx$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt das **uneigentliche Riemannsche Integral von f über das Intervall** $[a, b[$ und wird ebenfalls mit

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

bezeichnet. Eine analoge Definition gilt für links-halboffene Intervalle $]a, b]$ mit $-\infty \leq a < b < \infty$. Ist $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, so heißt $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ **uneigentlich integrierbar,** wenn für ein $c \in]a, b[$ die Einschränkungen von f auf die Intervalle $]a, c]$ und $[c, b[$ uneigentlich integrierbar sind. Das Integral ist in diesem Falle durch

$$\int_a^b f\, dx := \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx$$

definiert.

Bemerkungen: a) Man zeigt leicht, dass im letzten Falle die Definition unabhängig von der Wahl von $c \in]a, b[$ ist.
b) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist f über $[a, b]$ integrierbar, so ist f auch über jedes andere Intervall I mit den Endpunkten a und b uneigentlich integrierbar, und die Integrale stimmen überein.

Wir bezeichnen für $s \in \mathbb{R}$ mit p_s die auf $]0, \infty[$ durch $p_s(x) := x^{-s}$ definierte stetige Funktion.

Satz 1.28 *Seien $a, b \in]0, \infty[$.*
(i) *Die Funktion p_s ist genau dann auf dem Intervall $]0, b]$ uneigentlich integrierbar, wenn $s < 1$ ist. Dann gilt:*

$$\int_0^b x^{-s}\, dx = \frac{b^{1-s}}{1-s} \ .$$

(ii) p_s *ist genau dann auf dem Intervall* $[a, \infty[$ *uneigentlich integrierbar, wenn* $s > 1$ *ist. Dann gilt*

$$\int_a^\infty x^{-s}\,dx = \frac{a^{1-s}}{s-1}\ .$$

Beweis. Dies folgt sofort aus den für $0 < a < b$ gültigen Formeln

$$\int_a^b x^{-s}\,dx = \frac{1}{1-s}(b^{1-s} - a^{1-s}), \quad s \neq 1 \tag{1.31}$$

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \log\frac{b}{a}. \tag{1.32}$$

Lässt man dann für $s < 1$ in (1.31) die untere Integrationsgrenze a gegen 0 streben, so folgt wegen $1 - s > 0$ sofort $\int_0^1 x^{-s}\,dx = \lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 x^{-s}\,dx = \frac{1}{s-1}$, also (i).
Für $s > 1$ zeigt dieselbe Formel, dass der Grenzwert nicht existiert, da der Exponent $1 - s$ negativ ist. Ähnlich folgt für $s = -1$ aus der zweiten Formel (1.32), dass der Grenzwert ebenfalls nicht existiert.
Analog beweist man die Aussagen in (ii), indem man b gegen ∞ streben lässt.

Q.E.D.

In Analogie zum Majorantenkriterium für unendliche Reihen gilt für uneigentliche Integrale folgendes Kriterium:

Satz 1.29 (Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale) *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und sei* $f : I \to \mathbb{C}$ *eine Funktion, welche über jedes kompakte Teilintervall von* I *integrierbar ist. Ferner sei* $g : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *eine* **Majorante** *für* f, *d.h. es gelte*

$$|f(x)| \leq g(x) \text{ für alle } x \in I.$$

Ist g *uneigentlich integrierbar über* I, *so gilt dies auch für* f.

Beweis. Übung.

1.8 Rektifizierbare Kurven

Definition. Eine stetige Abbildung γ von einem kompakten Intervall $[a, b]$ nach $\mathbb{C}$ heißt eine **Kurve** oder ein **Weg** in $\mathbb{C}$. Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ eine **geschlossene** Kurve. Die Bildmenge $\gamma([a, b])$ bezeichnet man als die **Spur** der Kurve.

Achtung: Eine Kurve ist also eine Abbildung, während ihre Spur das ist, was man sich anschaulich eher unter einer Kurve vorstellt. Verschiedene Kurven können insbesondere dieselbe Spur besitzen.
Ist $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine **Partition** von $[a, b]$, d.h. sind die x_j Punkte in $[a, b]$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

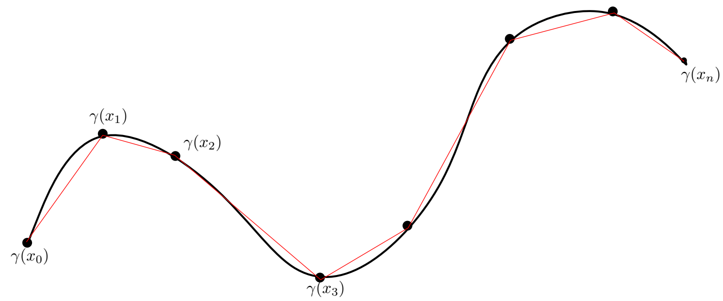


Abb. 1.1: Bogenlänge

so ordnen wir dieser die Zahl

$$L(P,\gamma) := \sum_{j=1}^{n} |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|$$

zu. Da $|\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|$ der Abstand zwischen den Punkten $\gamma(x_{j-1})$ und $\gamma(x_j)$ ist, ist $L(P,\gamma)$ offenbar die *Länge des Polygonzuges* mit den Ecken $\gamma(x_0), \gamma(x_1), \dots \gamma(x_n)$, in dieser Reihenfolge. Wählen wir die Partition immer feiner, so nähert sich dieser Polygonzug anschaulich der Spur von γ immer mehr. Somit ist es sinnvoll, die **Länge** von γ als

$$L(\gamma) := \sup_P L(P,\gamma)$$

zu definieren, wobei das Supremum über alle Partitionen von $[a,b]$ gebildet wird. Ist $L(\gamma) < \infty$, so sagt man, γ sei **rektifizierbar**.

Sei nun γ eine stetig differenzierbare Kurve. In diesem Fall gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1}) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \gamma'(t)\,dt,$$

also insbesondere $|\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})| \le \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\gamma'(t)|\,dt$. Hieraus folgt durch Summation für jede Partition P von $[a,b]$

$$L(P,\gamma) \le \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt < \infty,$$

so dass γ rektifizierbar ist. Ferner folgt $L(\gamma) \le \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$. Genauer gilt sogar

Satz 1.30 *Ist die Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so ist sie rektifizierbar, und es gilt*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Beweis. Ich möchte dies hier nur für den (nicht sonderliche interessanten) Fall beweisen, dass γ rellwertig ist, da man hier leicht mit Hilfe des Mittelwertsatzes für Integrale argumentieren kann. Danach ist nämlich für jede Partition P wie zuvor offenbar

$$|\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})| = |\gamma'(\xi_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} dt| = |\gamma'(\xi_j)|(x_{j-1} - x_j),$$

für geeignete Punkte $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, so dass

$$L(P, \gamma) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma'(\xi_j)|(x_{j-1} - x_j).$$

Die Riemannsumme auf der rechten Seite konvergiert aber offenbar gegen das Integral $\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$, falls die Feinheit der Partition gegen Null strebt, so dass also

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \leq \sup L(P, \gamma) = L(\gamma).$$

Für einen Beweis im allgemeinen Fall sei z.B. auf Rudins Buch [R], S. 159, verwiesen.

Q.E.D.

Beispiel: Bogenlänge auf dem Kreis: Es bezeichne wieder $\text{cis} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die Funktion $t \mapsto e^{it}$. In der Analysis I hatten wir gesehen, dass cis das halboffene Intervall $[0, 2\pi[$ bijektiv auf den Einheitskreis S^1 abbildet. Wegen $\text{cis}(0) = \text{cis}(2\pi)$ ist $\text{cis} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ somit eine geschlossene Kurve, und ihre Spur ist der Einheitskreis. Ferner ist $\text{cis}'(t) = ie^{it}$, also $|\text{cis}'(t)| = 1$ für alle t.

Ist nun $0 \leq \theta \leq 2\pi$, so beschreibt das Integral $\int_0^\theta |\text{cis}'(s)|\, ds$ die Länge des Kreisbogens mit Anfangspunkt $\text{cis}(0) = 1$ und Endpunkt $\text{cis}(\theta) = e^{i\theta}$, welche sich nach Satz 1.30 berechnet zu

$$\int_0^\theta |\text{cis}'(t)|\, dt = \int_0^\theta 1\, dt = \theta.$$

Dies bedeutet, dass der Parameter θ tatsächlich der *Winkel*, gemessen im Bogenmaß, zwischen dem Punkt $e^{i\theta}$ auf dem Einheitskreis und dem Punkt 1 auf der reellen Achse ist. Dies hatten wir in der Analysis I bereits mit Hilfe einer konkreten Approximation des Kreisbogens durch Polygonzüge gezeigt, und unsere obige Rechnung bestätigt diese Formel erneut.

Kapitel 2

Normierte Vektorräume

2.1 Grundlegende Begriffe

Definitionen. Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (im folgenden kurz „Vektorraum“genannt). Unter einer **Norm** auf E versteht man eine Abbildung

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften: Für alle $x, y \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(a) $\|x\| \geq 0$;

(b) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$;

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\|$;

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (**Dreiecksungleichung**)

Diese Eigenschaften ähneln denen des Absolutbetrags $|\cdot|$ einer reellen oder komplexen Zahl, und in der Tat ist dieser eine Norm auf $E = \mathbb{R}$ bzw. $E = \mathbb{C}$. Ein weiteres Beispiel ist die Supremumsnorm $\|\cdot\|_u$ auf dem Vektorraum $E = \mathcal{B}(X)$ aller beschränkten Funktionen auf einer nichtleeren Menge X (siehe Bemerkungen 1.4).

Ein **normierter Vektorraum** ist ein Paar $(E, \|\cdot\|)$, bestehend aus einem Vektorraum E und einer Norm $\|\cdot\|$ auf E. Ist aus dem Kontext klar, um welche Norm es sich handelt, so schreibt man meist nur E anstelle des Paares $(E, \|\cdot\|)$.

Eine Folge $(x_j)_j$ in E heiße **konvergent** mit **Grenzwert** $x \in E$ (in Zeichen : $x_j \to x$ oder $x = \lim\limits_{j\to\infty} x_j$), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $j_0 = j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt so, dass gilt:

$$\|x - x_j\| < \varepsilon \;\text{ für alle }\; j \geq j_0.$$

Sie heiße **Cauchy-Folge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $j_0 = j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt so, dass gilt:

$$\|x_j - x_k\| < \varepsilon \;\text{ für alle }\; j, k \geq j_0.$$

E heiße **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in E einen Grenzwert in E besitzt. Vollständige normierte Vektorräume heißen auch **Banachräume**.

Beispiel. In der Analysis I (vgl. Theorem 5.16 sowie Theorem 7.4) wurde gezeigt, dass $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ ein vollständiger 1-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ist.

Die Vollständigkeit eines normierten Vektorraums ist eine fundamentale Eigenschaft. Man kann beweisen, dass jeder normierte Vektorraum eine „Vervollständigung“ besitzt, ähnlich wie sich $\mathbb{R}$ durch Vervollständigung aus $\mathbb{Q}$ gewinnen lässt .

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E, so versteht man unter der **unendlichen Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ zunächst die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der **Partialsummen**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + \cdots + x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

in E. Konvergiert diese gegen einen Grenzwert $s \in E$, so bezeichnet man diesen ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$, ganz ähnlich wie für Zahlenreihen. Analog zum Begriff der absoluten Konvergenz bezeichnet man die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ in E als **normal konvergent**, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|$ konvergiert, d.h. falls $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Es gelten dann die folgenden Analoga zu den entsprechenden Sätzen 5.18 und 8.1 aus der Analysis I:

Satz 2.1 (Cauchy-Kriterium für Reihen) *Sei E ein Banachraum. Dann ist eine Reihe $\sum_k x_k$ in E genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass*

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} x_k \right\| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m \geq n \geq n(\varepsilon).$$

Satz 2.2 *Sei E ein Banachraum. Eine normal konvergente Reihe in E konvergiert auch im gewöhnlichen Sinn.*

Diese Sätze können fast wortgleich wie die analogen Sätze über Zahlenreihen bewiesen werden; man muss nur den Betrag $|\cdot|$ einer Zahl durch die Norm $\|\cdot\|$ auf E ersetzen und den Begriff der absoluten Konvergenz durch den der normalen Konvergenz.

Wir betrachten als Beispiele noch zwei wichtige Klassen von Banachräumen.

2.2 Der Banachraum $C([a,b])$

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Wir betrachten den Vektoraum $E := C([a,b])$ aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} \ .$$

Da nach dem Satz vom Maximum $C([a,b])$ ein linearer Teilraum des Raums $\mathcal{B}([a,b])$ aller beschränkten Funktionen auf $[a,b]$ ist, und da wir bereits in Bemerkung 1.4 gesehen haben, dass $\|\cdot\|_u$ eine Norm auf $\mathcal{B}([a,b]$ ist, sehen wir, dass auch der Raum $(C([a,b]), \|\cdot\|_u)$ einen normierten (komplexen) Vektorraum bildet.

Satz 2.3 *Der Raum $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig, d.h. ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(f_j)_j$ eine Cauchy-Folge in $C([a,b])$ bzgl. der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Wegen

$$\text{(2.1)} \qquad |f_j(x) - f_k(x)| \leq \|f_j - f_k\|_\infty \qquad \text{für alle } x \in [a,b]$$

ist dann auch für jedes $x \in [a,b]$ die Folge $(f_j(x))_j$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, und da $\mathbb{C}$ vollständig ist, ist diese also kovergent. Wir bezeichnen den Grenzwert mit $f(x)$, d.h.

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x).$$

Wir zeigen, dass die dadurch definierte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und der Grenzwert der Folge $(f_j)_j$ bzgl. der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f_j - f_k\|_\infty < \varepsilon$ ist für alle $j, k \geq j_0$. Lassen wir nun $k \to \infty$ gegen Unendlich streben, so folgt hieraus mit (2.1) die Ungleichung

$$|f_j(x) - f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_j(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon \ , \quad \text{für alle } x \in [a,b],\ j \geq j_0,$$

d.h. $\|f_j - f\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $j \geq j_0$. Dies zeigt, dass f der gleichmäßige Limes der Folge $(f_j)_j$ ist. Damit ist f nach Satz 9.13 aus der Analysis I ebenfalls stetig, und ferner folgt, dass $\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_\infty = 0$.

Bemerkung: Ist $a < b$, so ist der Vektorraum $(C([a,b])$ unendlich-dimensional (Übung).

Q.E.D.

2.3 p-Normen auf $\mathbb{K}^n$ und die Folgenräume $\ell^p(\mathbb{N})$

Sei wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir wollen nun eine wichtige Klasse von Normen auf dem $\mathbb{K}^n$ einführen.

2.3.1 Die p-Norm auf dem $\mathbb{K}^n$

Ist $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein Vektor im $\mathbb{K}^n$, so setzen wir

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p},$$

falls $1 \le p < \infty$, und

$$\|x\|_\infty := \max_{j=1,\dots,n} |x_j|.$$

Wir bemerken, dass

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p,$$

was die Notation $\|\cdot\|_\infty$ rechtfertigt (Übung). Wir werden zeigen, dass für jedes p mit $1 \le p \le \infty$ durch $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf dem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^n$ gegeben is, die sogenannte **ℓ^p-Norm** oder kurz **p-Norm.** Hierzu erweist es sich als nützlich, zu einer etwas allgemeineren Situation überzugehen.

Sei dazu A eine beliebige Menge der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Die Menge $\mathbb{K}^A$ aller Funktionen $f : A \to \mathbb{K}$, versehen mit der üblichen Addition sowie Multiplikation mit Skalaren aus dem Körper $\mathbb{K}$, bildet dann einen n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ist nämlich $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine Abzählung der Menge A, so ist durch die Abbildung

$$\Phi : f \mapsto (f(a_1), \dots, f(a_n))$$

ein linearer Isomorphismus $\Phi : \mathbb{K}^A \to \mathbb{K}^n$ definiert, wie man sofort sieht. Setzen wir für $f \in \mathbb{K}^A$

$$\|f\|_p := \left(\sum_{a\in A} |f(a)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{n} |f(a_j)|^p\right)^{1/p},$$

falls $1 \le p < \infty$, und

$$\|f\|_\infty := \max_{a\in A} |f(a)|,$$

so gilt offenbar zudem

$$\|f\|_p = \|\Phi(f)\|_p \quad \text{für alle } f \in \mathbb{K}^A.$$

Damit wird klar, dass es genügt zu zeigen, dass durch $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^A$ definiert ist. Hierzu beobachten wir zuerst, dass sich die Höldersche Ungleichung aus Satz 10.22 (Analysis I) umschreiben lässt als

$$\sum_{j=1}^{n} |f(a_j)g(a_j)| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |f(a_j)|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |g(a_j)|^q\right)^{1/q},$$

falls $1 < p, q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d.h. als

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q, \quad f, g \in \mathbb{K}^A. \tag{2.2}$$

Diese Ungleichung bleibt, wie man leicht nachprüft, auch noch gültig für $p = 1$ und $q = \infty$ sowie $p = \infty$ und $q = 1$. Somit gilt diese **Höldersche Ungleichung** (2.2) wann immer $p, q \in [1, \infty]$ **konjugierte Exponenten** sind, d.h. falls gilt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dabei sei in diesem Zusammenhang $\frac{1}{\infty} := 0$ gesetzt. Beachte, dass für $1 < p < \infty$ der konjugierte Exponent zu p gegeben ist durch

$$q = \frac{p}{p-1}.$$

Satz 2.4 (Minkowskische Ungleichung) *Sei A eine endliche Menge, und sei $1 \leq p \leq \infty$. Sind $f, g \in \mathbb{K}^A$, so gilt*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{2.3}$$

Insbesondere gilt damit auch

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Beweis. Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Ungleichung klar. Sei also $1 < p < \infty$. Dann gilt

$$\sum_{a \in A} |(f+g)(a)|^p \leq \sum_{a \in A} |f(a)|\,|(f+g)(a)|^{p-1} + \sum_{a \in A} |g(a)|\,|(f+g)(a)|^{p-1}.$$

Wendet man auf diese beiden Summen jeweils die Höldersche Ungleichung an, so folgt wegen $q(p-1) = p$ offenbar

$$\sum_{a \in A} |(f+g)(a)|^p \leq \|f\|_p (\|f+g\|_p)^{p/q} + \|g\|_p (\|f+g\|_p)^{p/q}.$$

Mit $p/q = p - 1$ folgt hieraus

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p-1},$$

also

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

und damit die behauptete Ungleichung.

Q.E.D.

Korollar 2.5 *Für $1 \leq p \leq \infty$ ist durch $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^A$ (bzw. auf dem $\mathbb{K}^n$) gegeben.*

Beweis. Sind $f \in \mathbb{K}^A$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt offenbar $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\, \|f\|_p$. Ferner zeigt die Minkowskische Ungleichung, dass die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$ erfüllt ist. Um nachzuweisen, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass $\|f\|_p = 0$ äquivalent zu $f = 0$ ist. Dies folgt aber unmittelbar aus der Definition. Q.E.D.

2.3.2 Die Folgenräume $\ell^p(\mathbb{N})$

Die p-Normen lassen sich für Funktionen $f : A \to \mathbb{K}$ auch dann noch definieren, wenn die Menge A unendlich ist. Hier möchte ich mich auf den wichtigen Fall $A = \mathbb{N}$ beschränken - eine Diskussion des allgemeinen Falls findet man in Anhang C.

Definitionen. Sei $p \in [1, \infty[$. Eine Folge $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reeller bzw. komplexer Zahlen in $\mathbb{K}$ heiße **p-summierbar**, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p$ konvergiert. Wir setzen dann

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Für $p = \infty$ setzen wir zudem

$$\|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$

Betrachten wir die Folge $(x_k)_k$ als eine Abbildung $f_x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, gegeben durch $f_x(k) := x_k$, so ist offenbar $\|x\|_\infty = \|f_x\|_u$ gerade die Supremumsnorm von f_x, und für $1 \le p < \infty$ ist

$$\|x\|_p = \|f_x\|_p := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |f_x(k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Ferner ist offenbar $\|x\|_\infty < \infty$ genau dann, wenn die Folge $(x_k)_k$ beschränkt ist.
Mit $\ell^p(\mathbb{N})$ bezeichnen wir für $1 \le p < \infty$ die Menge aller p-summierbaren Folgen $(x_k)_k$ und mit $\ell^\infty(\mathbb{N})$ die Menge aller beschränkten Folgen in $\mathbb{K}$.
Beachte, dass wir $\ell^\infty(\mathbb{N})$ mit der Menge $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ aller beschränkten Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{K}$ identifizieren können.
$\ell^1(\mathbb{N})$ ist dagegen gerade die Menge aller absolut summierbaren Folgen.

Satz 2.6 (Höldersche und Minkowskische Ungleichung auf $\ell^p(\mathbb{N})$) *Für $1 \le p \le \infty$ gelten auch auf $\ell^p(\mathbb{N})$ die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung, d.h:*

(a) Seien $p, q \in [1, \infty]$ konjugierte Exponenten, und seien $x = (x_k)_k$ in $\ell^p(\mathbb{N})$ und $y = (y_k)_k$ in $\ell^q(\mathbb{N})$. Dann liegt die Produktfolge $z := (x_k y_k)_k$ in $\ell^1(\mathbb{N})$, und es gilt

$$\|z\|_1 = \sum_k |x_k y_k| \le \|x\|_p \; \|y\|_q \tag{2.4}$$

(b) Ist $p \in [1, \infty]$, und sind $x = (x_k)_k$ und $y = (y_k)_k$ in $\ell^p(\mathbb{N})$, so ist auch die Summenfolge $x + y := (x_k + y_k)_k$ in $\ell^p(\mathbb{N})$, und es gilt:

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{2.5}$$

Beweis. Für $1 \leq p, q < \infty$ folgt dies unmittelbar aus den entsprechenden Ungleichungen für die endlichen Partialsummen der auftretenden Reihen, da ja

$$\|x\|_p = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} |f_x(k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Fälle mit $p = \infty$ oder $q = \infty$ dagegen lassen sich trivial behandeln (Übung). Q.E.D.

Da offenbar $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$ ist für alle $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist damit offenbar $\ell^p(\mathbb{N})$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und ganz ähnlich wie in Korollar 2.5 folgert man, dass $\|\cdot\|_p$ auch im Falle der unendlicher Mengen $A = \mathbb{N}$ eine Norm auf $\ell^p(\mathbb{N})$ ist, d.h.:

Der Folgenraum $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ bildet einen normierten Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Theorem 2.7 *Für $1 \leq p \leq \infty$ ist der normierte Raum $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ vollständig, d.h. ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(x^{(j)})_j$ eine Cauchy-Folge in $\ell^p(\mathbb{N})$, und es sei

$$x^{(j)} = (x_k^{(j)})_k = (x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}, \dots).$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Da offenbar für alle $i, j \in \mathbb{N}$

$$|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}| \leq \|x^{(i)} - x^{(j)}\|_p$$

gilt, ist die Folge $(x_k^{(j)})_j$ eine Cauchy-Folge reeller oder komplexer Zahlen, und somit konvergent in $\mathbb{K}$. Sei

$$x_k := \lim_{j\to\infty} x_k^{(j)}. \tag{2.6}$$

Wir zeigen, dass die Folge $x := (x_k)_k$ in $\ell^p(\mathbb{N})$ liegt, und dass die Folge $(x^{(j)})_j$ bzgl. der ℓ^p-Norm $\|\cdot\|_p$ gegen x konvergiert:

Sei dazu $\varepsilon > 0$, und wähle j_0 so groß, dass

$$\|x^{(i)} - x^{(j)}\|_p < \varepsilon \quad \forall\, i, j \geq j_0.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $p < \infty$. Für die n-ten Partialsummen gilt dann offenbar für alle $i, j \geq j_0$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k^{(i)} - x_k^{(j)}|^p\right)^{1/p} \leq \|x^{(i)} - x^{(j)}\|_p < \varepsilon,$$

und zwar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Lässt man hierin $i \to \infty$ gegen Unendlich streben, so folgt mittels der Grenzwertsätze für Zahlenfolgen und (2.6) für alle $j \geq j_0$:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k - x_k^{(j)}|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon. \tag{2.7}$$

Analog zeigt man für $p = \infty$, dass

$$\max_{k=0,\ldots,n} |x - x^{(j)}| \leq \varepsilon.$$

Lässt man schließlich noch n gegen Unendlich streben, so erhalten wir

$$\|x - x^{(j)}\|_p \leq \varepsilon \quad \forall j \geq j_0.$$

Dies zeigt, dass $\|x - x^{(j)}\|_p \to 0$ für $j \to \infty$. Wählen wir zudem zu $\varepsilon = 1$ ein j so, dass obige Ungleichung gilt, so ist $x = x^{(j)} + (x - x^{(j)})$, und beide Summanden liegen in $\ell^p(\mathbb{N})$. Damit ist auch $x \in \ell^p(\mathbb{N})$. Q.E.D.

Ersetzen wir in obigem Argument die unendliche Menge $\mathbb{N}$ durch die endliche Menge $\{1, \ldots, n\}$, so erhalten wir mit ähnlichen, sogar einfacheren Argumenten

Satz 2.8 *$\mathbb{K}^n$, versehen mit der p-Norm, ist ein vollständiger normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$.*

Bemerkung 2.9 *Im Gegensatz zu $\mathbb{K}^n$ ist $\ell^p(\mathbb{N})$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum.*

Beweis. Für $j \in \mathbb{N}$ bezeichne $\delta^j = (\delta^j_k)_k$ die durch

$$\delta^j_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } k = j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Folge (diese Vektoren bilden Analoga zu den kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{K}^n$). Die $\delta^j, j \in \mathbb{N}$, sind linear unabhängige Vektoren im Vektorraum $\ell^p(\mathbb{N})$, denn:
Ist $0 = \sum_j \lambda_j \delta^j$ eine endliche Linearkombination der δ^j, so folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$0 = \sum_j \lambda_j \delta^j(k) = \lambda_k.$$

Hieraus folgt die Behauptung. Q.E.D.

Achtung: Die $\delta^j, j \in \mathbb{N}$, bilden allerdings keine Basis von $\ell^p(\mathbb{N})$ im Sinne der linearen Algebra. Z.B. liegt die Folge $x = (x_k)_k$ mit $x_k :=:= 1/(k+1)$, in $\ell^2(\mathbb{N})$. Diese kann aber nicht als eine endliche Linearkombination der Funktionen $\delta_k,\ k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, dargestellt werden.

Bemerkung und Konvention. Einen besonders wichtiger Spezialfall unter den p -Normen bildet der Fall $p = 2$. In diesem Fall ist der zu $p = 2$ konjugierte Exponent q ebenfalls $q = 2$, und die Höldersche Ungleichung ist äquivalent zur Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für das kanonische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$. Ferner ist die 2-Norm gerade die Euklidische Norm.

Wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, werden wir daher in Zukunft den $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ stets mit der **Euklidischen Norm**, d.h. der 2-Norm

$$\|x\| = \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}$$

versehen.

Kapitel 3

Metrische Räume

3.1 Definitionen und Beispiele

Wie wir inzwischen mehrfach gesehen haben, ist für den Konvergenzbegriff in normierten Räumen letztendlich nur der Begriff des Abstandes zwischen zwei Punkten dieses Raumes von Bedeutung. Dieser Abstandsbegriff besitzt eine weitreichende Verallgemeinerung, nämlich den einer „Metrik".

Definition. Sei X eine nichtleere Menge. Eine **Metrik** auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

(ii) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$. (Symmetrie)

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$. (Dreiecksungleichung)

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar $\mathfrak{X} = (X, d)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge X und einer Metrik d auf X. Man nennt $d(x, y)$ den **Abstand** oder die **Distanz** der Punkte x und y bzgl. der Metrik d. Sind Missverständnisse ausgeschlossen, so werden wir gelegentlich auch die Menge X des metrischen Raumes $\mathfrak{X} = (X, d)$ als metrischen Raum bezeichnen.

Beispiele 3.1 a) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen werden zu metrischen Räumen, wenn man als Abstand definiert

$$d(x, y) := |x - y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R} \ \text{ (bzw. } x, y \in \mathbb{C}).$$

b) Ist allgemeiner $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist durch

$$d(x, y) := \|x - y\|, \ x, y \in E,$$

eine Metrik auf E definiert, die **natürliche Metrik**.

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen von Norm und Metrik. Z.B. folgt die Dreiecksungleichung für die Metrik d aus der für die Norm:

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\|+\|y-z\| = d(x,y)+d(y,z).$$

Diese Metrik d ist stets gemeint, wenn wir $(E, \|\cdot\|)$ als metrischen Raum betrachten.

Als Standardmetrik auf dem $\mathbb{K}^n$ werden wir, wenn nicht anders gesagt, die **Euklidische Metrik** $d(x,y) := \|x-y\|_2$ wählen.

c) Ist (X,d) ein metrischer Raum und ist Y eine nichtleere Teilmenge von X, so wird Y zu einem metrischen Raum, wenn man als Metrik d^Y auf Y die Einschränkung $d^Y := d|_{Y\times Y}$ von d auf $Y \times Y$ wählt. Man bezeichnet den metrischen Raum (Y, d^Y) dann auch als **metrischen Teilraum** von (X,d).

d) Ist wie in b) $X = E$ ein normierter Vektorraum, versehen mit der natürlichen Metrik $d(x,z) := \|x-z\|,\ x,z \in E$, und ist $Y \subset E$ eine Teilmmenge von X, beispielsweise eine Normkugel in E, so bildet (Y, d^Y) ebenfalls einen metrischen Raum, aber i.A. keinen Vektorraum!

e) Auf jeder nichtleeren Menge X kann man die sogenannte **diskrete Metrik** einführen durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Die für die Analysis wichtigsten metrischen Räume sind die normierten Vektorräume sowie Teilmengen solcher Vektorräume.

Definition. Zwei Metriken d_1 und d_2 auf einer Menge X heißen **äquivalent** (in Zeichen: $d_1 \sim d_2$), wenn es Konstanten $0 < c_1 \leq c_2$ gibt so, dass

$$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y) \quad \forall x,y \in X. \tag{3.1}$$

Analog sagt man, zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E seien **äquivalent** (in Zeichen: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), wenn es Konstanten $0 < c_1 \leq c_2$ gibt so, dass

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad \forall x \in E. \tag{3.2}$$

Bezeichnet $d_j(x,y) := \|x-y\|_j,\ j = 1,2$, dann die jeweilige zugehörige Metrik, so gilt offenbar:

Lemma 3.2 *Die Metriken d_1 und d_2 sind genau dann äquivalent, wenn die zugehörigen Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind.*

Man sieht übrigens leicht, dass durch den Begriff der Äquivalenz von Normen bzw. Metriken jeweils Äquivalenzrelationen auf der Menge aller Normen auf einem Vektorraum E bzw. aller Metriken auf einer Menge X definiert werden.

Satz 3.3 *Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) zwei metrische Räume. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist dann durch*

$$\begin{aligned} d_p((x_1,x_2),(y_1,y_2)) &:= \Big\| \Big(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2) \Big) \Big\|_p \\ &= \begin{cases} \Big(d_1(x_1,y_1)^p + d_2(x_2,y_2)^p \Big)^{1/p}, & \text{falls } 1 \leq p < \infty \\ \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}, & \text{falls } p = \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

eine Metrik auf dem kartesischen Produkt $X_1 \times X_2$ definiert. Ferner sind je zwei dieser Metriken äquivalent.

Beweis. Seien $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$. Offenbar ist $d_p(x, y) \geq 0$, und $d_p(x, y) = 0$ genau dann, wenn $\|(d_1(x_1, y_1),\ d_2(x_2, y_2))\|_p = 0$. Dies ist äquivalent zu $d_1(x_1, y_1) = d_2(x_2, y_2) = 0$, folglich zu $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$, d.h. zu $x = y$. Ist ferner $z = (z_1, z_2) \in X_1 \times X_2$, so gilt

$$d_j(x_j, y_j) \leq d_j(x_j, z_j) + d_j(z_j, y_j), \qquad j = 1, 2,$$

woraus aufgrund der Definition der p-Norm auf $\mathbb{R}^2$ folgt:

$$\begin{aligned} \|(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2))\|_p &\leq \|(d_1(x_1,z_1) + d_1(z_1,y_1),\ d_2(x_2,z_2) + d_2(z_2,y_2))\|_p \\ &= \|(d_1(x_1,z_1), d_2(x_2,z_2)) + (d_1(z_1,y_1), d_2(z_2,y_2))\|_p \\ &\leq \|(d_1(x_1,z_1), d_2(x_2,z_2))\|_p + \|(d_1(z_1,y_1), d_2(z_2,y_2))\|_p \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Dreiecksungleichung

$$d_p(x, y) \leq d_p(x, z) + d_p(z, y).$$

Schließlich sind, wie man leicht zeigt, je zwei p-Normen auf dem $\mathbb{R}^2$ äquivalent (Übung), womit die Äquivalenz der Metriken d_p auf $X_1 \times X_2$ folgt.

Q.E.D.

Beispiel 3.4 $X_1 = \mathbb{R}^k,\ X_2 = \mathbb{R}^\ell$, jeweils versehen mit der p-Norm. Für $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ ist dann für $1 \leq p < \infty$

$$d_p(x, y) = (\|x_1 - y_1\|_p^p + \|x_2 - y_2\|_p^p)^{1/p} = \|x - y\|_p,$$

und

$$d_\infty(x, y) = \max\{\|x_1 - y_1\|_\infty, \|x_2 - y_2\|_\infty\} = \|x - y\|_\infty,$$

falls man den $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ mit $\mathbb{R}^{k+\ell}$ identifiziert.
Falls nicht ausdrücklich anders gesagt, werden wir der Einfachheit halber den Produktraum $X_1 \times X_2$ zweier metrischer Räume (X_1, d_1) und (X_2, d_2) stets mit der Metrik $d = d_\infty$ versehen, d.h.

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}. \tag{3.3}$$

3.2 Die Topologie eines metrischen Raumes

Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sind $a \in X$ sowie $r > 0$, so heißt

$$B_r(a) := \{x \in X : d(x,a) < r\}$$

die **offene Kugel** mit Mittelpunkt a und Radius r. Man nennt $B_\varepsilon(a)$ auch die **ε-Umgebung von** a. Allgemeiner definiert man:

Definition. Eine Teilmenge $U \subset X$ heiße **Umgebung des Punktes** $x \in X$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass gilt:

$$B_\varepsilon(x) \subset U.$$

Satz 3.5 (i) *Ist U eine Umgebung von x und ist $W \supset U$, so ist auch W eine Umgebung von x.*
(ii) *Sind U_1 und U_2 Umgebungen von x, so ist auch $U_1 \cap U_2$ eine Umgebung von x.*

Beweis. (i) Per definitionem existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U \subset W$.
(ii) Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U_1$ und $B_{\varepsilon_2}(x) \subset U_2$ ist. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ gilt dann: $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap U_2$.

Q.E.D.

Satz 3.6 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt das* **Hausdorffsche Trennungsaxiom***:*
Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ gibt es Umgebungen U von x und V von y, die disjunkt sind.

Beweis. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x,y)$. Dann ist $\varepsilon > 0$, und $U := B_\varepsilon(x)$ und $V := B_\varepsilon(y)$ sind Umgebungen von x bzw. y. Ferner ist $U \cap V = \emptyset$, denn für jedes $z \in U \cap V$ würde gelten:

$$2\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

was zu einem Widerspruch führt.

Q.E.D.

Definitionen. Seien (X,d) ein metrischer Raum und A eine Teilmenge von X. Stellen Sie sich z.B. einen See in der Ebene $X = \mathbb{R}^2$ vor, der von seiner Uferlinie berandet wird.

Ein Punkt $x \in X$ heiße **Randpunkt** von A, wenn in jeder Umgebung von x sowohl ein Punkt von A als auch ein Punkt des Komplements $X \setminus A$ liegt. Die Menge aller Randpunkte von A nennt man den **Rand** von A und bezeichnet ihn mit ∂A. Es gilt also:

$$x \in \partial A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ und } B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Somit liegt x nicht in ∂A genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt so, dass entweder $B_\varepsilon(x) \subset A$ oder $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass es eine Umgebung U von x gibt so, dass entweder $U \subset A$ oder $U \subset X \setminus A$. Wir definieren daher die Menge $A^0 \subset A$ der **inneren Punkte** von A durch

$$A^0 := \{x \in X : \text{ es gibt eine Umgebung } U \text{ von x mit } U \subset A\}.$$

Man nennt dann auch A^0 das **offene Innere** von A. Offenbar ist $A^0 \subset A$, und es gilt für alle $x \in X$:

$$x \in A^0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A.$$

Anders ausgedrückt: x ist ein innerer Punkt von A genau dann, wenn A eine Umgebung von x ist. Unsere vorangehenden Überlegungen zeigen, dass wir folgende disjunkte Zerlegung des Raumes X haben:

$$X = A^0 \,\dot\cup\, \partial A \,\dot\cup\, (X \setminus A)^0. \tag{3.4}$$

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heiße **offen**, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h. wenn gilt:

$$\forall x \in A \, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A.$$

Offenbar ist damit das offene Innere A^0 einer beliebigen Teilmenge A von X stets offen, und A ist offen genau dann, wenn $A = A^0$.

Die Menge

$$\overline{A} := A^0 \cup \partial A = X \setminus (X \setminus A)^0$$

heißt der **Abschluss** oder auch die **abgeschlossene Hülle** der Menge A. Ein Punkt x liegt nach (3.4) nicht in $\overline{A}$ dann und nur dann, wenn er in $(X \setminus A)^0$ liegt, d.h. wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$, d.h. $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Somit gilt:

$$x \in \overline{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset. \tag{3.5}$$

Dies zeigt insbesondere, dass auch $A \subset \overline{A}$ ist, d.h. es gilt auch

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Ein Punkt $x \in X$ heiße **Berührungspunkt** von A, wenn in jeder Umgebung von x mindestens ein Punkt aus A liegt. Nach (3.5) besteht der Abschluss $\overline{A}$ von A offenbar gerade aus der Menge aller Berührungspunkte von A.

Ferner ist das Komplement $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^0$ von $\overline{A}$ eine offene Menge, d.h. *der Abschluss $\overline{A}$ von A ist eine abgeschlossene Menge in folgendem Sinne:*

Eine Teilmenge $A \subset X$ von X heiße **abgeschlossen,** wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Bemerkung 3.7 Man kann beweisen (Übung), dass $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge C von X ist mit $A \subset C$, d.h. es gilt

$$\overline{A} = \bigcap_{\{B \subset X : A \subset B,\ B \text{ abgeschlossen}\}} B.$$

Es seien $A, B \subset X$. A heiße **dicht** in B, falls $\overline{A} \cap B = B$.

Beispiel: Es gilt $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, d.h. $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

Beispiele 3.8 **(a) Offene Kugeln:**

(i) Seien $a \in X$ und $r > 0$. Dann ist die Kugel $B_r(a)$ offen:

Ist nämlich $x \in B_r(a)$, so ist $\varepsilon := r - d(x,a) > 0$. Für $y \in B_\varepsilon(x)$ folgt damit:

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < \varepsilon + d(x,a) = r\ ,$$

d.h. es ist $B_\varepsilon(x) \subset B_r(a)$.

(ii) „Offene Intervalle“ der Form $]a,b[$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ sind offene Teilmengen des metrischen Raumes $(\mathbb{R}, d)$ (vgl. Beispiel 3.1):

Ist nämlich $x \in]a,b[$, und sind a und b endlich, so ist für $\varepsilon := \min\{|a - x|, |b - x|\}$ offenbar $B_\varepsilon(x) \subset]a,b[$; der allgemeine Fall kann leicht auf den obigen zurückgeführt werden.

Dagegen sind Intervalle der Form $[a,b[$, $]a,b]$ und $[a,b]$ nicht offen; z.B. liegt für kein $\varepsilon > 0$ die ε-Umgebung $B_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ ganz in $[a,b[$.

(b) Abgeschlossene Kugeln:

(i) Die „**abgeschlossenen Kugeln**“

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X : d(x,a) \leq r\}, \quad a \in X, r \geq 0,$$

eines metrischen Raumes X sind abgeschlossene Mengen:

Ist nämlich $y \in X \setminus \overline{B}_r(a)$, so ist

$$\varepsilon := d(y,a) - r > 0\ .$$

Für $z \in B_\varepsilon(y)$ ist dann

$$d(z,a) \geq d(y,a) - d(z,y) > d(y,a) - \varepsilon = r\ .$$

Somit ist $B_\varepsilon(y) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$, d.h. $X \setminus \overline{B}_r(a)$ ist offen.

(ii) „Abgeschlossene Intervalle“ der Gestalt $[a,b]$ sind abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$, denn $\mathbb{R} \setminus [a,b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ ist offen.

Ebenso sind Intervalle der Form $[a, +\infty[$ und $]-\infty, a]$ abgeschlossen.

(iii) Die Mengen $\emptyset$ und X sind stets offen, also auch abgeschlossen.

(iv) Sei X eine nichtleere Menge. Versehen wir diese mit der diskreten Metrik, so sind alle Teilmengen von X offen (Übung). Folglich sind alle Teilmengen von X ebenso abgeschlossen. Eine Menge kann somit durchaus gleichzeitig offen und abgeschlossen sein!

(b) Ränder von Kugeln:

(i) Wir haben gesehen, dass für $r > 0$ die Mengen $B_r(a) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$ und $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X : d(x,a) > r\}$ offen sind. Hieraus folgt

$$\partial B_r(a) \subset \{x \in X : d(x,a) = r\}.$$

Für $X = \mathbb{R}^n$ kann man sogar zeigen (Übung):

$$\partial\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r\} \ .$$

Es gibt jedoch auch metrische Räume, in denen die entsprechende Identität falsch ist (Übung)!

(ii) $\partial\mathbb{Q} = \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Bezeichnung. Ist $\mathfrak{X} = (X, d)$ ein metrischer Raum, so bezeichnen wir mit

$$T(\mathfrak{X}) := \{U \subset X : U \text{ ist offen }\}$$

die Menge aller offenen Mengen in X.

Satz 3.9 *$T := T(\mathfrak{X})$ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

a) $\emptyset, X \in T$.

b) *Sind $U, V \in T$, so ist auch $U \cap V \in T$.*

c) *Sind $U_\iota, \iota \in I$, in T, so ist auch $\bigcup_{\iota \in I} U_\iota \in T$.*

Beweis. a) Ist trivial.
b) Sei $x \in U \cap V$. Dann sind U und V Umgebungen von x, somit nach Satz 3.5(ii) auch $U \cap V$. Damit ist $U \cap V$ offen.
c) Sei $x \in \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$. Dann gibt es ein ι_0 mit $x \in U_{\iota_0}$. Wieder mit Satz 3.5 ist $\bigcup_{\iota \in I} U_\iota$ als Obermenge von U_{ι_0} eine Umgebung von x.

Q.E.D.

Bemerkungen. (a) Da die abgeschlossenen Mengen gerade die Komplemente offener Mengen sind, folgert man durch Übergang zu den Komplementen aus Satz 3.9 sofort auch:

Beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(b) Nach Satz 3.9 ist zwar der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen stets offen. Für unendliche Durchschnitte ist dies i.A. nicht so. Z.B. ist

$$[0, 1[= \bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, 1[\ .$$

Ebenso ist die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Menge nicht notwendig abgeschlossen.

Definition. Ist X eine nichtleere Menge, so bezeichnet man ein Mengensystem $T \subset \mathfrak{P}(X)$ mit den Eigenschaften a) – c) aus Satz 3.9 als **Topologie** auf X. Das Paar (X, T) wird dann als **topologischer Raum**, und die Mengen $U \in T$ als die **offenen Mengen** des topologischen Raumes (X, T) bezeichnet. Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit etc. lassen sich ganz allgemein in beliebigen topologischen Räumen definieren; dies ist der Gegenstand der „Mengentheoretischen Topologie" .

Ist d eine Metrik auf X, so heißt $T(X, d)$ die durch d auf X **induzierte Topologie**. Diese werden wir stets auf X verwenden.

Satz 3.10 *Zwei äquivalente Metriken d_1 und d_2 auf X erzeugen dieselbe Topologie, d.h. $T(X, d_1) = T(X, d_2)$.*

Beweis. Seien $0 < c_1 \leq c_2$ so, dass

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Bezeichnen wir mit $B_r^j(a) := \{x \in X, d_j(x, a) < r\},\ j = 1, 2,$ die Kugeln bzgl. der beiden Metriken d_1 und d_2, so folgt für jedes $r > 0,\ a \in X$

$$B_r^1(a) \subset B_{c_2 r}^2(a), \quad B_r^2(a) \subset B_{1/c_1 r}^1(a),$$

so dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$B_{\varepsilon/c_2}^1(a) \subset B_\varepsilon^2(a), \quad B_{c_1\varepsilon}^2(a) \subset B_\varepsilon^1(a).$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Q.E.D.

Definitionen. Der **Abstand** zweier nichtleerer Teilmengen A und B von X ist definiert durch

$$d(A,B) := \inf\{d(a,b) : \; a \in A, \; b \in B\}.$$

Der **Abstand des Punktes** $x \in X$ zu A ist definiert durch

$$d(x,A) := d(\{x\},A) = \inf\{d(x,a) : \; a \in A\}.$$

3.2.1 Teilmengen $Y \subset X$ als metrische Teilräume von X und deren Relativtopologie

Sei nun $Y \subset X$ eine Teilmenge des metrischen Raumes (X,d). Gemäß Beispiel 3.1 c) versehen wir Y mit der eingeschränkten Metrik d^Y, d.h. es gilt

$$d^Y(y_1,y_2) = d(y_1,y_2) \qquad \text{für alle } y_1,y_2 \in Y.$$

Wir wollen die Kugel in (Y,d^Y) mit Mittelpunkt $a \in Y$ und Radius $r > 0$ mit

$$B_r^Y(a) := \{y \in Y : d^Y(y,a) < r\} \subset Y$$

bezeichnen, um diese von den Kugel $B_r(a) = \{x \in X : d(y,a) < r\}$ in X zu unterscheiden. Offenbar gilt dann:

$$B_r^Y(a) = B_r(a) \cap Y, \tag{3.6}$$

d.h. *die Kugel $B_r^Y(a)$ „sieht" von der Kugel $B_r(a)$ nur diejenigen Punkte, welche in Y liegen* (man denke in Anlehnung an Terry Pratchetts „Scheibenwelt" z.B. an zwei-dimensionale Lebewesen, welche auf einer Scheibe Y im $X = \mathbb{R}^3$ leben - diese sehen nur die Punkte, die innerhalb ihrer Scheibenwelt Y liegen, nicht jedoch die Punkte außerhalb).
Mit $T = T(X,d)$ bezeichnen wir die durch die Metrik d auf X induzierte Topologie, und mit $T^Y = T(Y,d^Y)$ die durch d^Y auf Y induzierte Topologie, die sogenannte **Relativtopologie** oder auch **Spurtopologie**.

Satz 3.11 (Relativtopologie) *Eine Teilmenge $A \subset Y$ ist offen (bzw. abgeschlossen) in Y dann und nur dann, wenn es eine offene (bzw. abgeschlossene) Teilmenge $B \subset X$ gibt mit $A = B \cap Y$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage über die Offenheit von Teilmengen von Y. Die analoge Aussage über die Abgeschlossenheit folgt dann durch Komplementbildung. Ist $B \subset X$ offen in X, d.h. $B \in T$, und ist $y \in A := B \cap Y$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(y) \subset B$. Folglich ist nach (3.6) $B_\varepsilon^Y(y) = B_\varepsilon(y) \cap Y \subset A$. Dies zeigt, dass A offen in Y ist, d.h. $A \in T^Y$.

Ist umgekehrt A offen in Y, so gibt es zu jedem $a \in Y$ ein $\varepsilon(a) > 0$ so, dass $B^Y_{\varepsilon(a)}(a) \subset A$. Sei dann

$$B := \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon(a)}(a).$$

Dann ist B offen in X, und nach (3.6) ist $B \cap Y = \bigcup_{a \in A} B^Y_{\varepsilon(a)}(a) = A$.

Q.E.D.

ACHTUNG: Ist $A \subset Y$ eine Teilmenge von Y (und somit auch von X), so bezeichnen wir mit $\partial^Y A$ deren Rand im Raum Y, und mit $\partial^X A := \partial A$ deren Rand als Teilmenge von X. Dann gilt zwar stets

$$\partial^Y A \subset \partial^X A, \tag{3.7}$$

die umgekehrte Inklusion ist jedoch i.A. falsch (Übung)!

Beispiel: (Übung) Seien $X := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Euklidische Raum mit der durch die Euklidischen Norm definierten Metrik, $Y := \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ und $A := [a, b] \times \{0\}$, mit $a \leq b$. Dann ist

$$\partial^Y A = \{a, b\} \times \{0\}, \quad \partial^X A = A = A := [a, b] \times \{0\}.$$

3.3 Konvergenz in metrischen Räumen

Sei $\mathfrak{X} = (X, d)$ ein metrischer Raum.

Definition. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus X heiße **konvergent** gegen $a \in X$, in Zeichen:

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a,$$

wenn gilt: Zu jeder Umgebung U von a existiert ein $k_0 = k_0(U) \in \mathbb{N}$ so, dass $x_k \in U$ ist für alle $k \geq k_0$.

Da in jeder Umgebung eine ε-Umgebung enthalten ist, ist dies gleichbedeutend mit der Aussage: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_k, a) < \varepsilon$ ist für alle $k \geq k_0$, bzw. zu

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, a) = 0 \ . \tag{3.8}$$

Man sieht sofort mit Hilfe des Hausdorffschen Trennungsaxioms (Satz 3.6), dass eine konvergente Folge genau einen Grenzwert besitzt. Ferner führen nach Satz 3.10 äquivalente Metriken zum selben Konvergenzbegriff.

Satz 3.12 *Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Punkten im* $\mathbb{R}^n$. *Ferner sei* $x_k = (x_{k1}, \dots x_{kn})$, $k \in \mathbb{N}$. *Dann konvergiert die Folge* $(x_k)_k$ *gegen* $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *dann und nur dann, wenn für jedes* $j = 1, \dots, n$ *gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} x_{kj} = a_j \ .$$

Beweis. Aufgrund der Definition der ℓ^p- Normen sieht man leicht, dass

$$\max_{j=1,\dots,n} |x_{kj} - a_j| \leq d(x_k, a) = \|x_k - a\|_2 \leq \sqrt{n} \max_{j=1,\dots,n} |x_{kj} - a_j| \ .$$

Somit ist $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, a) = 0$ genau dann, wenn $\max\limits_{j=1,\dots,n} |x_{kj} - a_j| \to 0$ für $k \to \infty$, d.h. wenn

$$|x_{kj} - a_j| \to 0 \text{ für } k \to \infty, \text{ für jedes } j = 1, \dots, n \ .$$

Q.E.D.

Mit Hilfe der Konvergenz von Folgen kann man die abgeschlossenen Mengen folgendermaßen charakterisieren.

Satz 3.13 (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit) *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Eine Teilmenge* $A \subset X$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge* $(x_k)_k$ *von Punkten* $x_k \in A$ *gilt:*

Konvergiert $(x_k)_k$ *gegen einen Punkt* $x \in X$, *so ist* $x \in A$.

Beweis. Sei A abgeschlossen. Ist dann $(x_k)_k$ eine Folge in A mit $x = \lim x_k$, so wäre, falls x in A^c läge, A^c eine offene Umgebung von x. Folglich gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in A^c$, im Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist notwendig $x \in A$.

Zur Umkehrung: Das Folgenkriterium sei erfüllt. Wir wollen zeigen, dass dann $\overline{A} = A$ ist, woraus die Abgeschlossenheit von A folgt.
Sei dazu $x \in \overline{A}$. Dann ist x ein Berührungspunkt von A, und wir finden insbesondere zu jedem $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, einen Punkt $x_k \in A$ in der Umgebung $B_{1/k}(x)$ von x. Wegen $d(x_k, x) < \frac{1}{k}$ ist dann $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, folglich $x \in A$. Dies zeigt, dass $\overline{A} \subset A$ ist, und die Inklusion $A \subset \overline{A}$ ist klar.

Q.E.D.

Bemerkung 3.14 Der Beweis lehrt zusätzlich, dass $A \subset X$ abgeschlossen ist genau dann, wenn $A = \overline{A}$ ist.

Definition. Die Folge $(x_k)_k$ von Punkten aus X heiße **Cauchy-Folge**, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_j, x_k) < \varepsilon$ ist für alle $j, k \geq k_0$.

Bemerkung 3.15 Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge (Beweis?).

Definition. Ein metrischer Raum heiße **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

Satz 3.16 *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge Y von X ist abgeschlossen in X genau dann, wenn sie als metrischer Teilraum (Y, d^Y) von (X, d) vollständig ist.*

Beweis. Sei Y abgeschlossen. Ist $(y_k)_k$ eine Cauchy-Folge in Y, so konvergiert sie wegen der Vollständigkeit von X gegen ein $x \in X$, d.h. es ist $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x$. Damit ist aber nach Satz 3.13 $x \in Y$. Y ist also vollständig.

Ist umgekehrt Y vollständig, und ist $(y_k)_k$ eine Folge in Y, welche gegen $x \in X$ konvergiert, so ist sie auch eine Cauchy-Folge in Y und damit konvergent in Y. Wegen der Eindeutigkeit des Limes ist dann $x \in Y$, d.h. Y ist abgeschlossen.

Q.E.D.

3.4 Stetigkeit

Es seien (X, d) und (Y, ϱ) metrische Räume, sowie $a \in X$.

Satz 3.17 *Die folgenden Bedingungen sind für eine Abbildung $f : X \to Y$ äquivalent:*

(i) *Für jede Folge $(x_k)_k$ in X mit $\lim x_k = a$ gilt: $\lim f(x_k) = f(a)$, d.h.*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) \qquad (\textbf{Folgen} - \textbf{Stetigkeit}).$$

(ii) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass $\varrho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ ist für alle $x \in X$ mit $d(x, a) < \delta$* $\quad$ *($\varepsilon - \delta-$* **Kriterium***).*

(iii) *Für jede Umgebung V von $f(a)$ in Y ist $U := f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a in X.*

Beweis. Wir beobachten zunächst, dass (ii) gleichbedeutend ist mit

(ii′) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)), \quad \text{d.h. mit } B_\delta(a) \subset f^{-1}\Big(B_\varepsilon(f(a))\Big).$$

Die Äquivalenz von (ii′) und (iii) folgt nun sofort aus der Definition des Umgebungsbegriffs.

Es bleibt die Äquivalenz von (i) und (ii′) zu zeigen:

Gilt (ii′) nicht, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass für jedes $\delta = 1/k,\ k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, ein $x_k \in B_{1/k}(a)$ existiert mit $f(x_k) \notin B_\varepsilon(f(a))$. Dann ist $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, während die Folge $(f(x_k))_k$ nicht gegen $f(a)$ konvergiert. Somit ist f nicht Folgen-stetig.

Gilt dagegen (ii′), und ist $(x_k)_k$ eine Folge in X mit $a = \lim x_k$, so wähle zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gemäß (ii′) mit $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $x_k \in B_\delta(a)$ für alle $k \geq k_0$, folglich $f(x_k) \in B_\varepsilon(f(a))$. Somit ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

Q.E.D.

Definitionen. Die Funktion $f : X \to Y$ heiße **im Punkte** $a \in X$ **stetig**, wenn sie den Bedingungen von Satz 3.17 genügt. f heiße **stetig**, wenn f in jedem Punkt $a \in X$ stetig ist.

Ist $A \subset X$, so bezeichnet man $x \in X$ als **Häufungspunkt der Menge** A, wenn jede Umgebung von x in X mindestens einen Punkt $a \neq x$ aus A enthält (man vergleiche dies mit dem Begriff des Berührungspunktes!).
Seien $f : A \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$ ein Häufungspunkt von A.
Dann bezeichnet man $b \in Y$ als den **Grenzwert** der Abbildung $f : A \to Y$ für $a \to x$, in Zeichen:

$$b = \lim_{a\to x} f(a)\ ,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass $\varrho(f(a), b) < \varepsilon$ ist für alle $a \in A \setminus \{x\}$ mit $d(a, x) < \delta$.

Beispiel. Die Menge der Häufungspunkte der Menge $A =]0, 1[\cup \{2\}$ in $\mathbb{R}$ ist gegeben durch $[0, 1]$.

Satz 3.18 *Es seien $(X, d), (Y, \varrho), (Z, \gamma)$ metrische Räume, sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Ist f stetig in $a \in X$ und g stetig in $b := f(a) \in Y$, so ist $g \circ f : X \to Z$ stetig in a.*

Beweis. Es sei W eine Umgebung von $g(b)$ in Z. Dann ist $V = g^{-1}(W)$ eine Umgebung von b in Y, folglich $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a in X, jeweils wegen der Stetigkeit von g in b bzw. von f in a. Schließlich ist $(g \circ f)^{-1}(W) = U$.

Q.E.D.

Definition. Sind $(X, d), (Y, \varrho)$ metrische Räume, so bezeichnen wir mit $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Funktionen von X nach Y.

Satz 3.19 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede offene (abgeschlossene) Teilmenge M von Y ihr Urbild $f^{-1}(M)$ offen (abgeschlossen) ist in X.*

Beweis. Sei $f \in C(X,Y)$. Ist $U \subset Y$ offen, und ist $a \in f^{-1}(U)$, so ist U eine Umgebung von $f(a)$ ist. Wegen der Stetigkeit von f in a ist somit $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von a. Dies zeigt, dass $f^{-1}(U)$ offen ist. Weiter ist $f^{-1}(U^c) = (f^{-1}(U))^c$. Dies zeigt, dass auch das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge von Y stets abgeschlossen ist.

Sei umgekehrt $f : X \to Y$ so, dass das Urbild einer offenen Menge unter f stets offen ist. Seien ferner $a \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann ist $V = f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ eine offene Menge mit $a \in V$, also eine Umgebung von a. Damit ist f nach Satz 3.17 stetig in a. Es folgt $f \in C(X,Y)$.

Q.E.D.

Beispiele 3.20 a) Seien (X,d) und (Y_1,d_1), (Y_2,d_2) metrische Räume, sowie $f_1 : X \to Y_1$, $f_2 : X \to Y_2$ Abbildungen. Die Abbildung

$$f = (f_1, f_2) : \; X \to Y_1 \times Y_2$$

ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn beide Abbildungen f_1 und f_2 stetig sind in x.

Beweis. Eine Folge $(y_k)_k = ((y_{k1}, y_{k2}))_k$ in $Y_1 \times Y_2$ konvergiert genau dann gegen $y = (y_1, y_2)$ in $Y_1 \times Y_2$, wenn $\lim\limits_{k\to\infty} y_{k1} = y_1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} y_{k2} = y_2$ (vgl. dazu (3.3), sowie den Beweis von Satz 3.12).

Ist nun $(x_k)_k$ eine Folge in X mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x \in X$, so gilt somit: Die Folge $f(x_k)$ konvergiert genau dann gegen $f(x)$ in $Y_1 \times Y_2$, wenn $\lim\limits_{k\to\infty} f_1(x_k) = f_1(x)$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f_2(x_k) = f_2(x)$. Hieraus folgt die Behauptung. Q.E.D.

b) Durch Iteration erhält man insbesondere:

Eine Abbildung

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : \; X \to \mathbb{K}^n$$

ist genau dann stetig, wenn alle Komponenten $f_j : X \to \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, n$, stetig sind.

c) Folgende Abbildungen sind stetig:

(i) add: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\quad (x,y) \mapsto x + y$,

(ii) mult: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\quad (x,y) \mapsto xy$,

(iii) quot: $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^\times \to \mathbb{K}$, $\quad (x,y) \mapsto \frac{x}{y}$, wobei $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sei.

Beweis. Sei $((x_k, y_k))_k$ eine Folge in $\mathbb{K}^2$ mit

$$\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x, y) \; .$$

Nach Satz 3.12 gilt dann $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, $\lim_{k\to\infty} y_k = y$.
Daraus folgt

$$\lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = x + y, \quad \lim_{k\to\infty}(x_k y_k) = xy \ .$$

Ist zusätzlich $y_k \neq 0$ für alle k sowie $y \neq 0$, so ist auch

$$\lim_{k\to\infty} x_k y_k^{-1} = xy^{-1} \ .$$

Q.E.D.

Korollar 3.21 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, und seien $f, g : X \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g : X \to \mathbb{K}, \quad fg : X \to \mathbb{K}$$

stetig. Ist ferner $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch

$$\frac{f}{g} : X \to \mathbb{K}$$

stetig.

Beweis. Nach a) ist die Abbildung

$$(f, g) : X \to \mathbb{K} \times \mathbb{K}$$

stetig. Ferner ist

$$f + g = \mathrm{add} \circ (f, g), \ fg = \mathrm{mult} \circ (f, g), \ \frac{f}{g} = \mathrm{quot} \circ (f, g) \ .$$

Die Behauptung folgt somit aus Satz 3.18 und c).

Q.E.D.

d) Ein **Monom** auf dem $\mathbb{K}^n$ vom Grad $r \in \mathbb{N}$ ist eine Funktion von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}$ der Gestalt

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \ ,$$

wobei $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + \cdots + k_n = r$ sind. Eine **Polynomfunktion** $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ vom Grad $\leq r$ ist eine Linearkombination von Monomen vom Grad $\leq r$,

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n \leq r} c_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \ ,$$

mit $c_{k_1 \ldots k_n} \in \mathbb{K}$. Gibt es einen Koeffizienten $c_{\ell_1 \ldots \ell_n} \neq 0$ mit $\ell_1 + \cdots + \ell_n = r$, so heißt F vom **Grad** r.

Da die Koordinatenprojektionen

$$p_j : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$$

für $j = 1, \ldots, n$ stetig sind, folgt durch wiederholte Anwendung von Korollar 3.21, dass alle Polynomfunktionen auf dem $\mathbb{K}^n$ stetig sind.

Definition. Seien (X, d), (Y, ϱ) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heiße **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$\text{(3.9)} \qquad \text{Ist } d(x_1, x_2) < \delta, \text{ so ist } \varrho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

$f : X \to Y$ heißt **Lipschitz-stetig**, falls eine Konstante $L \geq 0$ existiert mit $\varrho(f(x_1), f(x_2)) \leq L d(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$. Eine solche Abbildung ist offenbar gleichmäßig stetig.

Satz 3.22 *Sei X_0 dicht in X, und sei $f : X_0 \to Y$ gleichmäßig stetig. Ist Y vollständig, so gibt es genau eine stetige Abbildung*

$$\tilde{f} : X \to Y \quad \text{mit} \quad \tilde{f}|_{X_0} = f.$$

Man bezeichnet $\tilde{f}$ als die **stetige Fortsetzung** *von f auf X. Diese ist ebenfalls gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$. Dann existiert eine Folge $(x_j)_j$ in X_0 mit $x = \lim x_j$. Somit ist $(x_j)_j$ eine Cauchy-Folge in X. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f ist dann die Folge $(f(x_j))_j$ eine Cauchy-Folge in Y:

Ist nämlich $\varepsilon > 0$, so wähle $\delta > 0$ wie in (3.9). Zu δ wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $d(x_j, x_k) < \delta$ ist für alle $j, k \geq k_0$. Für diese j, k ist dann $\varrho(f(x_j), f(x_k)) < \varepsilon$.

Wegen der Vollständigkeit von Y strebt somit $f(x_j)$ einem Grenzwert in Y zu, den wir mit $\tilde{f}(x)$ bezeichnen: $\tilde{f}(x) := \lim f(x_j)$.

Dieser Grenzwert hängt nicht von der gewählten Folge $(x_j)_j$ ab, so dass $\tilde{f}$ als Funktion auf X wohldefiniert ist:

Ist nämlich $(y_j)_j$ eine weitere Folge in X_0 mit $x = \lim y_j$, und ist $\varepsilon > 0$, so wähle $\delta > 0$ gemäß (3.9). Ist $k_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $d(x_j, y_j) \leq d(x_j, x) + d(y_j, x) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$ gilt für alle $j \geq k_0$, so folgt

$$\varrho(f(x_j), f(y_j)) < \varepsilon \qquad \forall j \geq k_0.$$

Somit ist $\lim \varrho(f(x_j), f(y_j)) = 0$, woraus $\lim f(x_j) = \lim f(y_j)$ folgt.

Die Funktion $\tilde{f}$ besitzt alle gewünschten Eigenschaften: Ist $x \in X_0$, so gilt für die konstante Folge $(x_j)_j$ mit $x_j := x$ in X_0: $x = \lim x_j$, also $\tilde{f}(x) = \lim f(x_j) = f(x)$, d.h. $\tilde{f}$ ist eine Fortsetzung von f. Ferner ist $\tilde{f}$ gleichmäßig stetig:

Ist $\varepsilon > 0$, so wähle wieder $\delta > 0$ wie in (3.9). Sind $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta/3$, so seien $(x_j)_j$ und $(y_j)_j$ Folgen in X_0 mit $x = \lim x_j$ und $y = \lim y_j$. Dann ist für jedes j offenbar

$$\varrho(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \varrho(\tilde{f}(x), f(x_j)) + \varrho(f(x_j), f(y_j)) + \varrho(f(y_j), \tilde{f}(y)),$$

also

$$\varrho(\tilde f(x), \tilde f(y)) \leq \overline{\lim_j}\ \varrho(f(x_j), f(y_j)).$$

Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass gilt: $d(x, x_j) < \delta/3$ und $d(y, y_j) < \delta/3$ für $j \geq k_0$.
Für $j \geq k_0$ ist dann

$$d(x_j, y_j) \leq d(x_j, x) + d(x, y) + d(y, y_j) < \delta,$$

also $\varrho(f(x_j), f(y_j)) < \varepsilon$. Somit folgt

$$\varrho(\tilde f(x), \tilde f(y)) \leq \varepsilon.$$

Da für jede stetige Fortsetzung g von f auf X gelten muss : $g(x) = \lim f(x_j)$, falls $(x_j)_j$ eine Folge in X_0 ist mit $x = \lim x_j$, ist die Eindeutigkeit von $\tilde f$ klar.

Q.E.D.

Bemerkung. Ist $x \in X_0$, so ist $\tilde f(x) = f(x)$. Ist $x \in X \setminus X_0$, so ist x ein Häufungspunkt von X_0, und der Beweis zeigt, dass $\tilde f(x) = \lim\limits_{y \to x} f(y)$.

Beispiel. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ist stetig auf $]0, \infty[$, lässt sich jedoch nicht stetig auf $[0, \infty[$ fortsetzen.

3.5 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition. Es seien (X, d), (Y, ϱ) metrische Räume. Eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ in Y^X konvergiere **punktweise** (oder **einfach**) gegen $f \in Y^X$, falls $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ ist für alle $x \in X$. Sie konvergiere **gleichmäßig** gegen f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\varrho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N \text{ und alle } x \in X\ .$$

Satz 3.23 *Es sei $(f_n)_n$ eine Funktionenfolge in $C(X, Y)$, welche gleichmäßig gegen $f : X \to Y$ konvergiert. Dann ist auch $f \in C(X, Y)$.*

Beweis. (Analog wie im Falle $X = Y = \mathbb{R}$). Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\varrho(f(x), f_N(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ist für alle } x \in X\ .$$

Sei $a \in X$. Da f_N in a stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\varrho(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } x \in X \text{ mit } d(x, a) < \delta\ .$$

Dann gilt für alle $x \in X$ mit $d(x,a) < \delta$:

$$\begin{aligned}\varrho(f(x), f(a)) &\leq \varrho(f(x), f_N(x)) + \varrho(f_N(x), f_N(a)) + \varrho(f_N(a), f(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ .\end{aligned}$$

Q.E.D.

3.6 Die Vervollständigung eines metrischen Raumes*

In Anwendungen trifft man des öfteren metrische Räume an, welche nicht vollständig sind. Ein solches Beispiel kennen wir bereits: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, versehen mit der Metrik $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$, ist nicht vollständig. Der Wunsch, $\mathbb{Q}$ zu „vervollständigen“, führt letzendlich dann zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, mit $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$.
Ganz ähnlich lässt sich jeder beliebige metrische Raum vervollständigen.

Definition. Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) zwei metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X_1 \to X_2$ heiße **abstandstreu** oder **isometrisch** oder auch **Isometrie von** X_1 **nach** X_2, wenn gilt:

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x,y) \text{ für alle } x, y \in X_1 \ .$$

Offenbar ist eine Isometrie stets injektiv.

Definition. Es sei $\mathfrak{X} = (X, d)$ ein metrischer Raum. Ein vollständiger metrischer Raum $\mathcal{Y} = (Y, \varrho)$ heiße **Vervollständigung** von $\mathfrak{X}$, wenn es eine Isometrie $\varphi : X \to Y$ gibt mit $\overline{\varphi(X)} = Y$, d.h. wenn $\varphi(X)$ dicht in Y ist.

Bemerkung 3.24 Ist (Y, ϱ) eine solche Vervollständigung von (X, d), so bildet φ den metrischen Raum X bijektiv und isometrisch auf den Teilraum $\tilde{X} = \varphi(X)$ von Y ab. Wir können daher die Räume (X, d) und $(\tilde{X}, \varrho_{\tilde{X}})$ als metrische Räume „identifizieren“, d.h. o.B.d.A. annehmen, dass X bereits ein Teilraum von Y ist. Dann ist Y der Abschluß von X (in Y), d.h. $Y = \overline{X}$.

Satz 3.25 *Es seien $\mathcal{Y}_1 = (Y_1, \varrho_1)$ und $\mathcal{Y}_2 = (Y_2, \varrho_2)$ zwei Vervollständigungen des metrischen Raumes $\mathfrak{X} = (X, d)$. Dann gibt es eine bijektive Isometrie von Y_1 auf Y_2.*

Beweis. Seien $\varphi_j : X \to Y_j$ Isometrien mit $\overline{\varphi_j(X)} = Y_j,\ j = 1, 2$. Setze $Z_j := \varphi_j(X) \subset Y_j$, und betrachte die Abbildung

$$\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} :\ Z_1 \to Z_2 \subset Y_2.$$

Als Komposition zweier Isometrien ist φ eine Isometrie, und folglich als solche gleichmäßig stetig. Es bezeichne $\tilde{\varphi} : Y_1 \to Y_2$ ihre stetige Fortsetzung nach Satz 3.22. Dann ist auch $\tilde{\varphi}$ isometrisch. Dies folgt sofort aus der folgenden Tatsache:

Ist (X, d) *ein metrischer Raum, so ist die Metrik* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *stetig als Funktion auf dem Produktraum* $X \times X$ (Übung).

Ganz analog besitzt die Isometrie

$$\psi := \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} :\ Z_2 \to Y_1$$

eine Fortsetzung zu einer Isometrie $\tilde{\psi} : Y_2 \to Y_1$.
Dann ist jedoch $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} :\ Y_1 \to Y_1$ eine Isometrie mit

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}|_{Z_1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \mathrm{id}\,|_{Z_1}\ ,$$

und da $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}$ stetig ist und Z_1 dicht in Y_1 liegt, folgt: $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} = \mathrm{id}$. Analog folgt auch $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi} = \mathrm{id}$, d.h. $\tilde{\varphi}$ ist eine bijektive Isometrie von Y_1 auf Y_2, mit Umkehrabbildung $\tilde{\psi}$.

Q.E.D.

Dieser Satz zeigt, dass es bis auf Isometrie nur höchstens eine Vervollständigung eines metrischen Raumes gibt.

Theorem 3.26 *Jeder metrische Raum besitzt eine Vervollständigung.*

Bemerkung. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so bezeichnet man oft mit $(\overline{X}, \overline{d})$ „die" Vervollständigung von X, und nimmt o.B.d.A. gemäß Bemerkung 3.24 an, dass $\overline{X}$ der Abschluß von X ist.

Beweis von Theorem 3.26.
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bezeichne Z die Menge aller Cauchy-Folgen in X.
Sind nun $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\eta = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Elemente von Z, so liest man aus der Ungleichung

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

leicht ab, dass die Folge $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bildet. Wir setzen

$$\varrho'(\xi, \eta) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)\ .$$

Man prüft nun leicht die folgenden Eigenschaften von ϱ' nach:

(i) $\varrho'(\xi,\eta) \geq 0$ für alle $\xi,\eta \in Z$.

(ii′) $\varrho'(\xi,\xi) = 0$ für alle $\xi \in Z$.

(iii) $\varrho'(\xi,\eta) = \varrho'(\eta,\xi)$ für alle $\xi,\eta \in Z$.

(iv) $\varrho'(\xi,\gamma) \leq \varrho'(\xi,\eta) + \varrho'(\eta,\gamma)$ für alle $\xi,\eta,\gamma \in Z$.

Ferner ist $\varrho'(\xi,\eta) = \varrho'((x_n)_n,(y_n)_n) = 0$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$ ist. ϱ' erfüllt also die Eigenschaften einer Metrik auf Z, bis auf die Eigenschaft (ii).
Wir führen daher auf Z die folgende Relation ein:

$$\xi \sim \eta, \quad \text{falls } \varrho'(\xi,\eta) = 0 \text{ ist.}$$

Aus (i), (ii′), (iii) und (iv) ersieht man leicht, dass hierdurch eine Äquivalenzrelation auf Z definiert wird, und wir setzen

$$Y := Z/\sim \ .$$

Sind $\overline{x},\overline{y} \in Y$ zwei Äquivalenzklassen, und sind $\xi \in \overline{x},\ \eta \in \overline{y}$ zwei Repräsentanten aus Z, so setzen wir

$$\varrho(\overline{x},\overline{y}) := \varrho'(\xi,\eta) \ .$$

Wiederum aus (i) – (iv) ersieht man, dass ϱ wohldefiniert ist. Sind nämlich beispielsweise $\xi,\xi' \in \overline{x},\ \eta \in \overline{y}$, so ist

$$\varrho'(\xi,\eta) \leq \varrho'(\xi,\xi') + \varrho'(\xi',\eta) = \varrho'(\xi',\eta) \ ,$$

und ebenso ist $\varrho'(\xi',\eta) \leq \varrho'(\xi,\eta)$, so dass $\varrho'(\xi,\eta) = \varrho'(\xi',\eta)$ ist.
Aus der Definition von ϱ ergibt sich sofort, dass ϱ ebenfalls die Eigenschaften (i), (ii′), (iii) und (iv) erfüllt. Zusätzlich gilt jedoch noch

(ii) $\varrho(\overline{x},\overline{y}) = 0$ genau dann, wenn $\overline{x} = \overline{y}$, d.h. ϱ ist eine Metrik auf Y.

Ist nämlich $\varrho(\overline{x},\overline{y}) = 0$, und sind $\xi \in \overline{x},\ \eta \in \overline{y}$, so ist $\varrho'(\xi,\eta) = 0$, d.h. $\xi \sim \eta$ und somit $\overline{x} = [\xi] = [\eta] = \overline{y}$.
Weiter wird durch

$$\varphi : X \to Y,\ x \mapsto [(x)_n],$$

eine Isometrie von X in Y definiert, denn es ist für $x,y \in X$

$$\varrho([(x)_n],\ [(y)_n]) = \varrho'((x)_n,(y)_n) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y) \ ;$$

hier ist für $x \in X$ mit $(x)_n$ die konstante Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = x$ für alle n gemeint.

Behauptung: $\overline{\varphi(X)} = Y$.

Ist nämlich $\overline{x} \in Y$, so sei $\xi = (x_n)_n \in \overline{x}$. Dann ist

$$\varrho(\overline{x},\varphi(x_n)) = \varrho'((x_k)_k,(x_n)_k) = \lim_{k\to\infty} d(x_k,x_n) \ .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $(x_k)_k$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_k, x_n) < \varepsilon$ ist für alle $k, n \geq N$. Insbesondere ist für $n \geq N$

$$\varrho(\overline{x}, \varphi(x_n)) = \lim_{k\to\infty} d(x_k, x_n) \leq \varepsilon \ .$$

Folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(\overline{x}, \varphi(x_n)) = 0$. Dies zeigt, dass jeder Punkt $\overline{x}$ von Y ein Berührungspunkt von $\varphi(X)$ ist.

Schließlich müssen wir noch die Vollständigkeit von Y nachweisen. Sei dazu $(\overline{y}_n)_n$ eine Cauchy-Folge in Y. Da $\varphi(X)$ dicht in Y ist, gibt es eine Folge $(x_n)_n$ in X mit

$$\rho(\overline{y}_n, \varphi(x_n)) < 1/(n+1) \ .$$

Hieraus folgt leicht, dass auch die Folge $(\varphi(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge in Y ist. Da jedoch

$$\varrho(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) = d(x_n, x_m)$$

ist, ist die Folge $\xi = (x_n)_n$ somit eine Cauchy-Folge in X. Es sei $\overline{y} := [\xi] \in Y$. Dann ist nach dem Beweis der vorangegangenen Behauptung

$$\overline{y} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)_n \quad \text{in } Y \ .$$

Ferner ist offenbar $\lim_{n\to\infty} \rho(\overline{y}_n, \varphi(x_n)) = 0$, und somit auch

$$\overline{y} = \lim_{n\to\infty} \overline{y}_n \quad \text{in } Y \ .$$

Die Folge $(\overline{y}_n)_n$ konvergiert also in Y.

Q.E.D.

Kapitel 4

Stetige lineare Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen

Satz 4.1 *Seien* $(V, \|\cdot\|_V)$ *und* $(W, \|\cdot\|_W)$ *normierte Vektorräume über* $\mathbb{K}$*, sowie* $v \in V$*. Für eine lineare Abbildung* $T : V \to W$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) T *ist stetig in* $0 \in V$*.*

(b) T *ist stetig in* v*.*

(c) T *ist global stetig.*

(d) T *ist eine* **beschränkte** *lineare Abbildung, d.h. es gibt eine Konstante* $C \geq 0$ *mit*

$$\|T(x)\|_W \leq C\|x\|_V \text{ für alle } x \in V.$$

Beweis. (a) $\iff$ (b):
Da $\|T(x) - T(v)\|_W = \|T(x-v)\|_W = \|T(x-v) - T(0)\|_W$ ist für alle $x, v \in V$, folgt die Äquivalenz von (a) und (b) sofort aus dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium in Satz 3.17.

Die Äquivalenz von (a),(b) mit (c) ist offensichtlich, da ja $v \in V$ beliebig ist .

(a) $\Rightarrow$ (d): Ist T stetig in 0, so gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$\|T(z)\|_W < 1 \text{ für alle } z \in V \text{ mit } \|z\|_V < \delta\ .$$

Ist nun $x \in V \setminus \{0\}$ beliebig, so setzen wir $z := \frac{\delta}{2\|x\|_V}x$. Dann ist $\|z\|_V = \frac{\delta}{2} < \delta$, folglich

$$\|T(x)\|_W = \|T(\frac{2\|x\|_V}{\delta}z)\|_W = \frac{2\|x\|_V}{\delta}\|T(z)\|_W < \frac{2}{\delta}\|x\|_V\ .$$

Somit gilt die Abschätzung in (d) mit $C := 2/\delta$.

(d) $\Rightarrow$ (c): Aus der Abschätzung in (d) folgt:

$$\|T(x) - T(v)\|_W \leq C\|x - v\|_V \ , \quad \forall x, v \in V,$$

woraus sogar *Lipschitz- Stetigkeit* von T folgt.

Q.E.D.

Bemerkung 4.2 Um die Schreibweise zu erleichtern, werden wir in Zukunft die Norm $\|\cdot\|_V$ auf einem normierten Vektorraum in der Regel einfach mit $\|\cdot\|$ bezeichnen, auch wenn es sich mitunter um Normen auf verschiedenen normierten Vektorräumen handeln wird, die wir so mit demselben Symbol belegen werden.

Beispiele 4.3 (a) Sei V der Banachraum $C([a, b])$, versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} \ ,$$

(vgl. Satz 2.3). Ferner sei $I : C([a, b]) \to \mathbb{C}$ die durch das Integral definierte lineare Abbildung

$$I(f) := \int_a^b f(x)\, dx, \quad f \in C([a, b]) \ .$$

Dann ist I stetig, denn es gilt die Abschätzung

$$|I(f)| \leq (b - a)\|f\|_\infty \ .$$

(b) Sei V der lineare Teilraum $C^1([0, 1])$ von $W := C([0, 1])$, versehen mit der Supremumsnorm, und sei

$$D : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$$

die durch die Differentiation $D(f) := f'$ gegebene lineare Abbildung. D ist nicht stetig:

Für die Funktionen $f_n \in C^1([0, 1]),\ f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$, gilt nämlich: $\|f_n\|_\infty = 1,\ \|D(f_n)\|_\infty = n$. Es gibt daher keine Konstante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\|D(f_n)\|_\infty \leq C\|f_n\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition. Es sei $T : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen. Nach Satz 4.1 ist T beschränkt, so dass

$$\|T\| = \|T\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|T(x)\| : \ x \in V,\ \|x\| \leq 1\}$$

endlich ist. Es gilt dann offenbar

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \quad \text{für alle } x \in V \ , \tag{4.1}$$

da für $x \neq 0$ die Abschätzung $\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq \|T\|$ zutrifft.

Ferner ist $\|T\|$ offenbar die kleinste Konstante C, für welche die Abschätzung in Teil (d) von Satz 4.1 gilt.

Z.B. ist $\|I\| = 1$, wobei I den identischen Operator $x \mapsto x$ bezeichne.

Wir bezeichnen eine stetige lineare Abbildung $T : V \to W$ auch als **beschränkten linearen Operator**, und schreiben anstelle von $T(x)$ oftmals auch kurz Tx.
$L(V, W)$ bezeichne die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $T : V \to W$.

Sind $T, S \in L(V, W),\ \lambda \in \mathbb{K},\ x \in V$, so gilt nach (4.1):

$$\begin{aligned} \|(T+S)(x)\| &= \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leq \|T\|\ \|x\| + \|S\|\ \|x\| \\ &= (\|T\| + \|S\|)\|x\|, \\ \|(\lambda T)(x)\| &= \|\lambda Tx\| = |\lambda|\ \|Tx\|, \end{aligned}$$

woraus folgt: $\lambda T,\ T + S \in L(V, W)$, und

$$\begin{aligned} \|\lambda T\| &= |\lambda|\ \|T\|, \\ \|T + S\| &\leq \|T\| + \|S\|. \end{aligned}$$

Ferner ist offenbar $\|T\| = 0$ genau dann, wenn $Tx = 0 \quad \forall x \in V$, d.h. wenn $T = 0$.
Dies zeigt, dass $L(V, W)$ einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet, und dass $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ eine Norm auf $L(V, W)$ ist, die sogenannte **Operatornorm**. Diese werden wir stets auf $L(V, W)$ verwenden.

Beispiel 4.4 $V = \mathbb{R}^n,\ W = \mathbb{R}^m$.
Bezeichnen $e_1, \ldots, e_n$ und $f_1, \ldots, f_m$ die kanonischen Basen des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, und ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, so gilt für $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \in \mathbb{R}^n$:

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} x_k T e_k \ ,$$

wobei Te_k sich eindeutig darstellen lässt als

$$Te_k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} f_j, \qquad a_{jk} \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Somit ist

$$Tx = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \right) f_j. \tag{4.3}$$

Daher identifiziert man in der linearen Algebra bekanntlich jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit der $m\times n$-Matrix $A := (a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}}$, und die Anwendung von T auf x lässt sich durch Matrixmultiplikation von A mit dem Spaltenvektor ${}^t x$ darstellen, d.h.

$$
{}^t(Tx) = A \cdot {}^t x, \qquad {}^t x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{4.4}
$$

Konvention: Wann immer wir eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine Matrix bezüglich der kanonischen Basen dieser Räume beschreiben, werden wir daher die Vektoren als *Spaltenvektoren* betrachten, und T durch *Linksmultiplikation* mit einer $m \times n$-Matrix A darstellen:

$$
T(x) = A \cdot x, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{4.5}
$$

Schreiben wir die Matrix A in der Form $A = (A_1, \dots, A_n)$, wobei $A_k := \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ den k-ten Spaltenvektor der Matrix A bezeichne, so gilt also

$$
T(x) = A \cdot x = \sum_{k=1}^{n} x_k A_k, \qquad \text{falls } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{4.6}
$$

Es stellt sich die Frage, ob es unstetige lineare Abbildungen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt; diese werden wir in Satz 4.7 beantworten.

Bemerkung 4.5 Ist $V = W$, und sind $S, T \in L(V, V)$, so ist auch $S \circ T \in L(V, V)$, und man sieht leicht:

$$
\|S \circ T\| \leq \|S\| \; \|T\| \,. \tag{4.7}
$$

$L(V, V)$ bildet bzgl. der Addition und Komposition beschränkter linearer Operatoren somit sogar eine **normierte Algebra** (d.h. eine Algebra $(A, +, \cdot)$ über $\mathbb{K}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$, so dass $(A, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum ist, und so dass für alle $a, b \in A$ gilt: $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \; \|b\|$. Besitzt A ein Einselement I, so verlangt man zusätzlich $\|I\| = 1$).

Satz 4.6 *Ist W vollständig, so ist auch $L(V, W)$ vollständig. Insbesondere ist $L(V, V)$ eine* **Banach-Algebra***, d.h. eine vollständig normierte Algebra, falls V ein Banach-Raum ist.*

Beweis. Sei $(T_j)_j$ eine Cauchy-Folge in $L(V,W)$, d.h. bzgl. der Operatornorm. Wegen

$$\|T_j(x) - T_k(x)\| \leq \|T_j - T_k\| \|x\|, \quad x \in V, \tag{4.8}$$

ist dann für jedes $x \in V$ auch die Folge $(T_j(x))_j$ eine Cauchy-Folge in W, und somit konvergent, da wir W als vollständig voraussetzen. Setze

$$T(x) := \lim_{j\to\infty} T_j(x) \in W, \quad x \in V.$$

Man zeigt dann leicht, dass $T : V \to W$ linear ist.
Sei nun $\varepsilon > 0$, und wähle $j_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\|T_j - T_k\| < \varepsilon$ für alle $j,k \geq j_0$. Da die Normfunktion stetig ist auf W, erhalten wir aus (4.8) dann im Limes für $k \to \infty$ auch $\|T_j(x) - T(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$, für jedes $x \in V$ und $j \geq j_0$. Folglich ist $\|T_j - T\| < \varepsilon$ für alle $j \geq j_0$. Schreiben wir $T = T_j + (T - T_j)$, und wählen zu $\varepsilon = 1$ ein j mit $\|T_j - T\| \leq 1$, so sind offenbar T_j und $T - T_j$ beschränkte lineare Operatoren, folglich auch T, und wir folgern, dass $T = \lim_{j\to\infty} T_j$ in $L(V,W)$. Q.E.D.

Satz 4.7 *Ist $V = \mathbb{K}^n$, so ist jede lineare Abbildung $T : \mathbb{K}^n \to W$ stetig, d.h. $L(\mathbb{K}^n, W)$ ist der Raum aller linearen Abbildungen $T : \mathbb{K}^n \to W$.*

Beweis. Es bezeichne $e_k = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ den k-ten Basisvektor der kanonischen Basis des $\mathbb{K}^n$. Setze $w_k := T(e_k) \in W,\ k = 1,\dots,n$. Für $x = (x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in \mathbb{K}^n$ gilt dann (man vergleiche dies mit (4.6)):

$$Tx = \sum_{k=1}^n x_k w_k,$$

also

$$\|Tx\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k w_k\| = \sum_{k=1}^n \|w_k\|\ |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n \|w_k\|^2\right)^{1/2} \|x\|_2.$$

Es folgt

$$\|Tx\| \leq C\|x\|_2, \quad \text{mit } C := \left(\sum_{k=1}^n \|w_k\|^2\right)^{1/2}.$$

Somit ist T beschränkt und folglich stetig.

Q.E.D.

Kapitel 5

Kompaktheit

5.1 Kompakte metrische Räume

Definition. Der metrische Raum (X, d) heiße **Folgen-kompakt**, wenn jede Folge $(x_n)_n$ in X (mindestens) eine konvergente Teilfolge besitzt.
Eine Teilmenge $Y \subset X$ heiße **Folgen-kompakt,** wenn Y als metrischer Teilraum von X Folgen-kompakt ist. Dies bedeutet gerade, dass jede Folge $(y_n)_n$ in Y (mindestens) eine in Y konvergente Teilfolge besitzt.
Der **Satz von Bolzano-Weierstraß** aus der Analysis I lässt sich nun auch folgendermaßen formulieren:

Jedes "kompakte" Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, ist Folgen-kompakt.

Satz 5.1 *Sind $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ zwei metrische Räume, und sind $K_1 \subset X_1$ und $K_2 \subset X_2$ Folgen-kompakte Teilmengen, so ist auch die Menge $K_1 \times K_2$ Folgen-kompakt in $(X_1 \times X_2, d)$, wobei d die Metrik (3.3) auf $X_1 \times X_2$ bezeichne.*

Beweis. Ist $((x_n, y_n))_n$ eine Folge in $K_1 \times K_2$, so gibt es zunächst wegen der Folgen-Kompaktheit von K_1 eine aufsteigende Indexfolge $(n_j)_j$ so, dass die Teilfolge $(x_{n_j})_j$ von $(x_n)_n$ in K_1 konvergiert. Aus der Teilfolge $(y_{n_j})_j$ von $(y_n)_n$ in K_2 lässt sich dann wiederum eine in K_2 konvergente Teilfolge $(y_{n_{j_k}})_k$ auswählen. Setzen wir $m_k := n_{j_k}$, so finden wir damit insgesamt eine aufsteigende Indexfolge $(m_k)_k$ derart, dass die Teilfolge $(x_{m_k})_k$ von $(x_n)_n$ in K_1 und die Teilfolge $(y_{m_k})_k$ von $(y_n)_n$ in K_2 konvergiert. Hieraus folgert man, dass die Teilfolge $((x_{m_k}, y_{m_k}))_k$ von $((x_n, y_n))_n$ in $K_1 \times K_2$ konvergiert.

Q.E.D.

Beispiel. Durch wiederholte Anwendung dieser Beobachtung erkennt man, dass jeder abgeschlossene Quader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ im $\mathbb{R}^n$ Folgen- kompakt ist.

Definitionen. Sei $Y \subset X$. Eine Familie $(U_\iota)_{\iota \in I}$ von Teilmengen von X heiße **Überdeckung** von Y, wenn gilt

$$Y \subset \bigcup_{\iota \in I} U_\iota.$$

Sie heiße **offene Überdeckung** von Y, wenn zusätzlich alle U_ι offen sind.

Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von Y aus Kugeln $B_\varepsilon(a_j),\ j = 1, \dots m$, welche allesamt den Radius ε haben, d.h.

$$Y \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_\varepsilon(a_j),$$

so heißt die Menge Y **total beschränkt** oder auch **präkompakt.**

Schließlich heiße der metrische Raum X **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Satz 5.2 *Sei $\mathfrak{X} = (X, d)$ ein Folgen-kompakter metrischer Raum. Dann gilt:*

(i) *X ist vollständig.*

(ii) *X ist beschränkt.*

(iii) *X ist total beschränkt.*

(iv) *X ist separabel.*

Beweis.

(i) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in X. Da X Folgen-kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Ist $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, so konvergiert auch die gesamte Folge $(x_n)_n$ gegen x, denn:

Ist $\varepsilon > 0$, so existieren ein $N \in \mathbb{N}$ sowie $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ für alle $m, n \geq N$, und $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon/2$ für alle $k \geq k_0$. Wähle $k \geq k_0$ so groß, dass $n_k \geq N$. Für $n \geq N$ folgt dann $d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

(ii) Wäre X unbeschränkt, so gäbe es zwei Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ in X mit

$$d(x_n, y_n) \to \infty\ .$$

Andererseits gibt es wegen der Folgen-Kompaktheit von X eine aufsteigende Folge $(n_k)_k$ in $\mathbb{N}$ so, dass beide Teilfolgen $(x_{n_k})_k$ und $(y_{n_k})_k$ in X konvergieren. Dies steht im Widerspruch zu

$$d(x_{n_k}, y_{n_k}) \to \infty \text{ für } k \to \infty\ .$$

(iii) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen einen Punkt $a_0 \in X$. Ist $B_\varepsilon(a_0)^c \neq \emptyset$, so wählen wir $a_1 \in B_\varepsilon(a_0)^c$. Ist weiter $(B_\varepsilon(a_0) \cup B_\varepsilon(a_1))^c \neq \emptyset$, so wählen wir $a_2 \in (B_\varepsilon(a_0) \cup B_\varepsilon(a_1))^c$, und fahren entsprechend fort. Dieses Verfahren muss abbrechen, denn andernfalls erhielten wir damit eine Folge $(a_n)_n$ in X, bei der der Abstand je zweier Folgenglieder stets größer als $\varepsilon > 0$ wäre, und welche somit keine konvergente Teilfolge besäße. Es muss also ein $k \in \mathbb{N}$ geben mit

$$X = B_\varepsilon(a_0) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(a_k) .$$

(iv) Wir wählen zu jedem $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, eine endliche Überdeckung $(B_{1/n}(a_{nj}))_{j=1,\dots,k_n}$ von X gemäß (iii), und setzen $A := \{a_{nj}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1},\ j = 1, \dots, k_n\}$. Dann ist A abzählbar, und es ist $\overline{A} = X$.

Ist nämlich $x \in X$, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ein j_n mit $x \in B_{1/n}(a_{nj_n})$. Folglich ist $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{nj_n}$. Q.E.D.

Eine keineswegs naheliegende, äquivalente Charakterisierung der Folgen-Kompaktheit wird durch folgende Definition gegeben:

Definition. Eine Teilmenge K von (X, d) heiße **kompakt**, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$ von K endlich viele Indizes $\iota_1, \dots, \iota_k \in I$ gibt mit

$$K \subset U_{\iota_1} \cup \cdots \cup U_{\iota_k} ,$$

d.h. wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Theorem 5.3 *Ein metrischer Raum (X, d) ist kompakt genau dann, wenn er Folgen-kompakt ist.*

Beweis. Wir beweisen beide zu zeigenden Implikationen durch Widerspruch.

Sei zunächst X kompakt, und sei $(x_n)_n$ eine Folge in X. Angenommen, keine Teilfolge von $(x_n)_n$ konvergiert gegen einen Punkt von X. Dann besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U_x, in der nur endlich viele Glieder der Folge liegen. Es gilt offenbar $X = \bigcup\limits_{x \in X} U_x$. Da X kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_m \in X$ mit $X = \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{x_k}$. Dann lägen aber in ganz X nur endlich viele Folgenglieder, was nicht möglich ist.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass X Folgen-kompakt ist. Sei $(U_\iota)_{\iota \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Angenommen, diese besitzt keine endliche Teilüberdeckung.

Nach Satz 5.2 können wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ endlich viele Kugeln mit Radius $1/n$ wählen, welche X überdecken.

Unsere Voraussetzung impliziert dann, dass mindestens eine dieser Kugeln mit Radius $1/n$ nicht durch endlich viele der Mengen U_ι überdeckt wird, sagen wir die Kugel $B_n = B_{1/n}(z_n)$.
Da X Folgen-kompakt ist, besitzt die Folge $(z_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $(z_{n_j})_j$, welche gegen ein $z \in X$ konvergiert. Wähle den Index $\iota_0 \in I$ so, dass $z \in U_{\iota_0}$. Da U_{ι_0} offen ist, gibt es eine Kugel $B_\varepsilon(z)$, $\varepsilon > 0$, welche in U_{ι_0} enthalten ist. Wähle N so groß, dass $\frac{2}{N} < \varepsilon$, und anschließend $n = n_j > N$ so, dass

$$d(z_n, z) < 1/N$$

gilt. Für jedes $x \in B_n$ gilt dann:

$$d(x, z) \leq d(x, z_n) + d(z_n, z) < \frac{1}{n} + \frac{1}{N} < \frac{2}{N} < \varepsilon,$$

d.h. es ist $B_n \subset B_\varepsilon(z) \subset U_{\iota_0}$. Dies widerspricht der Wahl von B_n (da danach B_n sogar durch eine der Mengen U_ι überdeckt wird). Dieser Widerspruch zeigt, dass X doch durch endlich viele der Mengen U_ι überdeckt werden kann.

Q.E.D.

Satz 5.4 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $A \subset X$ eine Teilmenge.*

(i) *A ist kompakt in X genau dann, wenn A als metrischer Teilraum von (X, d) kompakt ist.*

(ii) *Ist A kompakt, so ist A abgeschlossen in X.*

(iii) *Ist (X, d) kompakt, so ist A kompakt genau dann, wenn A abgeschlossen ist in X.*

Beweis.

(i) Dies folgt sofort aus der Definition der Kompaktheit und der Tatsache, dass $V \subset A$ offen im metrischen Teilraum A ist genau dann, wenn es eine offene Teilmenge U von X gibt mit $V = A \cap U$ (vgl. Satz 3.11).

(ii) Ist A kompakt, so ist A Folgen-kompakt. Ist somit $(a_n)_n$ eine Folge in A, welche gegen ein $x \in X$ konvergiert, so besitzt diese eine in A konvergente Teilfolge. Folglich ist $x \in A$, und damit A abgeschlossen.

(iii) Sei (X, d) kompakt, und sei A abgeschlossen in X. Ist dann $(U_\iota)_{\iota \in I}$ eine offene Überdeckung von A, so ist durch die Mengen U_ι, $\iota \in I$, und A^c eine offene Überdeckung von X gegeben. Da X kompakt ist, gibt es folglich $\iota_1, \ldots, \iota_k \in I$ mit

$$A^c \cup U_{\iota_1} \cup \cdots \cup U_{\iota_k} \supset A \ .$$

Hieraus folgt $U_{\iota_1} \cup \cdots \cup U_{\iota_k} \supset A$. Somit ist A kompakt.
Die Umkehrung ist nach (ii) klar.

Q.E.D.

Wir haben gesehen, dass jede kompakte Teilmenge von X abgeschlossen und beschränkt ist. Die Umkehrung hiervon gilt i.A. jedoch nicht.

Beispiel 5.5 Wir betrachten $\mathbb{N}$ mit der diskreten Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Dann ist $(\mathbb{N}, d)$ abgeschlossen und beschränkt, die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ beispielsweise enthält jedoch keine konvergente Teilfolge (eine solche müsste ab einem gewissen Index konstant sein).

Im $\mathbb{R}^n$ gilt jedoch das

Theorem 5.6 (Satz von Heine-Borel) *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Nach Satz 5.2 (ii) und Satz 5.5 (ii) bleibt nur noch eine Richtung zu zeigen. Sei also A abgeschlossen und beschränkt. Wir zeigen, dass A kompakt ist. Da A beschränkt ist, können wir ein $R > 0$ so wählen, dass für jedes $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ gilt:

$$\max_{j=1,\ldots,n} |a_j| \leq R \ ,$$

d.h. A liegt im Würfel $W := [-R, R]^n$. Dieser ist aber nach dem Satz 5.1 folgenden Beispiel Folgen-kompakt, also kompakt. Somit ist A eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge, folglich nach Satz 5.4 (iii) kompakt.

Q.E.D.

Wir können nun einige Sätze, welche wir für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen bewiesen hatten, erheblich verallgemeinern.

Theorem 5.7 *Es seien X, Y metrische Räume und $f \in C(X,Y)$. Ist $K \subset X$ kompakt, so ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt.*

Beweis. Sei $(U_\iota)_{\iota\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Nach Satz 3.19 sind die Mengen $V_\iota := f^{-1}(U_\iota)$ offen in X, und es gilt: $K \subset \bigcup_{\iota\in I} V_\iota$. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Indizes $\iota_1, \ldots, \iota_m$ mit $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} V_{\iota_k}$. Hieraus folgt $f(K) \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{\iota_k}$.

Q.E.D.

Satz 5.8 (Satz vom Maximum) *Seien X ein kompakter metrischer Raum und $f \in C(X, \mathbb{R})$. Dann ist die Funktion f beschränkt und nimmt ein globales Maximum und ein globales Minimum an, d.h. es gibt Punkte $p, q \in X$ mit*

$$f(p) = \sup\{f(x) : x \in X\}, \quad f(q) = \inf\{f(x) : x \in X\} \ .$$

Beweis. Nach Theorem 5.7 ist $K := f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Sei $\alpha = \sup(K)$. Dann ist $\alpha \in \mathbb{R}$, und es existiert eine Folge $(a_n)_n$ in K mit $\alpha = \lim a_n$. Folglich ist $\alpha \in K$. Dies beweist die Behauptung über das Maximum von f, und diejenige über das Minimum wird analog bewiesen.

Q.E.D.

Satz 5.9 *Seien $(X, d), (Y, \varrho)$ metrische Räume. Ist X kompakt, so ist jede stetige Funktion $f \in C(X, Y)$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, gibt es zu jedem $z \in X$ ein $\delta(z) > 0$ so, dass gilt:

$$\varrho(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in B_{\delta(z)}(z) \ .$$

Da X kompakt ist, und da $X = \bigcup_{z \in X} B_{\delta(z)/2}(z)$, gibt es Punkte $z_1, \ldots, z_k \in X$ mit

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} B_{\delta(z_j)/2}(z_j) \ .$$

Wir setzen $\delta := \frac{1}{2} \min\{\delta(z_1), \ldots, \delta(z_k)\}$. Seien nun x, u zwei beliebige Punkte in X mit $d(x, u) < \delta$. Zu x gibt es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $x \in B_{\delta(z_j)/2}(z_j)$, d.h. $d(x, z_j) < \delta(z_j)/2$. Mittels der Dreiecksungleichung folgt dann $d(u, z_j) < \delta(z_j)$, d.h. $u \in B_{\delta(z_j)}(z_j)$. Somit erhalten wir

$$\varrho(f(x), f(z_j)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \varrho(f(u), f(z_j)) < \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

also

$$\varrho(f(x), f(u)) < \varepsilon \ .$$

Q.E.D.

5.2 Äquivalenz der Normen auf dem $\mathbb{R}^n$

Wir haben bereits in den Übungen gesehen, dass alle p-Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, und somit auch dieselbe Topologie und denselben Konvergenzbegriff induzieren. Allgemeiner gilt sogar

Satz 5.10 *Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige, feste Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty$ ist, woraus die Behauptung folgt.
Es bezeichne $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \mathbb{R}^n$ folgt:

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j e_j\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \; \|e_j\| \leq c_2 \|x\|_\infty, \tag{5.1}$$

mit $c_2 := \sum\limits_{j=1}^{n} \|e_j\|$.
Aus (5.1) folgt insbesondere, dass die Abbildung $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ (Lipschitz-)stetig ist, da

$$|\; \|x\| - \|y\| \;| \leq \|x-y\| \leq c_2 \|x-y\|_\infty \; .$$

Es bezeichne nun $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ die „Einheitssphäre“ bzgl. der Maximumsnorm (welche geometrisch eine Würfelfläche ist). S ist abgeschlossen und beschränkt, und somit kompakt.
Nach Satz 5.8 nimmt die Abbildung $\|\cdot\|$ daher auf S ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $y^0 \in S$ mit

$$\|y^0\| \leq \|y\| \text{ für alle } y \in S \; .$$

Es ist aber $c_1 := \|y^0\| > 0$, da andernfalls $y^0 = 0$ wäre und somit $y \notin S$. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n,\; x \neq 0$, folgt:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \; \|x\|_\infty \left(\frac{x}{\|x\|_\infty} \right) \right\| = \|x\|_\infty \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \\ &\geq \|x\|_\infty c_1 \; . \end{aligned}$$

Zusammen mit (5.1) folgt daher (für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$):

$$c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_\infty \; .$$

Q.E.D.

Da jeder endlich-dimensionale relle Vektorraum isomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ ist, folgert man leicht (Übung):

Korollar 5.11 *Sei E ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Dann sind je zwei Normen auf E äquivalent.*

Kapitel 6

Zusammenhang

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heiße **zusammenhängend**, wenn es kein Paar nichtleerer offener Mengen A und B in X gibt mit

$$X = A \cup B \quad \text{und} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Eine Teilmenge von X heiße **zusammenhängend,** wenn sie als metrischer Teilraum von X zusammenhängend ist.

Satz 6.1 *Sei $M \subset X$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *M ist zusammenhängend.*

(ii) *$\emptyset$ und M sind die einzigen Teilmengen von M, welche in der Relativtopologie von M sowohl offen als auch abgeschlossen sind.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $M = X$. Ist X zusammenhängend, und ist $\emptyset \neq A \subset X$ offen und abgeschlossen, so gilt dasselbe für $B = A^c$. Ferner ist $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$. Somit muss $B = \emptyset$ sein, d.h. $A = X$.
Gilt umgekehrt (ii), und sind A, B offen in X mit $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, so ist wegen $A = B^c$ die Menge A sowohl offen als auch abgeschlossen. Ist $A \neq \emptyset$, so muss nach (ii) folglich $A = X$ sein, d.h. $B = \emptyset$.

Q.E.D.

Theorem 6.2 *Sei M eine zusammenhängende Teilmenge des metrischen Raumes (X, d), und sei f eine stetige Abbildung von X in den metrischen Raum (Y, ϱ). Dann ist das Bild $f(M)$ zusammenhängend.*

Beweis. Indem wir Y durch $f(M)$ ersetzen, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass f surjektiv ist.
Falls dann Y nicht zusammenhängend ist, so gibt es nichtleere offene Teilmengen A, B in Y mit $Y = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Dann ist

$$\begin{aligned} X &= f^{-1}(Y) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \\ & \quad f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \end{aligned}$$

wobei die Mengen $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ nichtleer und, nach Satz 3.19, offen sind. Somit ist X nicht zusammenhängend.

Q.E.D.

Satz 6.3 *Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend dann und nur dann, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. Per „Kontraposition“:
Wir nehmen zunächst an, dass M kein Intervall ist. Dann gibt es Punkte $a < x < b$ mit $a, b \in M$ und $x \notin M$. Die Mengen $A := M \cap]-\infty, x[$ und $B := M \cap]x, \infty[$ sind dann offen in M, nichtleer, und es ist $A \cup B = M$, $A \cap B = \emptyset$. Somit ist M nicht zusammenhängend.

Sei nun umgekehrt $M \subset \mathbb{R}$ nicht zusammenhängend. Dann gibt es nichtleere, in M offene Teilmengen A, B von M mit $M = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Wähle Punkte $a \in A,\ b \in B$. Es sei o.B.d.A. $a < b$. Wir zeigen, dass dann $[a, b] \not\subset M$, so dass M kein Intervall ist. Angenommen, es wäre $[a, b] \subset M$. Sei dann

$$c := \sup A \cap [a, b].$$

Dann ist $c \in [a, b] \subset M$, und, da A abgeschlosssen in M ist, ist auch $c \in A$. Da $b \in B$ ist, folgt: $c \in A \cap [a, b[$. Aufgrund der Offenheit von A in M gibt es andererseits ein $\varepsilon > 0$ so, dass $c + \varepsilon \in A \cap [a, b[$, was der Definition von c widerspricht.

Q.E.D.

Korollar 6.4 (Verallgemeinerter Zwischenwertsatz) *Sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum, und sei $f \in C(X, \mathbb{R})$. Sind dann $a, b \in X$, und ist $f(a) \leq f(b)$, so gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.*

Beweis. Da $f(X)$ zusammenhängend in $\mathbb{R}$ ist, ist $f(X)$ ein Intervall. Somit ist $[f(a), f(b)] \subset f(X)$.

Q.E.D.

Definition. Sei A eine Teilmenge des metrischen Raumes (X, d). Zur Erinnerung; Ein **Weg in** A ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to A$. γ **verbinde** die Punkte x und y aus A, falls $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.
Die Menge A heiße **wegzusammenhängend**, falls je zwei Punkte aus A durch einen Weg in A verbunden werden können.

Satz 6.5 *Jede wegzusammenhängende Teilmenge A von X ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $A = X$. Ist X nicht zusammenhängend, so gibt es nichtleere offene Teilmengen U_1, U_2 von X mit $U_1 \cup U_2 = X$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Seien $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$. Wäre nun X wegzusammenhängend, so gäbe es einen Weg $\gamma : [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x_1$ und $\gamma(b) = x_2$. Setze $V_j = \gamma^{-1}(U_j) \subset [a, b]$, $j = 1, 2$. Dann ist

$a \in V_1, \; b \in V_2$. Ferner ist V_j offen in $[a, b]$, und $V_1 \cup V_2 = [a, b], V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Folglich wäre das Intervall $[a, b]$ nicht zusammenhängend, im Widerspruch zu Satz 6.3.

Q.E.D.

Bemerkungen. a) In vielen Fällen ist der Wegzusammenhang einer Menge erheblich leichter nachzuweisen als ihr Zusammenhang.

b) Die Umkehrung von Satz 6.5 gilt jedoch nicht: es gibt z.B. zusammenhängende Teilmengen in $\mathbb{R}^2$, welche nicht wegzusammenhängend sind.

Kapitel 7

Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

7.1 Partielle Ableitungen

Es sei $(F, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller Vektorraum. Für $\xi \in F$ und $t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$, wollen wir anstelle von $\frac{1}{t}\xi$ auch $\frac{\xi}{t}$ schreiben.

Definition. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ offen. Eine Abbildung $f : I \to F$ heiße im Punkte $t_0 \in I$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

in F existiert, d.h. wenn es ein $a \in F$ gibt mit

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - a \right\| = 0 \ .$$

Wie im Falle einer reell- oder komplexwertigen Funktion (d.h. $F = \mathbb{R}$ oder $F = \mathbb{C}$) sieht man leicht, dass der Grenzwert a eindeutig ist. Wir bezeichnen ihn mit

$$\frac{df}{dt}(t_0) \quad \text{oder auch mit} \quad \dot{f}(t_0).$$

Der Vektor $\frac{df}{dt}(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \in F$ heißt die **(Newton-) Ableitung von f in** t_0. Setzen wir ähnlich wie in der Analysis I

$$r(t) := \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - a,$$

so gilt also $\lim_{t \to t_0} r(t) = 0$ in F, und

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)a + \varphi(t - t_0),$$

mit $\varphi(t - t_0) := (t - t_0)r(t)$. Offenbar gilt hierbei

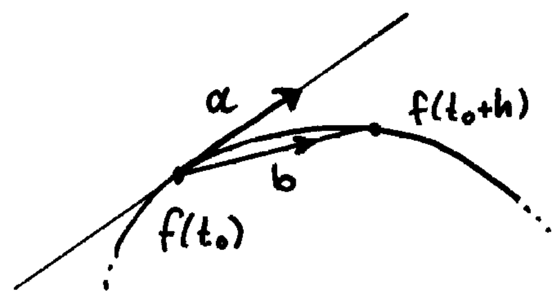
$$\lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t - t_0)}{|t - t_0|} = 0 \ ,$$

d.h.

$$\varphi(t - t_0) = o(|t - t_0|).$$

Geometrische Interpretation. Im "Regelfall" wird das Bild oder die Spur der Abbildung $f : I \to F$ eine Kurve im Raum F beschreiben, und der Vektor $a = \frac{df}{dt}(t_0)$ liegt anschaulich tangential zur Spur $f(I)$ der Kurve f im Punkte $f(t_0)$.

$$b = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \ .$$



Unsere vorangehenden Überlegungen zeigen zudem, dass $f : I \to F$ im Punkte t_0 differenzierbar ist und die Ableitung $a = \frac{df}{dt}(t_0)$ besitzt genau dann, wenn die affin-lineare Abbildung

$$g : t \mapsto f(t_0) + (t - t_0)a$$

von $\mathbb{R}$ in F (dies ist gerade das Taylorpolynom von f zum Punkt t_0) **tangential** an f im Punkte t_0 ist, d.h. wenn

$$f(t) = g(t) + o(|t - t_0|)$$

für t in einer Umgebung von t_0 gilt.
Falls $a = \dot{f}(t_0) \neq 0$ ist, so bezeichnet man das Bild $g(\mathbb{R})$ von g als die **Tangente** an die parametrisierte Kurve f **in** t_0. Offenbar ist $g(\mathbb{R})$ diejenige Gerade im Vektorraum F, welche parallel zum eindimensionalen Unterraum $\mathbb{R}\,\dot{f}(t_0)$ durch den Punkt $f(t_0)$ verläuft.

Im Falle $F = \mathbb{R}^n$ schreiben wir $f : I \to \mathbb{R}^n$ als $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Dann ist nach Satz 3.12 f in $t_0 \in I$ differenzierbar genau dann, wenn alle Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n$ in t_0 differenzierbar sind, und es gilt dann:

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \Big(\frac{df_1}{dt}(t_0), \ldots, \frac{df_n}{dt}(t_0)\Big) \ . \tag{7.1}$$

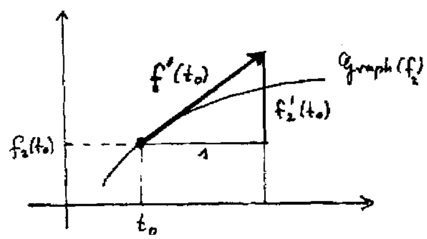
Beispiele: a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(t) := (t, \sin t, te^t)$. Dann ist

$$\frac{df}{dt}(t) = (1, \cos t, (1+t)e^t).$$

b) Sei $f(t) := (\cos t, \sin t, t),\ t \in \mathbb{R}$. Die Spur von f ist eine spiralförmige Schraubenlinie. Hier ist $\dot{f}(t_0) = (-\sin t_0, \cos t_0, 1)$. Für $t_0 = 0$ folgt insbesondere

$$f(0) = (1,0,0), \quad \dot{f}(0) = (0,1,1), \text{und somit}$$
$$g(t) = (1,0,0) + t(0,1,1) = (1,t,t).$$

c) Sei $f(t) = (t, f_2(t))$, d.h. die Spur von f ist gerade der Graph von f_2.
Dann ist $\frac{df}{dt}(t_0) = (1, f_2'(t_0))$, und man sieht (vgl. dies mit der Schulmathematik) dass $f'(t_0)$ gerade die Steigung der Tangente an den Graphen von f_2 im Punkt $(t_0, f_2(t_0)$ ist:



Bemerkung In der Physik könnte z.B. $f(t)$ die Position eine Teilchens im dreidimensionalen Raum $F = \mathbb{R}^3$ zum Zeitpunkt t bezeichnen. Dann ist die Ableitung $v(t) := \dot{f}(t) \in \mathbb{R}^3$ gerade der **Geschwindigkeitsvektor** zum Zeitpunkt t, dessen Richtung die Bewegungsrichtung des Teilchens zum Zeitpunkt t beschreibt und dessen Länge $\|v(t)\|_2$ den Betrag der Geschwindigkeit darstellt.

Es seien nun E und F zwei normierte reelle Vektorräume (z.B. $E = \mathbb{R}^n$ und $F = \mathbb{R}^m$).

Definitionen. Es sei $f : U \to F$ eine Abbildung der offenen Teilmenge U von E in F. Ferner sei $e \in E$ ein Vektor. Nehmen wir an, dass $e \neq 0$ ist, so definiert e eine „Richtung“ im Vektorraum E. f heiße dann im Punkte $x_0 \in U$ **in Richtung von** e oder **partiell nach** e **differenzierbar**, wenn die Abbildung

$$h_e : t \mapsto f(x_0 + te)$$

in $t = 0$ differenzierbar ist. Der Grenzwert

$$a := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} = \frac{dh_e}{dt}(0) \quad \in F$$

ist die **partielle Ableitung von** f **nach** e im Punkte x_0. Wir schreiben dafür

$$a =: \frac{\partial f}{\partial e}(x_0).$$

Bemerkung. Da die Abbildung $t \mapsto x_0 + te$ von $\mathbb{R}$ in E stetig ist, ist $I := \{t \in \mathbb{R} : x_0 + te \in U\}$ eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$, so dass die Definition Sinn macht.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := x^2 + e^{xy}$, und sei $e := (2,3)$. Dann ist z.B. $f((1,0)+te) = f((1,0)+(2t,3t)) = f(1+2t,3t) = (1+2t)^2 + e^{3t+6t^2}$, also

$$\frac{\partial f}{\partial e}(1,0) = (4(1+2t) + (3+12t)e^{3t+6t^2})\Big|_{t=0} = 7.$$

Der Fall $E = \mathbb{R}^n$:

Hier bezeichne $e_1, \ldots, e_n$ die **kanonische Basis** des $\mathbb{R}^n$, d.h. es sei e_i der i-te Einheitsvektor

$$e_i = (0, \ldots, \overbrace{0, 1, 0}^{i\text{-te Stelle}}, \ldots, 0)\ .$$

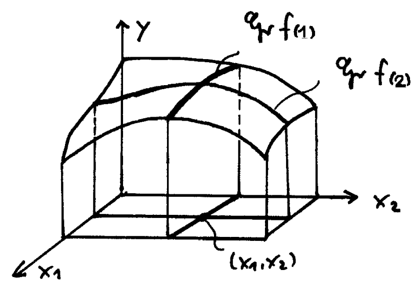
Dann schreibt man für $\frac{\partial f}{\partial e_i}$ auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oder $D_i f$ und bezeichnet $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ als die **partielle Ableitung von f nach der i-ten Koordinate im Punkte** x. Es ist also

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\\ &\quad = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}\end{aligned}$$

d.h. wir können bei festgehaltenen Koordinaten $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ als „gewöhnliche“ Ableitung der Abbildung

$$f_{(i)} : t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

im Punkte $x_i \in \mathbb{R}$ auffassen.



Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to F$ heiße **partiell differenzierbar**, falls $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ für alle $x \in U$ und $i = 1, \ldots, n$ existiert. f heiße **stetig partiell differenzierbar**, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to F$, $i = 1, \ldots, n$, stetig sind.

Beispiel 7.1 Sei $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\ .$$

r ist in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\|x\|_2}, \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0\ .$$

Halten wir nämlich $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ fest, so ist die Abbildung $t \mapsto \sqrt{x_1^2 + \cdots + t^2 + \cdots + x_n^2}$ für alle t differenzierbar, falls nicht alle x_j mit $j \neq i$ null sind, und andernfalls für $t \neq 0$, und die Ableitung nach t für $t = x_i$ ist

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|_2}\ .$$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung einer Abbildung $f : U \to F$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, definiert man rekursiv:

Definition. $f : U \to F$ heiße $(k+1)$-**mal partiell differenzierbar**, wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f\right)\right)\cdots\right) : U \to F$ (mit $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$), partiell differenzierbar sind.
Die Funktion $f : U \to F$ heiße k-**mal stetig partiell differenzierbar**, wenn sie k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig auf U sind.
Sind $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, so schreibt man für

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(\cdots(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f))\cdots) \quad \text{auch} \quad \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} f\ .$$

$C^k(U, F)$ bezeichne den Vektorraum aller k-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f : U \to F$.
Beispiel. Für die Funktion $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 7.1 ist für $x \neq 0$ und $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i}(x) = x_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)(x) = x_i \frac{-1}{r(x)^2}\,\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = -\frac{x_i x_j}{\|x\|_2^3},$$

und für $i = j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} &:= \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\|x\|_2} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)(x) \\ &= \frac{1}{\|x\|_2} - \frac{x_i^2}{\|x\|_2^3} = \frac{\|x\|_2^2 - x_i^2}{\|x\|_2^3}\ . \end{aligned}$$

Offenbar ist hier $\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}$. Gilt dies wohl allgemein?

7.2 Totale Differenzierbarkeit

Es seien nun E und F zwei normierte reelle Vektorräume, sowie U eine offene Teilmenge von E und $x_0 \in U$.
Ist die Abbildung $f : U \to F$ in Richtung des Vektors $e \in E \setminus \{0\}$ differenzierbar, so gilt:

$$f(x_0 + te) = f(x_0) + t\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) + \varphi(t) \tag{7.2}$$

für t nahe 0, mit $\varphi(t) = o(|t|)$.
Dies bedeutet, dass sich f entlang der affinen Geraden $\{x_0 + te : \ t \in \mathbb{R}\}$ durch x_0 in Richtung von e "immer besser" durch die affin-lineare Abbildung $x_0 + te \mapsto f(x_0) + t\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$ approximieren lässt, je kleiner $|t|$ wird.

Analog definieren wir:

Definition. Die Abbildung $f : U \to F$ heiße im Punkte $x_0 \in U$ (**total**) **differenzierbar**, falls es eine stetige lineare Abbildung $A \in L(E, F)$ gibt so, dass für alle $x \in U$ gilt:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x - x_0), \tag{7.3}$$

wobei φ eine Funktion auf der Nullumgebung $-x_0 + U$ ist mit

$$\varphi(x - x_0) = o(\|x - x_0\|), \text{ d.h. } \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0. \tag{7.4}$$

Äquivalent dazu ist:

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + A\xi + \varphi(\xi) \tag{7.5}$$

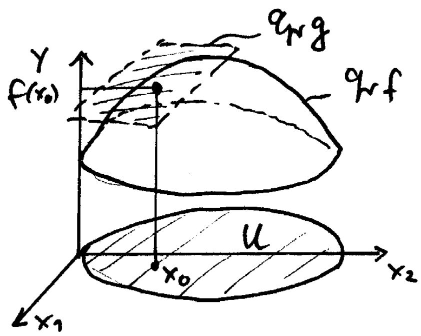
für alle ξ in einer Umgebung der Null, wobei φ eine auf einer Umgebung der Null definierte Funktion ist mit

$$\varphi(\xi) = o(\|\xi\|), \text{ d.h. } \lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0\ . \tag{7.6}$$

f besitzt dann also nahe x_0 eine "gute" Approximation durch die *stetige, affin-lineare Abbildung* $g : E \to F$,

$$g(x) := f(x_0) + A(x - x_0), \quad x \in E,$$

deren Graphen wir auch als den **affinen Tangentialraum** an den Graphen von f im Punkte $(x_0, f(x_0))$ bezeichnen.



Die lineare Abbildung $A \in L(E, F)$ heißt dann die **Ableitung von f im Punkte** x_0 und wird mit $Df(x_0)$ bezeichnet.

Die Ableitung im Punkte x_0 ist eindeutig: Sind nämlich $A, B \in L(E, F)$ mit

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi) &= f(x_0) + A\xi + \varphi(\xi) \\ &= f(x_0) + B\xi + \tilde{\varphi}(\xi) \end{aligned}$$

und

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = \lim_{\xi \to 0} \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{\|\xi\|} = 0,$$

so ist $(A - B)\xi = \psi(\xi) := \tilde{\varphi}(\xi) - \varphi(\xi)$ für alle ξ in einer Nullumgebung, mit $\lim\limits_{\xi \to 0} \frac{\psi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$. Für beliebiges $\eta \in E \setminus \{0\}$ folgt dann aber wegen der Linearität von $A - B$

$$(A - B)\eta = \frac{(A - B)(t\eta)}{t} = \frac{\psi(t\eta)}{t} \qquad \text{für genügend kleines } t \in \mathbb{R} \,,$$

also

$$(A - B)\eta = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(t\eta)}{t} = \|\eta\| \; \lim_{t \to 0} \frac{\psi(t\eta)}{\|t\eta\|} \; \mathrm{sign}(t) = 0 \;.$$

Somit ist $A - B = 0$.

Bemerkung. Die Differenzierbarkeit in einem festen Punkt x_0 ist offenbar eine **lokale Eigenschaft** einer Funktion, d.h. stimmen die Funktionen f und g auf einer Umgebung von x_0 überein, so ist f in x_0 differenzierbar genau dann, wenn g in x_0 differenzierbar ist, und es gilt dann: $Df(x_0) = Dg(x_0)$.

Satz 7.2 (Beziehung zwischen partieller und totaler Ableitung) *Die Abbildung $f : U \to F$ sei im Punkte $x_0 \in U \subset E$ total differenzierbar. Dann ist f in Richtung jedes Vektors $e \neq 0$ aus E im Punkte x_0 partiell differenzierbar, und es gilt:*

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = Df(x_0)e \;.$$

Ferner ist f im Punkte x_0 stetig.

Beweis. Sei $A = Df(x_0) \in L(E,F)$. Nach (7.5) ist dann

$$f(x_0 + te) = f(x_0) + A(te) + \varphi(te) = f(x_0) + t(Ae) + \psi(t) \ ,$$

mit $\psi(t) := \varphi(te)$. Mit (7.6) folgert man aber wie zuvor, dass $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t} = 0$. Somit ist f partiell nach e im Punkte x_0 differenzierbar, und $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = Ae = Df(x_0)e$.

Die Stetigkeit von f in x_0 folgt ebenfalls sofort aus (7.5) und (7.6), denn da A stetig und linear ist, ist $\lim_{\xi\to 0} A(\xi) = A(0) = 0$, und (7.6) impliziert offenbar $\lim_{\xi\to 0} \varphi(\xi) = 0$, so dass

$$\lim_{\xi\to 0} f(x_0 + \xi) = f(x_0).$$

Q.E.D.

Die totale Differenzierbarkeit von f im Punkte x_0 ist eine erheblich stärkere Eigenschaft als ihre partielle Differenzierbarkeit in x_0. *Selbst die Existenz sämtlicher Richtungsableitungen von f in x_0 genügt im allgemeinen nicht für ihre totale Differenzierbarkeit in x_0*, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 7.3 Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq 0,\ f(0) = 0.$$

Sei $e_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ mit $\theta \in [0, 2\pi[$ ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$f(0 + te_\theta) = t\cos^3\theta, \quad t \in \mathbb{R},$$

d.h. f ist linear entlang jeder Geraden durch den Ursprung. Damit ist f partiell nach e differenzierbar in 0, mit

$$\frac{\partial f}{\partial e_\theta}(0) = \cos^3\theta.$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0.$$

Wäre nun f in 0 total differenzierbar mit Ableitung $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, so wäre für (x,y) nahe 0

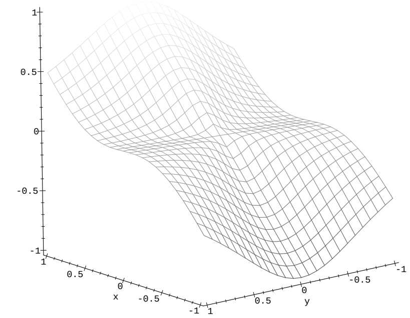
$$f(x,y) = a_1 x + a_2 y + o(\|(x,y)\|),$$

falls $A \cdot (x,y) = a_1 x + a_2 y$, mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Insbesondere wäre nach Satz 7.2

$$\frac{\partial f}{\partial e_\theta}(0) = A \cdot e_\theta = a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta.$$

Für $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ erhielten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = a_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0) = a_2,$$



also $a_1 = 1,\ a_2 = 0$, und somit

$$\frac{\partial f}{\partial e_\theta}(0) = \cos\theta.$$

Für $\theta \neq 0$ nahe 0 steht dies im Widerspruch zu $\frac{\partial f}{\partial e_\theta}(0) = \cos^3\theta$.

Bemerkungen 7.4 a) Ist $f : U \to F$ im Punkte $x_0 \in U$ stetig, und gibt es eine lineare Abbildung $A : E \to F$ (welche nicht als stetig vorausgesetzt werde), so dass (7.5), (7.6) gelten, so ist A automatisch stetig.

Es ist nämlich

$$A\xi = f(x_0 + \xi) - f(x_0) - \varphi(\xi)\ ,$$

und wegen der Stetigkeit von f in x_0 und (7.6) ist $\lim_{\xi \to 0} A\xi = 0$. Damit ist A stetig in 0, folglich global stetig.

Fazit: *Die Forderung, dass A in (7.3) stetig ist, ist also notwendig und hinreichend dafür, dass die Differenzierbarkeit von f im Punkt x_0 die Stetigkeit von f in x_0 impliziert!*

b) Sei $T : E \to F$ eine lineare Abbildung, und $x_0 \in E$. Nach Satz 7.2 und Bemerkung a) ist T genau dann differenzierbar in x_0, wenn T stetig ist. In diesem Fall ist wegen

$$T(x_0 + \xi) = Tx_0 + T\xi$$

offenbar

$$DT(x_0) = T \quad \text{für alle} \quad x_0 \in E.$$

c) Ist $I \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge, und ist $f : I \to F$ eine Abbildung, so haben wir für f sowohl den Begriff der „Newton“-Ableitung $\frac{df}{dt}(t_0) \in F$ im Punkte $t_0 \in I$ definiert, wie auch den der totalen Ableitung $Df(t_0) \in L(\mathbb{R}, F)$.

Beide Begriffe lassen sich in Einklang bringen, wenn wir den Raum $L(\mathbb{R}, F)$ wie folgt mit F identifizieren:

Für $\eta \in F$ definieren wir die lineare Abbildung $T_\eta \in L(\mathbb{R}, F)$ mittels

$$T_\eta(t) := t\eta,\ t \in \mathbb{R}.$$

Da es zu jedem $T \in L(\mathbb{R}, F)$ genau ein $\eta \in F$ mit $T = T_\eta$, nämlich $\eta = T(1)$ gibt, wird durch die Abbildung $\eta \mapsto T_\eta$ ein linearer Isomorphismus von F auf $L(\mathbb{R}, F)$ definiert. Identifizieren wir F mit $L(\mathbb{R}, F)$ auf diese Weise, so ist offenbar $\frac{d}{dt}f(t_0) = Df(t_0)$. Genauer bedeutet dies:

$$Df(t_0) = T_{\frac{d}{dt}f(t_0)}.$$

d) In Analogie zum eindimensionalen Fall werden ab jetzt die totale Ableitung Df einer Funktion $f : U \to F,\ U \subset E$, oft auch wieder mit f' bezeichnen, d.h.

$$f'(x) := Df(x).$$

Definition. Ist $U \subset E$ offen, und ist $f : U \to F$ in jedem Punkt von U differenzierbar, so heiße f **(total) differenzierbar (in U).** Ist zusätzlich die Ableitung

$$f' : U \to L(E, F),\ x \mapsto f'(x) = Df(x)$$

eine stetige Funktion auf U, so heiße f **stetig differenzierbar**. Dabei sei der Raum $L(E, F)$ stets mit der Operatornorm versehen (vgl. Kapitel 4).

7.3 Der Fall $E = \mathbb{R}^n,\ F = \mathbb{R}^m$

Die lineare Abbildung $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ kann hier bzgl. der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$-Matrix $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ beschrieben werden. Fassen wir die Elemente des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ unserer Konvention folgend als *Spaltenvektoren* auf, so wird die Abbildung einfach durch Matrizen-Multiplikation von links gegeben (vgl. (4.4)):

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Im folgenden identifizieren wir die lineare Abbildung $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit der sie beschreibenden Matrix.

Sind $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, bzw. $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$ die Komponentendarstellungen von f bzw. φ, so schreibt sich die Gleichung (7.5) explizit als

(7.7) $$f_i(x_0 + \xi) = f_i(x_0) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + \varphi_i(\xi), \quad i = 1, \dots, m \ .$$

Hieran erkennt man auch, dass die Abbildung f genau dann im Punkte x_0 differenzierbar ist, wenn alle Komponentenfunktionen f_i in x_0 differenzierbar sind.

Satz 7.5 *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die im Punkte $x_0 \in U$ differenzierbar ist. Identifizieren wir die Ableitung $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit der $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$, so gilt:*

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \ .$$

Bezeichnung. Man bezeichnet die Matrix

$$J_f(x_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,n}} ,$$

auch als die **Jacobi-Matrix** (oder auch **Funktional-Matrix**) von f im Punkte x_0. Es gilt also:

(7.8) $$f'(x_0)(\xi) = Df(x_0)\xi = J_f(x_0) \cdot \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Nach (7.7) gilt für $k = 1, \dots, n$:

$$f_i(x_0 + te_k) = f_i(x_0) + ta_{ik} + \varphi_i(te_k), \quad i = 1, \dots, m \ ,$$

mit $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\varphi_i(te_k)}{|t|} = 0$. Hieraus folgt sofort

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial e_k}(x_0) = a_{ik} \ .$$

Q.E.D.

Beispiel 7.6 Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} xy - z \\ y \cos x \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & -1 \\ -y \sin x & \cos x & 0 \end{pmatrix} .$$

Wie lässt sich nun die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ nachweisen? Beispiel 7.3 lehrt, dass die Existenz aller partiellen Ableitungen von f im Punkte x_0 i.A. nicht ausreicht, um auf die Differenzierbarkeit von f in x_0 zu schließen. Verlangen wir jedoch zusätzlich, dass die partiellen Ableitungen in einer Umgebung von x_0 existieren und in x_0 stetig sind, so ist f in der Tat in x_0 differenzierbar.

Theorem 7.7 (Hinreichende Bedingung für totale Differenzierbarkeit)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine in U partiell differenzierbare Funktion. Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, stetig im Punkt x_0, so ist f in x_0 total differenzierbar.

Beweis. Da $f = {}^t(f_1 \ldots f_m)$ in x_0 differenzierbar ist genau dann, wenn dies für alle Komponentenfunktionen f_i zutrifft, genügt es, den Fall $m = 1$ zu betrachten.

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x_0) \subset U$ ist. Für $\xi = {}^t(\xi_1 \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \varepsilon$ definieren wir Punkte

$$z^{(i)} := x_0 + \sum_{k=1}^{i} \xi_k e_k, \quad i = 0, \ldots, n \ .$$

Dann ist $z^{(0)} = x_0,\ z^{(n)} = x_0 + \xi$. Da sich $z^{(i-1)}$ und $z^{(i)}$ nur in der i-ten Koordinate unterscheiden, gibt es nach dem Mittelwertsatz für differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen ein $\theta_i \in [0, 1]$ mit

$$f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)}) = f(z^{(i-1)} + \xi_i e_i) - f(z^{(i-1)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(y^{(i)})\xi_i \ ,$$

mit $y^{(i)} := z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i$. Es folgt

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n}(f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)})) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y^{(i)})\xi_i \ ,$$

also

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\xi_i + \varphi(\xi)$$

mit

$$\varphi(\xi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right) \xi_i \ .$$

Da mit $\xi \to 0$ die Punkte $z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i$ gegen x_0 streben, folgt aufgrund der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in x_0:

$$\lim_{\xi \to 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right) = 0.$$

Folglich ist $\lim\limits_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$.

Q.E.D.

Bemerkung 7.8 Ist $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m$, so gelten nach den Sätzen 7.2 und 7.7 folgende Implikationen (vgl. auch die entsprechende Übung):

f ist stetig partiell differenzierbar $\iff$ f ist stetig differenzierbar

$\Rightarrow$ f ist differenzierbar

$\Rightarrow$ f ist stetig.

Die Umkehrungen der einseitigen Implikationen gelten i.A. nicht.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so heißt der Zeilenvektor

$$\operatorname{grad} f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

der **Gradient** von f im Punkte $x \in U$. Man schreibt dafür auch

$$\nabla f(x) \quad \text{(sprich: “Nabla f“)}.$$

Ist f in x (total) differenzierbar, so ist $\nabla f(x)$ offenbar gerade die Jacobi-Matrix $J_f(x)$ von f in x. Wir schreiben daher dafür gelegentlich auch $f'(x)$.

Ist f in U differenzierbar, so ist die Abbildung

$$v := \nabla f\colon U \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto v(x) := \nabla f(x),$$

ein **Vektorfeld** auf U, d.h. eine Abbildung, welche jedem Punkt $x \in U$ einen Vektor $v(x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet.

Es bezeichne $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j = x \cdot {}^t y$ das Euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$, sowie

$$S^{n-1} := \{e \in \mathbb{R}^n : \|e\|_2 = 1\}$$

die **Einheitssphäre** im $\mathbb{R}^n$. Ist f differenzierbar, und ist $e \in \mathbb{R}^n$ ein **Einheitsvektor**, d.h. ist $e \in S^{n-1}$, so gilt offenbar

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x) = \langle \nabla f(x), e\rangle\ . \tag{7.9}$$

Satz 7.9 (Geometrische Kennzeichnung des Gradienten) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $x \in U$ so, dass $\nabla f(x) \neq 0$. Bezeichnen wir mit $\gamma := \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$ den Einheitsvektor in Richtung des Gradienten von f in x, so gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma}(x) = \max\left\{\frac{\partial f}{\partial e}(x) : e \in S^{n-1}\right\}. \tag{7.10}$$

Der Gradient $\nabla f(x_0)$ zeigt somit in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f, wenn man sich von x_0 fortbewegt!

Beweis. Aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung aus der Linearen Algebra (bzw. der Hölderschen Ungleichung) gilt für $e \in S^{n-1}$ mit (7.9)

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x) \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|e\|_2 = \|\nabla f(x)\|_2.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma}(x) = \langle \nabla f(x), \gamma \rangle = \|\nabla f(x)\|_2^{-1} \langle \nabla f(x), \nabla f(x) \rangle = \|\nabla f(x)\|_2.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Q.E.D.

7.4 Rechenregeln für die Ableitung

Satz 7.10 (Kettenregel) *Es seien E, F und G drei normierte reelle Vektorräume, U eine offene Umgebung von $x_0 \in E$ und $f : U \to F$ eine Abbildung, V eine offene Umgebung von $y_0 = f(x_0)$ in F sowie $g : V \to G$.*
Ist f differenzierbar in x_0, und ist g differenzierbar in y_0, so ist die Abbildung $h = g \circ f : U \to G$ (welche in einer Umgebung von x_0 definiert ist) differenzierbar in x_0, und es gilt:

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0) \ .$$

Man beachte, dass $g'(f(x_0)) \in L(F, G)$ und $f'(x_0) \in L(E, F)$, so dass $g'(f(x_0)) \circ f'(x_0) \in L(E, G)$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi) &= f(x_0) + A\xi + \varphi(\xi), \\ g(y_0 + \eta) &= g(y_0) + B\eta + \psi(\eta), \end{aligned}$$

mit $A := f'(x_0) \in L(E, F)$, $B := g'(y_0) \in L(F, G)$, wobei

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0, \ \lim_{\eta \to 0} \frac{\psi(\eta)}{\|\eta\|} = 0 \ .$$

Setzt man speziell $\eta := f(x_0 + \xi) - f(x_0) = A\xi + \varphi(\xi)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_0 + \xi) &= g(f(x_0) + \eta) = g(y_0 + \eta) \\ &= g(f(x_0)) + B(A\xi + \varphi(\xi)) + \psi(A\xi + \varphi(\xi)) \\ &= (g \circ f)(x_0) + (B \circ A)\xi + \chi(\xi), \end{aligned}$$

mit

$$\chi(\xi) := B\varphi(\xi) + \psi(A\xi + \varphi(\xi)) \ .$$

Da B stetig ist, ist

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{B\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = \lim_{\xi\to 0} B\left(\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|}\right) = B(0) = 0 \ .$$

Ferner können wir wegen $\lim\limits_{\xi\to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$ o.B.d.A. annehmen, dass $\|\varphi(\xi)\| \le \|\xi\|$ ist. Da weiter $\psi(\eta) = \|\eta\|\psi_1(\eta)$ mit $\lim\limits_{\eta\to 0}\psi_1(\eta) = 0$ ist, folgt:

$$\|\psi(A\xi + \varphi(\xi))\| \le (\|A\| + 1)\|\xi\| \ \|\psi_1(A\xi + \varphi(\xi))\|,$$

also

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{\psi(A\xi + \varphi(\xi))}{\|\xi\|} = 0 \ .$$

Somit ist $\lim\limits_{\xi\to 0} \frac{\chi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$, d.h. $g \circ f$ ist differenzierbar in x_0, und $(g\circ f)'(x_0) = B \circ A = g'(y_0) \circ f'(x_0)$.

Q.E.D.

Der Fall $E = \mathbb{R}^m,\ F = \mathbb{R}^n,\ G = \mathbb{R}^p$. In diesem Fall lässt sich die Kettenregel wie folgt schreiben:

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x), \tag{7.11}$$

d.h. mit $y := f(x)$ gilt

$$\frac{\partial h_\ell}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(y)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x), \qquad \ell = 1,\dots,p, \quad j = 1,\dots,m \ , \tag{7.12}$$

Beispiel. Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$.

Sei $\Phi :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\Phi(r,\theta) := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix},$$

d.h. $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Φ ist differenzierbar, mit Jacobi-Matrix

$$J_\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und stellt $g := f \circ \Phi$ die Funktion f in Polarkoordinaten dar (wobei man dann meist nur $\theta \in]0, 2\pi[$ wählt, um Injektivität von Φ zu gewährleisten), so gilt nach der Kettenregel

$$J_g(r,\theta) = J_f(\Phi(r,\theta)) \cdot J_\Phi(r,\theta),$$

mit $J_f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) \\
&= \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \\
\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \\
&= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),
\end{aligned}$$

falls $(x,y) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Satz 7.11 (Rechenregeln für die Ableitung) *Es seien E, F und G normierte reelle Vektorräume und $U \subset E$ offen. Ferner seien $f, g : U \to F$ Abbildungen, welche im Punkte $x_0 \in U$ differenzierbar sind.*
(i) *Dann sind auch die Abbildungen $f+g$ und αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ in x_0 differenzierbar, und es gilt:*

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0)\ , \\
(\alpha f)'(x_0) &= \alpha f'(x_0)\ .
\end{aligned} \tag{7.13}$$

(ii) *Ist auf F zusätzlich ein* **Produkt** *„ $\cdot$ " mit Werten in G definiert, d.h. eine Abbildung $(a,b) \mapsto a \cdot b$ von $F \times F$ in G, welche linear in a und in b ist, d.h.* **bilinear***, und gibt es eine Konstante $C \geq 0$, so dass für alle $a, b \in F$ gilt:*

$$\|a \cdot b\| \leq C\|a\|\ \|b\|\ ,$$

so gilt die **allgemeine Produktregel***:*

Die Abbildung $f \cdot g : U \to G$, $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$, ist in x_0 differenzierbar, und es gilt für alle $\xi \in E$:

$$(f \cdot g)'(x_0)\xi = f(x_0) \cdot (g'(x_0)\xi) + (f'(x_0)\xi) \cdot g(x_0)\ . \tag{7.14}$$

Beispiel (Drehimpulserhaltung). Ein Teilchen der Masse 1 bewege sich unter dem Einfluss einer Zentralkraft in der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$. Bezeichnet $x(t) \in \mathbb{R}^3$ seine Position zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$, so genügt die Abbildung $t \mapsto x(t)$ nach Newton daher einer Differentialgleichung der Form

$$\ddot{x}(t) := \frac{d^2}{dt^2}x(t) = a(x(t))\,x(t),$$

wobei wir annehmen, dass die Funktion $a : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Der *Drehimpuls* von x ist definiert durch $L(t) := x(t) \times \dot{x}(t)$, wobei $\times$ das Kreuzprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

Behauptung: Der Drehimpuls bleibt erhalten, d.h. L ist eine konstante Abbildung.

Wir wenden die allgemeine Produktregel auf das durch das Kreuzprodukt definierte Produkt $(x, y) \mapsto x \times y$ auf dem $\mathbb{R}^3$ mit Werten im $\mathbb{R}^3$ an. Damit gilt dann

$$\dot{L}(t) = \dot{x}(t) \times \dot{x}(t) + x(t) \times \ddot{x}(t) = \dot{x}(t) \times \dot{x}(t) + a(x(t))\, x(t) \times x(t) = 0,$$

da ja $y \times y = 0$ ist für alle $y \in \mathbb{R}^3$. Hieraus folgt, dass L konstant ist.

Beweis von Satz 7.11. (i) lässt sich leicht direkt mittels der Definition der Ableitung zeigen. Wir wollen hier jedoch einmal (i) (für die Summe von f und g) und (ii) mit Hilfe der Kettenregel beweisen:

Dazu betrachten wir $F \times F$ als normierten Raum, versehen mit der Norm $\|(a, b)\|_\infty = \max(\|a\|, \|b\|), (a, b) \in F \times F$. Die Abbildung $(f, g) : U \to F \times F,\ x \mapsto (f(x), g(x))$, ist dann differenzierbar in x_0. Nach Voraussetzung ist nämlich

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi) &= f(x_0) + f'(x_0)\xi + \varphi(\xi), \\ g(x_0 + \xi) &= g(x_0) + g'(x_0)\xi + \psi(\xi)\ , \end{aligned}$$

mit $\lim\limits_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = \lim\limits_{\xi \to 0} \frac{\psi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$. Somit ist

$$(f, g)(x_0 + \xi) = (f, g)(x_0) + (f'(x_0), g'(x_0))\xi + (\varphi(\xi), \psi(\xi))\ ,$$

falls wir die stetige lineare Abbildung $(f'(x_0), g'(x_0)) \in L(E, F \times F)$ definieren durch

$$(f'(x_0), g'(x_0))\xi := (f'(x_0)\xi, g'(x_0)\xi), \quad \xi \in E.$$

Offenbar ist $\lim\limits_{\xi \to 0} \|(\varphi(\xi), \psi(\xi))\|_\infty / \|\xi\| = 0$. Wir sehen damit insbesondere, dass

$$(f, g)'(x_0) = (f'(x_0), g'(x_0))\ . \tag{7.15}$$

Wir bezeichnen nun mit $\operatorname{add} : F \times F \to F$ und $\operatorname{mult} : F \times F \to G$ die Abbildungen $(a, b) \mapsto a + b$ und $(a, b) \mapsto a \cdot b$. Es ist für $(a_0, b_0), (\xi, \eta) \in F \times F$

$$\begin{aligned} \operatorname{add}((a_0, b_0) + (\xi, \eta)) &= \operatorname{add}(a_0, b_0) + \xi + \eta \\ \operatorname{mult}((a_0, b_0) + (\xi, \eta)) &= (a_0 + \xi) \cdot (b_0 + \eta) \\ &= \operatorname{mult}(a_0, b_0) + a_0 \cdot \eta + \xi \cdot b_0 + \xi \cdot \eta\ , \end{aligned}$$

wobei $\|\xi \cdot \eta\| \le C\|\xi\|\ \|\eta\| \le C\|(\xi, \eta)\|_\infty^2$. Insbesondere ist $\lim\limits_{(\xi,\eta) \to 0} \frac{\xi \cdot \eta}{\|(\xi, \eta)\|_\infty} = 0$.

Wir sehen also, dass die Abbildungen add und mult auf $F \times F$ differenzierbar sind, und dass

$$
\begin{aligned}
&(7.16) \qquad & \mathrm{add}'(a_0,b_0)(\xi,\eta) &= \mathrm{add}(\xi,\eta) = \xi+\eta\ , \\
&(7.17) \qquad & \mathrm{mult}'(a_0,b_0)(\xi,\eta) &= a_0\cdot\eta + \xi\cdot b_0
\end{aligned}
$$

ist für alle $(a_0, b_0), (\xi, \eta) \in F \times F$.
Da $f+g = \mathrm{add} \circ (f,g),\ f\cdot g = \mathrm{mult}\circ(f,g)$ ist, folgt aus (7.15) - (7.17) mittels der Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x_0)\xi &= (\mathrm{add})'(f(x_0),g(x_0))(f'(x_0)\xi, g'(x_0)\xi) \\
&= f'(x_0)\xi + g'(x_0)\xi = (f'(x_0)+g'(x_0))\xi, \\
(f\cdot g)'(x_0)\xi &= (\mathrm{mult})'(f(x_0),g(x_0))(f'(x_0)\xi, g'(x_0)\xi) \\
&= f(x_0)\cdot(g'(x_0)\xi) + (f'(x_0)\xi)\cdot g(x_0)\ .
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Bemerkung. Setzen wir für *beliebiges* $\xi \in E$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+t\xi),$$

so ist nach der Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x) = f'(x)\xi$$

(dies liefert übrigens einen alternativen Beweis zu Satz 7.2). Damit lässt sich die Produktregel (7.14) besonders schön durch folgende Regel für Richtungsableitungen darstellen: Für alle $\xi \in E$ gilt

$$\text{(7.18)} \qquad \frac{\partial(f\cdot g)}{\partial \xi}(x) = f(x)\cdot\frac{\partial g}{\partial \xi}(x) + \frac{\partial f}{\partial \xi}(x)\cdot g(x).$$

7.5 Der verallgemeinerte Mittelwertsatz

Wir werden später nachfolgende höherdimensionale Variante des Mittelwertsatzes benötigen.

Satz 7.12 (Schrankensatz) *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ offen und $f : I \to F$ eine differenzierbare Funktion mit Werten im normierten Raum F. Liegt das Intervall $[a,b]$ in I, und ist*

$$\|f'(t)\| \le m \qquad \textit{für alle}\ \ t \in]a,b[,$$

so ist

$$\|f(b)-f(a)\| \le m(b-a)\ .$$

Beweis. Ist $F = \mathbb{R}$, und ist f' stetig, so können wir wie folgt argumentieren:
Da f' stetig ist, ist f' über das Intervall $[a, b]$ integrierbar, und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt \ . \tag{7.19}$$

Hieraus folgt aufgrund der Dreiecksungleichung für Integrale:

$$|f(b) - f(a)| \leq \int_a^b |f'(t)|dt \leq \int_a^b m\, dt = m(b-a) \ . \tag{7.20}$$

Dieses Argument lässt sich auf den Fall eines beliebigen Banachraumes F übertragen, da sich die von uns in Kapitel 1 beschriebene Integrationstheorie beinahe wortwörtlich auf den Fall vektorwertiger Funktionen mit Werten in F anwenden lässt, indem man Treppenfunktionen mit Werten in F betrachtet.

Falls f nur als differenzierbar und F nur als normiert vorausgesetzt wird, benötigen wir ein abstrakteres Argument:
Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir dazu die Hilfsfunktion

$$\varphi(t) := \|f(t) - f(a)\| - (m + \varepsilon)(t - a), \qquad t \in [a, b].$$

Dann ist φ stetig auf $[a, b]$, da die Differenzierbarkeit von f die Stetigkeit von f impliziert. Sei

$$S := \{t \in [a, b] : \varphi(t) \leq \varepsilon\}.$$

Da φ stetig ist und da $\varphi(a) = 0$, existiert ein Punkt $t > a$ is S. Ferner ist $S = \varphi^{-1}(]-\infty, \varepsilon])$ abgeschlossen. Setzen wir

$$c := \sup S,$$

so ist somit $c \in S\cap]a, b]$. Wir werden zeigen, dass $c = b$. Nehmen wir, dass dies nicht der Fall ist. Dann ist $c < b$, und es folgt, dass $\|f'(c)\| \leq m$. Die Differenzierbarkeit von f im Punkte c impliziert dann, dass ein Punkt $d \in]c, b[$ nahe c existiert so, dass

$$\|f(d) - f(c)\| \leq (m + \varepsilon)(d - c).$$

Wegen $c \in S$ folgt damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f(d) - f(a)\| &\leq \|f(d) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq (m + \varepsilon)(d - c) + (m + \varepsilon)(c - a) + \varepsilon \\ &\leq (m + \varepsilon)(d - a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist auch $d \in S$, was aber unserer Wahl von c widerspricht. Folglich muss $c = b \in S$ gelten. Damit folgt jedoch

$$\|f(b) - f(a)\| \leq m(b - a) + \varepsilon(1 + b - a),$$

und zwar für jedes $\varepsilon > 0$. Dies impliziert die behauptete Ungleichung. Q.E.D.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset E$ eines reellen Vektorraums E heiße **konvex**, wenn mit je zwei Punkten $x, y \in A$ stets auch deren **Verbindungsstrecke**

$$[x, y] := \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$$

in A liegt.

Beispiel: Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf E, so ist jede Kugel $B_r(z) := \{x \in E : \|x - z\| < r\}$ konvex, denn:

Sind $x, y \in B_r(z)$, und ist $t \in [0, 1]$, so ist wegen $(1-t)z + tz = z$

$$\begin{aligned} \|((1-t)x + ty) - z\| &= \|(1-t)(x-z) + t(y-z)\| \leq |1-t|\|x-z\| + |t|\|y-z\| \\ &= (1-t)\|x-z\| + t\|y-z\| < (1-t)r + tr = r. \end{aligned}$$

Theorem 7.13 (verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Es seien E und F normierte reelle Vektorräume, $U \subset E$ eine offene und konvexe Teilmenge und $f : U \to F$ eine differenzierbare Abbildung. Ist*

$$\|f'(x)\| \leq m \qquad \textit{für alle} \;\; x \in U,$$

so gilt für alle Punkte $a, b \in U$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq m\|b - a\| \; .$$

Beweis. Betrachte die Hilfsfunktion

$$g(t) := f((1-t)a + tb), \qquad t \in [0, 1].$$

Da U konvex ist, liegt das Intervall $[a, b]$ in U, so dass g wohldefiniert. Ferner ist g differenzierbar, da f differenzierbar ist und auch die Abbildung $t \mapsto (1-t)a + tb$ differenzierbar ist, mit Ableitung $-a + b$. Mit der Kettenregel folgt daher

$$g'(t) = f'((1-t)a + ty)(b - a),$$

und unsere Voraussetzung impliziert dann, dass

$$\|g'(t)\| \leq \|f'((1-t)a + ty)\|\|b - a\| \leq m\|b - a\|, \qquad t \in [0, 1].$$

Die behauptete Ungleichung folgt damit aus dem Schrankensatz 7.12, da ja $f(a) = g(0)$ und $f(b) = g(1)$ ist. Q.E.D.

Wir betrachten nun wieder normierte Vektorräume E und F.

Satz 7.14 *Es sei $U \subset E$ eine offene, zusammenhängende und nichtleere Teilmenge von E. Ist $f : U \to F$ differenzierbar, so ist $f' = 0$ genau dann, wenn f konstant ist.*

Beweis. Ist f konstant, so ist wegen $f(x_0+\xi) = f(x_0) + 0 \cdot \xi$ trivialerweise $f' = 0$. Sei nun umgekehrt $f' = 0$. Dann ist f offenbar sogar stetig differenzierbar. Wir wählen $p \in U$ fest und setzen $\eta := f(p)$ und

$$A := \{x \in U : f(x) = \eta\} = f^{-1}(\{\eta\}).$$

Da $\{\eta\}$ abgeschlossen in F und f stetig ist, ist A abgeschlossen in U. Ferner ist wegen $p \in A$ die Menge A nichtleer.
Um zu zeigen, dass $A = U$ ist, d.h. $f(x) = \eta$ für alle $x \in U$, genügt es nach Satz 6.1(ii) zu zeigen, dass A auch offen in U ist.
Sei dazu $x_0 \in A$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subset U$. Wenden wir den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf die offene und konvexe Menge $B_\varepsilon(x_0)$ und die Einschränkung von f auf diese Menge an, mit $m = 0$, so erhalten wir für jedes $y \in B_\varepsilon(x_0)$ die Ungleichung

$$\|f(y) - f(x_0)\| \leq 0\|y - x_0\| = 0,$$

und es folgt $f(y) = f(x_0) = \eta$. Damit ist $B_\varepsilon(x_0) \subset A$, und folglich ist A offen in U.
Q.E.D.

Bemerkung. Ist U in Satz 7.14 nicht zusammenhängend (und $\dim F > 0$), so folgt aus $f' = 0$ keineswegs, dass f konstant ist. Dann lässt sich U nämlich schreiben als $U = U_1 \cup U_2$, mit nichtleeren, disjunkten, offenen Teilmengen U_1 und U_2, und wählen wir $\eta_1, \eta_2 \in F$ mit $\eta_1 \neq \eta_2$, so ist die durch

$$f(x) := \begin{cases} \eta_1, & \text{falls } x \in U_1, \\ \eta_2, & \text{falls } x \in U_2, \end{cases}$$

auf U definierte Funktion differenzierbar, nicht konstant, und $f' = 0$.

7.6 Partielle Ableitungen höherer Ordnung und die Taylorapproximation

Wir betrachten in diesem Paragraphen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^m$, wobei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ sei. Für eine allgemeinere Diskussion höherer (totaler) Ableitungen von Funktionen zwischen beliebigen normierten Vektorräumen sowie der Taylorschen Formel in diesem allgemeinen Rahmen sei auf Anhang A verwiesen.
Am Ende von Paragraph 7.1 hatten wir die Frage gestellt, ob stets $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ gilt. Dies ist, wie wir in den Übungen sehen werden, i.A. falsch. Der folgende Satz zeigt jedoch, dass die obige Identität dann gilt, wenn eine der partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ stetig ist.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir zukünftig auch kurz

$$\partial_{i_k \ldots i_k} f := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\ldots \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f \right) \right),$$

z.B.

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \partial_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Theorem 7.15 (von H.A. Schwarz) *Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ besitze auf U die partiellen Ableitungen $\partial_i f$, $\partial_j f$ und $\partial_{ji} f$. Ferner sei $\partial_{ji} f$ im Punkte $a \in U$ stetig. Dann existiert auch $\partial_{ij} f(a)$, und es gilt*

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a).$$

Der Beweis beruht auf einem 2-dimensionalen Analogon des Mittelwertsatzes einer Veränderlichen.

Lemma 7.16 *Sei $r > 0$, und bezeichne Q das offene Quadrat $Q =]-r, r[^2 \subset \mathbb{R}^2$. Die Funktion $\varphi : Q \to \mathbb{R}$ besitze die partiellen Ableitungen $\partial_1 \varphi$ und $\partial_{21} \varphi$. Dann gibt es für jedes $(x, y) \in Q$ mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ einen Punkt $(\xi, \eta) \in Q$ mit*

$$\varphi(x, y) - \varphi(x, 0) - \varphi(0, y) + \varphi(0, 0) = \partial_{21} \varphi(\xi, \eta) xy. \tag{7.21}$$

Beweis. Sei $u(x) := \varphi(x, y) - \varphi(x, 0)$. Zweimalige Anwendung des Mittelwertsatzes aus der Analysis I liefert dann ein ξ zwischen 0 und x und ein η zwischen 0 und y so, dass die linke Seite von (7.21) geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} u(x) - u(0) &= xu'(\xi) \\ &= x(\partial_1 \varphi(\xi, y) - \partial_1 \varphi(\xi, 0)) \\ &= xy\ \partial_{21} \varphi(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Beweis von Theorem 7.15

Es genügt, ihn für den Fall $m = 1$ zu beweisen, d.h. für reellwertiges f. Für genügend kleines $r > 0$ ist dann die Funktion

$$\varphi(x, y) := f(a + xe_i + ye_j)$$

auf dem Quadrat $Q =]-r, r[^2$ wohldefiniert. Ferner existieren laut Voraussetzung an f die partiellen Ableitungen $\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi$ und $\partial_{21} \varphi$ auf Q, und $\partial_{21} \varphi$ ist im Punkte $(0, 0)$ stetig. Wir müssen zeigen, dass $\partial_{12} \varphi$ in $(0, 0)$ existiert, und dass gilt:

$$\partial_{12} \varphi(0, 0) = \partial_{21} \varphi(0, 0).$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\partial_{21}\varphi$ in $(0,0)$ stetig ist, existiert eine Umgebung V von $(0,0)$ in Q so, dass für alle $(x',y') \in V$

$$|\partial_{21}\varphi(x',y') - \partial_{21}\varphi(0,0)| < \varepsilon.$$

Sei o.B.d.A. V von der Gestalt $V =]-\delta,\delta[^2$, mit $0 < \delta < r$. Nach (7.21) gilt dann für jedes $(x,y) \in V$ mit $x \neq 0, y \neq 0$

$$\left| \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x,0) - \varphi(0,y) + \varphi(0,0)}{xy} - \partial_{21}\varphi(0,0) \right| < \varepsilon.$$

Wegen

$$\lim_{y\to 0} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x,0)}{y} = \partial_2\varphi(x,0)$$

folgt hieraus

$$\left| \frac{\partial_2\varphi(x,0) - \partial_2\varphi(0,0)}{x} - \partial_{21}\varphi(0,0) \right| \leq \varepsilon$$

für alle $x \neq 0$ mit $|x| < \delta$.
Dies zeigt, dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial_2\varphi(x,0) - \partial_2\varphi(0,0)}{x} = \partial_{12}\varphi(0,0)$ existiert und gleich $\partial_{21}\varphi(0,0)$ ist.

Q.E.D.

Durch mehrmalige Anwendung des Satzes von Schwarz sieht man, dass bei einer C^k-Funktion f die Reihenfolge der partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f$ keine Rolle spielt.

Korollar 7.17 *Sei $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, und seien $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt für jede Permutation π der Indizes $1, \ldots, k$*

$$\partial_{i_1 \ldots i_k} f = \partial_{i_{\pi(1)} \ldots i_{\pi(k)}} f.$$

Wir können nun die Taylorformel für Funktionen einer Veränderlichen leicht auf den höherdimensionalen Fall übertragen.
Sei dazu $f \in C^{p+1}(U, \mathbb{R})$, und seien a, x Punkte in U, deren Verbindungsstrecke

$$[a,x] := \{(1-t)a + tx : t \in [0,1]\}$$

in U liegt.
Wir betrachten die Hilfsfunktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(t) := f(a + th), \quad h := x - a.$$

Dann ist $F \in C^{p+1}([0,1],\mathbb{R})$, denn es gelten folgende Formeln für die Ableitungen von F, wie man sofort durch wiederholte Anwendung der Kettenregel sieht:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a+th)h_i, \\ F''(t) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_j \partial_i f(a+th)h_i h_j, \\ &\vdots \\ F^{(k)}(t) &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f(a+th) h_{i_1} \ldots h_{i_k}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Bezeichnungen ein:
Für einen beliebigen Punkt $x \in U$ und Vektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$f^{(k)}(x)\xi^k := \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f(x) \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}. \tag{7.23}$$

$f^{(k)}(x)\xi^k$ ist ein homogenes Polynom vom Grad k. Speziell ist für $k=1$

$$f^{(1)}(x)\xi^1 = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x)\xi_i = f'(x)\xi,$$

und für $k=2$

$$f^{(2)}(x)\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x)\xi_i \xi_j.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

$$F^{(k)}(t) = f^{(k)}(a+th)h^k. \tag{7.24}$$

Wir definieren nun das **Taylorpolynom p-ter Ordnung** von f in a durch

$$T_{p,a}f(x) := \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k. \tag{7.25}$$

Bemerkungen 7.18 (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f \in C^k(U,\mathbb{R})$. Für einen **Multiindex** $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definiert man seine **Länge** $|\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ sowie $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Ist $\xi \in \mathbb{R}^n$, so setzt man ferner $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$. Schließlich sei $\partial^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$. Dann gilt (Übung!)

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(x)\xi^k = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| = k\}} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha. \tag{7.26}$$

(b) Nimmt f Werte im $\mathbb{R}^m$ an, so können wir $f^{(k)}(x)\xi^k$ analog definieren durch

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x)\xi^k &:= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f(x) \\ &= (f_1^{(k)}(x)\xi^k, \ldots, f_n^{(k)}(x)\xi^k), \end{aligned}$$

und wir definieren das Taylorpolynom analog durch (7.25).

(c) Definiert man die k-te Ableitung $f^{(k)}$ von f durch k-malige iterierte Anwendung der totalen Ableitung, so zeigt sich, dass $f^{(k)}(x)$ als eine k-lineare Abbildung $f^{(k)}(x) : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aufgefasst werden kann (vgl. Anhang B in Kapitel 10), welche hier konkret gegeben ist durch

$$f^{(k)}(x)(\xi^1, \ldots, \xi^k) := \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \xi^1_{i_1} \ldots \xi^k_{i_k} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f(x),$$

falls $\xi^1, \ldots, \xi^k \in \mathbb{R}^n$. Damit ist dann offenbar $f^{(k)}(x)\xi^k = f^{(k)}(x)(\xi, \ldots, \xi)$.

Theorem 7.19 (Taylorformel) *Sei $f \in C^{p+1}(U, \mathbb{R}^m)$, und seien a, x Punkte in U, deren Verbindungsstrecke in U liegt. Dann gilt:*

$$f(x) = T_{p,a}f(x) + R_{p,a}(x), \tag{7.27}$$

wobei das Restglied durch das Integral

$$R_{p,a}(x) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a + t(x-a))(x-a)^{p+1} dt \tag{7.28}$$

gegeben ist.

Beweis. Wir dürfen nach Bemerkung 7.18 o.B.d.A. $m = 1$ annehmen. Nach der 1-dimensionalen Taylorformel ist nun

$$F(1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + R_p,$$

mit

$$R_p = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p F^{(p+1)}(t) dt.$$

Nun ist nach (7.24)

$$\frac{F^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

sowie

$$R_p = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a + t(x-a))(x-a)^{p+1} dt.$$

Ferner ist $F(1) = f(x)$. Damit ergibt sich die Behauptung.

Q.E.D.

Bemerkung 7.20 (Lagrangesches Restglied) *Ist f in Theorem 7.19 reellwertig, so lässt sich das Restglied auch darstellen in der Form*

$$R_{p,a}(x) = \frac{1}{(p+1)!}\ f^{(p+1)}(\xi)(x-a)^{p+1}, \tag{7.29}$$

mit einem geeigneten $\xi \in [a, x]$.

In diesem Fall gibt es nämlich ein $\theta \in [0, 1]$ so, dass

$$R_p = \frac{1}{(p+1)!}\ F^{(p+1)}(\theta).$$

Die Identität (7.29) folgt, indem man $\xi := a + \theta(x-a)$ wählt.

Korollar 7.21 (Taylor-Approximation) *Ist $f \in C^p(U, \mathbb{R}^m)$ und ist $a \in U$, so gilt*

$$f(x) = T_{p,a}f(x) + o(\|x-a\|^p) \text{ für } x \to a, \tag{7.30}$$

d.h. es ist

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - T_{p,a}f(x)\|}{\|x-a\|^p} = 0.$$

Beweis. Es sei o.B.d.A. $m = 1$. Nach Theorem 7.19 ist

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{p-1,a}f(x) + R_{p-1,a}(x) \\ &= T_{p,a}f(x) + \varphi(x), \end{aligned}$$

wobei

$$\varphi(x) = R_{p-1,a}(x) - \frac{1}{p!} f^{(p)}(a)(x-a)^p.$$

Nach Bemerkung 7.20 gibt es ferner ein $\xi \in [a, x]$ mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{p!}[f^p(\xi)(x-a)^p - f^{(p)}(a)(x-a)^p].$$

Wir müssen zeigen, dass $\varphi(x) = o(\|x-a\|^p)$ ist. Zu $\varepsilon > 0$ wähle dazu eine Kugel $B_\delta(a) \subset U$ so, dass für alle $y \in B_\delta(a)$ gilt:

$$Q(y) := \frac{1}{p!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} |\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f(y) - \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f(a)| < \varepsilon.$$

Beachtet man noch, dass

$$|(x_{i_1} - a_{i_1}) \ldots (x_{i_p} - a_{i_p})| \le \|x-a\|_\infty^p \le \|x-a\|^p$$

ist, so folgt für $x \in B_\delta(a)$:

$$\begin{aligned}|\varphi(x)| &\leq \frac{1}{p!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}|\partial_{i_1}\ldots\partial_{i_p}f(\xi)-\partial_{i_1}\ldots\partial_{i_p}f(a)|\cdot|(x_{i_1}-a_{i_1})\ldots(x_{i_p}-a_{i_p})| \\ &\leq Q(\xi)\|x-a\|^p \leq \varepsilon\|x-a\|^p,\end{aligned}$$

also $\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x-a\|^p} \leq \varepsilon$ für alle $x \neq a$ mit $\|x-a\| < \delta$.

Q.E.D.

Das Taylorpolynom 1. Ordnung

$$f(a) + f'(a)(x-a)$$

liefert die in der Definition der totalen Ableitung beschriebene „lineare Approximation“ der Funktion f nahe dem Punkt a. Für beliebiges p stellt $T_{p,a}f$ ein Polynom vom Grade $\leq p$ dar, welches f in der Nähe von a nach (7.30) derart approximiert, dass der Fehler $f(x) - T_{p,a}f(x)$ für $x \to a$ schneller als $\|x-a\|^p$ gegen Null strebt.

7.7 Die Hesse-Form

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Für $a \in U$ heißt die durch

$$f^{(2)}(a)x^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij}f(a)x_ix_j, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

definierte quadratische Form auf dem $\mathbb{R}^n$ die **Hesse-Form** von f in a, und die $n \times n$-Matrix

$$f''(a) = H_f(a) := \begin{pmatrix} \partial_{11}f(a) & \ldots & \partial_{1n}f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1}f(a) & \ldots & \partial_{nn}f(a) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix**. Beachte, dass diese nach Theorem 7.15 symmetrisch ist!
Wir nennen diese Matrix auch die **zweite Ableitung von f in** a.

Betrachten wir hier die Vektoren des $\mathbb{R}^n$ wieder als *Spaltenvektoren,* so gilt also

$$f^{(2)}(a)x^2 = {}^t x \cdot H_f(a) \cdot x = \langle\, x, f''(a)x \rangle\,,$$

falls $\langle\, x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ wieder das Euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Für das Taylorpolynom 2. Ordnung der Funktion f im Punkte a erhält man nun die Darstellung

$$T_{2,a}f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\,{}^t(x-a)\cdot f''(a)\cdot(x-a), \tag{7.31}$$

wobei hier $f'(a)$ als Kurzschreibweise für den Gradienten $\nabla f(a)$ steht.

Beispiel. $f(x,y) = x^y$ auf $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$.
Da $f(x,y) = e^{y \log x}$ ist, ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = x^{y-1}(1 + y \log x), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^y (\log x)^2.
\end{aligned}$$

Für $a = (1,1)$ ergibt sich $\nabla f(1,1) = (1,0)$,

$$f''(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist das Taylorpolynom 2. Ordnung von f in (1,1) gegeben durch

$$T_{2,(1,1)} f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1).$$

7.7.1 Schmiegequadriken

Ist die Hesse-Matrix $f''(a)$ nicht die Nullmatrix, so ist der Graph des Taylorpolynoms $T_{2,a} f$ von f eine sogenannte **Quadrik** im $\mathbb{R}^{n+1}$. Wegen

$$f(x) - T_{2,a} f(x) = o(\|x-a\|^2)$$

wird diese auch als die **Schmiegequadrik** an den Graphen von f im Punkte $(a, f(a))$ bezeichnet. Diese hat im Punkte $(a, f(a))$ dieselbe Tangentialhyperebene wie der Graph von f, und auch dieselbe Krümmung; letzteres wird in der Differentialgeometrie präzisiert.

In der Linearen Algebra wird gezeigt, dass man im Fall $n = 2$ jede Schmiegequadrik durch eine affine Koordinatentransformation in eine der folgenden Normalformen bringen kann:

(E) $z = \pm(x^2 + y^2)$ (elliptisches Paraboloid)

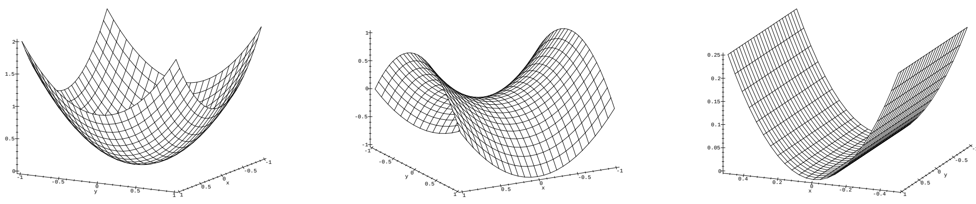
(H) $z = x^2 - y^2$ (hyperbolisches Paraboloid)

(P) $z = \pm x^2$ (parabolischer Zylinder)

Allgemeiner heißt eine quadratische Form

$$Q = Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad Q(x) = {}^t x A x,$$

und die sie repräsentierende symmetrische Matrix A, bekanntlich



positiv definit, falls $Q(x) > 0$ ist für alle $x \neq 0$ (in Zeichen: $Q > 0$),

negativ definit, falls $Q(x) < 0$ ist für alle $x \neq 0$, (in Zeichen: $Q < 0$),

positiv semidefinit, falls $Q(x) \geq 0$ ist für alle $x \neq 0$, (in Zeichen: $Q \geq 0$),

negativ semidefinit, falls $Q(x) \leq 0$ ist für alle $x \neq 0$, (in Zeichen: $Q \leq 0$),

indefinit, falls Q sowohl positive als auch negative Werte annimmt (in Zeichen: $Q \gtrless 0$).

In der Linearen Algebra lernt man, dass sich die quadratische Form Q stets mittels einer orthogonalen Koordinatentransformation diagonalisieren lässt (*Hauptachsentransformation*), d.h. es existiert eine orthogonale lineare Transformation T des $\mathbb{R}^n$ so, dass sich $Q(Tx) = Q_A(Tx)$ schreiben lässt in der Form

$$Q(Tx) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.32}$$

wobei die reellen $\lambda_j \in \mathbb{R}$ gerade die *Eigenwerte* der Matrix A sind. (7.32) ist äquivalent zur Diagonalisierung der Matrix A mittels T :

$$^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{7.33}$$

Dies zeigt, dass die obigen Eigenschaften von $Q = Q_A$ äquivalent zu den folgenden Eigenschaften der Eigenwerte (EW's) von A :

$Q > 0 \iff$ alle EW sind > 0,

$Q < 0 \iff$ alle EW sind < 0,

$Q \geq 0 \iff$ alle EW sind ≥ 0,

$Q \leq 0 \iff$ alle EW sind ≤ 0,

$Q \gtrless 0 \iff A$ hat EW > 0 und < 0.

7.8 Lokale Extrema

Sei $f : X \to \mathbb{R}$, wobei $X \subset \mathbb{R}^n$ sei. f besitze in $a \in X$ ein **lokales Maximum** bzw. **Minimum,** falls es in X eine Umgebung V von a gibt, so dass $f(x) \leq f(a)$ bzw. $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in V$. Kann V so gewählt werden, dass sogar $f(x) < f(a)$ bzw. $f(x) > f(a)$ für alle $x \in V \setminus \{a\}$ gilt, so heißt a Stelle eines **isolierten** lokalen Maximums bzw. Minimums von f.

Satz 7.22 (Notwendiges Kriterium) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Hat $f : U \to \mathbb{R}$ in $a \in U$ ein lokales Extremum, d.h. ein lokales Maximum oder Minimum, und ist f im Punkt a partiell differenzierbar, so gilt*

$$\partial_1 f(a) = \cdots = \partial_n f(a) = 0, \tag{7.34}$$

d.h. $\nabla f(a) = 0$. Für eine in a total differenzierbare Funktion f besagt (7.34) *also, dass $f'(a) = 0$ ist*

Beweis. Die durch $g(t) := f(a + te_k)$ in einem genügend kleinen Intervall um 0 erklärte Funktion g hat in $t = 0$ ein lokales Extremum. Somit ist $0 = g'(0) = \partial_k f(a)$ für $k = 1, \ldots, n$.

Q.E.D.

Punkte a mit $f'(a) = 0$ bezeichnet man auch als **kritische** Punkte von f.

Satz 7.23 (Hinreichendes Kriterium) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion. Ist $a \in U$ ein kritischer Punkt von f, d.h. ist $f'(a) = 0$, so gilt:*

$f''(a) > 0 \implies$ *f hat in a ein isoliertes lokales Minimum;*

$f''(a) < 0 \implies$ *f hat in a ein isoliertes lokales Maximum;*

$f''(a) \gtrless 0 \implies$ *f hat in a kein lokales Extremum.*

Im Fall $n = 2$ und $f''(a) \gtrless 0$ spricht man auch von einem **Sattelpunkt** *von f.*

Beweis. Sei A die symmetrische Matrix $A := f''(a) = H_f(a)$.
Wir beginnen mit dem Fall $A = f''(a) > 0$. Wegen $f'(a) = 0$ folgt dann für alle genügend kleinen Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^n$ mittels Taylor-Approximation (vgl. Korollar 7.21)

$$f(a + \xi) = f(a) + \frac{1}{2}\, {}^t\xi A \xi + r(\xi), \tag{7.35}$$

wobei

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{r(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0. \tag{7.36}$$

Die stetige Funktion $\xi \mapsto Q(\xi) := {}^t\xi A\xi$ nimmt wegen $Q > 0$ auf der kompakten Einheitssphäre $S^{n-1} := \{\xi : \|\xi\| = 1\}$ ein strikt positives Minimum $m > 0$ an, d.h. es ist ${}^t\xi A\xi \geq m$ für alle $\xi \in S^{n-1}$. Schreibt man einen beliebigen Vektor als $\xi = \|\xi\|e$, mit einem Einheitsvektor $e \in S^{n-1}$, so folgt damit für alle ξ

$$ {}^t\xi A\xi \geq m\|\xi\|^2. \tag{7.37} $$

Wähle nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(a) \subset U$, und so dass für $\|\xi\| < \varepsilon$ stets

$$ |r(\xi)| \leq \frac{m}{4}\|\xi\|^2 \tag{7.38} $$

gilt. Für alle $a + \xi \in B_\varepsilon(a)$ folgt dann aus (7.35)–(7.38)

$$ f(a+\xi) \geq f(a) + \frac{m}{2}\|\xi\|^2 - \frac{m}{4}\|\xi\|^2 = f(a) + \frac{m}{4}\|\xi\|^2. $$

Dies zeigt, dass f in der Kugel $B_\varepsilon(a)$ genau im Punkte a ein Minimum annimmt.

Im Fall $f''(a) > 0$ ist damit die Behauptung bewiesen, und der Fall $f''(a) < 0$ wird durch den Übergang zu $-f$ auf den vorherigen Fall zurückgeführt.

Ist schließlich $A = f''(a)$ indefinit, so gibt es Vektoren v und w mit $Q(v) = {}^tvAv > 0$ bzw. $Q(w) = {}^twAw < 0$. Betrachten wir dann die Funktionen

$$ \begin{aligned} g_v(t) &:= f(a + tv) \\ g_w(t) &:= f(a + tw), \end{aligned} $$

die auf einem genügend kleinen Intervall um $0 \in \mathbb{R}$ definiert sind, so ist nach der Kettenregel

$$ g_v''(0) = {}^tvf''(a)v = Q(v) > 0 \quad \text{und} \quad g_w''(0) = {}^twf''(a)w = Q(w) < 0, $$

wobei $t = 0$ jeweils ein kritischer Punkt ist. Somit hat g_v in 0 ein isoliertes lokales Mimimum, g_w ein isoliertes lokales Maximum, und f daher in a kein lokales Extremum. Q.E.D.

Bemerkung. Ist $A = f''(a)$ semidefinit, jedoch nicht definit, so kann man nicht auf lokale Maxima oder Minima schließen, wie z.B. das Beispiel $f(x,y) = x^2 + y^3$ lehrt. Hier ist $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$, die Funktion $x \mapsto f(x,0) = x^2$ besitzt in 0 ein lokales Minimum, während die Funktion $y \mapsto f(0,y) = y^3$ in 0 einen Wendepunkt besitzt, so dass f in $(0,0)$ keine lokales Extremum hat.

Beispiel. Die Funktion $f(x,y) := y^2(x-1) + x^2(x+1)$ auf $\mathbb{R}^2$ soll auf lokale Extrema und Sattelpunkte untersucht werden. Es ist

$$ \nabla f(x,y) = (y^2 + 3x^2 + 2x, 2(x-1)y). $$

Die Bedingung $\nabla f(x,y) = (0,0)$ ergibt als kritische Punkte $a := (0,0)$ und $b := (-\frac{2}{3}, 0)$. Die zweite Ableitung von f ist gegeben durch die Hesse-Matrix

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 2y \\ 2y & 2(x-1) \end{pmatrix}.$$

Somit ist $f''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit, so dass in a kein lokales Extremum vorliegt, sondern ein Sattelpunkt, und $f''(b) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$, so dass in b ein lokales Maximum vorliegt. Die zugehörigen Taylorpolynome der Ordnung 2 sind gegeben durch

$$\begin{aligned} P_a(x,y) = T_{2,a}f(x,y) &= 0 + \frac{1}{2}(2x^2 - 2y^2) = x^2 - y^2, \\ P_b(x,y) = T_{2,b}f(x,y) &= \frac{4}{27} + \frac{1}{2}\Big(-2\big(x - (-2/3)\big)^2 - \frac{10}{3}y^2\Big) \\ &= -\frac{8}{27} - \frac{4}{3}x - x^2 - \frac{5}{3}y^2. \end{aligned}$$

Kapitel 8

Der Banachsche Fixpunktsatz

In vielen Situationen in der Mathematik steht man vor dem Problem, die Existenz eines gewissen Objektes, wie z.B. die Lösung einer Gleichung, nachzuweisen, ohne dieses „explizit“ berechnen zu können. Hier helfen oftmals sogenannte Fixpunktsätze weiter. Einer der bedeutendsten Sätze dieser Art ist der Kontraktionssatz von Banach.

Definition. Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $S : M \to M$ heiße **kontrahierend** oder **eine Kontraktion**, wenn es eine Zahl $\theta \in [0,1[$ gibt mit

$$d(S(x),S(y)) \leq \theta\, d(x,y) \quad \text{für alle } x,y \in M.$$

Ein Punkt $\overline{x} \in M$ heiße **Fixpunkt** von S, wenn $S(\overline{x}) = \overline{x}$ gilt.
Man beachte, dass jede Kontraktion Lipschitz-stetig ist.

Theorem 8.1 (Banachscher Fixpunktsatz) *Sei S eine Kontraktion des vollständigen metrischen Raumes (M,d). Dann besitzt S einen eindeutigen Fixpunkt $\overline{x}$.*
Ist x_0 ein beliebiger Punkt in M, und definieren wir die Folge $(x_n)_n$ rekursiv durch $x_n := S(x_{n-1}),\ n = 1,2,\ldots,$ so ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$, und es gilt

$$d(\overline{x},x_n) \leq \frac{\theta}{1-\theta} d(x_{n-1},x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0,x_1) \ . \tag{8.1}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass S höchstens einen Fixpunkt besitzt. Sind nämlich $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ zwei Fixpunkte von S, so gilt:

$$d(\overline{x}_1,\overline{x}_2) = d(S(\overline{x}_1),S(\overline{x}_2)) \leq \theta d(\overline{x}_1,\overline{x}_2),$$

mit $0 \leq \theta < 1$. Es folgt $d(\overline{x}_1,\overline{x}_2) = 0$, also $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$.

Um die Existenz eines Fixpunktes nachzuweisen, wählen wir einen beliebigen Punkt x_0 in M, und definieren rekursiv die Folge $(x_n)_n$ wie im Theorem. Dann gilt für $k > 1$

$$d(x_k,x_{k+1}) = d(S(x_{k-1}),S(x_k)) \leq \theta d(x_{k-1},x_k) \ ,$$

woraus per Iteration folgt:

$$d(x_{k+j}, x_{k+j+1}) \leq \theta^{j+1} d(x_{k-1}, x_k), \quad j \geq 0 \; .$$

Für $p > n \geq 1$ folgt hieraus mittels der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &\leq \sum_{j=0}^{p-n-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \sum_{j=0}^{p-n-1} \theta^{j+1} d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \frac{\theta}{1-\theta} d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $0 \leq \theta < 1$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, x_1) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 \; .$$

Somit ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge im vollständigen metrischen Raum M und konvergiert folglich gegen einen Punkt $\overline{x} \in M$. Da S als Kontraktion stetig ist, ist

$$S(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} S(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \overline{x},$$

d.h. $\overline{x}$ ist ein Fixpunkt von S. Die Stetigkeit der Metrik als Abbildung von $M \times M$ nach $\mathbb{R}$ impliziert schließlich

$$d(x_n, \overline{x}) = \lim_{p\to\infty} d(x_n, x_p),$$

so dass sich die gewünschten Abschätzungen in Theorem 8.1 unmittelbar aus (8.2) ergeben.

Q.E.D.

Bemerkung 8.2 Setzen wir $S^1 := S$, und $S^n := S \circ S^{n-1}$ für $n > 1$, um die Iterierten von S zu beschreiben, so lässt sich die Folge $(x_n)_n$ in Theorem 8.1 schreiben als $(S^n(x_0))_n$. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert nicht nur die Existenz eines Fixpunktes sowie dessen Eindeutigkeit, sondern sogar ein iteratives Verfahren, um diesen aufzufinden. Ferner wird eine Formel zur Abschätzung des Fehlers $d(\overline{x}, S^n(x_0))$ geliefert, den man begeht, wenn man anstelle des Fixpunktes $\overline{x}$ den Punkt $S^n(x_0)$ aus dem n-ten Iterationsschritt wählt.

Kapitel 9

Der Satz über implizite Funktionen

9.1 Einleitende Beispiele

Ein Problem, auf welches man in der Mathematik, aber auch in vielen Anwendungen des öfteren stößt, ist das der „Auflösung“ eines Systems von Gleichungen nach gewissen „Unbekannten“ $y_1, \ldots, y_m$.
Typischerweise handelt es sich um Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_k \quad , \quad y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x_1, \ldots, x_k \quad , \quad y_1, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

in den Variablen $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m$ (welche auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ definiert sind), welche man für gegebene Werte von $x_1, \ldots, x_k$ nach $y_1, \ldots, y_m$ “auflösen“ möchte. Im Idealfall hofft man dabei, dass es zu festem $x_1, \ldots, x_k$ nur genau eine Lösung $y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, y_m = y_m(x_1, \ldots, x_k)$ gibt, wodurch dann Funktionen

$$g_i : (x_1, \ldots, x_k) \mapsto y_i(x_1, \ldots, x_k), \quad i = 1, \ldots, m,$$

mit

$$F_j(x_1, \ldots, x_k, g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_k)) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

definiert werden.

Beispiele 9.1 a) Die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert den Kreis mit Radius $r \geq 0$ und Mittelpunkt $(0, 0)$. Diese lässt sich umschreiben in

$$F(x, y) := r^2 - (x^2 + y^2) = 0.$$

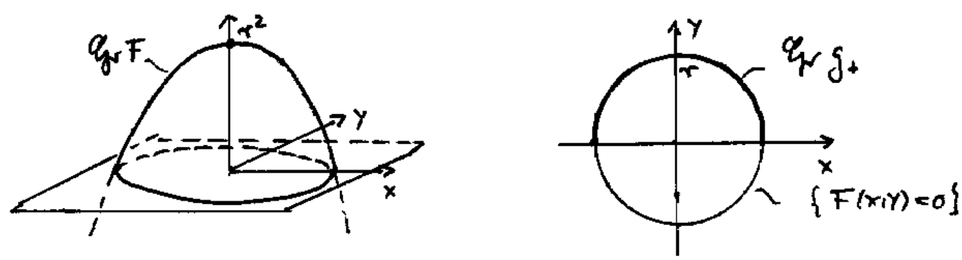
Löst man nach y auf, so erhält man

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \quad \text{falls } |x| \leq r \ .$$

Für $|x| > r$ erhält man dagegen keine reelle Lösung y. Setzt man $g_+(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$, $g_-(x) := -\sqrt{r^2 - x^2}$, $|x| \leq r$, so erhält man hier sogar zwei stetige Funktionen g_+ und g_- auf $I = [-r, r]$ mit

$$F(x, g_+(x)) = 0 \text{ und } F(x, g_-(x)) = 0, \ x \in I \ .$$

Insbesondere gibt es z.B. nur genau eine stetige Lösungsfunktion g mit $F(x, g(x)) = 0$ für $x \in I$ und $(0, g(0)) = (0, r)$, nämlich g_+.



Für $r = 0$ schrumpft das Lösungsintervall I übrigens zusammen auf die einpunktige Menge $I = \{0\}$ so, dass wir hier auf keiner noch so kleinen Umgebung der 0 eine Lösungsfunktion g finden können.

b) Sind die Funktionen $F_1, \ldots, F_n$ in (9.1) linear, so lässt sich (9.1) kürzer schreiben als

(9.2) $$B \cdot x + A \cdot y = 0 \ ,$$

mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, wobei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ und $B = (b_{il})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,k}}$ gewisse $n \times m$-bzw. $n \times k$-Matrizen sind. (9.2) ist äquivalent zu

(9.3) $$A \cdot y = -B \cdot x \ .$$

Hinreichend für die Auflösbarkeit dieser Gleichung nach y ist dann die Invertierbarkeit der durch die Matrix A definierten linearen Abbildung. Dazu muss insbesondere $n = m$ sein. Ist dann A invertierbar, so ist (9.3) äquivalent zu

$$y = -A^{-1} \cdot B \cdot x \ .$$

Dieses Beispiel unterstreicht das *heuristische Prinzip, wonach man i.A. gerade n Gleichungen benötigt, „um nach n unbekannten Variablen $y_1, \ldots, y_n$ aufzulösen“.*

Wir setzen daher ab jetzt stets $n = m$ voraus.

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei

$$F(x, y) := y + e^y - x.$$

Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes (genauer Satz 9.10, Anal. I) sieht man leicht, dass es eine eindeutige, stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x, g(x)) = 0$ gibt. Offenbar ist nämlich g die Umkehrfunktion der stetigen, streng monoton wachsenden Funktion $h : y \mapsto y + e^y$, welche nach Satz 9.11 (Anal. I) ebenfalls stetig ist.
Leider lässt sich g nicht "explizit" angeben, d.h. als Ausdruck in wohlbekannten Funktionen. Wir werden sehen, dass sich trotzdem wichtige Eigenschaften der durch $F(x, g(x)) = 0$ „implizit" definierten Funktion g, wie z.B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit etc., aus entsprechenden Eigenschaften der Funktion F herleiten lassen.

Wir kehren nun zum Gleichungssystem (9.1) zurück und beobachten zunächst, dass sich dieses für $n = m$ in die Form

$$F(x, y) = 0 \tag{9.4}$$

bringen lässt, wenn wir setzen:

$$\begin{aligned} x &:= (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k, \\ y &:= (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \\ F &:= (F_1, \ldots, F_n). \end{aligned}$$

9.2 Satz über implizite Funktion und Satz über Umkehrfunktionen

Wir wollen sogar folgende, allgemeinere Situation betrachten:

Es seien X, Y und Z normierte Vektorräume (welche in (9.4) den Räumen $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n$ entsprechen), sowie $(a, b) \in X \times Y$. Der Produktraum $X \times Y$ werde mit der Norm

$$\|(x, y)\| := \|(x, y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y, \ (x, y) \in X \times Y,$$

versehen.
In den meisten Anwendungen werden diese Räume allerdings endlich-dimensionale Euklidische Räume der Form

$$X = \mathbb{R}^k, \, Y = \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad Z = \mathbb{R}^n,$$

sein, und für den nachfolgenden Beweis mag es durchaus hilfreich sein, sich derartige Räume vorzustellen (meinethalben sogar mit $k = n = 1$ wie in Beispiel c)).

Definition. Es seien U eine offene Teilmenge von $X \times Y$, (a, b) ein Punkt in U sowie $F : U \to Z$ eine Abbildung. Offenbar ist dann $\{x \in X : (x, b) \in U\}$ eine Umgebung von a in X. Die Abbildung F heiße dann im Punkt (a,b) **partiell nach der 1. Variablen differenzierbar**, falls die Abbildung $F(\cdot,b) : x \mapsto F(x,b)$ im Punkte a differenzierbar ist. Man schreibt dann für diese partielle Ableitung

$$D_1F(a,b) := (F(\cdot,b))'(a) \quad \text{oder auch} \quad F'_x(a,b).$$

Analog wird die partielle Ableitung

$$D_2F(a,b) = F'_y(a,b) := (F(a,\cdot))'(b)$$

definiert.
Ist F im Punkte (a,b) total differenzierbar, so ist offenbar für alle $(\xi,\eta) \in X \times Y$

$$\begin{aligned} DF(a,b)(\xi,\eta) &= DF(a,b)(\xi,0) + DF(a,b)(0,\eta) \\ &= D_1F(a,b)\xi + D_2F(a,b)\eta \\ &= F'_x(a,b)\xi + F'_y(a,b)\eta\ . \end{aligned} \tag{9.5}$$

Definition. Ein beschränkter linearer Operator $T \in L(Y,Z)$ heiße **regulär**, falls es einen beschränkten linearen Operator $T^{-1} \in L(Z,Y)$ gibt mit

$$T \circ T^{-1} = I_Z \quad \text{und} \quad T^{-1} \circ T = I_Y,$$

wobei I_Z bzw. I_Y den identischen Operator auf Z bzw. Y bezeichne.

Bemerkung. Der wichtigste Fall ist wieder der wo $Y = Z = \mathbb{R}^n$ ist. Wie in Kapitel 4 besprochen identifiziert man hier durch Wahl der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ jeden linearen Operator $T \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ mit einer reellen $n \times n$-Matrix. Wir bezeichnen mit $M^{n\times n}(\mathbb{R})$ den Raum all dieser reellen $n \times n$-Matrizen. Dann ist T offenbar regulär dann und nur dann, wenn T invertierbar ist, d.h. wenn $\det T \neq 0$, so dass T in der **allgemeinen linearen Gruppe**

$$GL(n,\mathbb{R}) := \{T \in M^{n\times n}(\mathbb{R}) : \det T \neq 0\}$$

liegt.
Schließlich werden wir noch folgendes Ergebnis benötigen.

Lemma 9.2 *Sei E ein Banachraum, und sei $A \in L(V) = L(V,V)$ mit $\|I-A\| < 1$. Dann ist A regulär, d.h. invertierbar in $L(V)$, und es gilt:*

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k, \ \text{wobei} \ \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|I-A\|}\ .$$

Beweis. Wir setzen $D := I - A$. Dann ist $A = I - D$. Um A^{-1} zu definieren, betrachten wir daher die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} D^k$ in $L(V)$. Diese konvergiert für $\|D\| < 1$ normal (vgl. Kapitel 2), d.h. es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|D^k\| < \infty\ ,$$

denn es ist $\|D^k\| \leq \|D\|^k$, und die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|D\|^k$ ist konvergent.
Nach Satz 2.2 ist die Reihe somit insbesondere konvergent in $L(V)$. Sei $B \in L(V)$ ihr Wert, d.h. $B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} D^k \in L(V)$. Aus der Norm-Ungleichung $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$, $S, T \in L(V)$, leitet man ab, dass die Links- sowie die Rechtsmultiplikation $S \mapsto SB$ bzw. $S \mapsto BS$ mit B stetige lineare Abbildungen sind. Daher ist

$$\begin{aligned} BA &= \sum_{k=0}^{\infty}(D^k A) = \sum_{k=0}^{\infty} D^k (I - D) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D^k - \sum_{k=0}^{\infty} D^{k+1} = I \ , \end{aligned}$$

und ähnlich zeigt man: $AB = I$. Somit ist $B = A^{-1}$. Schließlich ist

$$\|B\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|D\|^k = \frac{1}{1 - \|D\|} = \frac{1}{1 - \|I - A\|} \ .$$

Q.E.D.

Theorem 9.3 (Satz über implizite Funktionen) *Es seien X, Y und Z Banachräume, $U_1 \subset X$ und $U_2 \subset Y$ offene Mengen, sowie $F : U_1 \times U_2 \to Z$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $(a, b) \in U_1 \times U_2$ mit $F(a, b) = 0$, und sei $F'_y(a, b) \in L(Y, Z)$ regulär.*
Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ von a und $V_2 \subset U_2$ von b derart, dass es zu jedem $x \in V_1$ genau ein $y \in V_2$ gibt mit $F(x, y) = 0$, und dass die Funktion $g : V_1 \to V_2$, welche jedem $x \in V_1$ die zugehörige Lösung $y = g(x)$ in V_2 zuordnet, stetig differenzierbar ist. Für diese Funktion g gilt also

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \textit{für alle } x \in V_1 \ .$$

Beweis. Der Beweis soll in zwei Schritten erfolgen.

1. Schritt: Reduktion auf ein Fixpunktproblem

Wir können das Problem leicht auf den Fall $Z = Y$ und $F'_y(a, b) = I$ zurückführen. Dazu setzen wir $B := F'_y(a, b) \in L(Y, Z)$, und $\tilde{F} := B^{-1} \circ F$. Dann ist $\tilde{F}$ eine Abbildung $\tilde{F} : U_1 \times U_2 \to Y$, und nach der Kettenregel gilt $\tilde{F}'_y(a, b) = B^{-1} \circ F'_y(a, b) = I_Y = I$. Ferner ist $F(x, y) =$ genau dann, wenn $\tilde{F}(x, y) = 0$. Indem wir daher $\tilde{F}$ anstelle von F betrachten, dürfen wir in der Tat annehmen, dass $F : U_1 \times U_2 \to Y$ und $F'_y(a, b) = I$ gelten.

Wir definieren dann die Abbildung $G : U_1 \times U_2 \to Y$ durch

$$G(x, y) := y - F(x, y) \ .$$

Offenbar gilt

$$F(x,y) = 0 \text{ genau dann, wenn } G(x,y) = y \ , \tag{9.6}$$

und

$$G'_y(x,y) = I - F'_y(x,y) \ .$$

Insbesondere ist $G'_y(a,b) = I - I = 0$. Für G gilt also:

$$\begin{aligned} G'_y(a,b) &= 0, \\ G(a,b) &= b. \end{aligned}$$

Da G'_y stetig ist, können wir somit offene Kugeln $B_1 = B_{\varepsilon_1}(a) \subset U_1$ und $B_2 = B_{\varepsilon_2}(b) \subset U_2$ um a bzw. b so wählen, dass gilt:

$$\|G'_y(x,y)\| \le \frac{1}{2} \quad \text{für alle } (x,y) \subset B_1 \times B_2 \ . \tag{9.7}$$

Aus (9.7) folgern wir mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes (Theorem 7.13), dass für alle $x \in B_1$ und $y_1, y_2 \in B_2$ gilt:

$$\|G(x,y_1) - G(x,y_2)\| \le \frac{1}{2} \ \|y_1 - y_2\|. \tag{9.8}$$

Beachte, dass diese Ungleichung bereits impliziert, dass es zu jedem $x \in B_1$ *höchstens* ein $y \in B_2$ geben kann mit $F(x,y) = 0$, d.h. mit $G(x,y) = y$.

Wähle $0 < \rho_2 < \varepsilon_2$. Da F stetig im Punkt (a,b) ist mit $F(a,b) = 0$, gibt es eine offene Kugel $B_{\rho_1}(a) \subset B_1$ so, dass für alle $x \in B_{\rho_1}(a)$

$$\|F(x,b)\| < \frac{\rho_2}{2}. \tag{9.9}$$

Wir halten nun $x \in B_{\rho_1}(a)$ fest. Mit (9.8) folgert man dann für alle $y \in B_2$:

$$\begin{aligned} \|G(x,y) - b\| &\le \|G(x,y) - G(x,b)\| + \|G(x,b) - b\| \\ &\le \frac{1}{2}\|y - b\| + \|F(x,b)\|. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die abgeschlossene Kugel $M := \overline{B_{\rho_2}(b)}$ als vollständigen metrischen Teilraum von Y, und definieren darauf die Abbildung

$$S(y) := G(x,y), \ y \in M.$$

Die vorangehende Abschätzung und (9.9) zeigen, dass

$$\|S(y) - b\| \le \frac{1}{2}\rho_2 + \frac{1}{2}\rho_2 = \rho_2,$$

d.h. $S : M \to M$ ist eine Abbildung dieses metrischen Raumes in sich, und nach (9.8) handelt es sich um eine Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt sie daher eine eindeutigen Fixpunkt $y_x \in \overline{B_{\rho_2}(b)}$, d.h. $G(x, y_x) = y_x$ und somit $F(x, y_x) = 0$. Setzen wir daher $g(x) := y_x$, so erhalten wir eine Abbildung $g : B_{\rho_1}(a) \to B_2$ mit $G(x, g(x)) = g(x)$, d.h.

$$F(x, g(x)) = 0 \qquad \text{für alle } \; x \in B_{\rho_1}(a).$$

Offenkundig ist ferner $g(a) = b$.

2. Schritt: Stetige Differenzierbarkeit der Lösungsfunktion g

Seien $x, x+\xi \in B_{\rho_1}(a)$ gegeben, und definiere $y, \eta \in Y$ durch $g(x) = y$ und $g(x+\xi) = y + \eta$. Da F im Punkt (x, y) differenzierbar ist, gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= F(x+\xi, y+\eta) - F(x, y) = F'(x, y)(\xi, \eta) + r_{(x,y)}(\xi, \eta) \\ &= F'_x(x, y)\xi + F'_y(x, y)\eta + r_{(x,y)}(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{9.10}$$

wobei

$$\lim_{(\xi,\eta)\to 0} \frac{\|r_{(x,y)}(\xi, \eta)\|}{\|(\xi, \eta)\|} = 0. \tag{9.11}$$

Ferner besitzt nach Lemma 9.2 der lineare Operator $F'_y(x, y)$ einen beschränkten inversen Operator, da ja nach (9.7)

$$\|I - F'_y(x, y)\| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Mit $T := F'_y(x, y)^{-1}$ bezeichnen wir den inversen Operator. Wenden wir T auf beide Seiten von (9.10) an, so folgt

$$0 = \eta + T \circ F'_x(x, y)\xi + T \circ r_{(x,y)}(\xi, \eta).$$

Dies ist äquivalent zu

$$g(x+\xi) - g(x) = -T \circ F'_x(x, y)\xi - T \circ r_{(x,y)}(\xi, \eta). \tag{9.12}$$

Angenommen, wir könnten zeigen, dass

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{\|T \circ r_{(x,y)}(\xi, \eta)\|}{\|\xi\|} = 0 \tag{9.13}$$

(wobei zu beachten ist, dass ja hier $\eta = g(x+\xi) - g(x)$ eine Funktion von ξ ist!), so würde folgen, dass g im Punkte x differenzierbar ist, und zwar mit Ableitung $g'(x) = -T \circ F'_x(x, y)$, d.h.

$$g'(x) = -F'_y(x, y)^{-1} \circ F'_x(x, y). \tag{9.14}$$

Es gilt jedoch

$$\begin{aligned}
\|\eta\| &= \|(y+\eta)-y\| = \|G(x+\xi,y+\eta)-G(x,y)\| \\
&\leq \|G(x+\xi,y+\eta)-G(x+\xi,y)\| + \|G(x+\xi,y)-G(x+\xi,y)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\eta\| + \|F(x+\xi,y)-F(x,y)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\eta\| + \|F'(x,y)\|\|\xi\| + \|r_{(x,y)}(\xi,0)\|,
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Ungleichung (9.8) benutzt haben.
Für genügend kleines $\|\xi\|$ folgt hieraus:

$$\|g(x+\xi)-g(x)\| = \|\eta\| \leq C_0\|\xi\|,$$

mit $C_0 := 2(\|F'(x,y)\|+1)$. Dies zeigt insbesondere, dass g stetig im Punkt x ist. Ferner folgt für genügend kleines $\|\xi\|$:

$$\|(\xi,\eta)\| = \|\xi\| + \|\eta\| \leq (C_0+1)\|\xi\|,$$

und wir erhalten damit

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{\|T\circ r_{(x,y)}(\xi,\eta)\|}{\|\xi\|} \leq \lim_{\xi\to 0} \frac{\|(\xi,\eta)\|}{\|\xi\|}\|T\|\frac{\|r_{(x,y)}(\xi,\eta)\|}{\|(\xi,\eta)\|} = 0,$$

womit schließlich auch (9.13) nachgewiesen ist.

Mit Hilfe von (9.14) erhalten wir zuletzt auch noch die Stetigkeit der Ableitung g' von g, denn sowohl $F'_x(x,y)$ als auch $F'_y(x,y)$ sind stetig in (x,y). Damit ist auch die Abbildung $(x,y) \mapsto (F'_y(x,y))^{-1}$ stetig auf der von uns betrachteten Umgebung von (a,b), da wir diese faktorisieren können als

$$\mathcal{I} \circ F'_y,$$

wobei $\mathcal{I}$ die Inversionsabbildung $\mathcal{I} : S \mapsto S^{-1}$ auf der Menge $L(Y)^\times$ der regulären beschränkten linearen Operatoren $S : Y \to Y$ bezeichne; diese ist nämlich ebenfalls stetig. Damit ist dann nach (9.14) auch g' als Komposition stetiger Funktionen stetig.

Die Stetigkeit der Inversionsabbildung $\mathcal{I}$ lässt sich im Falle $Y = \mathbb{R}^n$ leicht beweisen: hier können wir ja $L(Y)^\times$ mit der Gruppe $GL(n,\mathbb{R})$ identifizieren, und die Lineare Algebra lehrt, dass wie für $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots n} \in GL(n,\mathbb{R})$ die inverse Matrix $\mathcal{I}(S) = S^{-1}$ schreiben können in der Form

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S}\,\tilde{S},$$

wobei $\tilde{S}$ die Kofaktormatrix bezeichne. Da sowohl $\det S$ als auch die Koeffizienten von $\tilde{S}$ Polynome in der Koeffizienten s_{ij} von S sind, und da $\det S \neq 0$ auf $GL(n,\mathbb{R})$

gilt, sind somit die Koeffizienten der Matrix S^{-1} stetige Funktionen der Koeffizienten der Matrix S, d.h. die Abbildung $S \mapsto S^{-1}$ ist stetig.

Für den allgemeinen Fall sei auf Korollar 10.8 verwiesen. Die Behauptung des Theorems folgt damit, indem wir schließlich $V_1 := B_{\rho_1}(a)$ und $V_2 := B_2$ wählen. Q.E.D.

Bemerkungen 9.4 (i) Man überlege sich einmal, dass für die Abbildung F in Beispiel 9.1 a) die Bedingung $F'_y(a,b) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ (für a, b mit $a^2 + b^2 = r^2$) hinreichend und notwendig dafür ist, dass es auf einer Umgebung von a eine stetige Funktion g gibt mit $g(a) = b$ und $F(x, g(x)) = 0$, und dass in Beispiel b) die Regularität von $F'_y(a,b)$ äquivalent zur Regularität der Matrix A ist.

(ii) Die Formel

$$g'(x) = -F'_y(x,y)^{-1} \circ F'_x(x,y)$$

in (9.14) für die Ableitung der implizit definierten Funktion g ergibt sich auch sofort mit der Kettenregel aus $f(x) := F(x, g(x)) \equiv 0$, *falls man bereits weiß, dass g differenzierbar ist*: es ist dann nämlich

$$0 = f'(x) = F'_x(x, g(x)) + F'_y(x, g(x)) \circ g'(x),$$

woraus (9.14) durch Auflösen nach $g'(x)$ folgt.

(iii) Für die in Beispiel 9.1 c) implizit definierte Funktion g erhalten wir damit insbesondere, dass diese stetig differenzierbar ist auf ganz $\mathbb{R}$, und dass

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))} = \frac{1}{1 + e^{g(x)}} \ .$$

Da die rechte Seite differenzierbar ist, ist damit g sogar zweimal differenzierbar, und per Induktion erkennt man, dass g sogar beliebig oft differenzierbar ist.

Aus dem Satz über implizite Funktionen erhält man rasch auch noch das folgende fundamentale Resultat zur lokalen Umkehrbarkeit von C^1-Abbildungen:

Theorem 9.5 (Satz über Umkehrfunktionen) *Es seien X und Y Banachräume, a ein Punkt aus X und U eine offene Umgebung von a in X. Sei ferner $f : U \to Y$ eine stetig differenzierbare Funktion derart, dass $f'(a) \in L(X, Y)$ regulär ist.*
Dann gibt es eine offene Umgebung V_1 von a in U sowie eine offene Umgebung V_2 von $b := f(a)$ in Y so, dass f die Menge V_1 bijektiv auf V_2 abbildet und die Umkehrabbildung

$$g := (f|_{V_1})^{-1} : V_2 \to V_1$$

stetig differenzierbar ist. Es gilt dann ferner

$$g'(b) = (f'(a))^{-1} \ .$$

Beweis. Um g zu finden, müssen wir die Gleichung

$$f(x) - y = 0$$

nach x auflösen. Wir definieren daher die Abbildung $F : U \times Y \to Y$ durch

$$F(x, y) := f(x) - y \ .$$

Offenbar ist F stetig differenzierbar, und $F(a, b) = 0$. Ferner ist

$$F'_x(a, b) = f'(a) \in L(X, Y)$$

regulär. Wir dürfen somit den Satz über implizite Funktionen auf F anwenden. Danach gibt es eine offene Umgebung V_2 von b in Y sowie eine offene Umgebung V'_1 von a in U derart, dass es zu jedem $y \in V_2$ genau ein $x \in V'_1$ gibt mit $F(x, y) = 0$, und dass die dadurch definierte Funktion $y \mapsto x = g(y)$ auf V_2 stetig differenzierbar ist.
Für unsere Funktion f bedeutet dies insbesondere: Zu jedem $y \in V_2$ gibt es genau ein $x \in V'_1$, nämlich $x = g(y)$, mit $f(x) = y$.
Somit gilt

$$V_1 := g(V_2) = \{x \in V'_1 : f(x) \in V_2\} = V'_1 \cap f^{-1}(V_2),$$

und $f : V_1 \to V_2$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $g : V_2 \to V_1$. Da f stetig ist, ist zudem V_1 offen.
Schließlich folgt aus $g \circ f(x) = x$ für $x \in V_1$ mit Hilfe der Kettenregel:

$$g'(f(x)) \circ f'(x) = I \ ,$$

d.h. insbesondere

$$g'(b) = (f'(a))^{-1} \ .$$

Q.E.D.

Definition. Eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to V$ einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine offene Teilmenge $V \subset Y$ heiße ein C^1**- Diffeomorphismus**, wenn die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

In Theorem 9.5 ist damit die eingeschränkte Abbildung $f|_{V_1} : V_1 \to V_2$ ein C^1-Diffeomorphismus.

9.3 Eine Anwendung: Extrema unter Nebenbedingungen*

Bei vielen Optimierungsaufgaben wird das Extremum einer Funktion unter gewissen Nebenbedingungen gesucht, in der klassischen Mechnanik z.B. dadurch, dass sich ein Teilchen nur innerhalb einer gewissen Fläche bewegen darf.

Dies führt mathematisch auf ein **Problem folgenden Typs:**

Gegeben sind eine stetig differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie weitere stetig differenzierbare Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_l : \Omega \to \mathbb{R}$, welche wir zu einer stetig differenzierbaren Abbildung $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_l) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ zusammenfassung. Sei

$$M := \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\}$$

die gemeinsame Nullstellenmenge der Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$. Gesucht werden Punkte $x_c \in M$ mit $f(x) \leq f(x_c)$ für alle $x \in M$ bzw. $f(x) \geq f(x_c)$ für alle $x \in M$. Solche Punkte heißen **Maximal- bzw. Minimalpunkte auf** M oder auch **„unter der Nebenbedingung** $\varphi = 0$.**“**
Die Menge M kann ohne weitere Forderungen an die Funktionen φ_j eine sehr komplizierte Struktur besitzen. Daher werden wir stets folgende Regularitätsannahme über die Gradienten der Funktionen φ_j machen:

$$\nabla\varphi_1(x), \ldots, \nabla\varphi_l(x) \quad \text{sind linear unabhängig für jedes } x \in M. \tag{9.15}$$

Dies ist offenbar äquivalent dazu, dass die Jacobi-Matrix von φ maximalen Rang hat, d.h. $\operatorname{rang} J_\varphi(x) = l$ ist für alle $x \in M$; ferner muss dann $l \leq n$ gelten. Unter dieser Voraussetzung handelt es sich bei M um eine **eingebettete Untermannigfaltigkeit des** $\mathbb{R}^n$ **der Dimension** $n-l$, d.h., lokal lässt sich M stets als der Graph einer stetig differenzierbaren Abbildung auf dem $\mathbb{R}^{n-l}$ darstellen, zumindest, nachdem man die Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ geeignet umgeordnet hat. Hierzu noch folgende Notation:
Ist π eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ und bezeichnet $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, so bezeichnen wir mit $W' = W'_\pi$ und $W'' = W''_\pi$ die linearen Teilräume

$$\begin{aligned} W'_\pi &:= \{\sum_{j=1}^{n-l} s_j e_{\pi(j)} : s_1, \ldots, s_{n-l} \in \mathbb{R}\}, \\ W''_\pi &:= \{\sum_{k=1}^{l} t_k e_{\pi(k)} : t_1, \ldots, t_l \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

des $\mathbb{R}^n$. Damit gilt insbesondere $\mathbb{R}^n = W'_\pi \oplus W''_\pi$.

Satz 9.6 *Unter den obigen Voraussetzungen, insbesondere* (9.15)*, gibt es zu jedem Punkt* $z \in M$ *eine Permutation* π *der Zahlen* $1, \ldots, n$ *sowie eine offene Umgebung* U' *des Punktes* $z' := \sum_{j=1}^{n-l} z_{\pi(j)} e_{\pi(j)}$ *in* W'_π *sowie* U'' *des Punktes* $z'' := \sum_{j=n-l+1}^{n} z_{\pi(j)} e_{\pi(j)}$ *in* W''_π *sowie eine stetig differenzierbare Abbildung* $g : U' \to U''$ *so, dass* $U' + U' \subset \Omega$ *und*

$$M \cap (U' + U'') = \{x' + g(x') : x' \in U'\}. \tag{9.16}$$

Beachte, dass $U' + U''$ eine offene Umgebung von $z = z' + z''$ in Ω ist.

Falls $\pi = \mathrm{id}$ die **triviale Permutation** $j \mapsto j$ ist, wird dies alles noch klarer:

Dann ist offenbar $W' = \mathbb{R}^{n-l} \times \{0\}$ und $W'' = \{0\} \times \mathbb{R}^l$, und (9.16) bedeutet gerade, dass es eine offene Umgebung U' von $z' := (z_1, \ldots, z_{n-l}) \in \mathbb{R}^{n-l}$, eine offene Umgebung U'' von $z'' := (z_{n-l+1}, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^l$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$ gibt so, dass $U' \times U'' \subset \Omega$ ist und

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', g(x')) : x' \in U'\} \tag{9.17}$$

gerade der Graph von g ist.

Beweis. Da die Jacobi-Matrix $J_\varphi(z)$ (dies ist eine $l \times n$-Matrix) den maximal möglichen Rang l hat, gibt es l unter den Koordinaten x_j, sagen wir $x_{j_{n-l+1}}, \ldots, x_{j_n}$, so, dass die $l \times l$-Untermatrix $(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{j_k}}(z))_{i=1,\ldots,l,k=n-l+1,\ldots,n}$ regulär ist. Bezeichnen wir die verbleibenden Koordinaten mit $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-l}}$, so definiert uns dies eine Permutation π, indem wir setzen $\pi(k) := j_k$, $k = 1, \ldots, n$.
Indem wir mittels dieser Permutation die Koodinaten x_j des $\mathbb{R}^n$ umsortieren dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass π die triviale Permutation ist. Zerlegen wir die Koordinaten dann wie in der vorangehenden Bemerkung als $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{n-l} \times \mathbb{R}^l$, mit

$$x' := (x_1, \ldots, x_{n-l}) \in \mathbb{R}^{n-l}, \quad x'' := (z_{n-l+1}, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^l,$$

so ist also $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-l} \times \mathbb{R}^l$, und es gilt laut Voraussetzung, dass die Jacobimatrix der partiellen Ableitung $\varphi'_{x''}(z', z'')$ nach x'' regulär ist. Der Satz über implizite Funktionen zeigt dann aber, dass es in der Tat Umgebungen U' von z' und U'' von z'' sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$ gibt so, dass $U' \times U'' \subset \Omega$, und dass es zu jedem $x' \in U'$ genau eine Lösung x'' der Gleichung

$$\varphi(x', x'') = 0$$

in U'' gibt, nämlich $x'' = g(x')$. Dies bedeutet aber gerade, dass $M \cap (U' \times U'') = \{(x', g(x')) : x' \in U'\}$.

Q.E.D.

Wir betrachten nun nach (9.17) die C^1-Abbildung

$$\psi : U' \to M \subset \mathbb{R}^n, \quad \psi(x') := (x', g(x'));$$

dies ist eine sogenannte **Parametrisierung** von M. Sei $x'_0 \in U'$, und $x_0 := (x'_0, g(x'_0)) = \psi(x'_0)$ der zugehörige Punkt auf M. Für $j = 1, \ldots, n-l$ und genügend kleines $t \in \mathbb{R}$ ist dann die Kurve

$$\gamma_j(t) := \psi(x'_0 + te_j) = (x'_0 + te_j, g((x'_0 + te_j))$$

wohldefiniert und verläuft ganz in M, und es ist $\gamma_j(0) = x_0$. Wir betrachten dann die Vektoren

$$X_j(x_0) := \frac{d\gamma_j}{dt}(0) \in \mathbb{R}^n, \qquad j = 1, \ldots, n-l,$$

welche anschaulich betrachtet allesamt „tangential“ zu M im Punkt x_0 liegen. Mit Hilfe der Kettenregel sehen wir, dass

$$X_j(x_0) = (e_j, g'(x_0') \cdot e_j), \qquad j = 1, \ldots, n-l.$$

Dies zeigt, dass die Vektoren $X_1(x_0), \ldots, X_{n-l}(x_0)$ linear unabhängig sind. Den von ihnen aufgespannten $(n-l)$-dimensionalen Teilraum $T_{x_0}M$ des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man als den **Tangentialraum** an M im Punkte x_0. Anschaulich liegt nämlich der um x_0 verschobene affine Unterraum $x_0 + T_{x_0}M$ tangential an M in x_0.

Man kann sich auch leicht eine Basis des zugehörigen Orthogonalraums

$$T_{x_0}^{\perp}M := \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot X = 0 \text{ für alle } X \in T_{x_0}M\}$$

verschaffen (hier bezeiche $x \cdot y$ das Euklidische Skalarprodukt von x und y auf dem $\mathbb{R}^n$):
Wir betrachten dazu die Vektoren

$$N_k(x_0) := \nabla\varphi(x_0), \qquad k = 1, \ldots, l.$$

Da $\varphi(\psi(x')) = 0$ für alle $x' \in U'$, ist insbesondere $\varphi_k(\gamma_j(t)) = 0$ für alle genügend kleinen t und $k = 1, \ldots, l$ und $j = 1, \ldots, n-l$. Durch Ableiten nach t folgt wieder mittels Kettenregel

$$0 = \varphi_k'(x_0) \cdot \gamma_j'(0) = \nabla\varphi_k(x_0) \cdot \gamma_j'(0) = N_k(x_0) \cdot X_j(x_0).$$

Somit stehen die Vektoren $N_k(x_0)$ senkrecht zu $T_{x_0}M$. Nach (9.15) sind sie zudem linear unabhängig, d.h. sie spannen eine l-dimensionalen Unterraum von $T_{x_0}^{\perp}M$. Die Lineare Algebra lehrt jedoch, dass $\dim T_{x_0}^{\perp}M = n - \dim T_{x_0}M = n - (n-l) = l$ ist. Somit gilt:

(9.18) $\qquad N_1(x_0), \ldots, N_l(x_0)$ bildet eine Basis von $T_{x_0}^{\perp}M$.

Ich möchte all dies hier nicht weiter vertiefen (mehr zur Theorie der Mannigfaltigkeiten erfährt man z.B. in Vorlesungen zur *Differentialgeometrie*), sondern nun zu unserem Problem des Auffindens von lokalen Extrema unter Nebenbedingungen zurückkehren und folgenden sehr nützlichen Satz beweisen:

Satz 9.7 (Multiplikatorregel von Lagrange) *Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ stetig differenzierbare Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, und sei $M := \varphi^{-1}(\{0\})$ die Nullstellenmenge von φ. Ferner besitze die Jacobi-Matrix von φ in jedem Punkt $x \in M$ den Rang l, d.h. es gelte* (9.15). *Dann gilt:*
Ist x_0 ein Extremalpunkt von f auf M, so ist $\nabla f(x_0)$ eine Linearkombination der Normalenvektoren $N_k(x_0) = \nabla\varphi_k(x_0)$, d.h.

(9.19) $$\nabla f(x_0) \in T_{x_0}^{\perp}M;$$

es gibt also Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{R}$, sogenannte **Lagrange-Multiplikatoren**, so dass gilt:

$$\nabla f(x_0) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \nabla \varphi_k(x_0). \tag{9.20}$$

Beweis. Betrachte wieder für $j = 1, \ldots, n-l$ die Kurve $\gamma_j(t) := \psi(x_0' + te_j) = (x_0' + te_j, g((x_0' + te_j))$ in M mit $\gamma_j(0) = x_0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass die Funktion

$$F_j :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}, \quad F_j(t) := f(\gamma_j(t)),$$

in $t = 0$ ein lokales Extremum hat, und folglich ist $F_j'(0) = 0$, also mit der Kettenregel

$$0 = \nabla f(x_0) \cdot \gamma_j'(t) = \nabla f(x_0) \cdot X_j(x_0), \qquad j = 1, \ldots, n-l.$$

Folglich ist $\nabla f(x_0) \in T_{x_0}^{\perp} M$.

Q.E.D.

Beispiel 9.8 Es soll das Maximum von $f(x) := x_1 \cdots x_n$ auf

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 1, x_j > 0 \text{ für alle } j\}$$

bestimmt werden.

Wir setzen hier $\varphi(x) := x_1 + \cdots + x_n - 1$. f nimmt auf M ein Maximum an, denn f nimmt auf der kompakten Menge $\overline{M}$ ein Maximum an, und ferner verschwindet f auf dem Rand $\partial M = \overline{M} \setminus M$, da in jedem Randpunkt x wenigstens eine der Koordinaten $x_j = 0$ ist. Da aber $f(x) > 0$ ist auf M, muss folglich das Maximum in einem Punkt von M angenommen werden.

Sei nun $x^0 \in M$ eine Maximalstelle von f. Wegen $\nabla \varphi(x) = (1, \ldots, 1) \neq 0$ ist die Annahme (9.15) erfüllt, so dass wir die Multiplikatorenregel anwenden können: es gibt also eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x^0) = \lambda \nabla \varphi(x^0)$, d.h. mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = \frac{x_1^0 \cdots x_n^0}{x_j^0} = \lambda \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

Hieraus folgt offenbar $x_1^0 = \cdots = x_n^0$, und mit $\varphi(x^0) = 0$, d.h. $x_1 + \cdots x_n = 1$, muss somit $x_j^0 = 1/n$ sein für alle j. Folglich nimmt f das Maximum auf M genau im Punkt $(1/n, \ldots, 1/n)$ an, und das Maximum ist $1/n^n$. Für alle $x \in M$ gilt also

$$x_1 \cdots x_n \leq \frac{1}{n^n}.$$

Aus dieser Ungleichung kann auch rasch wieder die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots a_n}{n}$$

zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel positiver Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ herleiten (wieso?), welches wir in der Analysis I bereits auf anderem Wege hergeleitet hatten.

Kapitel 10

Anhänge*

10.1 Anhang A: Die allgemeinen $\ell^p(A)$-Räume

Ist A eine endliche Menge, so bezeichnet man den Vektorraum $\mathbb{K}^A$, versehen mit der p-Norm $\|\cdot\|_p$, mit $\ell^p(A)$. Diese Definition lässt sich sogar auf den Fall beliebiger unendlicher Menge A ausdehnen, wie wir nun zeigen werden.

Definitionen. Sei $1 \leq p \leq \infty$, und sei A eine unendliche Menge. Ist $\mathcal{E} \subset A$ eine endliche Teilmenge, so setzen wir für jede Funktion $f : A \to \mathbb{K}$

$$\|f\|_{\mathcal{E},p} := \|f|_{\mathcal{E}}\|_p,$$

sowie

$$\|f\|_p := \sup\{\|f\|_{\mathcal{E},p} : \mathcal{E} \subset A,\ \mathcal{E} \text{ endlich}\}.$$

Beachte: Es kann durchaus $\|f\|_p = \infty$ sein, falls A unendlich ist.

Wir werden uns hauptsächlich für den Fall abzählbarer Mengen A interessieren, insbesondere $A = \mathbb{N}$ und $A = \mathbb{Z}$.

Definitionen. $f \in \mathbb{K}^A$ heiße p-**summierbar**, falls $\|f\|_p < \infty$. Mit $\ell^p(A)$ bezeichnen wir die Menge aller p-summierbaren Abbildungen $f : A \to \mathbb{K}$. $\ell^\infty(A)$ besteht offenbar aus der Menge $\mathcal{B}(A)$ aller beschränkten Abbildungen von A nach $\mathbb{K}$, und es ist

$$\|f\|_\infty = \sup_{a\in A} |f(a)| = \|f\|_u.$$

Lemma 10.1 *(i) Ist $1 \leq p < \infty$, und ist $f \in \ell^p(A)$, so ist*

$$\|f\|_p = \left(\sup\left\{\sum_{a\in\mathcal{E}} |f(a)|^p : \mathcal{E} \subset A,\ \mathcal{E} \text{ endlich}\right\}\right)^{1/p}.$$

(ii) Ist A abzählbar unendlich, und ist die Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine bijektive Abzählung von A (d.h. die Abbildung $\mathbb{N} \ni j \mapsto a_j \in A$ ist bijektiv), so gilt

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} |f(a_j)|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |f(a_j)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Beweis. (i) Für $\mathcal{E} \subset A$, $|\mathcal{E}| < \infty$, und $f \in \ell^p(A)$ sei $r_{\mathcal{E}} := \sum\limits_{a\in\mathcal{E}} |f(a)|^p$. Da die Abbildung $r \mapsto r^{1/p}$ und ihre Umkehrfunktion $r \mapsto r^p$ monoton wachsend auf $[0,\infty[$ sind, folgt:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \sup\{r_{\mathcal{E}}^{1/p} : \mathcal{E} \subset A, |\mathcal{E}| < \infty\} \\ &= (\sup\{r_{\mathcal{E}},\ \mathcal{E} \subset A,\ |\mathcal{E}| < \infty\})^{1/p}, \end{aligned}$$

womit (i) bewiesen ist.
(ii) Übungsaufgabe.

Q.E.D.

Satz 10.2 (Höldersche Ungleichung) *Seien $p, q \in [1, \infty]$ konjugierte Exponenten, und seien $f \in \ell^p(A)$, $g \in \ell^q(A)$. Dann liegt die Funktion fg in $\ell^1(A)$, und es gilt*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \ \|g\|_q \tag{10.1}$$

Beweis. Ist $\mathcal{E} \subset A$ endlich, so gilt mit (2.2)

$$\|fg\|_{\mathcal{E},1} \le \|f\|_{\mathcal{E},p} \ \|g\|_{\mathcal{E},q} \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Bildet man hier das Supremum über alle endlichen Teilmengen $\mathcal{E}$ von A, so folgt (10.1). Q.E.D.

Satz 10.3 (Minkowskische Ungleichung) *Sei $1 \le p \le \infty$. Sind $f, g \in \ell^p(A)$, so ist auch $f + g \in \ell^p(A)$, und es gilt:*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{10.2}$$

Beweis. Ist $\mathcal{E} \subset A$ endlich, so gilt mit Satz 2.4

$$\|f + g\|_{\mathcal{E},p} \le \|f\|_{\mathcal{E},p} + \|g\|_{\mathcal{E},p} \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dies zeigt, dass mit $f, g \in \ell^p(A)$ auch $f + g$ in $\ell^p(A)$ liegt, und bildet man wieder das Supremum über alle endlichen Teilmengen $\mathcal{E}$ von A, so folgt (10.2). Q.E.D.

Da offenbar $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ ist für alle $f \in \ell^p(A)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist damit offenbar $\ell^p(A)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und ganz ähnlich wie in Korollar 2.5 folgert man, dass $\|\cdot\|_p$ auch im Falle unendlicher Mengen A eine Norm auf $\ell^p(A)$ ist, d.h.

$(\ell^p(A), \|\cdot\|_p)$ *bildet einen normierten Vektorraum über $\mathbb{K}$.*

Theorem 10.4 *Für jede endliche oder auch unendliche Menge A und $1 \leq p \leq \infty$ ist der normierte Raum $(\ell^p(A), \|\cdot\|_p)$ vollständig.*

Beweis. Sei $(f_j)_j$ eine Cauchy-Folge in $\ell^p(A)$. Wir müssen zeigen, dass $(f_j)_j$ bzgl. der p-Norm einer Grenzfunktion $f \in \ell^p(A)$ entgegenstrebt.
Da für jede endliche Teilmenge $\mathcal{E} \subset A$ und $g \in \ell^p(A)$ stets $\|g|_{\mathcal{E}}\|_p \leq \|g\|_p$ ist, so ist insbesondere für jedes $a \in A$ mit der Menge $\mathcal{E} := \{a\}$

$$|f_j(a) - f_k(a)| \;=\; \|(f_j - f_k)|_{\{a\}}\|_p \leq \|f_j - f_k\|_p,$$

d.h. $(f_j(a))_j$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ besitzt diese einen eindeutigen Grenzwert in $\mathbb{K}$, welchen wir mit $f(a)$ bezeichnen:

$$\lim_{j\to\infty} f_j(a) =: f(a) \qquad \text{für jedes } a \in A. \tag{10.3}$$

Wir zeigen, dass die hierdurch definierte Abbildung $f : A \to \mathbb{K}$ p-summierbar ist, und dass $\|f_j - f\|_p \to 0$ für $j \to \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$, und wähle j_0 so groß, dass

$$\|f_j - f_k\|_p < \varepsilon \quad \forall\, j, k \geq j_0.$$

Für jede endliche Teilmenge $\mathcal{E}$ von A folgt dann für $j, k \geq j_0$, falls $p < \infty$:

$$\left(\sum_{a\in\mathcal{E}} |f_j(a) - f_k(a)|^p\right)^{1/p} \leq \|f_j - f_k\|_p < \varepsilon.$$

Lässt man hierin k gegen Unendlich streben, so folgt mittels der Grenzwertsätze für Zahlenfolgen und (10.3) für $j \geq j_0$:

$$\left(\sum_{a\in\mathcal{E}} |f_j(a) - f(a)|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon,$$

also $\|f_j - f\|_{\mathcal{E},p} \leq \varepsilon$. Wie man leicht sieht, gilt dies ebenfalls für $p = \infty$. Da j_0 nicht von $\mathcal{E}$ abhängt, folgt durch Supremumsbildung über alle endlichen Mengen $\mathcal{E}$:

$$\|f_j - f\|_p \leq \varepsilon, \qquad \text{falls } j \geq j_0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\|f_j - f\|_p \to 0$ für $j \to \infty$. .
Wähle schließlich für $\varepsilon = 1$ ein j so, dass $\|f_j - f\|_p \leq 1$. Dann ist $f = f_j + (f - f_j)$, und beide Summand liegen in $\ell^p(A)$. Damit ist auch $f \in \ell^p(A)$. Q.E.D.

10.2 Anhang B: Totale Ableitungen höherer Ordnung

Es seien wieder E und F zwei normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$, sowie $U \subset E$ eine offene Teilmenge von E und $f : U \to F$ eine Abbildung.
Ist f differenzierbar, so ist $Df : U \to L(E, F)$ eine Abbildung mit Werten im normierten Vektorraum $L(E, F)$. Ist diese im Punkte $x_0 \in U$ differenzierbar, so heiße f **zweimal im Punkte** x_0 **differenzierbar**, und die Ableitung $D(Df)(x_0)$ wird mit $D^2 f(x_0)$ oder $f''(x_0)$ bezeichnet. Dies ist ein Element von $L(E, L(E, F))$.

Definition. Sei $L_0(E, F) = F$ und $L_n(E, F) := L(E, L_{n-1}(E, F))$ für $n \geq 1$. Eine Abbildung $f : U \to F$ heiße n**-mal (total) differenzierbar** auf U ($n \geq 1$), wenn es für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ differenzierbare Funktionen $f^{(k)} : U \to L_k(E, F)$ gibt, so dass gilt:

$$f^{(k+1)} = D(f^{(k)}),\ k = 0, \ldots, n-2,\ \text{und } f^{(0)} = f.$$

Die Abbildung $f^{(n)} := D(f^{(n-1)}) : E \to L_n(E, F)$ heißt die n**-te Ableitung von** f, und wird auch mit $D^n f$ bezeichnet.
Die Abbildung f heiße **im Punkte** $x_0 \in U$ n**-mal differenzierbar**, wenn es eine Umgebung V von x_0 in U gibt, auf der sie $(n-1)$-mal differenzierbar, ist und zusätzlich die $(n-1)-$ te Ableitung $f^{(n-1)}$ in x_0 differenzierbar ist.
Die Abbildung f heiße n**-mal stetig differenzierbar**, wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig auf U ist. Die Menge aller n-mal stetig differenzierbaren Abbildungen von U in F wird mit $C^n(U, F)$ bezeichnet. Offenbar bildet $C^n(U, F)$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Definition. Eine bilineare Abbildung $B : E \times E \to F$ heiße **beschränkt**, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt so, dass gilt:

$$\|B(x, y)\| \leq C\|x\|\ \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in E\ . \tag{10.4}$$

Die **Norm** $\|B\|$ von B wird definiert durch

$$\|B\| := \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} \|B(x, y)\|\ .$$

Ganz ähnlich wie für beschränkte lineare Abbildungen von E nach F zeigt man, dass eine bilineare Abbildung B stetig ist genau dann, wenn sie beschränkt ist, und dass $\|B\|$ die kleinste Konstante C ist, für die (1) gilt.
Mit $M_2(E, F)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten bilinearen Abbildungen von $E \times E$ in F. Offenbar bildet $M_2(E, F)$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Ist $\Phi \in L_2(E, F) = L(E, L(E, F))$, so setzen wir

$$\tilde{\Phi}(x, y) := \Phi(x)(y) \in F, \quad x, y \in E\ .$$

Offenbar ist dann $\tilde{\Phi}$ linear in x und in y, d.h. bilinear. Ferner gilt

$$\|\tilde{\Phi}(x,y)\| \le \|\Phi(x)\|_{\mathrm{op}}\,\|y\| \le \|\Phi\|_{\mathrm{op}}\,\|x\|\ \|y\|,$$

d.h. $\tilde{\Phi}$ ist beschränkt. Somit ist $\tilde{\Phi} \in M_2(E,F)$, und es gilt: $\|\tilde{\Phi}\| \le \|\Phi\|_{\mathrm{op}}$. Umgekehrt gilt für $x, y \in E$

$$\|\Phi(x)(y)\| = \|\tilde{\Phi}(x,y)\| \le \|\tilde{\Phi}\|\ \|x\|\ \|y\|,$$

woraus folgt: $\|\Phi\|_{\mathrm{op}} \le \|\Phi\|$.
Offenbar ist die Abbildung $\iota : \Phi \mapsto \tilde{\Phi}$ auch linear, so dass

$$\iota : L_2(E,F) \to M_2(E,F)$$

eine lineare Isometrie ist. ι ist auch surjektiv, denn ist $B \in M_2(E,F)$, und setzen wir

$$\Phi(x)(y) := B(x,y),\ \ x, y \in E\ ,$$

so wird hierdurch ein Element $\Phi \in L(E,(E;F))$ definiert mit $\tilde{\Phi} = B$.

Wir erkennen also insgesamt, dass sich der normierte Raum $L_2(E,F)$ mittels ι mit dem Raum $M_2(E,F)$ identifizieren lässt, was wir im folgenden stets tun wollen.

Insbesondere werden wir die zweite Ableitung $f''(x_0)$ von f in x_0 als eine beschränkte bilineare Abbildung von $E \times E$ in F betrachten, d.h. wir schreiben für $(f''(x_0)(\xi))(\eta),\ \xi, \eta \in E$, auch kurz $f''(x_0)(\xi,\eta)$.

Allgemeiner werden wir $L_n(E,F)$ mit dem Raum $M_n(E,F)$ aller beschränkten n-linearen Abbildungen von $E^n = E \times \cdots \times E$ nach F identifizieren vermöge der Definition

$$\tilde{\Phi}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\cdots((\Phi(x_1))(x_2))\ldots(x_n))\ ,$$

d.h. **wir werden die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ von f in x_0 als eine beschränkte, n-lineare Abbildung von E^n nach F betrachten** (dabei heiße die n-lineare Abbildung $B : E^n \to F$ beschränkt, wenn es eine Konstante $C \ge 0$ gibt mit

$$\|B(x_1, \ldots, x_n)\| \le C\ \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

für alle $x_1, \ldots, x_n \in E$).

Definition. $B \in L_2(E,F)$ $(\cong M_2(E,F))$ heiße **symmetrisch**, wenn gilt:

$$B(x,y) = B(y,x) \quad \text{für alle } x, y \in E\ .$$

Satz 10.5 *Sei F vollständig. Ist $f : U \to F$ zweimal stetig differenzierbar, und ist $x_0 \in U$, so ist $f''(x_0)$ eine symmetrische bilineare Abbildung.*

Beweis. Wie im Beweis des Mittelwertsatzes wollen wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (für F-wertige Funktionen) verwenden.
Sei o.B.d.A. $x_0 = 0$, und sei $r > 0$ so, dass $B_{2r}(0) \subset U$. Wir fixieren $\xi, \eta \in B_r(0)$. Dann ist $\xi + t\eta \in U$ für alle t in einer Umgebung des Intervalls $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$, und für die Abbildung $g(t) = f(\xi + t\eta)$ gilt nach der Kettenregel:

$$g'(t) = f'(\xi + t\eta)(\eta), \quad t \in [0, 1] \ .$$

Nach dem Hauptsatz gilt folglich:

$$f(\xi + \eta) - f(\xi) = g(1) - g(0) = \int_0^1 f'(\xi + t\eta)(\eta) dt \ .$$

Ebenso ist

$$f(\eta) - f(0) = \int_0^1 f'(t\eta)(\eta) dt,$$

also

$$f(\xi + \eta) - f(\xi) - f(\eta) + f(0) = \int_0^1 (f'(\xi + t\eta) - f'(t\eta))(\eta) dt \ .$$

Für jedes $z = t\eta$ betrachten wir nun die Abbildung $h : s \mapsto f'(s\xi + z)(\eta)$ von $[0, 1]$ in F. h ist dann stetig differenzierbar, und aus der Kettenregel ergibt sich:

$$h'(s) = (f''(s\xi + z)(\xi))(\eta) = f''(s\xi + t\eta)(\xi, \eta) \ .$$

Aus dem Hauptsatz folgt also

$$f'(\xi + t\eta) - f'(t\eta) = h(1) - h(0) = \int_0^1 f''(s\xi + t\eta)(\xi, \eta) ds \ ,$$

d.h.

$$\begin{aligned} f(\xi + \eta) \quad &- \quad f(\xi) - f(\eta) + f(0) \\ &= \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f''(s\xi + t\eta)(\xi, \eta) ds \right) dt \ . \end{aligned} \tag{10.5}$$

Berücksichtigen wir, dass die linke Seite in ξ und η symmetrisch ist, so erhalten wir

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f''(s\xi + t\eta)(\xi, \eta) ds \right) dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 f''(s\xi + t\eta)(\eta, \xi) dt \right) ds \ .$$

Dieselbe Formel bleibt auch für $\varepsilon\xi$ und $\varepsilon\eta$ gültig, falls $0 < \varepsilon \leq 1$ ist, und mit der Bilinearität von $f''(s\varepsilon\xi + t\varepsilon\eta)$ folgt:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f''(\varepsilon(s\xi + t\eta))(\xi, \eta) ds \right) dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 f''(\varepsilon(s\xi + t\eta))(\eta, \xi) dt \right) ds$$

für $0 < \varepsilon \leq 1$.

Da f'' stetig ist, existiert eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ in $]0,1[$ mit $\|f''(x)-f''(0)\| \leq \frac{1}{n}$ für alle x mit $\|x\| < \varepsilon_n 2r$. Es folgt insbesondere:

$$\|f''(\varepsilon_n(s\xi+t\eta))(\xi,\eta) - f''(0)(\xi,\eta)\| \leq \frac{1}{n}\|\xi\|\,\|\eta\|,$$

gleichmäßig in $s,t \in [0,1]$. Infolgedessen ist

$$\begin{aligned} f''(0)(\xi,\eta) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f''(0)(\xi,\eta)ds\right)dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(\int_0^1 f''(\varepsilon_n(s\xi+t\eta)\right)(\xi,\eta)ds)dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(\int_0^1 f''(\varepsilon_n(s\xi+t\eta)\right)(\eta,\xi)dt)ds \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f''(0)(\eta,\xi)dt\right)ds \\ &= f''(0)(\eta,\xi)\ . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Bilinearität von $f''(0)$ folgt hieraus:

$$f''(0)(\xi,\eta) = f''(0)(\eta,\xi) \quad \text{für alle } \xi,\eta \in E\ .$$

Q.E.D.

Bemerkung. Die Vollständigkeit von F wurde von uns aus technischen Gründen vorausgesetzt, ist jedoch nicht notwendig für die Gültigkeit des Satzes.

Den Begriff der Richtungsableitung verallgemeinernd definieren wir nun für $f \in C^1(U,F)$ und beliebiges $\xi \in E$ die Funktion $D_\xi f : U \to F$ durch

$$D_\xi f(x) := f'(x)\xi, \quad x \in U\ .$$

Nach der Kettenregel ist

$$D_\xi f(x) = \frac{d}{dt}(f(x+t\xi))\mid_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x+t\xi)-f(x))\ .$$

Satz 10.6 (i) *Für $n > 1$ ist D_ξ eine lineare Abbildung von $C^n(U,F)$ nach $C^{n-1}(U,F)$.*
(ii) *Ist $f \in C^n(U,F)$, und sind $\xi_1,\ldots,\xi_n \in E$, so ist für alle $x \in U$*

$$f^{(n)}(x)(\xi_1,\ldots,\xi_n) = (D_{\xi_1}D_{\xi_2}\cdots D_{\xi_n}f)(x)\ .$$

(iii) *Für $\xi,\eta \in E$ und $f \in C^2(U,F)$ ist*

$$D_\xi D_\eta f = D_\eta D_\xi f\ .$$

Beweis. (i) Ist $f \in C^n(U,F)$, so ist $f' \in C^{n-1}(U, L(E,F))$. Ferner ist für festes $\xi \in E$ die Abbildung $\sigma : L(E,F) \to F,\ A \mapsto A\xi$, stetig, und als lineare Abbildung somit sogar unendlich oft differenzierbar. Folglich ist $D_\xi f = \sigma \circ f' \in C^{n-1}(U,F)$.
(ii) Für $n = 1$ stimmt die Behauptung mit der Definition von D_ξ überein. Wir nehmen an, dass sie für $(n-1)$-te Ableitungen gilt. Dann ist insbesondere

$$(D_{\xi_2} \dots D_{\xi_n} f)(x) = f^{(n-1)}(\xi_2, \dots, \xi_n) \; .$$

Es ist $f^{(n-1)} \in C^1(U, L_{n-1}(E,F))$. Für feste $\xi_2, \dots, \xi_n$ ist durch

$$\varrho : L_{n-1}(E,F) \to F,\ B \mapsto B(\xi_2, \dots, \xi_n) \; ,$$

eine stetige lineare Abbildung definiert, welche folglich beliebig oft differenzierbar ist. Nach der Kettenregel ist somit $(D_{\xi_2} \dots D_{\xi_n})f = \varrho \circ f^{(n-1)}$ stetig differenzierbar und

$$\begin{aligned} (D_{\xi_1} \dots D_{\xi_n})f(x) &= \varrho'(f^{(n-1)}(x)) \circ f^{(n)}(x)(\xi_1) = \varrho(f^{(n)}(x)(\xi_1)) \\ &= f^{(n)}(x)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \; , \end{aligned}$$

da $\varrho'(B) = \varrho$ ist gemäß Bemerkung 7.4 b).

(iii) folgt aus Satz 10.5 und (ii).

Q.E.D.

Bemerkungen. a) Aus Satz 10.6 folgt insbesondere, dass $f^{(n)}(x)$ für $f \in C^n(U,F)$ und alle $x \in U$ eine symmetrische n-lineare Abbildung ist.

b) Ein Vergleich von Formel (7.22) mit Satz 2 zeigt, dass für $E = \mathbb{R}^n$ der Ausdruck $f^{(k)}(x)\xi^k$ in (7.22) nichts anderes ist als

$$f^{(k)}(x)\xi^k = f^{(k)}(x)(\xi, \dots, \xi) = (D_\xi D_\xi \dots \mathcal{D}_\xi f)(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{10.6}$$

wobei auf der rechten Seite $f^{(k)}(x)$ die k-te totale Ableitung von f bezeichne und $k-$ Faktoren ξ vertreten seien.
Insbesondere lässt sich hier das Taylorpolynom der Ordnung p von f in $a \in E$ auch schreiben als

$$T_{p,a} f(x) := \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a, \dots, x-a). \tag{10.7}$$

Dieser Ausdruck lässt sich allgemeiner auch für Abbildungen $f \in C^p(U,F)$ definieren, wobei U eine offene Teilmenge eines beliebigen normierten Raumes E und F ein beliebiger Banachraum seien, und mit ganz ähnlichem Beweis lässt sich die Taylorformel in Theorem 7.18 dann auch für $f \in C^p(U,F)$ zeigen.

10.3 Anhang C: Die Gruppe der invertierbaren Elemente einer Banach-Algebra

Es bezeichne $(\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ eine Banach-Algebra über $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, welche ein Einselement e besitze. Z.B. könnte dies der Raum $L(V)$ der bschränkten linearen Operatoren auf einem Banachraum V sein, wo dann $e = I$ wäre und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die Operatornorm.

Definition. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heiße **regulär** oder **invertierbar**, wenn es ein Element $b \in \mathcal{A}$ gibt mit $ab = ba = e$.
Dieses Inverse b ist eindeutig und wird mit a^{-1} bezeichnet. Man sieht leicht, dass die Menge $\mathcal{A}^\times$ aller invertierbaren Elemente von $\mathcal{A}$ eine multiplikative Gruppe bildet.

Das folgende Lemma kann analog zu Lemma 9.2 bewiesen, weshalb auf eine Beweis verzichtet wird:

Lemma 10.7 *Sei $a \in \mathcal{A}$ mit $\|e - a\| < 1$. Dann ist a invertierbar, und es gilt:*

$$a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (e-a)^k, \ \ \textit{mit} \ \ \|a^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|e - a\|} \ .$$

Korollar 10.8 *Die Gruppe $\mathcal{A}^\times$ der invertierbaren Elemente von $\mathcal{A}$ ist offen in $\mathcal{A}$. Ferner ist die Inversionsabbildung*

$$\mathcal{I} : \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times, \quad a \mapsto a^{-1},$$

stetig.

Beweis. Sei $b \in \mathcal{A}^\times$ beliebig, und sei $r := \frac{1}{2\|b^{-1}\|}$. Dann ist $r > 0$, und wir zeigen: $B_r(b) \subset \mathcal{A}^\times$.
Sei dazu $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a - b\| < r$. Dann ist

$$\|e - b^{-1}a\| = \|b^{-1}(b-a)\| \leq \|b^{-1}\| \ \ \|b - a\| < \frac{1}{2r} r = \frac{1}{2} \ ,$$

so dass nach Lemma 10.7 $b^{-1}a \in \mathcal{A}^\times$ ist. Da auch $b \in \mathcal{A}^\times$ ist, folgt: $a = b(b^{-1}a) \in \mathcal{A}^\times$. Somit ist $\mathcal{A}^\times$ offen in $\mathcal{A}$.
Um zu zeigen, dass $\mathcal{I}$ stetig im Punkt b ist, sei wieder $a \in B_r(b)$. Wir setzen wir im vorangehenden Argument $x := b^{-1}a$. Dann ist also $\|e - x\| < 1/2$, und wir haben gesehen, dass $a^{-1} = x^{-1}b^{-1}$ ist. Ferner zeigt Lemma 10.7, dass

$$\|x^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|e - x\|} < \frac{1}{1 - 1/2} = 2,$$

so dass

$$\|a^{-1}\| = \|x^{-1}b^{-1}\| \leq \|x^{-1}\|\|b^{-1}\| \leq 2\|b^{-1}\|.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}(a)-\mathcal{I}(b)\| &= \|a^{-1}-b^{-1}\| = \|a^{-1}(b-a)b^{-1}\| \\ &\leq \|a^{-1}\|\|b-a\|\|b^{-1}\| \\ &\leq C\|a-b\|.\end{aligned}$$

mit $C := 2\|a^{-1}\|^2$. Die Stetigkeit von $\mathcal{I}$ im Punkt b ergibt sich hieraus sofort. Q.E.D.