Ordnung, Körper und ihre Zusammenhänge

Erstellt von: Mirkan Deniz Günkaya

Datum: 7. November 2025

1 Partielle Ordnung

Definition: Eine Relation $\leq$ auf einer Menge X heißt **partielle Ordnung**, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

1. **Reflexivität:** $a \leq a$ für alle $a \in X$.
2. **Antisymmetrie:** Wenn $a \leq b$ und $b \leq a$, dann gilt $a = b$.
3. **Transitivität:** Wenn $a \leq b$ und $b \leq c$, dann gilt $a \leq c$.

Erklärung: Eine partielle Ordnung beschreibt eine Art „Halbordnung“: Einige Elemente sind vergleichbar, andere nicht. Sie erlaubt also Situationen, in denen zwei Elemente a, b *nicht* in Relation zueinander stehen, also weder $a \leq b$ noch $b \leq a$ gilt.

Beispiele:

- **(Teilmengenordnung)** $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ ist partiell geordnet.
- **(Teilbarkeit)** Auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $a \mid b$ eine partielle Ordnung.
- **(Produktordnung)** Auf $X \times Y$: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_X x_2$ und $y_1 \leq_Y y_2$.

Intuition: Man kann sich eine partielle Ordnung als ein System von „Abhängigkeiten“ vorstellen. In einem Hasse-Diagramm erscheinen nicht vergleichbare Elemente nebeneinander, ohne dass eine Linie sie verbindet.

2 Totalordnung

Definition: Eine partielle Ordnung $(X, \leq)$ heißt **Totalordnung**, wenn zusätzlich gilt:

$$\forall a, b \in X : \quad a \leq b \text{ oder } b \leq a.$$

Jedes Element ist also mit jedem anderen vergleichbar.

Erklärung: Eine Totalordnung ordnet alle Elemente vollständig. Sie entspricht der gewohnten Vorstellung von „größer“ oder „kleiner“ bei Zahlen.

Beispiele:

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ sind total geordnet.
- Lexikographische Ordnung auf $A \times B$ ist total, wenn A und B total geordnet sind.

Intuition: Eine Totalordnung schließt alle Unvergleichbarkeiten aus. Jede partielle Ordnung kann (unter dem Axiom der Wahl) zu einer Totalordnung erweitert werden (Satz von Szpilrajn).

3 Körper

Definition: Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen, Addition und Multiplikation, sodass gilt:

1. $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $1 \neq 0$.
3. Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$.

Erklärung: Ein Körper ist eine algebraische Struktur, in der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch 0) möglich sind. Er bildet die Grundlage für viele Bereiche der Mathematik, insbesondere für Vektorräume und Analysis.

Beispiele:

- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind klassische Körper.
- $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für Primzahl p ist ein endlicher Körper.

Intuition: Körper sind die präzise Umsetzung der „Zahlensysteme“, auf denen man rechnen kann. Sie enthalten alle arithmetischen Operationen und folgen den bekannten Rechengesetzen.

4 Angeordneter Körper

Definition: Ein **angeordneter Körper** ist ein Körper $(K, +, \cdot)$, versehen mit einer Totalordnung $\leq$, sodass gilt:

1. $(K, \leq)$ ist eine Totalordnung.
2. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ für alle $a, b, c \in K$.
3. $0 \leq a$, $0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab$.

Erklärung: Die Ordnung eines angeordneten Körpers ist mit den Körperoperationen *verträglich*. Addition und Multiplikation mit positiven Zahlen bewahren die Ordnung.

Beispiele:

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist der klassische angeordnete Körper.
- $\mathbb{Q}$ ist ebenfalls angeordnet mit der gewohnten Ordnung.

Nicht-Beispiele:

- $\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper.
- Endliche Körper $\mathbb{F}_p$ sind nicht anordenbar.

Intuition: Ein angeordneter Körper erlaubt sinnvolle Aussagen wie „positiv“, „negativ“, „größer“ und „kleiner“. Dies ist für die Analysis grundlegend.

5 Zusammenhang zwischen Totalordnung und partieller Ordnung

Definition und Grundidee

Eine **partielle Ordnung** auf einer Menge M ist eine Relation $\leq$, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Eine **Totalordnung** ist eine partielle Ordnung, bei der zusätzlich jedes Paar von Elementen vergleichbar ist, d. h. für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \leq y \text{ oder } y \leq x.$$

Jede Totalordnung ist also eine spezielle (strengere) Form einer partiellen Ordnung.

Beziehung: Jede Totalordnung ist eine partielle Ordnung

Jede Totalordnung erfüllt automatisch die drei Eigenschaften einer partiellen Ordnung:

- **Reflexivität:** Für alle $x \in M$ gilt $x \leq x$.
- **Antisymmetrie:** Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$, dann folgt $x = y$.
- **Transitivität:** Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, dann gilt $x \leq z$.

Der zusätzliche Unterschied ist lediglich, dass bei einer Totalordnung *jedes Paar* von Elementen vergleichbar ist. Das heißt:

$$\text{Totalordnung} = \text{Partielle Ordnung} + \text{Vergleichbarkeit aller Elemente.}$$

Intuitive Erklärung

Man kann sich die Beziehung folgendermaßen vorstellen:

- Eine **partielle Ordnung** erlaubt es, dass manche Elemente *nicht vergleichbar* sind. Beispiel: „x ist ein Vorfahre von y" in einem Stammbaum. Zwei Cousins können nicht miteinander verglichen werden – es gibt keine natürliche Reihenfolge zwischen ihnen.
- Eine **Totalordnung** hingegen zwingt uns, jedes Paar in eine Reihenfolge zu bringen. Beispiel: „$x \leq y$ bedeutet: x wurde früher geboren als y". Jedes Paar von Personen hat ein klar definiertes Alter, also sind alle vergleichbar.

Beispiele zur Veranschaulichung

Die reellen Zahlen: Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist eine Totalordnung, da für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \leq y \text{ oder } y \leq x.$$

Somit ist $(\mathbb{R}, \leq)$ eine Totalordnung. Gleichzeitig erfüllt sie Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität, also auch die Bedingungen einer partiellen Ordnung. Daher gilt:

Jede Totalordnung ist eine partielle Ordnung, aber nicht umgekehrt.

Produktordnung: Betrachte $M = \mathbb{R}^2$ mit der *komponentenweisen Ordnung*:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 \leq x_2 \text{ und } y_1 \leq y_2.$$

Diese Relation ist eine partielle Ordnung, aber *keine* Totalordnung, da nicht alle Paare vergleichbar sind. Zum Beispiel gilt weder

$$(1, 3) \leq (2, 1) \quad \text{noch} \quad (2, 1) \leq (1, 3),$$

denn das erste Paar ist in der ersten Komponente kleiner, in der zweiten aber größer. Somit sind die beiden Punkte nicht vergleichbar.

Mengenordnung: Für eine Menge M betrachte die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ mit der Teilmengenrelation $\subseteq$. Diese ist eine partielle Ordnung:

$$A \subseteq A \text{ (Reflexivität)}, \quad A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A \Rightarrow A = B \text{ (Antisymmetrie)}, \quad A \subseteq B \text{ und } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq$$

Aber sie ist keine Totalordnung, da z. B. für $M = \{1, 2, 3\}$ die Mengen $\{1\}$ und $\{2\}$ nicht vergleichbar sind. Somit:

$\subseteq$ ist eine partielle, aber keine totale Ordnung.

Beweisidee für die Beziehung

Beweis. Sei $(M, \leq)$ eine Totalordnung. Dann gilt nach Definition:

1. $x \leq x$ (Reflexivität),
2. $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie),
3. $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität),
4. $x \leq y$ oder $y \leq x$ (Totalität).

Die Punkte (1)–(3) sind exakt die Definition einer partiellen Ordnung. Daher ist jede Totalordnung eine partielle Ordnung, aber nicht jede partielle Ordnung ist total, da die Eigenschaft (4) im Allgemeinen fehlt. □

Intuition: Geometrische Sichtweise

Man kann sich den Unterschied auch geometrisch vorstellen:

- Eine partielle Ordnung ist wie ein **Baum oder Diagramm**, in dem manche Knoten nicht direkt miteinander vergleichbar sind.
- Eine Totalordnung ist wie eine **Linie**, auf der alle Punkte angeordnet sind — es gibt immer eine Reihenfolge.

Beziehung zur Mathematik allgemein

In vielen Bereichen der Mathematik spielt dieser Unterschied eine zentrale Rolle:

- In der **Analysis** ordnen wir die reellen Zahlen total, um Begriffe wie „größer“, „kleiner“, „Grenzwert“ oder „Monotonie“ überhaupt sinnvoll definieren zu können.
- In der **Linearen Algebra** arbeiten wir häufig mit partiellen Ordnungen, z. B. bei Unterräumen, bei Eigenwertvergleichen oder bei der Inklusion von Untervektorräumen. Diese Strukturen sind nicht total, weil nicht jeder Unterraum in einem anderen enthalten ist.

Zusammenfassung

- Jede Totalordnung ist eine partielle Ordnung.
- Nicht jede partielle Ordnung ist total.
- Der Unterschied liegt in der Vergleichbarkeit der Elemente.
- In der Analysis wird fast ausschließlich mit Totalordnungen (z. B. auf $\mathbb{R}$) gearbeitet.
- In der Algebra und Mengenlehre treten meist partielle Ordnungen auf (z. B. $\subseteq$, Unterraumrelation).

Merksatz

Merksatz: Jede Totalordnung ist eine partielle Ordnung, aber nicht umgekehrt. Die Totalordnung ist die „vollständige“ Form der partiellen Ordnung, bei der alle Elemente vergleichbar sind.

6 Zusammenhang zwischen Körper, angeordnetem Körper und partieller Ordnung

Einleitung

Der Begriff des **angeordneten Körpers** verbindet die **algebraische Struktur** eines Körpers mit der **Ordnungsstruktur** einer partiellen oder totalen Ordnung. Um diesen Zusammenhang zu verstehen, betrachten wir zunächst die Eigenschaften eines Körpers und einer Ordnung getrennt und anschließend ihr Zusammenspiel.

Körper und Ordnung

Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen, die die Körperaxiome erfüllen. Eine Ordnung auf K ist eine Relation $\leq$, die typischerweise die Struktur der reellen Zahlen widerspiegelt. Eine Ordnung auf einem Körper muss jedoch mit den Körperoperationen *verträglich* sein — sonst ergibt die Kombination keinen Sinn.

Verträglichkeit zwischen Ordnung und Körperstruktur

Damit eine Ordnung $\leq$ mit der Körperstruktur kompatibel ist, müssen die folgenden **Verträglichkeitsbedingungen** gelten:

(O1) Wenn $x \leq y$, dann gilt für alle $z \in K$:

$$x + z \leq y + z$$

(Die Ordnung ist *additiv verträglich*.)

(O2) Wenn $x \leq y$ und $0 \leq z$, dann gilt:

$$x \cdot z \leq y \cdot z$$

(Die Ordnung ist *multiplikativ verträglich* mit positiven Elementen.)

Diese beiden Bedingungen garantieren, dass die algebraischen Operationen die Ordnung respektieren. Erst wenn beide erfüllt sind, sprechen wir von einem **geordneten Körper**.

Von der partiellen zur totalen Ordnung

Betrachten wir nun, welche Art von Ordnung ein angeordneter Körper besitzen kann:

- Eine **partielle Ordnung** auf einem Körper ist zunächst denkbar, erfüllt jedoch die Verträglichkeitsbedingungen oft nur eingeschränkt. Wenn zum Beispiel $x, y \in K$ unvergleichbar sind, können viele algebraische Operationen nicht mehr wohldefiniert interpretiert werden.
- Deshalb fordert man in der Regel, dass die Ordnung auf einem Körper **total** ist. Nur so lässt sich sicherstellen, dass die Addition und Multiplikation mit positiven Zahlen die Ordnung eindeutig erhalten.

Mit anderen Worten:

$$\text{angeordneter Körper} \Rightarrow \text{Körper mit totaler, verträglicher Ordnung.}$$

Beispiel: Der Körper der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ bilden den **Prototyp** eines angeordneten Körpers:

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Hier ist $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen. Diese Menge erfüllt die Bedingungen:

$$x, y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0,$$
$$x, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0.$$

Somit definiert sie eine verträgliche, totale Ordnung auf $\mathbb{R}$.

Beispiel: Der Körper der rationalen Zahlen

Auch $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist ein angeordneter Körper. Die Definition der Ordnung ist analog:

$$x \leq y \iff y - x \text{ ist nichtnegativ.}$$

Da $\mathbb{Q}$ denselben algebraischen Aufbau wie $\mathbb{R}$ besitzt (aber diskreter), ist die Ordnung ebenfalls total und mit Addition und Multiplikation verträglich.

Beispiel: Der Körper der komplexen Zahlen

Der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **kann nicht** zu einem angeordneten Körper gemacht werden. Begründung:

Angenommen, es gäbe eine Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{C}$, die mit den Körperoperationen verträglich ist. Dann müsste gelten:

$$0 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq i^2 = -1.$$

Aber aus $0 \leq 1$ folgt (nach Multiplikation mit der positiven Zahl i^2), dass $0 \leq -1$. Damit wäre zugleich $1 \leq 0$, ein Widerspruch zur Antisymmetrie.

Daher gibt es *keine* Ordnung auf $\mathbb{C}$, die mit den Körperoperationen verträglich ist. Dies zeigt, dass nicht jeder Körper angeordnet werden kann.

Zusammenhang zwischen partieller Ordnung und Körper

Eine partielle Ordnung kann in einem Körper nur dann sinnvoll bestehen, wenn sie mit den Operationen verträglich ist. Allerdings führen partielle Ordnungen meist zu Unverträglichkeiten:

[Partielle Ordnung, die keine Verträglichkeit besitzt] Sei $K = \mathbb{R}$ und definiere $x \preceq y :\Leftrightarrow x^2 \leq y^2$. Diese Relation ist eine **partielle Ordnung**, aber nicht mit der Addition verträglich, denn:

$$(-1)^2 = (1)^2 = 1, \quad \text{aber} \quad -1 + 1 = 0 \neq 2 = 1 + 1.$$

Daher ist sie keine Ordnung, die den Körperoperationen entspricht.

Daraus folgt:

Partielle Ordnungen sind auf Körpern meist unbrauchbar, wenn sie nicht total und verträglich sind.

Verbindung der Begriffe

Die Begriffe stehen in folgender hierarchischer Beziehung:

$$\text{Körper} \xrightarrow[\text{verträgliche Ordnung}]{\text{additiv + multiplikativ}} \text{angeordneter Körper}$$

$$\text{Partielle Ordnung} \subsetneq \text{Totale Ordnung} \subsetneq \text{verträgliche Ordnung auf Körpern.}$$

Damit gilt:

- Jeder angeordnete Körper besitzt eine Totalordnung, die mit $+$ und $\cdot$ verträglich ist.
- Eine partielle Ordnung genügt nicht, um einen angeordneten Körper zu definieren.
- Es gibt Körper (z. B. $\mathbb{C}$), auf denen keine solche Ordnung existiert.

Intuitive Vorstellung

- Eine **partielle Ordnung** erlaubt Unvergleichbarkeit — das stört in einem Körper, weil jede Zahl mit jeder verrechnet werden kann.
- Eine **totale Ordnung** zwingt Vergleichbarkeit — das ist mit den Körperoperationen kompatibel, solange Addition und Multiplikation die Ordnung erhalten.
- Ein **angeordneter Körper** ist also die natürliche Kombination: Ein algebraisches System, das zugleich eine konsistente Vorstellung von „größer“ und „kleiner“ hat.

Beweisidee: Warum partielle Ordnung auf Körpern unnatürlich ist

Wenn K ein Körper mit partieller, aber nicht totaler Ordnung wäre, gäbe es Elemente $a, b \in K$ mit

$$a \not\leq b \quad \text{und} \quad b \not\leq a.$$

Addiert man eine positive Zahl $c > 0$, so gilt:

$$a + c \not\leq b + c.$$

Damit bleibt die Unvergleichbarkeit bestehen — und die Ordnung wird algebraisch instabil. Aus diesem Grund fordert man für Körper fast immer Totalität.

Zusammenfassung

- Eine **partielle Ordnung** auf einem Körper ist im Allgemeinen nicht mit den Körperoperationen verträglich.
- Eine **totale Ordnung**, die mit Addition und Multiplikation positiver Elemente verträglich ist, definiert einen **angeordneten Körper**.
- $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind angeordnete Körper; $\mathbb{C}$ ist es nicht.
- Der Begriff des angeordneten Körpers verbindet die algebraische und die ordnungslogische Struktur.

Merksatz

Merksatz: Eine Ordnung auf einem Körper ist nur dann sinnvoll, wenn sie total und mit den Körperoperationen verträglich ist. Ein solcher Körper heißt **angeordneter Körper**. Partielle Ordnungen führen in Körpern zu Widersprüchen oder Unverträglichkeiten.

7 Schlussbemerkung

Die in der Analysis verwendeten Zahlen, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, sind das Paradebeispiel eines **angeordneten Körpers**, der zusätzlich **vollständig** ist. Diese Kombination von algebraischer, ordinaler und topologischer Struktur macht die reellen Zahlen zum Fundament der gesamten Analysis.