LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzel

Wintersemester 2021/22
15.12.2021

Analysis einer Variablen

Probeklausur - Lösungen

Nachname: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnr.: ____________ Fachsemester: ____________

Abschluss: ❑ Bachelor ❑ Master

Version der Prüfungsordnung: ❑ 2015 ❑ 2011 ❑ Andere: ______

❑ Diplom ❑ Anderes: ____________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ______

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ______

Bitte füllen Sie das Deckblatt aus und lesen Sie die Bearbeitungshinweise zu dieser Probeklausur auf der nächsten Seite gründlich durch, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.

Sie erhalten als Ergebnis der Probeklausur eine Punktzahl und eine Note. Die Note 5,0 bedeutet „nicht bestanden". Dieses Ergebnis dient nur zur Einschätzung Ihres Wissensstandes und hat **keinen Einfluss auf Ihre Prüfungsleistungen im Modul „Analysis einer Variablen"**. Es kann zudem sein, dass die Gesamtanzahl der Punkte und die vorausgesetzten Punkte für eine gewisse Note in der Abschlussklausur anders sind als in der Probeklausur.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
/12	/12	/12	/10	/10	/10	/66	

Hinweise für die Bearbeitung

- Die Bearbeitungszeit für diese Probeklausur beträgt 3 Stunden, von 16:00 bis 19:00 Uhr am 15.12.2021.
- Der Zeitraum von 19:00 bis 20:00 ist ausschließlich dafür gedacht, die Abgabe in die gewohnte pdf-Form zu bringen (wie bei den Übungsblättern) und hochzuladen. Dies bedeutet auch, dass **keine Ausnahmen bei zu spät eingegangenen Abgaben** gemacht werden. **Die Frist um 20:00 Uhr ist absolut strikt!**
- Sowohl handschriftliche als auch auf einem elektronischen Tablet erstellte Bearbeitungen sind erlaubt. Benutzen Sie bitte keinen Bleistift und schreiben Sie nicht in den Farben rot oder grün. **In jedem Fall schreiben Sie bitte leserlich**. Alles, was nicht klar erkennbar ist, wird nicht korrigiert.
- Das ausgefüllte Titelblatt dieser Probeklausur muss die erste Seite Ihrer Bearbeitung sein. Sie können sie ausdrucken, ausfüllen und einscannen, oder aber elektronisch ausfüllen. Die Seite mit Bearbeitungshinweisen sowie die Angabeblätter mit den Aufgaben brauchen nicht Teil Ihres Abgabefiles sein.
- **Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt Papier**. Mehrere Teilaufgaben zur gleichen Aufgabe dürfen auf der gleichen Seite stehen. **Markieren Sie auf jeder Seite gut sichtbar die Aufgabennummer**. Achten Sie auch darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben. Nichteinhalten dieser Regelungen verzögert den Korrekturprozess erheblich.
- Schreiben Sie bitte auf jedes Ihrer Blätter Ihren vollständigen Namen.
- Die Abgabe muss aus einem einzigen pdf-File mit dem Namen **„pruefung.pdf“** bestehen. Sie können Ihre Bearbeitung bei „Probeklausur“ unter „Übungen“ in Uni2work einreichen. Der Abgabeprozess ist identisch zu dem der Übungsblätter bis auf die Tatsache, dass für die Probeklausur **nur Einzelabgaben** erlaubt sind.
- Falls technische Probleme beim Hochladen der Bearbeitung in Uni2work auftreten, melden Sie sich bitte **rechtzeitig** bei Herrn Wetzel (wetzel@math.lmu.de).
- Als Hilfsmittel sind lediglich Papier und ein dokumentenechter Stift bzw. ein Tablet zum Schreiben zugelassen. Insbesondere sollten Sie die Probeklausur alleine und ohne Zuhilfenahme der Vorlesungsnotizen bearbeiten, um Feedback auf Ihren individuellen Wissensstand zu bekommen.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben dürfen Sie Ihnen bekannte Resultate aus der Vorlesung sowie der Übungsblätter benutzen.
- Bemühen Sie sich, präzise mathematisch zu argumentieren und zu beweisen. Es gibt Punktabzug unter anderem für: mangelnde Form, nicht zielführende Ausführungen, logische Fehler, fehlende Begründungen, lange unscharfe und unpräzise Prosatexte, zusammenhangslose Formeln ohne deutsche Sätze. **Eine bloße Aneinanderreihung von Formeln ist kein Beweis!**

Aufgabe 1. [2 + 10 Punkte]

(a) Definieren Sie den Begriff „Dedekindscher Schnitt“ für eine Menge $\alpha \subset \mathbb{Q}$.

(b) Entscheiden Sie für folgende Mengen mit Beweis, ob sie Dedekindsche Schnitte sind:

(i) $\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 3 \text{ oder } q \leq 1\}$,

(ii) $\beta = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 1\}$,

(iii) $\gamma = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 3 \text{ oder } q > 1\}$.

Lösung. (a) Die Menge $\alpha \subset \mathbb{Q}$ heißt Dedekindscher Schnitt, falls

(A1) $\alpha \neq \emptyset, \alpha \neq \mathbb{Q}$,

(A2) Für $p \in \alpha, q \in \mathbb{Q}$ mit $q < p$ gilt $q \in \alpha$,

(A3) Für $p \in \alpha$ gibt es ein $r \in \alpha$ mit $r > p$.

(b) (i) Die Menge α ist ein Dedekindscher Schnitt. Begründung:

(A1): ist erfüllt, denn $0 \in \alpha$ und $2 \notin \alpha$.

(A2): Seien $p \in \alpha, q \in \mathbb{Q}$ mit $q < p$. Wir können $q > 0$ annehmen, denn für $q \leq 0 \leq 1$ folgt sofort $q \in \alpha$. Nun ist $p^2 < 3$ oder $p \leq 1$. Im ersten Fall folgt wegen $0 < q < p$, dass $q^2 < p^2 < 3$, also $q \in \alpha$. Im zweiten Fall folgt sofort $q < p \leq 1$ und somit ebenfalls $q \in \alpha$. Also ist Eigenschaft (A2) erfüllt.

(A3): Sei $p \in \alpha$. Wir müssen $r \in \alpha$ finden mit $r > p$. Wir gehen analog zu Tutoriumsblatt 3, Aufgabe 1(iii) vor. Falls $p < 1$, so wähle $r := (p + 1)/2$. Falls $p^2 < 3$ und $p \geq 1$, so ist für $0 < \epsilon < 1$

$$(p + \epsilon)^2 = p^2 + 2\epsilon p + \epsilon^2 < p^2 + \epsilon(2p + 1).$$

Daraus ergibt sich die Bedingung

$$p^2 + \epsilon(2p + 1) < 3 \Leftrightarrow \epsilon < \frac{3 - p^2}{2p + 1}.$$

Wählen wir also $\epsilon \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \epsilon < \frac{3-p^2}{2p+1}$, so folgt für $r := p + \epsilon > p$ mit obiger Rechnung, dass $r^2 < 3$ und damit $r \in \alpha$. Somit ist auch Eigenschaft (A3) gezeigt.

(ii) Die Menge β ist kein Dedekindscher Schnitt, denn Eigenschaft (A3) ist verletzt. In der Tat ist zwar $1 \in \beta$, aber $r \notin \beta$ für alle $r > 1$.

(iii) Die Menge γ ist ebenfalls kein Dedekindscher Schnitt. Diesmal ist Eigenschaft (A2) verletzt: Es gilt $2 \in \gamma$, aber $-2 \notin \gamma$ obwohl $-2 < 2$. $\square$

Aufgabe 2. [jeweils 2 Punkte]
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche ist falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an (für einfaches Raten gibt es keinen Punkt)!

(i) Ist die Folge konvergent und existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $x_n < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt auch $\lim_{n\to\infty} x_n < C$.

Lösung: Falsch. Betrachte die Folge $x_n := 1 - \frac{1}{n}$. Es gilt $x_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

(ii) Wenn die Folge <u>nicht</u> gegen die reelle Zahl x konvergiert, dann existieren $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle natürliche Zahlen $n \geq N$ gilt $|x_n - x| \geq \epsilon$.

Lösung: Falsch. Betrachte die Folge $x_n := (-1)^n$. Diese konvergiert nicht gegen 1, aber es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $n \geq N$ (zum Beispiel $n := 2N$) mit

$$|x_n - 1| = 0 < \epsilon.$$

(iii) Wenn die Folge <u>nicht</u> konvergiert, dann existiert ein $\epsilon > 0$ derart, dass es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $m, n \geq N$ gibt mit $|x_m - x_n| \geq \epsilon$.

Lösung: Wahr. Wenn die Folge nicht konvergiert, ist sie auch keine Cauchy-Folge. Die gegebene Aussage ist aber genau die Negation der Aussage „$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge“.

(iv) Wenn die Folge beschränkt ist, dann besitzt sie einen Häufungspunkt.

Lösung: Wahr. Das ist der Satz von Bolzano-Weierstraß.

(v) Wenn die Folge einen Häufungspunkt besitzt, dann ist sie beschränkt.

Lösung: Falsch. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n := \begin{cases} n & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist unbeschränkt und besitzt den Häufungspunkt 0.

(vi) Wenn die Folge monoton ist und einen Häufungspunkt besitzt, dann ist sie konvergent.

Lösung: Wahr. Sei $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt. Angenommen, die Folge ist monoton wachsend. Dann ist die Folge nach oben durch x beschränkt, d.h. es gilt

$$x_n \leq x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. In der Tat: Angenommen, das wäre nicht so, also $x_N > x$ für ein $N \in \mathbb{N}$, so ist wegen Monotonie auch

$$x_n \geq x_N > x$$

für alle $n \geq N$, was ein Widerspruch dazu ist, dass x ein Häufungspunkt der Folge ist. Analog geht man vor, wenn die Folge monoton fallend ist. In beiden Fällen ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monotone und beschränkte Folgen sind nach Vorlesung konvergent.

Aufgabe 3. [jeweils 4 Punkte]

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}+7}{2n^2-n+1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Lösung. (a) Wir wenden das Quotientenkriterium an. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2(n+1))!(n!)^2} = \frac{(n!)^2(n+1)^2(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)^2}$$
$$= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}.$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte aus der Vorlesung folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{4} < 1,$$

also ist die Reihe absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium.

(b) Ziel ist, das Majorantenkriterium anzuwenden. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$3\sqrt{n}+7 \leq 7\sqrt{n}+7\sqrt{n} = 14\sqrt{n}$$

sowie

$$2n^2-n+1 \geq 2n^2-n^2 = n^2,$$

also zusammen

$$\frac{3\sqrt{n}+7}{2n^2-2n+1} \leq 14\frac{\sqrt{n}}{n^2} = 14\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ nach Vorlesung konvergiert, konvergiert also auch die angegebene Reihe absolut nach dem Majorantenkriterium.

(c) Wir geben zwei mögliche Lösungswege:

Möglichkeit 1: Wir formen zunächst die Summanden etwas um. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Also ist für jedes beliebige $N \in \mathbb{N}$ die N-te Partialsumme eine Teleskopsumme:

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1)-\ln(n)) = \ln(N+1)-\ln(1) = \ln(N+1).$$

Da $\lim_{N\to\infty} \ln(N+1) = \infty$, folgt bestimmte Divergenz der Reihe gegen ∞.

Möglichkeit 2: Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Daraus folgt insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Zudem gilt $1/n > 0$ sowie $\ln(1+1/n) > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit Übungsblatt 5, Aufgabe 3 folgt, dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

entweder beide konvergent oder beide divergent sind. Erstere ist aber die harmonische Reihe, welche bekanntermaßen divergent ist. $\square$

Aufgabe 4. [10 Punkte]

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ sei stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum annimmt, d.h. es gibt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung. Für $f = 0$ ist die Aussage trivial, also nehmen wir $f \neq 0$ an. Dann gibt es einen Punkt $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(\alpha) > 0$. Nach Annahme existiert eine reelle Zahl $M > 0$ mit der Eigenschaft, dass $f(x) < f(\alpha)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > M$.

Nun nimmt die stetige Funktion f nach einem Satz der Vorlesung auf dem abgeschlossenen Intervall $[-M, M]$ ihr Maximum an, d.h. es existiert ein $x_0 \in [-M, M]$ mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [-M, M]$. Es gilt aber für alle $x \notin [-M, M]$, dass

$$f(x) < f(\alpha) \leq f(x_0),$$

also hat f in x_0 ein globales Maximum. $\square$

Aufgabe 5. [10 Punkte]
Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist. Alle aufgestellten Behauptungen sind zu beweisen.

Hinweis: Sie können die Definition von Stetigkeit, aber auch eine äquivalente Charakterisierung aus der Vorlesung bzw. den Übungsblättern verwenden.

Lösung. f ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ als Verkettung stetiger Funktionen. Wir müssen also nur noch Stetigkeit in $x_0 = 0$ untersuchen. Gemäß Folgenkriterium ist f genau dann stetig im Punkt 0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0) = a.$$

Sei eine solche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Wir berechnen

$$f(x_n) = \frac{\sqrt{4+x_n^2}-2}{x_n^2} = \frac{4+x_n^2-4}{(\sqrt{4+x_n^2}+2)x_n^2} = \frac{1}{\sqrt{4+x_n^2}+2},$$

wobei wir die binomische Formel in der Form $a - b = (a^2 - b^2)/(a + b)$ verwendet haben. Aus der Stetigkeit der Wurzelfunktion, Eigenschaften von Grenzwerten aus der Vorlesung und der obigen Rechnung folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1}{4}$, also macht die Wahl $a = \frac{1}{4}$ die Funktion f in $x_0 = 0$ stetig. $\square$

Aufgabe 6. [2 + 4 + 4 Punkte]

(a) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.

(b) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f\colon\,]-2,\infty[\, \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x + \frac{1}{2}}{x+2}$$

eine Nullstelle hat.

(c) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $g(x_0) = x_0$.

Lösung. (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = 0$.

(b) f ist stetig als Quotient zweier Polynome (bemerke $x + 2 \neq 0$ für alle $x > -2$). Wir berechnen

$$f(-1) = \frac{(-1)^4 - 2 + \frac{1}{2}}{-1+2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} < 0$$

und

$$f(0) = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} > 0,$$

also existiert $c \in [-1, 0]$ mit $f(c) = 0$ nach dem Zwischenwertsatz.

(c) Nach Annahme gibt es $M > 0$ mit $|g(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere bildet g das Intervall $[-M, M]$ in das Intervall $[-M, M]$ ab.

Betrachte nun die Funktion

$$h\colon [-M, M] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - g(x).$$

Dann ist h stetig als Differenz stetiger Funktionen und es gilt

$$h(-M) = -M - g(-M) \leq -M - (-M) = 0 \quad \text{und} \quad h(M) = M - g(M) \geq M - M = 0,$$

also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-M, M]$ mit $h(x_0) = 0$ oder äquivalent $g(x_0) = x_0$. $\square$