Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzel

Wintersemester 2021/22
15.12.2021

Analysis einer Variablen

Probeklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: ❑ Bachelor ❑ Master

Version der Prüfungsordnung: ❑ 2015 ❑ 2011 ❑ Andere: ______

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ______

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ______

Bitte füllen Sie das Deckblatt aus und lesen Sie die Bearbeitungshinweise zu dieser Probeklausur auf der nächsten Seite gründlich durch, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.

Sie erhalten als Ergebnis der Probeklausur eine Punktzahl und eine Note. Die Note 5,0 bedeutet „nicht bestanden". Dieses Ergebnis dient nur zur Einschätzung Ihres Wissensstandes und hat **keinen Einfluss auf Ihre Prüfungsleistungen im Modul „Analysis einer Variablen"**. Es kann zudem sein, dass die Gesamtanzahl der Punkte und die vorausgesetzten Punkte für eine gewisse Note in der Abschlussklausur anders sind als in der Probeklausur.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
/12	/12	/12	/10	/10	/10	/66	

Hinweise für die Bearbeitung

- Die Bearbeitungszeit für diese Probeklausur beträgt 3 Stunden, von 16:00 bis 19:00 Uhr am 15.12.2021.
- Der Zeitraum von 19:00 bis 20:00 ist ausschließlich dafür gedacht, die Abgabe in die gewohnte pdf-Form zu bringen (wie bei den Übungsblättern) und hochzuladen. Dies bedeutet auch, dass **keine Ausnahmen bei zu spät eingegangenen Abgaben** gemacht werden. **Die Frist um 20:00 Uhr ist absolut strikt!**
- Sowohl handschriftliche als auch auf einem elektronischen Tablet erstellte Bearbeitungen sind erlaubt. Benutzen Sie bitte keinen Bleistift und schreiben Sie nicht in den Farben rot oder grün. **In jedem Fall schreiben Sie bitte leserlich**. Alles, was nicht klar erkennbar ist, wird nicht korrigiert.
- Das ausgefüllte Titelblatt dieser Probeklausur muss die erste Seite Ihrer Bearbeitung sein. Sie können sie ausdrucken, ausfüllen und einscannen, oder aber elektronisch ausfüllen. Die Seite mit Bearbeitungshinweisen sowie die Angabeblätter mit den Aufgaben brauchen nicht Teil Ihres Abgabefiles sein.
- **Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt Papier**. Mehrere Teilaufgaben zur gleichen Aufgabe dürfen auf der gleichen Seite stehen. **Markieren Sie auf jeder Seite gut sichtbar die Aufgabennummer**. Achten Sie auch darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben. Nichteinhalten dieser Regelungen verzögert den Korrekturprozess erheblich.
- Schreiben Sie bitte auf jedes Ihrer Blätter Ihren vollständigen Namen.
- Die Abgabe muss aus einem einzigen pdf-File mit dem Namen **„pruefung.pdf“** bestehen. Sie können Ihre Bearbeitung bei „Probeklausur“ unter „Übungen“ in Uni2work einreichen. Der Abgabeprozess ist identisch zu dem der Übungsblätter bis auf die Tatsache, dass für die Probeklausur **nur Einzelabgaben** erlaubt sind.
- Falls technische Probleme beim Hochladen der Bearbeitung in Uni2work auftreten, melden Sie sich bitte **rechtzeitig** bei Herrn Wetzel (wetzel@math.lmu.de).
- Als Hilfsmittel sind lediglich Papier und ein dokumentenechter Stift bzw. ein Tablet zum Schreiben zugelassen. Insbesondere sollten Sie die Probeklausur alleine und ohne Zuhilfenahme der Vorlesungsnotizen bearbeiten, um Feedback auf Ihren individuellen Wissensstand zu bekommen.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben dürfen Sie Ihnen bekannte Resultate aus der Vorlesung sowie der Übungsblätter benutzen.
- Bemühen Sie sich, präzise mathematisch zu argumentieren und zu beweisen. Es gibt Punktabzug unter anderem für: mangelnde Form, nicht zielführende Ausführungen, logische Fehler, fehlende Begründungen, lange unscharfe und unpräzise Prosatexte, zusammenhangslose Formeln ohne deutsche Sätze. **Eine bloße Aneinanderreihung von Formeln ist kein Beweis!**

Aufgabe 1. [2 + 10 Punkte]

(a) Definieren Sie den Begriff „Dedekindscher Schnitt" für eine Menge $\alpha \subset \mathbb{Q}$.

(b) Entscheiden Sie für folgende Mengen mit Beweis, ob sie Dedekindsche Schnitte sind:

(i) $\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 3 \text{ oder } q \leq 1\}$,

(ii) $\beta = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 1\}$,

(iii) $\gamma = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 3 \text{ oder } q > 1\}$.

Aufgabe 2. [jeweils 2 Punkte]

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche ist falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an (für einfaches Raten gibt es keinen Punkt)!

(a) Ist die Folge konvergent und existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $x_n < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt auch $\lim_{n\to\infty} x_n < C$.

(b) Wenn die Folge <u>nicht</u> gegen die reelle Zahl x konvergiert, dann existieren $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle natürliche Zahlen $n \geq N$ gilt $|x_n - x| \geq \epsilon$.

(c) Wenn die Folge <u>nicht</u> konvergiert, dann existiert ein $\epsilon > 0$ derart, dass es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $m, n \geq N$ gibt mit $|x_m - x_n| \geq \epsilon$.

(d) Wenn die Folge beschränkt ist, dann besitzt sie einen Häufungspunkt.

(e) Wenn die Folge einen Häufungspunkt besitzt, dann ist sie beschränkt.

(f) Wenn die Folge monoton ist und einen Häufungspunkt besitzt, dann ist sie konvergent.

Aufgabe 3. [jeweils 4 Punkte]

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}+7}{2n^2-n+1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Aufgabe 4. [10 Punkte]

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ sei stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum annimmt, d.h. es gibt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. [10 Punkte]

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist. Alle aufgestellten Behauptungen sind zu beweisen.

Hinweis: Sie können die Definition von Stetigkeit, aber auch eine äquivalente Charakterisierung aus der Vorlesung bzw. den Übungsblättern verwenden.

Aufgabe 6. [2 + 4 + 4 Punkte]

(a) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.

(b) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f\colon \left]-2,\infty\right[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x + \frac{1}{2}}{x+2}$$

eine Nullstelle hat.

(c) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $g(x_0) = x_0$.