**Karlsruher Institut für Technologie (KIT)** WS 2011/2012
**Institut für Analysis**
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math.techn. Rainer Mandel

# Lösungen 13.Übungsblatt

## Aufgabe 49 (K)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\,dt$

c) $\displaystyle\int_1^e x\log(x)\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^4(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^4 \arctan(\sqrt{\sqrt{x}-1})\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin(t)\,dt$

g) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin(2t)}{1-\sin(t)}\,dt$ h) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2+4t-t^2}}\,dt$

**Lösung:**

a)

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \big[\frac{1}{8}(1+2x)^4\big]_0^1 = \frac{1}{8}(3^4-1) = 10$$

b) Mit $t = g(s) = s^2$ für $s \in [1,2]$ folgt aus der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\,dt &= \int_{g(1)}^{g(2)} \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\,dt \\ &= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{g(s)}(1+\sqrt{g(s)})} g'(s)\,ds \\ &= 2\int_1^2 \frac{1}{1+s}\,ds \\ &= 2\big[\log(1+s)\big]_1^2 \\ &= 2\log(\frac{3}{2})\end{aligned}$$

c)

$$\int_1^e x\log(x)\,dx = \big[\frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{1}{4}x^2\big]_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

d) Es gilt

$$\int_0^\pi \sin^4(x)\,dx = \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx - \int_0^\pi \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx$$

$$\int_0^\pi \sin^4(x)\,dx = \big[-\sin^3(x)\cos(x)\big]_0^\pi + 3\int_0^\pi \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx = 3\int_0^\pi \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx$$

Mit

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \big[\tfrac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))\big]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

und (siehe oben)

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{8}$$

folgt

$$\int_0^\pi \sin^4(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi.$$

e) Mit den Substitutionen $x = g(s) = s^2$ für $s \in [1,2]$ und $s = h(t) = t^2 + 1$ für $t \in [0,1]$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x} - 1}\right)dx &= \int_1^2 \arctan(\sqrt{s-1})\cdot(2s)\,ds \\
&= \int_0^1 \arctan(t)\cdot(2(t^2+1))\cdot 2t\,dt \\
&= \int_0^1 \arctan(t)\cdot 4t(t^2+1)\,dt \\
&= \big[\arctan(t)\cdot(t^2+1)^2\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\cdot(t^2+1)^2\,dt \\
&= 4\arctan(1) - \int_0^1 (t^2+1)\,dt \\
&= \pi - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

f) Die Substitution $t = \sin(s)$ für $s \in [0, \pi/2]$ liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arcsin(t)\,dt &= \int_0^{\pi/2} s\cos(s)\,ds \\
&= \big[s\sin(s)\big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(s)\,ds \\
&= \frac{\pi}{2} - \big[-\cos(s)\big]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

g) Wir verwenden $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin(2t)}{1-\sin(t)}\,dt &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{1-\sin(t)}\,dt \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2(\sin(t)-1)\cos(t) + 2\cos(t)}{1-\sin(t)}\,dt \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (-2\cos(t) + \frac{2\cos(t)}{1-\sin(t)})\,dt \\
&= \big[-2\sin(t) - 2\log(1-\sin(t))\big]_{\pi/6}^{\pi/4} \\
&= \big(-2\cdot\frac{\sqrt{2}2}{)} - 2\log(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\big) - \big(-2\cdot\frac{1}{2} - 2\log(1-\frac{1}{2})\big) \\
&= 1 - \sqrt{2} - 2\log(2-\sqrt{2})
\end{aligned}$$

h) Mit $t = g(s) = 2 + \sqrt{6}s$ für $s \in [-\frac{2}{\sqrt{6}}, 0]$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2+4t-t^2}}\,dt &= \int_{g(-2/\sqrt{6})}^{g(0)} \frac{1}{\sqrt{-(t-2)^2+6}}\,dt \\
&= \int_{-2/\sqrt{6}}^{0} \frac{1}{\sqrt{-6s^2+6}} \cdot \sqrt{6}\,ds \\
&= \int_{-2/\sqrt{6}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \\
&= \arcsin(0) - \arcsin(-\frac{2}{\sqrt{6}}) \\
&= \arcsin(\frac{2}{\sqrt{6}})
\end{aligned}$$

**Aufgabe 50 (K)**

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+5x+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{1/s}}\,dx \quad (s \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$

**Lösung:**

a) Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int_{\sin(\varepsilon)}^{\sin(1)} \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \geq \int_{\sin(\varepsilon)}^{\sin(1)} \frac{1}{t}\,dt = \log(\sin(1)) - \log(\sin(\varepsilon)).$$

Wegen $\lim_{\varepsilon\to 0}\sin(\varepsilon) = 0$ existiert das uneigentliche Integral nicht.

b) Es gilt für $x \geq 1$

$$\frac{1}{x^2+5x+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

und

$$\lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{k\to\infty}\big[\arctan(x)\big]_1^k = \lim_{k\to\infty}(\arctan(k) - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}.$$

Aus dem Majorantenkriterium folgt die Konvergenz des uneigentlichen Integrals.

c) *1.Fall:* $s < 0$. Für $x \geq 1$ gilt $0 < x^s + x^{1/s} \leq 1 + 1 = 2$, also

$$\frac{1}{x^s + x^{1/s}} \geq \frac{1}{2} \qquad (x \geq 1)$$

Folglich divergiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,dx$ nach dem Minorantenkriterium, d.h. das uneigentliche Integral existiert nicht.

*2.Fall:* $s \in (0,1)$. Es gilt

$$0 < \frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leq x^{-s} \qquad (x \in (0,1]), \qquad 0 < \frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leq x^{-1/s} \qquad (x \in [1,\infty).$$

Ferner folgt nach kurzer Rechnung

$$\int_0^1 x^{-s}\,dx = \frac{1}{1-s}, \qquad \int_1^\infty x^{-1/s}\,dx = \frac{s}{1-s}.$$

Daher konvergiert das uneigentliche Integral nach dem Majorantenkriterium.

*3.Fall:* $s = 1$. Aus

$$\frac{1}{x^s+x^{1/s}} = \frac{1}{2x}$$

folgt die Divergenz des uneigentlichen Integrals.

*4.Fall:* $s > 1$. Es gilt

$$0 < \frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leq x^{-1/s} \qquad (x \in (0,1]), \qquad 0 < \frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leq x^{-s} \qquad (x \in [1,\infty).$$

Ferner folgt nach kurzer Rechnung

$$\int_0^1 x^{-1/s}\,dx = \frac{s}{s-1}, \qquad \int_1^\infty x^{-s}\,dx = \frac{1}{s-1}.$$

Daher existiert das uneigentliche Integral nach dem Majorantenkriterium.

**Aufgabe 51**

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} \quad \text{auf } \mathbb{R} \text{ und}$$
$$\text{b) } g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}} \quad \text{auf } (\frac{1}{2},1),(1,\infty)$$

*Hinweis: In a) substituieren Sie* $x = \sinh(y) - 1$ *und in b)* $2x = y^6 + 1$

**Lösung:**

Es folgt mit der Substitution $x = g(y) = \sinh(y) - 1$ und $y = h(s) = \log(s)$

$$\begin{aligned}
\int^z \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx &= \int^{g(\mathrm{Arsinh}(z+1))} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx \\
&= \int^{\mathrm{Arsinh}(z+1)} \frac{1}{g(y)\sqrt{g(y)^2+2g(y)+2}} \cdot g'(y)\,dy \\
&= \int^{\mathrm{Arsinh}(z+1)} \frac{1}{\sinh(y)-1+\sqrt{\sinh^2(y)+1}} \cdot \cosh(y)\,dy \\
&= \int^{\mathrm{Arsinh}(z+1)} \frac{1}{\sinh(y)-1+\cosh(y)} \cosh(y)\,dy \\
&= \int^{\mathrm{Arsinh}(z+1)} \frac{e^y+e^{-y}}{2(e^y-1)}\,dy \\
&= \int^{h(e^{\mathrm{Arsinh}(z+1)})} \frac{e^y+e^{-y}}{2(e^y-1)}\,dy \\
&= \int^{e^{\mathrm{Arsinh}(z+1)}} \frac{e^{h(s)}+e^{-h(s)}}{2(e^{h(s)}-1)} \cdot h'(s)\,ds \\
&= \int^{e^{\mathrm{Arsinh}(e+1)}} \frac{s+\frac{1}{s}}{2(s-1)} \cdot \frac{1}{s}\,ds \\
&= \int^{e^{\mathrm{Arsinh}(z+1)}} (\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s^2})\,ds \\
&= \log(e^{\mathrm{Arsinh}(z+1)} - 1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Arsinh}(z+1) + \frac{1}{2e^{\mathrm{Arsinh}(z+1)}} + const
\end{aligned}$$

**Aufgabe 52**

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

und berechnen Sie den Integralwert.

**Lösung:**

*Weg 1:* Sei $I_n(\beta) := \int_0^\beta x^n e^{-x}\, dx$. Dann gilt $I_0(\beta) = 1 - e^{-\beta}$ und für $n \geq 1$

$$I_n(\beta) = \left[x^n(-e^{-x})\right]_0^\beta + n \int_0^\beta x^{n-1} e^{-x}\, dx = -\beta^n e^{-\beta} + nI_{n-1}(\beta).$$

Per Induktion erhält man

$$I_n(\beta) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \beta^{n-k} e^{-\beta} + n!(1 - e^{-\beta})$$

Wegen $I_n(\beta) \to n!$ für $\beta \to \infty$ existiert das uneigentliche Integral für alle $n \in \mathbb{N}$.

*Weg 2:* Auf $[0, \infty)$ sind die Funktionen $g_n(x) = x^n e^{-x/2} = x^n e^{-x/2}$ $(n \in \mathbb{N})$ stetig positiv und erfüllen $\lim_{x\to\infty} g_n(x) = 0$. Also sind die Funktionen beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $C_n$ mit $g_n(x) \leq C_n$. Es folgt

$$x^n e^{-x} \leq C_n e^{-x/2}$$

und $h_n(x) = C_n e^{-x/2}$ ist eine Majorante, deren uneigentliches Integral $\int_0^\infty h_n(x)\, dx$ existiert. Also existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

nach dem Majorantenkriterium.

Zur Berechnung: Sei $J_n := \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$. Dann $J_0 = 1$ und

$$J_n = \lim_{k\to\infty} \int_0^k x^n e^{-x}\, dx = \lim_{k\to\infty} \Big( \big[ - x^n e^{-x}\big]_0^k + \int_0^k n x^{n-1} e^{-x}\, dx \Big) = nJ_{n-1}.$$

Induktion liefert $J_n = n!$.